SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES

X Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes

Par Kiyoshi OKA

(Reçu le 20 sept. 1962)

Introduction. Dans une suite de Mémoires[1], nous avons traité jusqu'ici un groupe de problèmes qui avaient été posés d'une manière précise dans le bel Ouvrage de H. Behnke–P. Thullen. Mais il en reste encore des problèmes non résolus, comme nous l'avons fait remarquer dans le Mémoire précédant, dont quelques-uns nous semblent des plus difficiles. Nous avons en vue de les traiter successivement.

Sans entrer dans le détail technique dans cette Introduction, je voudrais faire allusion au sentiment de saisons, propre au peuple japonais depuis le temps lointain, pour expliquer ce que j'éprouve en achevant ce Mémoire.

Il y a une tendance vers l'abstraction dans le progrès des sciences mathématiques d'aujourd'hui. Même dans le champs de notre recherche, les théorèmes sont devenus de plus en plus généraux et quelques-uns sont sortis de l'espace des variables complexes. Je sentis que c'était hiver. J'ai attendu longtemps le retour du printemps et voulu faire quelques études qui le feraient sentir. Le Mémoire actuel n'en est que le premier résultat. (Voir le théorème au No. 6.)

1. Nous nous restreindrons pour la simplicité, dans l'espace à deux variables complexes x, y. Considérons un domaine univalent fini D, et dans D, une surface caractéristique Σ. Soit M_0 un point de Σ. Supposons que, au voisinage de M_0, on puisse représenter le point $M(x, y)$ de Σ par

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

dont $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont les fonctions holomorphes de t pour $|t| < 1$. Il s'agit de l'aire de Σ au voisinage de M.

Exprimons les parties réelles et imaginaires de x, y, t, comme ce qui suit

$$x = u_1 + iu_2, \quad y = u_3 + iu_4, \quad t = t_1 + it_2,$$

[1]Voir : Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Iwanami, Tokyo, 1961.

i étant l'unité imaginaire. Dans l'espace cartésien à 4 dimensions réelles (u_1, u_2, u_3, u_4), l'aire de l'élément de la surface Σ sera donnée par

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, dt_1 dt_2,$$

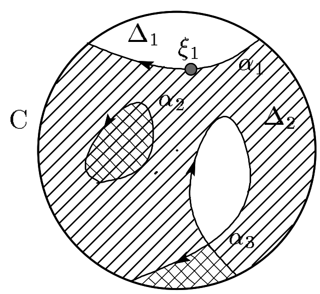
$$E = \sum \left(\frac{\partial u_j}{\partial t_1}\right)^2, \quad G = \sum \left(\frac{\partial u_j}{\partial t_2}\right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial u_j}{\partial t_1}\frac{\partial u_j}{\partial t_2},$$

où $j = 1, 2, 3, 4$, ce qui, en vertu de la condition de Cauchy-Riemann, se réduit à

$$d\sigma = \left|\frac{dx}{dt}\right|^2 dt_1 dt_2 + \left|\frac{dy}{dt}\right|^2 dt_1 dt_2.$$

Nous voyons donc que *l'aire de la surface caractéristique* Σ *s'exprime par la somme de celles des projections aux plans coordonnés.*

2. Reprenons la surface caractéristique Σ expliquée ci-dessus, considérons un dicylindre $[(C), (C')]$ à l'intérieur du domaine D (c'est-à-dire, $D \Supset [(C), (C')]$), et nous allons représenter Σ dans le dicylindre d'après Cousin. La projection de la portion de Σ dans le dicylindre sur le plan x consiste des morceau de surface de Riemann comme la Figure, que nous dénotons par $\mathfrak{R}_x$. Supposons pour la simplicité que la surface caractéristique Σ ne contienne aucun plan de la forme $x = const.$, ni $y = const.$, et que les cercles (C), (C') soient des formes



$$|x| < R, \qquad |y| < R',$$

respectivement.

