解　題

I. 箱庭式展望

1．始めに.　“岡先生の数学” における第 2 主題 — 第 2 融合法 — は日本学士院の Proceeding に予報され，第 VI 論文において詳しく展開された．これによって第 I 論文の初頭に掲げられた三つの問題 — Cousin の問題, 展開の問題, Hartogs の逆問題 — は, 単葉有界な領域にたいしては, すべて解決されている.[1] それで改めて 1935 年の初頭に身を置き, そこからもう一度第 I 論文〜第 VI 論文を展望してみよう.

岡先生は Behnke–Thullen の著書によって,

≪ 自分の開拓すべき土地の現状が箱庭式にはっきりと展望でき, 特に三つの中心的な問題が未解決のまま残されていることの意義が明白にわかったので, この連峰をこえる第一着手に目標をしぼった.≫[2]

と書いておられる. いつか先生は,「一冊の本をちゃんと読めば, その内容の全体が掌の上に乗っているように思える」とも言っておられたので, うっかりするとこの文章も, Behnke–Thullen の著書に書かれている通りの数学的自然が箱庭式に展望されたように受け取られるが, 多分そうではない. 何故なら, 岡先生は別の場所で次のように書いておられるのである. 少し長いがそのまま引用する.

≪ 家でよく遊んだものには箱庭作りがあった. 私の家は峠の上だったから井戸を掘ってもなかなか水が出ず, そのため深い林から水を引いて飲料水に使っていた. 竹の樋を松などで作ったまくら木に差し込んであったが, 水が洩れてまくら木の下に自然に水流ができていた. そのおかげで箱庭が作りやすかったのである. 山もはげ山が多く, 小さな枝ぶりの木ばかりだったので, それを心でひいてきては植えていた. 私はこれがとても好きだったらしい. おもしろい枝ぶりの木があると覚えておいて, これをあそこに植えようというふうに頭の中で箱庭をたえず作り変える. それが何より好きだった. 木を見ても箱庭のどこに植えられるべき木だろうとして見ているのだが, この天性は, 私の今の数学の研究法と本質的に同じもので, 心の中に数学的世界を創るということにまで通じている. してみると, やはり人の天性は随分小さい時からできるのだなと思わざるを得ない.≫[3]

この文章からすると, 前の文章は Behnke–Thullen の著書に描かれている様々な数学的自然の中から気に入った『物』や『事』を選びだし，それらを

[1] 1942 年に書かれた日本語の論文『多変数函数論に関する研究 第一報告 (岡潔先生遺稿集 第一集収録)』には第 I 〜第 VI 論文にたいして, 「之は言わば瀬踏みの意味でありましたから, 有限でない領域や単葉でない領域の入って来ることを避け, 又其の或るものについては二変数の場合のみについて述べました.」と書かれている.

[2] 日本の心 (講談社文庫) 春宵十話 発見の鋭い喜び. 27 頁

[3] 前掲の書 義務教育私話 277 頁

組み合わせて, これから自分が創造しようとしている数学的世界を広く想定したという意味になる. そうだとして, そのとき, 第 I 論文〜第 VI 論文がどのように展望されていたのかをここで想像してみようというのである.

2. 正則域. 岡先生の主目標は Hartogs の逆問題, すなわち

≪ 擬凸状領域にはそれを自然存在域とする正則函数が存在するか ?≫

という問題であった. ところで 1 変数の場合, 或る与えられた領域を正則域に持つ正則函数を作る問題は容易に解決される. 実際, その領域の境界の中で稠密であるような, 可算個の点 a_j $(j=1,2,\ldots)$ と, 十分早く零に収束する正の数の列 ε_j $(j=1,2,\ldots)$ を取れば

$$f(z)=\sum_j \frac{\varepsilon_j}{z-a_j}$$

が求める函数になる.[4] 多変数の場合は有理型函数の極が孤立点でないため, 同じようには作れない. しかし 1 変数の場合を丁寧に見れば多変数の場合についても, それを作る道筋を設定することはできる.

