解　題

はじめに.　この論文は, 第 I 論文に提示された岡先生の数学の第 1 主題である上空移行原理の完結編である. 第 VII 論文はそのための準備であるから, 合わせて『不定域イデアル論』とも名付けるべき壮麗な世界が創造された. その本体は岡先生の心の中に生い育ったものであり, 論文はその不完全な投影に過ぎないが, その影を手掛かりにして少しでもその本体に近づきたいと思う.

1. 第 VIII 論文の序文　改めて序文を読み直して見よう. 丁寧に書かれてはいるが, 多くの大切なことが脚注に書かれており, 本文は非常に簡潔に書かれているので, 読み落とさない様にしなければならない. 先ず最初に岡先生の数学全体のモチーフについて：

『第 I 論文以来の主問題は：Cousin の問題, 展開の問題および凸性の問題である.』

と表明されており, その具体的な内容が脚注に詳しく書かれている. 特に正則凸状の概念は多葉性を考慮して書かれており, 厳密には新しい定義であるが, 岡先生は始めからこのように考えておられたのであろう. 続いて序文には,

『第 I–VI 論文において, これらの問題は, 一口に言って, 単葉有限な領域に対してはすべて肯定的に解けることを見た. さらに著者は, 発表はしなかったが, これらの結果は少なくとも分岐点を含まない有限領域迄は成り立つことを確かめた』

と報告されており, その後者に付いては脚注に

『1943 年にその詳細を日本語で高木貞治教授に書き送った』

と書かれている[1]. 続いて, 今後の問題として,

『それで今度は, 適当な無限遠点を導入すること, または分岐点を許すことが問題となる. ところで, 思い起こせば, 我々は内分岐領域については殆ど何も知らない. 例えば局所的な展開は果たして可能なのか? それで (donc)[2], 先ず後者の問題を取り上げる.』

と書かれている. これが第 VII-VIII 論文のモチーフである. 次に, この研究の具体的な研究目標として,

『さて現在の研究に対する基本的なアイデアは第 I 論文の定理 II によって象徴的に示される. 我々は, 問題 (E) が解けていなかったので, それを第 II 論文の定理 I の形で使った. しかし, 内分岐領域に対しては, 元の形が不可欠である. それが表題の基本補題であり, 第 VII 論文を準備したのはこれを確立するためであった.』

[1] 岡潔先生遺稿集第一集に収録. このホームページにも公開されている.

[2] 私には, この (donc) を読み落としてひどく叱られた苦い思い出がある. 1956 年の秋のことである.

と書かれている. ここで, 第 I 論文の定理 II, いわゆる『上空移行』と第 II 論文の定理 I を具体的に思い出しておこう.

$\ll$ 複素 n 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の空間に或る領域 $\mathfrak{D}$ を考え, $\mathfrak{D}$ における正則函数 $\varphi_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ によって閉解析多面体 Δ $(\Delta \Subset \mathfrak{D})$:

$$|x_i| \leq r_i, \quad |\varphi_j(x)| \leq \rho_j \qquad (i=1,\ldots,n,\, j=1,\ldots,m)$$

を考える. そして新たな m 個の複素変数 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ を導入して, (x,y) 空間に閉多円筒 Γ :

$$|x_i| \leq r_i, \ |y_j| \leq \rho_j \qquad (i=1,\ldots,n,\, j=1,\ldots,m)$$

と, Γ における解析集合 Σ :

$$y_j = \varphi_j(x) \quad (j=1,2,\ldots,m)$$

を描く.$\gg$

このとき,

$\ll$ Δ における正則函数 $f(x)$ に対して, Γ における正則函数 $F(x,y)$ を

$$f(x) = F(x_1,\ldots,x_n;\varphi_1(x),\ldots,\varphi_m(x))$$

となるように求めること.$\gg$

これが第 I 論文の問題 I であり, φ_j が多項式の場合にそれが可能であることを示したのが定理 II であった. ところで, この証明法は Cousin の第 1 問題と組み合わせた, m に関する 2 重帰納法であり, φ_j が一般な正則函数の場合には使えない. それで 第 II 論文では, 先ず Σ のいくら近くにも, 多項式による閉解析多面体 Δ^* が存在することが示される. これが定理 I である. 次いで Δ における問題を (y に関しては定数であるような函数と考えて) Δ^* における問題とみなして, 当初の問題を解決したのであった.