Envisageons la surface de Riemann $\mathfrak{R}_x$ (connexe ou non). Soient x', x'' deux points de la frontière de $\mathfrak{R}_x$ tels que

$$|x'| < R, \qquad |x''| < R,$$

supposons pour la facilité d'explication qu'ils ne puisse avoir la même coordonné qu'aux points en nombre fini.

Voyons la Figure, sur laquelle on pourra facilement trouver le cas général. Le cercle (C) est partagé en 5 portions, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, par 3 courbes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, qui consistent avec la circonférence C, la projection sur le plan x de la frontière de $\mathfrak{R}_x$.

Le nombre de feuilles de $\mathfrak{R}_x$ est 0 pour Δ_1 et 1 pour Δ_2. ce qui est reconnu par le sens de la courbe α_1.

Nous allons partager les courbes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en morceaux de courbes δ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$. Soit α_j^* $(j=1,2,3)$ la courbe primitive de α_j sur Σ (c'est-à-dire α_j est la projection sur le plan x de α_j^*), et soit β_j la projection de α_j^* sur le plan y, dont β_j est considéré pour être sur la surface de Riemann (prolongée de $\mathfrak{R}_y$), et se situe sur la circonférence C'. Soit ξ_0 le point de départ de α_1, soit η_0 le point correspondant de β_1 avec les coordonnées $\underline{\eta}_0$, (notation générale). Le sens positif de β_j est celui de la projection C', et celui de α_j est le sens correspondant. Soit $q+1$ le nombre de feuillets de la surface de Riemann sur le point $\underline{\eta}_0$. Quand on fait tracer à y la courbe β_1 à partie de η_0, y passera par les q points successivement, que nous dénotons $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q$; soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$ les points correspondants. L'arc α_1 est alors partagé en $q+1$ arcs $(\xi_0, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), \ldots, (\xi_{q-1}, \xi_q)$ et la reste, que nous dénotons par $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{q+1}$. Quant à α_2, comme c'est une courbe fermée, il y a un seul point différent, nous prenons d'abord un point η_0, sur le point R'. Nous aurons alors, tout pareillement les points de division $\xi_{q+1}, \xi_{q+2}, \ldots, \xi_{q+r}$ sur α_2.[2] Pour α_3, nous marquerons pareillement les points de division $\xi_{q+r+1}, \xi_{q+r+2}, \ldots, \xi_{q+r+s}$. Et nous aurons $\delta_1,\ \delta_2, \ldots, \delta_t$, dont $t = q + r + s + 2$.

A tout x dans Δ_j correspond dans (C') j' points

$$y_{j,1},\ y_{j,2},\ \ldots,\ y_{j,\nu}, \ldots,\ y_{j,j'},$$

de façon que les points $(x, y_{j,\nu})$ soient sur Σ. Quand on regard x comme variable au voisinage de la position initiale, ces $y_{j,\nu}$ représentent les fonctions de x, holomorphes sur la surface de Riemann. Faisons correspondre au domaine Δ_j, la fonction holomorphe $\varphi_j(x,y)$ comme la suivante :

$$\begin{aligned} &\varphi_j(x,y) = (y - y_{j,1})(y - y_{j,2}) \cdots (y - y_{j,j'}), && si \quad j' \neq 0, \\ &\varphi_j(x,y) = 1, && si \quad j' = 0. \end{aligned}$$

Soit x un point quelconque sur la courbe α_j, considérée sur la surface de Riemann (prolongée de $\mathfrak{R}_x$), il lui correspond alors un seul point y_j sur β_j. Ce qui détermine la fonction $y_j(x)$ attachée à α_j. On a dans la Figure,

$$\varphi_2 = (y - y_1)\varphi_1. \tag{1}$$

Il en est de même pour toutes paires de domaines contigus.