多変数 (z) の空間に或る領域 D が与えられており, さらに D を完全内部に含み, 次のような条件を満たす領域 D^* が存在すると仮定する. すなわち

≪ D の任意の境界点 p に対し, D^* における有理型函数 $g_p((z))$ で, p を極とし, D では正則なものが存在する.≫

そうすると D を正則域とする函数は 1 変数の場合と同様に作れる. 実際, 可算個の点 p_j $(j=1,2,\ldots)$ と, 正の数の列 ε_j $(j=1,2,\ldots)$ を 1 変数のときと同様に取って

$$f((z))=\sum_j \varepsilon_j g_{p_j}((z))$$

とすればよい. 1 変数の場合, この D^* に相当するものは全平面であり, $g_p((z))$ に相当するものは, p の座標を a とするとき, $\frac{1}{z-a}$ なのである.

上記の D^* に対する条件は次の 2 条件に置き換えることもできる. すなわち

1^o. D の任意の境界点 p に対し, p の近傍 δ_p と, δ_p における正則函数 $f_p(z)$ で, 解析面 $s_p : f_p(z)=0$ は p を通り, D には入り込まず, その境界は D^* の外にあるようなものが存在する.

2^o. D^* では任意の Cousin 第一問題が解ける.

実際, このとき, 前の条件における有理型函数 $g_p(z)$ は容易に作れる. Hartogs の逆問題と Cousin 第一問題はこのようにして結びつく.

[4]いつか岡先生は「1 変数では当たり前なことが, 多変数では手頃な問題になる」と言われたことがある.

3．Levi の条件.　多変数の空間における領域が正則域であるための条件を初めて研究したのは E. E. Levi であった.

≪ 複素 2 変数 $x = x_1 + ix_2, y = y_1 + iy_2$ の空間の或る領域 G に与えられた十分滑らかな実数値函数 $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ にたいして

$$\begin{aligned}
L(\varphi) = &\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\right] \\
&+ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right] \\
&-2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right) \\
&-2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)
\end{aligned}$$

と置く．このとき, もし超曲面 $\Sigma : \varphi = 0$ 上の点 p において $L(\varphi) > 0$ となるなら, p の或る近傍 δ_p 内に p を通り, p 以外は $\varphi > 0$ なる部分に在る解析面 $s_p : f_p(z) = 0$ が存在する.≫

これが E. E. Levi の結果である．このことから Σ の全ての点で $L(\varphi) > 0$ となるなら, Σ の任意の点を中心とする十分小さい超球内の $\varphi < 0$ なる部分 D にたいして, 前節の一つ目の条件を満たす領域 D^* が作れる．したがってそれは正則域となる．この事実を踏まえて, Behnke–Thullen の著書[5]には

≪ 十分滑らかな閉超曲面で囲まれた領域 $D : \varphi < 0$ は, もしその境界上の全ての点で $L(\varphi) > 0$ となるなら, D は正則域か?≫

と言う問題が提起されているのである．この問題は前節の二つ目の条件を満たすような領域 D^* が作れれば肯定的に解決される．上記のような領域 D を強擬凸状と言う.[6]

4．Cousin 第一問題.　函数論における問題はよく次の三つの段階を経て解かれる．すなわち

(1) 局所解 — 領域の各点の十分小さな近傍に於ける解.
(2) 不完全解 — 領域の任意の完全内部に於ける解.
(3) 完全解 — 領域全体に於ける解.

このことを意識しながら, 複素変数 (z) の空間の領域 D における Cousin 第 1 問題の解法を眺め直して見よう.

(1). 局所解は, 問題の性質上, 始めから与えられている.

[5] 54 頁．この頁は岡先生の論文に何度も引用されている.
[6] このような領域は局所的に正則域であるということで, 第 VI 論文ではそれを Cartan の意味の擬凸状領域と書かれている.