ところで, $\mathfrak{D}$ が内分岐領域のときでも, そこに異なる点で異なる函数要素を持つ正則函数がありさえすれば, 上記の問題 1 そのものは全く同じ形で考えられる. しかし, Σ の近傍に多項式による閉解析多面体 Δ^* が存在しても, 第 II 論文でなされたように Δ における問題を Δ^* における問題とみなすことは出来ない. それで先ず上空移行の問題を解決するための, 全く別な方法が考えられた. それが第 VII 論文の問題 (C_2) である. これも再録しよう.

$\ll$ 空間 (x) における或る閉集合 E の近傍で有限個の正則函数の組 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ を考え, さらに E の任意の点 P において, P を中心とする多円筒 (γ) と (γ) における正則函数 $\varphi(x)$ を考える. そして共通部分 (δ) を持つすべての隣接した多円筒の対 $[(\gamma),(\gamma')]$ に対し, 対応する函数 $\varphi(x), \varphi'(x)$ の間に,

(δ) のすべての点で, $\varphi(x) \equiv \varphi'(x) \mod(F)$ なる関係があるとする. このとき, E の近傍における正則函数 $\Phi(x)$ を, E のすべての点 P で $\Phi(x) \equiv \varphi(x) \mod (F)$ となるように求めること.≫

この問題が閉多円筒で解ければ第 I 論文の問題 I は次のようにして解ける.

≪ 先ず函数系として $F_j(x,y) = y_j - \phi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ を考える. そして Γ の各点 P に対応させる近傍 (γ) と, 函数 $\varphi(x,y)$ を

1. P が Σ の点のときは (γ) を十分小さく取って, $\varphi(x,y) = f(x)$ とし,
2. P が Σ の点でないときは $\gamma \cap \Sigma = \emptyset$ として $\varphi(x,y) = 1$ とする.

そうすると, 容易に分かるように, この分布は問題 (C_2) の条件を満たす. そしてその解 Φ が問題 I の解になる.≫

問題 (C_2) が問題 (C_1) と共に提起されたのは 1943 年の日本語の論文「多変数解析函数に就いて, VII. 正則函数の合同に関する二つの補助定理」である. そのときの主目標は実は内分岐域ではなく, 第 VI 論文の第二融合法と上空移行を結びつけ, Weil の積分を Cauchy 積分に置き換えることであった. 問題が設定されるということは, それだけで大きな成果である.

序文に戻ろう. 続いて

『不分岐 (有限) 領域の場合, 基本補題を確立するためには, 問題 (C_2) と (E) を解き, さらに幾何学的不定域イデアルの局所擬底を見つけさえすればよい. その問題 (C_2) と (E) は第 VII 論文で解いたし, 最近 H. Cartan が, この最後の問題も解決した. しかし, 分岐点を許すと, 解析集合上の正則函数が必ずしも空間の正則函数の制限とはみなせないと言う新たな困難に出会う. そこから結局, ある意味で幾何学的イデアルを含む, より広いイデアルに関する問題 (J) の一種が生じる.』

と書かれている. 実際分岐点を内点としない領域に対しては, 上記の問題 I の解法で $F_j = y_j - \varphi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ とした部分の F_j を Σ に付随する幾何学的イデアルの Γ における擬底とすれば, 各点に対応させる近傍と函数を同様に与えて, 問題は解決する. (問題 (E) は局所擬底から大域的擬底を求めるのに使われる.) しかし, 分岐点を含む場合は, 上記の新たな困難が出てくるのである.

この後, 序文は本論文の構成を簡単に紹介して終わっている.