Soit δ_j un des arcs $(j = 1, 2, \ldots, t)$, et soit α_μ la courbe dont δ_j fait partie. Soit a_j le point de départ de δ_j, et soit b_j le point d'aboutissement. Considérons l'intégrale de Cousin suivante :

$$I_j(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_j} \frac{\mathrm{Log}[y - y_j(t)]}{t - x}\, dt, \tag{2}$$

[2] Dont r étant le nombre de points sur $|y| = R'$.

où i est l'unité imaginaire, et l'intégrale est prise au sens positif de δ_j. Il s'agit de la détermination de $\operatorname{Log}[y-y_j(t)]$. Pour cela, il suffit de déterminer $\operatorname{Log}[-y_j(a_j)]$ comme la suivante

$$\operatorname{Log}[-y_j(a_j)] = \log R' + i\theta_0, \qquad -2\pi < \theta_0 \leqq 0,$$

$\log R'$ étant réel.

Nous savons bien les propriétés de l'intégrale de Cousin au cas général, mais c'est un cas particulier, envisageons donc le point de division. Il est évident que α_μ peut être quelconque, ouverte ou fermée, nous allons donc voir le point ξ_1 de la courbe α_1. Il s'agit de $I_1(x,y) + I_2(x,y)$. Or, puisque

$$\operatorname{Log}[y - y_2(x)] - \operatorname{Log}[y - y_1(x)] = -2\pi i,$$

$$I_1(x,y) + I_2(x,y) - \operatorname{Log}(\xi_1 - x) \tag{3}$$

est une fonction holomorphe au voisinage de $x \in \xi_1$.

Considérons maintenant pour tout domaine de la forme $[\Delta_n, (C')]$, $n = 1, 2, \ldots$, la fonction

$$F(x,y) = \varphi_n \cdot e^{-\sum I_j} \prod(\xi_k - x), \tag{4}$$

où la sommation $\sum$ s'étend à tous les arcs δ_j, et la production $\prod$, à tous les points de division ξ_k. D'après ce que nous venons de voir, nous trouvons que $F(x,y)$ soit holomorphe au voisinage du dicylindre $[(C),(C')]$, jouissant de la propriété que $F(x,y)/\varphi_n(x,y)$ est holomorphe et non-nulle au voisinage de tout Δ_n.

Considérons le cas général. On trouvera sans difficulté essentielle qu'on puisse former la fonction $F(x,y)$ par la même méthode et que cette fonction jouit de la même propriété.

Remarquons que, nous avons choisi parmi les domaines dicylindriques (A, A') un dicylindre, mais ceci n'est que pour la simplicité, la condition essentielle est que A' *soit simplement connexe.*

3. Nous disons que : ≪On considère les cercles (C) et (Γ) sur le plan x, (Γ) étant à l'intérieur de (C), et les cercles concentriques $(C'), (C'')$ au plan y, (C'') étant intérieur. Soit Σ une surface caractéristique défini au voisinage du dicylindre $[(C),(C')]$. *Dans cette configuration, si l'aire de* Σ *est restreinte de telle façon que,*

1° *dans le domaine dicylindrique* $[(C),(C'',C')]$, (C'',C') *signifiant la couronne sur le plan* y, *elle soit plus petite que* Ω, *et*

2° *que pour le dicylindre* $[(\Gamma),(C')]$, *il en soit de même; soit* C'_1 *une circonférence donnée concentrique à* C' *et à* C'', *se situant entre eux, la* *caractéristique* Σ *permet alors une fonction holomorphe associée* $F(x,y)$ *pour* $[(C),(C'_1)]$, *bornée des deux côtés de telle manière que,*

1) *soit* (C_1) *un cercle donné concentrique à* (C) *et plus petit que* (C), *pour* $[(C_1),(C'_1)]$,

$$\log|F(x,y)| < A\Omega, \qquad \text{et} \tag{1}$$

2) *que pour un dicylindre* $[(\gamma),(\gamma')]$ *de rayons dannés* (ρ,ρ') *tracé arbitrairement à l'intérieur de*

$$G = [(\Gamma),(C'_1)] \cup [(C),(C'',C'_1)],$$

$$m(\log|F(x,y)|) > -B\Omega, \tag{2}$$

m *signifiant la moyenne arithmétique par rapport à* $[(\gamma),(\gamma')]$ *et* A *et* B *étant les constantes positives.*≫

Pour l'effet, supposons que les cercles $(C),(C')$ soient donnés par $|x| < R$, $|y| < R'$, respectivement, dont $R \leqq 1/2$, $R' \leqq 1/2$; ce qui est permis. Supposons de plus que la surface Σ ne contient aucun plan caractéristique de la forme $x = const.$, ni $y = const.$; ce qui est aussi permis.