(2). 不完全解を求めるためには, 局所的に得られている有理型函数に適当な正則函数を加えて, それらを一つの有理型函数に融合すればよい. [7]

一般に共通部分 Δ_0 を持つ二つの領域 Δ_1, Δ_2 があって, Δ_0 に正則函数 $f_0((z))$ が与えられているとき, $f_0((z)) = f_1((z)) - f_2((z))$ となるような 各 Δ_1, Δ_2 における正則函数 $f_1((z)), f_2((z))$ を, Δ_0 で落差 $f_0((z))$ を持つ函数と言うことにする.[8]

局所解 $g_1((z)), g_2((z))$ を持つ隣り合った近傍 Δ_1, Δ_2 の共通部分 $\Delta_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2$ では, それらの函数の差 $f_0((z)) = g_1((z)) - g_2((z))$ は正則になるから, Δ_0 で $f_0((z))$ を落差に持つ Δ_1, Δ_2 での正則函数 $f_1((z)), f_2((z))$ を求めて

$$G((z)) = \begin{cases} g_1((z)) - f_1((z)) & (z) \in D_1 \\ g_2((z)) - f_2((z)) & (z) \in D_2 \end{cases}$$

と置けば $g_1((z))$ と $g_2((z))$ は融合される. そしてこの操作を有限回繰り返せば不完全解が得られる.

(3). 完全解を求めるには, 与えられた領域 D にたいして, 領域の列

$$D_1,\ D_2,\ \ldots,\quad (D_j \Subset D_{j+1}) \quad \lim_{j\to\infty} D_j = D$$

を考え, 各 D_j で不完全解 $G_j((z))$ を求めて, その函数列を収束するように作り替えればよい.

一般に, 一方が他方に含まれる二つの領域 $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ $(\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2,)$ があるとき, $\mathfrak{D}_1$ における任意の正則函数が $\mathfrak{D}_2$ で正則な函数の級数に展開できるとき, それらをルンゲペアと呼ぶことにする.[9]

もし上記の列で, 全ての D_j と D (より一般には D_j と D_{j+1}) がルンゲペアであれば, 各 D_j における不完全解を $G_j((z))$ とするとき, $G_j((z)) - G_{j+1}((z))$ は D_j で正則であるから, それに十分近い D_{j+1} で正則な函数 $H_j((z))$ を求めて $G_{j+1}((z)) + H_{j+1}((z))$ を考えると, これは D_{j+1} における不完全解で, D_j では $G_j((z))$ に十分近いものとなる. この操作を $j = 1$ から順次施すことによって有理型函数の列 $G_j((z))$ $(j = 1, 2, \ldots)$ は収束するものに作り替えられる.

上記の一般論は筒状域の場合, 次のように実現される. 筒状域における正則函数は解析的なパラメータを持つ 1 変数の正則函数と考えられるので, 1 変数で考えればよい.

[7] この場合, 考える領域は単純な境界を持ち, 考える函数は常に境界までこめて正則であると考える.
[8] これは岡先生の命名である. このような命名によって非常に考えやすくなる.
[9] これは岡先生の命名ではない.

(2) について．複素変数 z の平面における或る閉領域 Δ が, 線分 l によって二つの部分 Δ_1, Δ_2 に分かれているとし, l の近傍に正則函数 $f_0(z)$ が与えられているとする．このとき積分

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

によって Δ_1, Δ_2 に定義される函数をそれぞれ $f_1(z), f_2(z)$ とすれば, それらは共に $l \cap \Delta$ まで解析接続され, そこで落差 $f_0(z)$ を持つ.

この積分を Cousin 積分と言う.[10]

(3) について．D を複素変数 z の平面の領域とし, ε_j $(j = 1, 2, \ldots)$ を零に収束する正の数の列として, D における境界距離が ε_j より大となる点の全体を D_j とする．そうすると D_j に描かれた任意の単純閉曲線で囲まれた部分は, もし夫れが D に含まれているなら D_j にも含まれている．そうすると D_j における任意の正則函数は D で正則な有理函数の級数に展開される．したがって D_j と D はルンゲペアになる.

これが Cousin のアイデアであった.

5. 正則凸状域. 1934 年当時, 多変数函数論の最大の成果は Cartan–Thullen の論文であった．そこでは或る函数族 $\mathfrak{K}$ に関する凸状という概念が提起されており, $\mathfrak{K}$ を定めるごとにその函数族によって特徴付けされる領域が得られる．特に任意の正則域 D は D で正則な函数全体の族に関して凸状になり, したがって D は D で正則な函数による解析多面体の増大列の極限であることが示されている.