3. 不定域イデアル 岡先生は『漫然と新しければよいと云うぐらいでやっておれば, 解ける問題も解けない』と言っておられた. さらに先生は『道具は必要最小限のものしか使わない』と言われる. そのためか, 残された資料を拝見すると, 岡先生は不定域イデアルの一般論を研究し始めるのには非常に慎重であったように感じられる. 問題 (C_1) および (C_2) は, 特別な場合ではあるが, 1943 年の上記の論文 VII で, 不定域イデアルの概念を使わずに解かれ

ている. 先生が不定域イデアルの研究に本格的に取り組まれたのは 1945 年頃からである.

しかし内分岐領域にたいして上空移行を実現するためには, 不定域イデアルは不可欠であり, 強力な道具であった. 不定域イデアルに関する主問題は, その局所擬底を求めることであるが, 定域のときと異なり, 一般な不定域イデアルに対してそれが存在するとは限らない. したがってそれは, 個々の不定域イデアルについての問題となる. 第 VIII 論文の付録に不定域イデアルが局所擬底を持つための必要十分条件が書かれており, 非常に興味深いものではあるが, 判定条件として使えるようなものではなく, 先生も『読む必要はない』と言っておられた.

ところで, 擬底を持つ不定域イデアルから何らかの手段で誘導されたものを除き, 第 VII~VIII 論文に現われる擬底を持つ不定域イデアルは L イデアルと幾何学的イデアルおよびその拡張である Z イデアルの三つだけである. その内, 特に基礎的なのは L イデアルであって, 他の二つはそれに帰着する. ただし上空移行に直接使われるのは後の二つである. なお, 任意の定まった解析集合に対する W 函数の全体も不定域イデアルを作り, 擬底を持つのである[3]. 証明はやはり L イデアルに帰着する. この事を使えば第 VIII 論文の難解な部分が少し緩和される.

3. 幾何学的不定域イデアル. 幾何学的不定域イデアルの局所擬底について, 第 VII 論文に凡そ次のように書かれている.

『幾何学的不定域イデアルは分岐点を許すような領域を研究するとき, 不可欠になる. この種のイデアルに対する擬底の存在の証明には, この論文の結果以外に, 内分岐領域についての或る概念が必要になる. だからそれは次の論文で扱う.』

この予告通り, これは第 VIII 論文で証明された. しかしこの定理は第 VII 論文と同時に公表された Cartan の論文で, 第 VII 論文の結果を使って証明されている. そのため第 VIII 論文ではこれを Cartan の定理と書かれている. そのためか, この証明は少し不親切な書き方になっている.

ところで, この証明の最初の手掛かりは次のようなものであったらしい.

≪ 複素 n 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の空間の原点に $n-2$ 次元の既約な解析集合 Σ が与えられており, Σ は, 空間の解析面 $S: F(x)=0$ 上に乗っているとする. そして S を内分岐領域 $\mathfrak{D}$ と考え, Σ は $\mathfrak{D}$ 上の一つの正則函数によって $g(P)=0$ と表されているとする. (勿論それらは 1 位の零と考えている.) さらに S は原点で (H) 性を持つとする.

このとき原点における正則函数 $f(x)$ が Σ で恒等的に零になるとすると, それの S への制限 $f(P)$ を $\mathfrak{D}$ 上で考えれば, $f(P)/g(P)$ は $\mathfrak{D}$ 上の正則函数になる. それを $h(P)$ とし, 空間の正則函数 $G(x)$ および $H(x)$ の S への

[3] 西野利雄著 多変数函数論 233 頁

制限が $g(P)$ および $h(P)$ であるとして, 函数 $f(x)-G(x)H(x)$ を考えると, これは S 上で恒等的に零となる. したがって $f(x)$ は

$$f(x)=K(x)F(x)+H(x)G(x)$$

と書ける. (岡先生のお話.)≫

このことから, "内分岐域上の解析面がその上の一個の正則函数の零として表せるか" とか, "S 上の正則函数が空間の正則函数の制限とみなせるか" とかいう問題が, 幾何学的不定域イデアルの擬底を求める問題と深く関わっていることが分かる. 先に引用した文中に『内分岐域についての或る概念が必要になる.』と書かれているのはこの事であろう. しかし多くの事が明かになった現在, この証明も難解なものでは無くなった.[4]

4. (W) **函数.** (H) 性の問題に関しては, Weierstrass による次の定理がある.