Soient $\mathfrak{R}'_x$, $\mathfrak{R}'_y$ les surfaces de Riemann sur les plans x, y, respectivement, correspondant à la portion de Σ dans $[(C),(C'',C')]$. Si l'on exprime leurs aires par A_x, A_y, on a

$$A_y = \int_{\mathfrak{R}'_y} d\sigma, \qquad A_x = \int_{\mathfrak{R}'_y} \left|\frac{dx}{dy}\right|^2 d\sigma, \tag{3}$$

où $d\sigma$ est l'élément de la surface de Riemann $\mathfrak{R}'_y$ et $x(y)$ exprime la fonction définie par Σ. Or, puisque

$$A_x + A_y < \Omega, \qquad 1 + X^2 \geqq 2X,$$

X étant un nombre positif quelconque, on a

$$\int_{\mathfrak{R}'_y} \left(1 + \left|\frac{dx}{dy}\right|\right) d\sigma < \frac{3}{2}\,\Omega. \tag{4}$$

Traçons sur Σ une ou plusieurs courbes comme ce qui suit :

$$|x| \leqq R, \quad |y| = R'_2, \qquad R'_1 < R'_2 < R',$$

R'_1 étant le rayon de C'_1. Désignons par α_j, β_j, les projections des courbes sur les plans, x, y, respectivement, et leurs longueurs par s_j, s'_j. Il résulte alors de l'inégalité ci-dessus qu'il existe dans l'intervalle (R_1', R') un rayon R_2' satisfaisant à

$$\sum (s_j + s_j') < \frac{3\Omega}{2(R' - R_1')} = K_1 \Omega. \tag{5}$$

Soit (C_2') le cercle $|y| < R_2'$.

Au dicylindre $[(C), (C_2')]$ ainsi acquis appliquons la méthode de No. précédent, pour obtenir la fonction $F(x, y)$ associée à Σ, en continuant d'employer les mêmes notations.

Il s'agit d'abord *la borne supérieure*. Posons,

$$\log |F| = u = u_1 + u_2 + u_3,$$

où

$$u_1 = \log |\varphi|, \quad u_2 = \sum \log |\xi_k - x|, \quad u_3 = \Re \left[-\sum I_j \right],$$

dont le logarithme est réel et l'opération $\Re$ signifie qu'on prend la partie réelle. Comme $R \leqq 1/2$, $R' \leqq 1/2$, on trouve avant tout que

$$u_1 \leqq 0, \qquad u_2 \leqq 0.$$

Soit R_1 le rayon de (C_1). Soit $R - R_1 = \delta$, $R' - R_2' = \delta'$. Soit (ξ, η) un point quelconque du dicylindre $[(C_1), (C_2')]$. Décrivons dans (C) un cercle (δ), $|x - \xi| < \delta$. Comme $u(x, \eta)$ est subharmonique, il résulte que

$$u(\xi, \eta) \leqq m_{(\delta)} u(x, \eta) \leqq m_{(\delta)} u_3(x, \eta)$$

$m_{(\delta)}$ signifiant la moyenne arithmétique par rapport à (δ).

Rappelons la forme des intégrales I (voir la formule (2) de No. 2), où la partie imaginaire θ de $\operatorname{Log} [y - y_j(t)]$ est en question.

1° La valeur initiale θ_0 est définie comme $-2\pi < \theta_0 \leqq 0$.

