解　題

1.　序文を読み直すことから始めよう．先ず, Cousin の第 1 問題と第 2 問題は『密接な関係にあるが，その性格は初めに思われたよりも著しく異なっている.』という説明があり, その内容として『Cousin 第 1 問題は先の論文で見たように，無限遠点を含まない単葉な正則域では常に解けるが, 第 2 問題に対して同じ結果は期待できない』ことが指摘されている．そしてこの論文の目標として『この論文で我々は，第 2 問題の本性を抽出しようと思う.』と書かれている．これだけを読むと, Cousin の第 1 問題が解決したから次は第 2 問題を解決しようとしているように見える.

2.　ところでこの二つの問題は別の意味でもその性格が著しく異なるのである.

岡先生の研究の主要な目標は Hartogs の逆問題であるが, それにたいして Cousin の第 1 問題は避けて通れない．しかし Cousin の第 2 問題はそうではない．だからそのことだけで考えると, この問題の研究はもっと後になされるべきものである．しかしここにもう一つ別な問題がある．それは有理凸状[1]ではない正則域が果たして存在するのかという問題である．実際, 1 変数の場合は全ての領域が有理凸状である．岡先生は,『このような問題を放置していてはとても先へは進めない』と言っておられた.

岡先生の遺稿の中に日本語の完成された論文

Sur les fonctions anaytiques de plusieurs variables. III–Exemples

が残されている．(岡潔先生遺稿集 第五集に収録, 以下これを日本語第 III 論文と呼ぶ.) この内容は公表された第 III 論文の 2 節 例．と第 IV 論文である．ここでこの論文の序文を紹介しよう.

> Introduction.　我々は単葉正則域を三つに区分して筒状域，有理函数に関して凸状なる領域及び一般の領域の三種類とした．前二報告は此の分類にもとづいてなされたものである．所で此の第三種類の領域が実在するか否かは全く疑問である．我々は何よりも先ず之を解決することを試みなければならない.
>
> 自分は此の問題に関連聯して　T.H.Gronwall による exemple を想起した．彼は二複素変数 x, y の空間に於ける筒状域 $0 < |x| < \infty,\ 0 < |y| < \infty$ において Cousin の第二問題が必ずしも解けないことをのべて居る．彼の推論は二複素変数の代数函数論にもとづいた複雑なものであるが, もし之を簡潔にすることによって, か様な現象の起こる理由を明らかにすることが出来たならば, 或いは夫れから出発して第三種類の領域の実例がえられるかも知れないと自分は考えた．此の予想はたやすく実現された.

[1] 有理函数に関する凸状域の増大列の極限．第 IV 論文参照

残念ながらこの論文には日付が書かれていない. しかしこれは第 II 論文に続いて書かれたものであろう. その後で, Cousin の第 2 問題の完全な解明がなされたため, それだけを先ず公表し, それとは性格の異なる部分が第 IV 論文として独立に書かれたのであろう.

そうではあるが, この日本語第 III 論文に書かれた問題の解決された時期はおそらくもっと早く, 1935 年の 10 月以前であろうと思われる. 何故なら, それが解決していなければ, 第 I 論文の構想は立てられないし, 残された資料によると, その年の 10 月 9 日の日付のあるレポート用紙に第 I 論文の下書きと思えるものがすでに書かれているからである.

なお, もっと後になされるべき研究がこの時期になされた理由として, 岡先生は『 Hartogs の逆問題が一向に解けないので, このようなことをして遊んでいたのだ』と言っておられた.

3. もう一度, 第 III 論文の序文に戻ろう. 続いて著者の出発点になったものとして, 実 3 次元空間の円筒の中に線分が配された例が書かれている. これは広島の或る公園でベンチに座って考えているとき, 当時の街路灯であったガス灯を見て気付いたのだという話を伺ったことがある. 円筒形の透明な覆いの中に線分状の光源があったのだろう. 岡先生は『これ一つで全て説明がつくと思った』というのであるが, 複素多変数では最低でも実 4 次元の空間である. 夫れまでに問題の在り処は追い詰められていたであろうから, 3 次元と 4 次元の差は問題ではなかったのだろう.

上に述べたように, 日本語第 III 論文の反例は第 III 論文の第 2 節に書かれているものと同じであるが, それが反例になっていることの証明は異なっている. それを紹介しておこう.