ところで, 多変数の場合, 一般には不完全解を求めるのも, 任意の部分領域というわけにはいかない．それで与えられた領域 D にたいして, 領域の列

$$D_1,\ D_2,\ \ldots,\quad (D_j \Subset D_{j+1})\quad \lim_{j\to\infty} D_j = D$$

で, 各 D_j では不完全解が求まるようなものを求めなければならない．正則域の場合, その問題を Cartan–Thullen の解析多面体が解決しているのである.

それで, 正則域において Cousin 第 1 問題を解こうとすれば,

1^o. 解析多面体における不完全解を求めること.
2^o. 解析多面体で正則な函数を D で正則な函数の級数に展開すること.

の二つが問題となる.

ところで, ある種の解析多面体では正則函数にたいする Weil の積分表示が成り立つ.

[10] 与えられた正則函数を落差に持つ正則函数の組などはそう簡単には求まらないであろう．それを Cauchy 積分の変形で求めたのが Cousin の功績である.

複素 2 変数 $x=x_1+ix_2, y=y_1+iy_2$ の空間における領域 D において, D で正則な函数 $X_j(x,y)$ $(j=1,\ldots,\nu)$ によって解析多面体

$$\Delta \;:\; |X_j(x,y)| \le 1 \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

が与えられているとし, 各函数 $X_j(x,y)$ にたいして, $(x,y)\in D$, $(x_0,y_0)\in D$ における正則函数 $P_j(x,y;x_0,y_0)$, $Q_j(x,y;x_0,y_0)$ で,

$$X_j(x,y)-X_j(x_0,y_0)=(x-x_0)P_j+(y-y_0)Q_j$$

となるもが存在すると仮定する. これを Weil の条件と言うことにする.

このとき, Δ における正則函数 $f(x_0,y_0)$ は

$$f(x_0,y_0)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{(i,j)}\int_{\sigma_{ij}}\frac{(P_iQ_j-Q_iP_j)f(x,y)dxdy}{[X_i(x,y)-X_i(x_0,y_0)][X_j(x,y)-X_j(x_0,y_0)]}$$

と表される. ここで σ_{ij} は $|X_i|=|X_j|=1$ で定まる実 2 次元の曲面を表し, 和は i,j の全ての組み合わせにたいして取る. この積分表示から $f(x,y)$ は $X_j(x,y)$ $(j=1,\ldots,\nu)$ の多項式の級数に展開できることがわかる.

さらに, この積分表示は Cousin 型に使うことができる. すなわち上記の Δ が 超平面 $L: x_1=0$ によって二つの部分 Δ_1, Δ_2 に分けられているとし, $\sigma_j: |X_j|=1,\ x_1=0$ と置く. このとき, $L\cap\Delta$ における正則函数 $f(x,y)$ にたいして

$$\frac{-1}{4\pi^2}\sum_j\int_{\sigma_j}\frac{Q_j(x,y,x_0,y_0)f(x,y)}{(x-x_0)[X_j(x,y)-X_j(x_0,y_0)]}dxdy$$

によって Δ_1, Δ_2 に定義される函数をそれぞれ $f_1(x_0,y_0), f_2(x_0,y_0)$ とすれば, これらは共に $L\cap\Delta$ まで解析接続され, そこで落差 $f(x_0,y_0)$ を持つ.[11]

このことから, Weil の条件を満たすような解析多面体においては Cousin 第 1 問題も解ける.

この積分を Weil–Cousin 積分と言うことにし, Cousin 積分または Weil–Cousin 積分のみによる有理型函数の融合を第 1 融合法と言うことにしよう.

6. Hartogs の逆問題. Hartogs の逆問題もやはり 4 節で述べた三つの段階に分けて考える.

(1). 先ず 3 節で述べたように, 局所解は E. E. Levi によって解決されている.

(2). 次に不完全解であるが, これは隣り合った正則域を融合する問題である. すなわち

[11] 第 VI 論文の訳注 1 を参照.