2° Lorsque le point y change de l'origine à la position actuelle y et que t reste invariable au point initiale t_0, la variation correspondante de θ ne surpasse pas $\pi/2$ en valeur absolue.

3° Lorsque y se fixe et que t trace δ_j au sens positif, l'argument θ augment toujours, mais la variation est 2π au plus. Nous avons donc

$$|\theta| < \frac{5}{2} \pi.$$

Par conséquent, si l'on considère la fonction

$$v(x) = \frac{L}{2\pi} \sum \int_\delta \frac{1}{|t - x|} \, ds,$$

dont

$$L^2 = (-\log \delta')^2 + \left(\frac{5\pi}{2}\right)^2, \quad L > 0, \quad \delta = \delta_j,$$

on a

$$|u_3(x, \eta)| \leqq v(x).$$

Or, comme on trouvera immédiatement que

$$m_{(\delta)} \frac{1}{|x-t|} \leqq m_{(\delta)} \frac{1}{|x-\xi|} = \frac{2}{\delta}$$

on a

$$m_{(\delta)} v(x) = \frac{L}{2\pi} \left\{ \sum \int_\delta \left[m_{(\delta)} \frac{1}{|t-x|} \right] ds \right\}$$

$$\leqq \frac{L}{\pi\delta} \left[\sum s \right],$$

$$\therefore \quad m_{(\delta)} v(x) < \frac{LK_1}{\pi\delta} \Omega = A\Omega.$$

On a donc

$$\log |F(\xi, \eta)| < A\Omega$$

pour

$$|\xi| < R_1, \qquad |\eta| < R_2'.$$

Il s'agit ensuite de *la borne inférieure*. Considérons un dicylindre $[(\gamma), (\gamma')]$ dans G, où (γ) et (γ') sont donnés par $|x-\xi| < \rho$ et $|y-\eta| < \rho'$, respectivement. Nous allons appliquer le théorème bien connu concernant la moyenne d'un potentiel logarithmique sur une circonférence, aux différentes parties de $u = u_1 + u_2 + u_3$.

1° Pour la fonction $u_1(x, y)$ donnée par

$$u_1(x, y) = \sum_{\nu=1}^{n'} \log |y - y_{n,\nu}(x)|,$$

où (x, y) est supposé dans $[\Delta_n, (C_1')]$, on remarque d'abord que

$$\pi\rho^2 m_{(\gamma)} n' < \Omega.$$

Or, soit $m_{(\gamma')}$ la moyenne par rapport à (γ'), on a

$$m_{(\gamma')} u_1(x, y) \geqq \frac{2n'}{\rho'^2} \int_0^{\rho'} \log r \, r dr = n' \left(\log \rho' - \frac{1}{2} \right),$$

$$\therefore \quad m u_1(x, y) \geqq \frac{\Omega}{\pi\rho^2} \left(\log \rho' - \frac{1}{2} \right) = -B_1 \Omega.$$

2° La fonction $u_2 = \sum \log|\xi_k - x|$ est indépendante de y. Comptons le nombre λ de points de division, et nous trouvons que

$$2\pi R_1 \lambda < \sum s' < K_1 \Omega.$$

$$\therefore \quad m u_2 > \frac{K_1 \Omega}{2\pi R_1}\left(\log\rho - \frac{1}{2}\right) = -B_2\,\Omega.$$

3° Quant à $u_3 = \Re[-\sum I]$, posons

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi}\sum \int_{\delta_j} \frac{\log|y - y_j(t)| - 5\pi/2}{|t-x|}\,ds,$$

on a alors,

$$u_3(x,y) > w(x,y).$$

Or, dans ce cas, comme toutes les masses sont distribuées sur la circonférence C_2' extérieur à (γ'), on a

$$m_{(\gamma')} w(x,y) \geq \frac{1}{2\pi}\sum \int_{\delta} \frac{\log d - 5\pi/2}{|t-x|}\,ds,$$

dont $d = R_2' - |\eta|$. De là il s'ensuit que,

$$m w(x,y) > \frac{K_1 \Omega}{\pi\rho}\left(\log d - \frac{5\pi}{2}\right) = -B_3 \Omega.$$

Nous atteignons ainsi l'inégalité demandée

$$m(\log|F(x,y)|) > -B\Omega,$$

$B > 0$, pour tout $[(\gamma),(\gamma')]$ dans G, C. Q. F. D.

