解　題

1.　この第 V 論文では A. Weil の積分表示を, 任意の正則域で成り立つように, 修正する問題が扱われている.

Cauchy の積分表示は, 多変数の場合, 筒状域, すなわち各座標平面の領域の直積領域においてなら, 一変数の場合と同様の積分表示が得られる. しかしそれは局所的な表示でしかない. 他方, Cartan–Thullen により, 任意の正則域は解析多面体によって内部から近似される事が分かっている. それで解析多面体における積分表示を確立したのが A.Weil の積分表示である. それは 1932 年に予報され, 1935 年に完全な論文として公表されたが, その論文では解析多面体を定義する正則函数に要請されている条件が, 一般な正則函数で満たされるかどうかが分からず, そのためこの公式は一般な正則域における積分表示とは言えなかった.[1] そのため, Weil の条件を少し緩めた条件がこの論文で提起されたのである.

2.　この論文は大きく言って二つの命題から成っている. その一つは任意の正則域において, 正則函数はその領域の任意の完全内部で, そこでは一価正則な代数函数の或る分枝によっていくらでも近似できるという命題であり, 他の一つは代数函数は岡の条件を満たし, その条件の下でも Weil の積分公式は成り立つと言う命題である. この前者の命題は第 II 論文の定理 I の補足と書かれている.

この論文に就いて岡先生は『ふと気が付いて, 早速二階へ上がって調べてみたら, 出来ていた.』と言っておられた. たいして苦労はしていないと言うのであるが, それは他の研究と比べてと言う事であろう. しかしそのような経緯で上記の二つの発見が同時に成されたとは考え難い. 代数函数による近似の問題については, この問題とは別に, 任意の正則函数が必ずしも有理函数で近似できないことが確かめられた直後に考えられ, それが第 II 論文の定理 I の応用で解けることを既に知っておられたのかもしれない. そうだとしてもなお, Weil の条件は岡の条件にまで緩められることと, 代数函数なら岡の条件を満たすことの二つが同時に解決されなければならない. 残念ながら『ふと気が付いた』ことの内容までは聞いていない.

3.　ところで, 後になって, 任意の正則域 (有限単葉) で任意の正則函数が Weil の条件を満たすことが H. Hefer[2] によって証明された. それを紹介しよう.

複素 n 変数 z_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ の空間において, 原点を含む領域 $\mathfrak{D}$ と $\mathfrak{D}$ における正則函数 $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ を考える. このとき, もし或る整数

[1] Weil の二つの論文の間に 3 年もの空白があることについて, 岡先生は, その間その条件が一般に満たされるかどうかを考えていたのであろうと言っておられた.

[2] H. Hefer, Zur Funktionnentheorie mehrerer Veränderlichen. Über eine Zerlegung analytischer Funktionen und die Weilsche Integraldarstellung. Math. Annalen, 120 276-278 (1950).

r $(0 < r \leq n)$ にたいして,

$$F(0, \ldots, 0, z_{r+1}, \ldots, z_n) \equiv 0$$

なら, 等式

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{j=1}^{r} z_j \Phi_j(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

が成り立つ. ここで Φ_j $(j = 1, \ldots, r)$ は $\mathfrak{D}$ における正則函数である.

容易に分かるように, 座標系の一次変換を考えれば, Weil の条件はこの命題に含まれる.

証明は r に関する帰納法である. 先ずこの命題は $r = 1$ では成り立つ. それで今この命題は, r' $(1 < r' < r \leq n)$ では成り立つと仮定して r のときを証明する.

$\mathfrak{D}$ の $z_1 = 0$ による切り口を $z_2, \ldots, z_n$ 空間の領域と考えて $\mathfrak{D}_0$ と表す. $\mathfrak{D}_0$ は正則域であるから, そこにおける正則函数 $f(z_2, \ldots, z_n) = F(0, z_2, \ldots, z_n)$ は帰納法の仮定により,

$$f(z_2, \ldots, z_n) = \sum_{j=2}^{r} z_j \varphi_j(z_2, \ldots, z_n)$$

と表される. φ_j $(j = 2, \ldots, r)$ は $\mathfrak{D}_0$ における正則函数である. ここで, 各 φ_j $(j = 2, \ldots, r)$ にたいし, $\mathfrak{D}$ における正則函数 Φ_j $(j = 2, \ldots, n)$ で, 条件

$$\Phi_j(0, z_2, \ldots, z_n) = \varphi_j(z_2, \ldots, z_n) \qquad (j = 2, \ldots, n)$$

を満たすものを求める. $\mathfrak{D}$ は正則域であるから, これは Cousin の第 1 問題を解くことで得られる. そうすると函数

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) - \sum_{j=2}^{r} z_j \Phi_j(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

は $z_1 = 0$ のとき恒等的に零となる. したがって所期の等式

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{j=1}^{r} z_j \Phi_j(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

が得られる.

4. H. Hefer の定理によって岡の条件は要らなくなった. ここで興味が在るのは, ある問題が解けないとき, それをそのまま無理に解こうとしないで, 他に解決を求めるような柔軟さである. そのような仕方は第 II 論文もそうであるし, 後の第 VIII 論文にも見られる. これは岡先生の意識的になされる研究法の一つなのであろう.

なお, 単葉領域の場合, 任意の正則函数がその領域の任意の完全内部で代数函数の分枝によっていくらでも近似できるという命題は多変数函数論における主要な定理の一つであると思われる. この事は不分岐な場合, 多葉域でも成り立つであろう.

5. この論文では Weil の論文の主要な命題をそのまま引用し, その部分の証明は書かず, それを修正した命題を書いて, その修正された部分だけを証明するという面白い書き方がなされている. それで参考までに Weil の論文の日本語訳を付けておく.