複素 2 変数 $x,\ y$ の空間で閉双円環領域, (Γ, Γ')

$$\Gamma\ :\ r_1 \leq |x| \leq r_2, \qquad \Gamma'\ :\ r_1' \leq |y| \leq r_2'$$

を考え, $f(x, y)$ を (Γ, Γ') における正則函数として, 方程式

$$f(x, y) = 0$$

で定義される解析面を S とする. 簡単のため, Γ の全ての点 x' にたいして, $f(x', y)$ は恒等的には零にならないと仮定する. そして円環 Γ 内に円 $C : |x| = r_0\ (r_1 < r_0 < r_2)$ を描き, y 平面の円 $|y| < r_1'$ を (C') とする. ただし, $\Lambda : |x| = r_0,\ |y| = r_1'$ とするとき, S と Λ の交わりは孤立点のみであるように r_0 を選んでおく. このとき,

点 x' が円周 C を正の向きに一周したとき, 方程式 $f(x', y) = 0$ の根が閉円環 Γ' から円 (C') に出る回数を N とし, 逆に此の円から此の閉円環に入る回数を P とすれば $N = P$ である.

この命題があれば, 第 III 論文第 2 節の反例の証明は直ちにできるであろう. (上の命題の証明は遺稿集を見て頂きたい.)

4. 容易に分かるように, 上記の命題は, S と Λ の位相幾何学的な交点数が零であることを意味している. (証明はこの方が容易である.)

Cousin の第 2 問題については K. Stein の位相幾何学的な研究がある. [2] その最初の論文の二つの主定理を紹介しよう.

> 定理 1. 複素 n 変数 $z_1, \ldots, z_n$ の空間上の単葉 (または有限多葉) で有限な正則域 B^{2n} における Cousin 第 2 分布 V が少なくとも一つ解 $F(z_1, \ldots, z_n)$ を持つなら, V の特性数 (大雑把に言えば, V の定める零面と B^{2n} 内の実 2 次元の閉曲面との位相幾何学的な交点数) はすべて零である.
>
> 定理 2. 複素 n 変数 $z_1, \ldots, z_n$ の空間上の単葉 (または有限多葉) で有限な正則域 B^{2n} における Cousin 第 2 分布 V にたいする特性数がすべて零なら, B^{2n} の完全内部にある任意の部分領域において解となる函数が存在する.

なお第 2 の論文に, 定理 2 の条件の下では B^{2n} における解が存在するとは限らないことを示す例が挙げられている.

5. 第 IV 論文に書かれている, 有理凸状ではない正則域の例は, 双円環領域から, そこにおける解を持たない Cousin 第 2 分布の零面を除いたものである. それなら, 一般に, 解を持たないような Cousin の第 2 分布が存在するような正則域からその零面を除いた領域は有理凸状でないと言えるのであろうか.

閉解析多面体 Δ で考えるとし, $(\mathfrak{z})$ をそこにおける解を持たない Cousin の第 2 分布, σ をその零面とする. そうすると K. Stein の結果から, Δ 内に σ との交点数が零でないような実 2 次元の閉曲面 τ が存在する. このときもし σ のみで極を持ち, 不定点は持たない有理型函数が Δ に存在するなら, Δ から σ を除いた領域は有理凸状ではない. 実際, σ 以外でその有理型函数を有理函数で幾らでも近似できるとすれば, 十分近似された有理函数の分母の零面と τ の交点数は零にならなくなって, 矛盾である.

岡潔先生遺稿集 第二集に

多変数解析函数に就いて XII — Cousin の第二問題の拡張

という日本語の完成された論文が収録されている. この論文の内容は, 零が, 与えられた零を含むような正則函数を求めることであるが, その 1 節に次のような問題が書かれている. 上記の記号のもとで,

[2]K.Stein, Topologische Bedingungen für die Existenz analytischen Funktionen komplexer Veränderlichen zu vor gegebenen Nullstelleflächen. Math. Annalen, 117 (1941).
Analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem. Math. Annalen, 123 (1951)

問題 2—Δ の近傍における正則函数を, σ の近傍の各点において $(\mathfrak{z})$ を零とする様に求めること.

すなわち, Cousin 第二問題で, 余分な零を持ってもかまわないが, その余分な零は元々与えられた零と交わっていないような正則函数を求めよというのである. もしこの問題が解ければ, σ だけで極を持つ Cousin 第 1 分布を Δ に与えることができるから, 上のような有理型函数が存在して, Δ は有理凸状ではないことが分かる. ところが, この問題にたいしては次のように書かれているだけである.

『Δ を外的正則凸状とするとき, この問題が常にとけるか, それとも反例があるかを決定することは, 色々な点から私の興味を唆る研究題目です.』

この『色々な点』に上記の問題も含まれているのだろうか. 残念ながら, この事について岡先生からは何も伺っていない. さらに岡先生の遺稿の中にこの問題 2 を研究された思える痕跡は見つかっていない.