4. Il s'agit de quelque réciproque de la proposition précédente. Nous allons démontrer la suivante :

Soit $F(x,y)$ une fonction holomorphe dans le dicylindre $[(C),(C')]$, bornée de telle façon que :

1° $$\log|F| \leqq M,$$

2° $$m(\log|F|) \geqq -K_1 M$$

pour $[(C),(C')]$, K, M étant des constantes positives. Alors pour tout dicylindre $[(C_1),(C_1')]$ donnée l'intérieur de $[(C),(C')]$, l'aire Ω_1 de la surface caractéristique Σ donnée par $F(x,y) = 0$ se restreint de manière que

$$\Omega_1 \leqq K_2 M$$

K_2 étant une constante positive indépendante de M et de F.

1° Pour le vérfier nous nous fournissons une proposition auxiliaire suivante (que 1'on pourra aussi réduire du formule de Jensen) :

≪Soient $(C), (C_1)$ les cercles $|z| < R$, $|z| < R_1$ respectivement, dont $R_1 < R$. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans (C), bornée de manière que $|f(z)| \leqq M$ et admettant n zéros au moins sur le cercle fermé $(\overline{C}_1)$; on a nécessairement

$$|f| \leqq M\lambda^n$$

pour $(\overline{C}_1)$, λ étant une constante indépendante de M et de f, telle que $0 < \lambda < 1$. ≫

Pour le constater nous pouvons supposer que $R = 1$. Nous dénotons que $R_1 = \theta$.

Supposons d'abord que $f(z)$ soit nulle pour le point a sur $(\overline{C}_1)$. Si $a = 0$, on a grâce à Schwarz que

$$|f(z)| \leqq M\theta,$$

pour $(\overline{C}_1)$. Supposons donc que $a \neq 0$. Nous pouvons supposer que a soit réel et positif. Considérons la transformation bien connue

$$z' = \frac{1}{a}\,\frac{z-a}{b-z}, \qquad (ab = 1),$$

qui laisse invariable le cercle (C). Soit

$$\lambda = \max |z'|, \qquad \text{pour} \quad |z| \leqq \theta.$$

On voit que

$$0 < \lambda < 1, \qquad \theta < \lambda.$$

En vertu de Schwarz, on a

$$|f| \leqq M\lambda,$$

pour $(\overline{C}_1)$.

Supposons ensuite que f soit nulle pour a, b. Nous pouvons supposer que $a \neq 0$ et que a soit réel et positif. Considérons la fonction

$$\varphi = \frac{1}{z'} f.$$

On a alors, d'après ce qui précède

$$|\varphi| \leqq M\lambda,$$

pour $(\overline{C}_1)$. On a donc

$$|f| = |\varphi| \cdot |z'| \leqq M\lambda^2.$$

Et ainsi de suite, et on arrivera au résultat indiqué.

2°. Dans les circonstances expliquées au commencement de ce Numéro, supposons que Σ ne contienne aucun morceau de surface caractéristique des formes $x=const.$ et $y=const.$ Considérons que $(C), (C_1), (C'), (C'_1)$ soient donnés par $|x|<R$, $|x|<R_1\ (<R)$, $|y|<R'$, $|y|<R'_1\ (<R')$, respectivement et que $R\leqq l/2$, $R'\leqq 1/2$. Soient $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$ les projections de Σ sur les plans x et y, respectivement. Soient $\Omega'_1, \Omega''_1, \Omega_1$ les aires des portions de $\mathfrak{R}_x$, de $\mathfrak{R}_y$ et de Σ dans le dicylindre $[(C_1), (C'_1)]$, respectivement; on a alors

$$\Omega_1 = \Omega'_1 + \Omega''_1.$$

Nous allons évaluer donc l'aire Ω'_1.