≪ $F(x,y)$ が最高次係数 1 の y の多項式の場合, 解析面 $S:F(x,y)=0$ 上の正則函数 $f(P)$ は, $\Psi(x,y)$ を y の或る多項式として, S 上で

$$f(P)=\frac{\Psi(x,y)}{\partial F(x,y)/\partial y}$$

と表される.≫

この定理から (W) 函数の概念が出てくる. ((W) は Weierstrass の W であろう.) この事を使うと, Σ が, このような F と, 解析集合 $F=0$ 上で 1 位の零を持つ或る正則函数 G によって $F=0,\ G=0$ と表されているとき, Σ に付随する幾何学的イデアルと, 1 次同次方程式

$$A\frac{\partial F}{\partial y}+BF+CG=0$$

に関するイデアル $L=\{(A,\delta)\}$ とが同等となる. ここまで来ると, 岡先生の "Cartan の定理" の証明は自然なものに見えてくる.

ところで, (W) 函数はこのように幾何学的イデアルの擬底の存在を証明する中で暗々裏に使われたが, 上空移行を考える上ではもっと表立った役割を果たすはずである. そのため, 第 VIII 論文では好都合な (W) 函数を大域的に求めるため, Cartan の三環定理や Hilbert–Rückert の零点定理を使う等, 多くのページが割かれている. これらは岡先生の不定域イデアル論が如何に豊かな内容を包含していたかを感じさせる.

5. 高木先生への手紙. 1945–1947 年当時の岡先生の研究の進展状況は高木先生宛の手紙によって詳しく知ることが出来る. このような資料が残され

[4] 前掲書 227 頁

ているのは非常に珍しいと思えるので, 少し長くなるが, その中の第 VIII 論文に関係する部分を引用しよう.

先ず 1947 年 4 月 18 日の手紙.

『御話し申し上げたいのは私の多変数函数の研究についてでございますが, 一昨年度の研究, 農耕しながら十冊ノートを書いたと申し上げましたあれですが, 其処のところに遺漏がございまして, 二つの問題 (Prob E 及び Prob H) が, 本当は残って居るのであった, と云うことが分かりました. それについて簡単に御報告申しあげます.

之等の問題は何れも, 内分岐した有限領域に関する局所的問題 でありまして, 先ず Prob E ですが, 此の E は *Existence* からとってつけたのでして, 次の通りです.

Prob E — (局所的に) Riemann 面を抽象的に与えて, それを生む正則函数を求めること.

次に Prob H ですが, 此の H は *Holomorphie* のそれです. 先ず性質 H をご説明します.

(単葉有限) 空間 (x) に固有集合体 Σ を考へ, Σ 上の一定点を M_0, M_0 の近傍の Σ の任意の点を M で表します. 此の時, 若し任意の正則函数 $\varphi(M)$ が, 空間 (x) に於ける正則函数 $\Phi(x)$ の跡, 即ち

$$\Phi(x) = \varphi(M) \qquad sur\ \Sigma$$

と看做しうるならば, Σ は M_0 に於いて性質 H を持つ と申します.

(単葉有限) 空間 (x) に Riemann 面 (R) を考へ, (R) 上の一定点を P_0 とします. 高次元 (単葉有限) 空間 (x, y) に固有集合体 Σ を, (R) が Σ の空間 (x) 上への射影となる様に対応せしめ, P_0 に応じる点を M_0 とします. 此の時, 若しか様な Σ の中に, M_0 の近傍の各点において性質 H をもつものがあるならば, (R) は P_0 の近傍において性質 H を持つ と申しましょう.

Riemann 面 (R) を考へ, (R) 上の一定点を P_0 とした時, 若し (R) のある一つの倍域 (Überlagerungsbreich) (R') が其の上の, P_0 の上にある一つの点の近傍に於いて性質 H をもつならば, (R) は P_0 の近傍に於いて性質 H' を持つ と云います. そうしますと, 次の問題が Prob H であります :

Prob H — 任意の Riemann 面を (R) とし其の上の任意の点を P_0 とする時, (R) は P_0 の近傍に於いて, 若しそれを生む正則函数を持つならば, 必然性質 H' を持つか.』

前年の高木先生宛の手紙では, 第 VII 論文に書かれた部分の研究が完成したことが報告されているのであるが, 先生はその手紙で第 VIII 論文の部分も含めて完成したと報告したつもりでおられたらしい. それでこのような手紙が書かれた.