≪ 或る領域 D と二つの超平面 $L_1 : x_1 = a_1$, $L_2 : x_1 = a_2$ $(a_2 < a_1)$ を考え, D の L_1 より左の部分および L_2 より右の部分をそれぞれ D_1 および D_2 と表し, それらは各々正則域であると仮定する. このとき D も正則域か?≫

この問題は先に述べたように D で Cousin 第一問題を解くことに帰着されるが, 正則域では Cousin 第一問題は解けるとすると, D_1, D_2 における解 $g_1(x,y), g_2(x,y)$ の, $D_3 = D_1 \cap D_2$ における差 $f_0(x,y) = g_1(x,y) - g_2(x,y)$ は正則になるので, D_3 で $f_0(x,y)$ を落差に持つ, D_1, D_2 での正則函数を求める問題に帰着する.

(3). 最後に, 完全解にたいしては次の二つの問題が生じる. すなわち,

1^o. 任意の擬凸状領域にたいして, その完全内部に, それに十分近い強擬凸状領域を作ること.
2^o. 正則域の増大列の極限はまた正則域か?

この 1^o は, 正則域の場合, Cartan–Thullen の定理によって解決されていた問題に相当するものであるが, 擬凸状領域の場合は E. E. Levi の条件を満たすような閉曲面を境界とする領域でそれを内部から近似することが問題となる. それについて, 岡先生は「この問題が解決していないようではとても先へ進む気にはならない.」と言っておられた.[12]

この問題は次のように解決された. 先ず φ を上半連続な実数値函数とするとき, もしそれが任意の複素直線上で劣調和函数になるならそれを擬凸状函数[13]と言う. そうすると, 領域 D が擬凸状なら, D における境界距離函数[14]を $d(x,y)$ とするとき $-\log d(x,y)$ は擬凸状函数になる. この命題は Hartogs 半径の性質より来るが, 岡先生も言っておられたように, そこから少し飛躍がある.

次に, $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ を領域 D における十分滑らかな函数とするとき, それが擬凸状函数になるための必要十分条件は

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \geq 0,$$
$$V(\varphi) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1}\right)^2 \geq 0$$

となる. このことから, この条件を満たす函数 φ がさらに $V(\varphi) > 0$ となるなら, 超曲面 $\varphi = constant$ は E. E. Levi の条件を満たすことが分かる.

[12] 実際, 多葉な領域の研究に進まれたときも, この問題が最初に解決されている. 多変数解析函数に関する研究 第一報告 (岡潔先生遺稿集 第一集収録)
[13] 現代は多重劣調和函数と呼ばれている.
[14] D の各点における値を, その点から D の境界までの距離とする函数.

最後に, 任意の擬凸状函数はごくわずかな変形で $V(\varphi) > 0$ となる滑らかな擬凸状函数になる.[15]

これで問題 1^o は確かに解決されている.

問題 2^o は, 後に Behnke–Stein によって証明されたように, その本性は展開の問題である.

大体以上が Behnke–Thullen の著書を読み終えられたときの『箱庭式』展望であったと想像される. 実際, Weil–Cousin 積分と擬凸状函数の事以外は, すでに知られていたことを組み合わせて, 問題を整理しただけである. そしてここから「この連峰をこえる第一着手に目標をしぼった」研究が始まった. その第一着手は『上空移行の原理』として捕らえられ, それによって Cousin の第一問題と展開の問題は非常に短期間に解決された. それで, 残されている問題は正則域の融合問題だけとなったのである. しかし, この問題はなかなか解決せず, その解決には数年を要することになった.

II. 夢寐も忘れぬ.

7. 解法の秘訣. 岡先生の数学には『箱庭作り』の外にもう一つ別の秘訣がある. 先生は「問題に出会えば, 先ずそれを一点にまで追い詰める. そしてその後は『夢寐も忘れぬ君王の, いまは御こと畏みて』[16]という風にやるのだ」と言われた. 先ず, 問題の周辺で気がつくことはすべて調べあげる. そのときそれがその問題の解決に役立つかどうか等は一切考えないのである. その事について先生は『森羅万象は功に非ず』という言葉を引用された.[17] そうしていると問題は自ずから一点に収束する. ここまでが準備段階である. 後半の部分の意味は, 四六時中その一点に意を注ぎ続けるのだという意味である. 『心的内容お次第に明瞭に現われるるが注意にて』という辨栄上人の言葉を引用された. この時の要点は「その問題が解決するまでその一点から目を逸らさないことである」と言われる.