Employons la même notation qu'au No. 2, seulement en remplaçant $[(C), (C')]$ par $[(C_1), (C'_1)]$. Nous avons

$$\sum \int_{\Delta_p} p'\, d\sigma = \Omega'_1.$$

Soit x_0 un point de Δ_p, on a p' racines de $F(x_0, y) = 0$ dans (C'_1). D'après la proposition préliminaire nous avons

$$|F(x_0, y)| \leqq e^M \lambda^{p'},$$

pour $x_0 \in \Delta_p$, $|y| \leqq R'_1$. Donc,

$$\log|F(x_0, y)| \leqq M - p' \log\frac{1}{\lambda},$$

$$\int_{(C_1)} \log|F(x, y)| d\sigma \leqq M\pi R_1^2 - \log\frac{1}{\lambda}\,\Omega'_1.$$

$$m(\log|F(x, y)|) \leqq M - \frac{1}{\pi R_1^2}\log\frac{1}{\lambda}\,\Omega'_1.$$

Or,

$$m(\log|F(x, y)|) \geqq -K_1 M.$$

$$\therefore \quad \Omega'_1 \leqq \frac{\pi R_1^2(K_1+1)}{\log\frac{1}{\lambda}} M = K'_2 M.$$

3°. Considérons le cas général, dans lequel Σ s'exprime de la forme

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3,$$

dont Σ_2 est les morceaux de plans caractéristiques de la forme $x=const.$, Σ_3 ceux de y et Σ_1 les autres.

Evaluons l'aire Ω_2 de la portion de Σ_2 dans le dicylindre $[(C_1),(C_1')]$. Soit m' le nombre de plans de la forme $x = const.$ de Σ_2 en tenant compte de la multiplicité, l'aire Ω_2 est alors

$$\Omega_2 = m'\pi R_1^{'2}.$$

Or, d'apràs la proposition préliminaire

$$|F| \leqq e^M \lambda^{m'},$$

pour $[(\overline{C}_1),(\overline{C}_1')]$. Donc,

$$-K_1 M \leqq M - m' \log \frac{1}{\lambda}.$$

$$\therefore \quad m' \leq \frac{(K_1+1)}{\log \frac{1}{\lambda}} M.$$

L'aire Ω_2 est donc bornée de la manière indiquée. Il en est de même pour Ω_3.

Pour l'aire Ω_1, considérons la fonction

$$\Phi(x,y) = F(x,y) \Big/ \prod (x-a_j) \prod (y-b_k)$$

dont $x = a_j$ $(j = 1,2,\ldots,m')$ et $y = b_k$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ s'expriment les racines, de l'équation $F(x,y) = 0$, en tenant compte de la multiplicité. On a alors, d'après le principe du module maximum

$$\log|\Phi| < M + m' \log \frac{1}{R - R_1} + n \log \frac{1}{R' - R_1'} = K'M,$$

K' étant une constante positive.

On a encore

$$m \log|\Phi| > -K_1 M.$$

D'après le cas précédent, nous savons donc que l'aire Ω_1 est aussi bornée de la manière indiquée, et par suite nous avons

$$\Omega \leqq K_2 M.$$

C. Q. F. D.

5. Traçons, sur le plan x, 2 cercles (C) et (Γ_0) des formes $|x| < R$, $|x| < R_0$, $R > R_0$, et sur le plan y, 2 cercles (C') et (C'') des formes $|y| < R'$, $|y| < R''$, $R' > R''$, respectivement. Considérons au voisinage de $[(C),(C')]$ une surface caractéristique (d'un seul tenant ou non) Σ. Nous considérons le cas où Σ ne contient aucun plan caractéristique de la forme $x = const.$, ni $y = const.$ Nous supposons que l'aire de la portion de Σ dans $[(C),(C'',C')]$ soit plus petite que Ω, et qu'il en soit de même pour $[(\Gamma),(C')]$.