それはともかく, この報告からは, “性質 H” の概念 (先生は, 口頭ではアッシュ性と言っておられた) が確立されていく過程が伺えて興味深い. (定義が確定するのは常に研究の終了時点である.) なお, ここで考えられている倍域は, 後に Z イデアルの擬底の存在を証明するときに使われている.

Prob E については, 高木先生宛ての日付の書かれていない手紙の原稿 (実際に郵送されたかどうかは不明.) の中で言及されているが, 論文には書かれていない. この問題が解決されたのは

H. Grauert und R. Remmert, Komplexe Räume, *Math. Annalen*, 1958.

においてである.

次に 1947 年 5 月 10 日の手紙.

『今, Lemme I によって第一基礎的補助定理を表しましょう. この定理は Prob (H) が (それもそれだけならば好都合に) 解けなければ無条件には成立しません. しかし条件つきでならば既に成立して居ます. これを Lemme I$'$ とします. それで問題は, この Lemme I$'$ と組み合わせると Lemme I と同じ働きをするやうな Théorème (H$'$) を求めることでしょう. この問題を Prob (H$'$) とします. Prob (H) は, 本質的には Lemme I$'$ を Lemme I 又はそれと等価値なものに変える問題だったと云へませう. Prob (H) をか様に解し, これを Prob (H$'$), Prob (H$''$) $\cdots$ と次第に崩し拡げて, その行方を追うて見ました. そうしますと, 結局イデアルに関するある一つの問題に落ちつきました.』

この手紙で Lemme I$'$ の内容は説明されていないが, 第 VIII 論文の基本補題の前半部分, すなわち, “W 函数を掛れば空間の函数の制限とみなせる” ことだと思う. そうだとして, その後に書かれている部分を説明しよう.

Lemme I, すなわち上空移行は, W 函数を掛けずに空間の函数の制限とみなす事であった. しかし, 思い返せば, その目的は, Cousin 問題を解くために落差を持つ函数を求めることや, 展開の問題を解くためである. それなら

“W 函数を掛けて空間の函数を求め, それを使って落差を持つ函数や近似函数を求め, それを領域に戻してから, 掛けた W 函数で割ればよい.”

そう考えると, その落差を持つ函数や近似函数を, 領域に戻したとき, 元の W 函数で割れるように求める事が問題となる.

もう一度第 I 論文の問題 I の状勢を, $\mathfrak{D}$ は内分岐域 (R) だとして, 描いてみよう.

≪ 有限空間 (x) 上の多葉域 (R) の上に

$$x_i \in A_i, \quad f_j(P) \in B_j, \quad P \in (R) \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$$

形の多面体領域 Δ に対応して空間 (x, y) の閉筒状域 (A, B) と

$$\Sigma \ : \ y_j = f_j(P) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

のような解析集合 Σ を考える.≫

この状勢で, 閉筒状域 (A,B) における Σ に関する (W) 函数 U で, Σ 上恒等的に零ではないものが存在するとし, U の Σ への制限の Δ への像を u_0 とする. さらに U で定まる Z イデアル (I) の (A,B) における擬底 Φ_i $(i=1,2,\dots,\mu)$ が求まると仮定する. そうすると, 定義から Φ_i の Σ への制限は Δ 上で u_0 で割れる.

ここで $A_i^0 \subset A_i$, $B_j^0 \subset B_j$ であるような任意の筒状域 (A^0,B^0) と $(A^0,B^0)\cap\Sigma$ に対応する Δ の部分領域 Δ^0 を考えると, Δ^0 における任意の正則函数 f に対し, (A^0,B^0) における正則函数 F を, その Σ への制限が fu_0 となるように求められる. ところがこの F は (A^0,B^0) の各点で (I) に属しているから (A^0,B^0) で大域的に

$$F = A_1\Phi_1 + A_2\Phi_2 \cdots + A_\mu\Phi_\mu$$

と表される. ここで例えば F の近似函数を求めるのではなく, A_j の近似函数 A_j' を求めて $F' = \sum A_j'\Phi_j$ と置けば, F' の Σ への制限の Δ への像は u_0 で割れて, それが f の近似函数になる.