このことを念頭にして, 以下, Hartogs の逆問題が解決する過程を想像してみよう. 第 VI 論文はそれが出来ていった順序とは逆の順序に書かれている. すなわち, 最初に研究されたのは, III. 補足問題 に書かれている擬凸状函数に関する部分で, これはおそらく Behnke–Thullen の本を読みながらなされたものだと思う. (岡先生の教科書の読み方は「何をしょうとしているかがわかれば, その部分は自分でやってしまう」という風なのであった.) そして次になされたのが II. 中間結果 に書かれている部分であり, これは上に述べた, 準備段階である.

それで正則域の融合問題をもっと追い詰めてみよう.

[15] 擬凸状函数が導入された経緯については, 第 VI 論文の III に書かれている.
[16] 土井晩翠, 星は落つ秋風五丈原.
[17] 私はこの言葉の出所を知らない.

8. 問題の焦点. 問題は, 第 VI 論文の第 6 節の記号で, D_3 に与えられた正則函数を落差に持つ, D_1 および D_2 で正則な函数を求めることであった. その手掛かりは Cousin 積分か Weil–Cousin 積分しかない.「種の無いところから草や木が生えることはない」と言うのが岡先生の言葉である.

D_3 は正則域であるから Cartan–Thullen の定理によりその完全内部に, D_3 に十分近い解析多面体

$$\Delta \ : \ |X_j(x,y)| < 1 \qquad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

が作れる. それで, 超平面 $L : x_1 = a \ (a_1 < a < a_2)$ を考え, $L \cap \Delta$ における正則函数 $f(x,y)$ による Weil–Cousin 積分

$$I(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma_j} \psi_j(x, y; x_0, y_0) f(x, y) dx dy$$

$$\psi_j(x, y; x_0, y_0) = \frac{Q_j(x, y; x_0, y_0)}{(x - x_0)(X_j(x, y) - X_j(x_0, y_0))} \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

を考える.[18] この積分によって Δ の L の両側に定義される函数 $f_1(x_0, y_0)$ と $f_2(x_0, y_0)$ は共に $L \cap \Delta$ まで解析接続され, そこで落差 $f(x_0, y_0)$ を持っているのであった.

$\psi_j(x, y; x_0, y_0)$ は $D_3 \times D_3$ における有理型函数なのであるから, このようにして得られた函数は Δ 内の L の両側にしか存在しない. それで問題はその落差を保存しながら, それらの函数を D 内の L の両側にまで延長することである.

ところで, この延長は近似的には求まるのである. そのためには例えば Weil–Cousin 積分の核 $\psi_j(x, y; x_0, y_0)$ の定義域を $D_3 \times D_1$ および $D_3 \times D_2$ にまで近似的に延長すればよい. それは次のようにしてなされる.

1). Weil–Cousin 積分では, Δ を定義する函数 X_j で $\sigma_j : |X_j| = 1, x_1 = a$ が空集合になるものは関係がない. それで Δ は D_3 の境界と L の交わりの十分小さい近傍だけを D_3 から除いたものと考えればよい. (D_3 が強擬凸状領域なら, これはいつでもできるが, 第 VI 論文ではそのことを使わず, そうできるように D_1 および D_2 を少し変形している.)

2). 次に, 積分は σ_j 上で取るのだから, (x, y) は σ_j の或る近傍 V_j の点と考えればよい. したがって Δ を上記のように取り, V_j を十分小さく取れば, $\psi_j(x, y; x_0, y_0)$ は (x_0, y_0) が L_1 または L_2 の近傍にあるときは正則である. すなわち核 $\psi_j(x, y; x_0, y_0)$ の極は L_1 および L_1 には届いていない. そうすると, Cousin 第 1 問題を解くことで, $V_j \times D_1$ における有理型函数で, $(x_0, y_0) \in D_3$ では ψ_j と同じ極を持ち, 他では正則なもの, および $V_j \times D_2$ における有理型函数で, 同様のものが作れる.

[18] この時期には Weil–Cousin 積分は一般な正則域で使えるように修正されていた.