上記の手紙には, 具体的には書かれていないが, このような解決法の報告であろうと思われる. それでこの手紙の終わりの方に

「要するに Prob (H) は解消してしまいました.」

と書かれている. 第 VIII 論文の後半はこの手紙で報告されている内容の具体的な記述である.

岡先生の不定域イデアル論は結局これだけしか書かれなかった. しかし先生の心の中の本体はもっともっと豊かなものであったような気がする.

6. 残照. 第 I 論文における上空移行原理は単純明解であった. 例えば閉多面体領域 Δ :

$$|x_i| \le r_i,\quad |\varphi_j(x)| \le \rho_j \qquad (i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m)$$

における正則函数は x_i と φ_j の多項式によって展開される. 第 VIII 論文における函数の近似はそのような単純なものではない. しかし非常に強力な道具であって, その近似を使って, 内分岐多葉領域上の解析多面体に対応する解析集合 Σ を, 第二種の分岐面や重複面が存在しないようにすることが容易にできる.

≪例えば, Σ の点 P が重複点であるとし, P を中心とする 多円筒 (A^0,B^0) を十分小さく取って, $\Sigma\cap(A^0,B^0)$ が幾つかの P で既約な解析集合 σ_ν に分解したとすると, 各 σ_ν で値が ν であるような正則函数を Δ の正則函数で近似し, それを f_j に付け加えた函数系によって Σ' を描がけばよい.≫

そればかりではない. 実はこの基本補題によって岡先生の最初の目標である Lemme I, すなわち "W 函数を掛けずに空間の函数の制限とみなす" 問題が解決しているのである. 実際,

$\ll$ 上記の記号の下で, Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ の Σ 上への制限の (R) への像を u_0 で割った商を φ_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ とし, 新たに μ 個の複素変数 $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ を導入して, 空間 (x, y, z) の適当な閉筒状域 (A, B, C) に解析集合

$$\Sigma^* \ : \ y_j = f_j(P), z_i = \varphi_i(P) \quad (j = 1, \ldots, m; i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

を描くなら, 容易に分かるように, Σ^* 上で

$$f = A_1 z_1 + A_2 z_2 + \cdots + A_\mu z_\mu$$

となっている.$\gg$

最後に Puiseux 級数の一般化について述べておく.

$\ll$ Δ を閉多円筒 $\Gamma : |x_i| \leq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ 上の相対境界を持たない ν $(\nu < \infty)$ 葉の内分岐領域とし, そこには異なる点で異なる函数要素を持つ正則函数 $\eta(P)$ が存在するとすると仮定する. そして, M を $|\eta| < M$ なる正の数として, 多円筒 $\Gamma^* = [\Gamma, |y| \leq M]$ に解析面 $\Sigma : y = \eta(P)$ $(P \in \Delta)$ を描く. このとき (x) 上の $\eta(P)$ の分枝を $\eta_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ として

$$F(x, y) = \prod [y - \eta_j(x)]$$

と置くと, $U = \partial F / \partial y$ が Σ に対する (W) 函数となる. それで U によって定まる Z イデアルの Γ^* における擬底を Φ_k $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$ とし, それを Σ 上で U で割った商を φ_k $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$ とする.

このとき, 閉多円筒 $\Gamma : |x_i| \leq r$ $(r < 1; i = 1, \ldots, n)$ 上の Δ の部分 Δ_r における任意の正則函数は, "x_i $(i = 1, \ldots, n)$ と η の同次多項式を係数とする φ_k $(k = 1, \ldots, \mu)$ の一次式" を項とする級数に展開される.$\gg$

残念ながら, この展開では, φ_k の意味が明確ではないだけではなく, Puiseux 級数のような展開の一意性も成り立たない. しかし現在のところ, 内分岐域での, これ以上精密な局所的展開は得られていないと思う.