3). 他方, D_3 と D_1, したがって $V_j \times D_3$ と $V_j \times D_1$ はルンゲペアなのである. だから Cousin 問題の完全解を求めるきと同様の仕方で, 絶対値が十分小さい $V_j \times D_3$ での正則函数 A_j を ψ_j に加えて, その存在域を $V_j \times D_1$ にまで拡げることができる. D_2 についても同様の函数 B_j を作ればよい.

説明すれば長くなるが, 当時の岡先生にとってこれらは通い慣れた道である. それで問題はそのような近似解を, 落差が丁度与えられた函数になるように収束さすことだけだといえる.

これが 1 点にまで追い詰められた問題だったのではなかろうか. そうだとして, ここからが大変なのである. 岡先生は「このような問題を解けと言うのは, 水の上を歩いて渡れと言われているようなものだと思った.」と言っておられた. 台風の来そうな日に, 鳴門海峡を船で乗り切ろうした』[19]というのはこの時期のことである.

9. 積分方程式. 問題は次のように解決される.

前節の函数 A_j および B_j を使って Weil–Cousin の積分の代わりに積分:

$$J_1(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma_j} (\psi_j + A_j) f(x, y) dx dy,$$

$$J_2(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma_j} (\psi_j + B_j) f(x, y) dx dy,$$

を考える. そうすると $J_1(x_0, y_0)$ は Δ_1 で, $J_2(x_0, y_0)$ は Δ_2 で正則になり, それらは $L \cap \Delta$ にまで解析接続され, さらにそこで関係式

$$J_1(x_0, y_0) - J_2(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) - \frac{-1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma_j} (A_j - B_j) f(x, y) dx dy$$

を満たす. ここで

$\ll$ $J_1 - J_2$ が与えられた函数 $f(x_0, y_0)$ になるようにするためには, 右辺の函数 $f(x, y)$ をそうなるものに変えればよいのである.$\gg$

それはとりもなおさず, 上式の左辺を既知函数 $f(x_0, y_0)$ とし, 右辺の $f(x, y)$ を未知函数 $\varphi(x, y)$ として得られる第 2 種 Fredholm の積分方程式を解くことである. そしてそれは, $|A_j - B_j|$ が十分小さければ, 正則な解を持つというのが積分方程式論の初等的な命題である.

このような, 積分方程式を使う有理型函数の融合を第 2 融合法と言うことにする.[20]

Goursat の Cours d'analyse の第 3 巻の 323 頁からは積分方程式論が始まる. 岡先生はそれを『何か手段がないかと思ってこの本を繰っていて, 見つけた.』と言っておられた.

[19] 日本の心春宵十話他の型の二発見. 32 頁

[20] これも岡先生による命名である.

Proceedings に掲載された予報にはこの部分だけしか書かれていない. しかし, Behnke–Thullen の著書をちゃんと読んで上記のような箱庭ができておれば, 少なくともその 54 頁 に提起されている問題だけは, これで解決したことを理解できるはずなのである.

10. 終わりに. 『岡先生の数学』は始めに解くべき問題があるのである. そして問題が決まれば徒手空拳でその解決に向かわれる. 手段はその場で探すのである.

そのことに付いては,『荒野を開くには荒野の力を以てすべし』という言葉を引用された.

さらに「最初から重い荷物を担いでいては, 未知の世界に入り込むことなど不可能だと」と言われる. しかも未知の世界の探究では, どのような技術が必要なのかはやってみなければ分からない.

勿論, 問題の解決には, 色々な分野の技術が必要になる. しかしそのような場合でも, 岡先生は「実際に使えるのは, その分野の高度な技術ではなく, その分野の基本的な概念だけである.」と言われる. その意味からも, 高度な技術の習得は意味がないと言われるのである.

なにはともあれ, 先に技術を習得しておいて, それを使って解けるような問題を探すという遣り方は『岡先生の数学』ではない.

岡先生は, Hartogs の逆問題が一点にまで追い詰められていた時期に, Goursat の積分方程式論の最初の頁を見て, 与えられた函数と未知函数の位置が逆転していることを見られた途端に問題の解決を確信されたと思える. 第 VI 論文は, 『岡先生の数学』の典型である. そして第 VI 論文は Hartogs の逆問題が解決したことの喜びが行間にあふれているような書き方がなされていると私には感じられる.