Soit C_1' une circonférence donnée de la forme $|y| = R_1', \; R'' < R_1' < R'$; comme nous l'avons vu au No. 3, on peut trouver une autre circonférence C_2' de la forme $|y| = R_2', \; R_1' < R_2' < R'$ jouissant de la propriété suivante : Soit $\mathfrak{R}_x$ la projection de la portion de Σ dans $[(C), (C_2')]$ sur le plan x, et soit $\mathfrak{R}_y$ celle de y. Soient $\beta_i, \; i = 1, 2, \ldots, p$ les courbes faisant partie de la frontière de $\mathfrak{R}_y$ telle que $|y| = R_2'$, et soient α_i les courbes correspondantes pour le plan x (en tenant compte de la multiplicité). Soit L la longueur totale des courbes α_i et soit L' celle de β_i. On a alors

$$L + L' \leqq K_1 \Omega, \qquad K_1 = \frac{3}{2(R' - R_1')}.$$

Le cercle (C) est alors partagé par les courbes α_i en plusieurs portions Δ_n, où $\mathfrak{R}_x$ est de n' feuillets. Soit x_0 un point de Δ_n, nous dénotons

$$n' = \psi(x_0).$$

Traçons un cercle (Γ_1) de la forme $|x| < R_1$ $(R_0 > R_1)$, et envisageons la couronne (Γ_1, Γ_0). L'aire de la portion de $\mathfrak{R}_x$ dans cette couronne est donnée par

$$\int_{(\Gamma_1, \Gamma_0)} \psi(x)\, d\sigma,$$

que l'on peut donner par

$$\int_{R_1}^{R_0} dr \int_0^{2\pi} \psi(x)\, r d\theta \qquad (x = re^{i\theta}).$$

Comme cette aire est plus petite que Ω, on peut trouver un rayon R_2 dans $R_1 < R_2 < R_0$ tel que

$$\int_0^{2\pi} \psi(x) R_2 \, d\theta < \frac{\Omega}{R_0 - R_1} = K_2 \, \Omega.$$

Nous dénotons cette circonférence $|x| = R_2$ par Γ_2.

Les courbes α_i sont analytiques, et les éléments sont réguliers, sauf peut-être aux points en nombre fini, considérons le problème suivant :

Problème. ≪Soit x_0 un point quelconque de la couronne (Γ_2, C), nous définissons la fonction $\varphi(x_0)$ comme ce qui suit : Considérons le rayon issue de l'origine et passant par x_0, soit ξ_0 le point d'intersection de ce rayon et la circonférence Γ_2. Quand on fait x tracer ce rayon de ξ_0 à x_0, x rencontrera les courbes α_i plusieurs fois, une rencontre sera positive, si x traverse la courbe de droite à gauche, et négative au cas contraire. Soit q le nombre des rencontres positives et soit q' le nombre des rencontres négatives, où nous tenons compte de la rencontre au point ξ_0, s'il se présente, mais non pas au point x_0. Définissons

$$\varphi(x_0) = \psi(\xi_0) + q - q'.$$

Considérons

$$A = \int_{(\Gamma_2, C)} \varphi(x)\, d\sigma$$

($d\sigma$ étant l'élément de la couronne). Quel est alors le maximum de la quantité A, lorsque l'on trace les courbes α_i au hasard, seulement en remplissant des conditions,

1° que les courbes soient analytiques et en nombre fini, et que les éléments soient réguliers sauf aux points en nombre fini;

2° que la longueur totale soit L; et

3° que les extrémités se situent sur C ou sur Γ_2.≫

La réponse de ce problème est évidente; le maximum de A se présente lorsque toutes les courbes se situent sur Γ_2 et qu'elles prennent le sens négatif par rapport à Γ_2, le maximum A_0 est donné par

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{(\Gamma_2, C)} [\psi(\xi_0) + q]\, r dr d\theta \qquad (\xi_0 = re^{i\theta}) \\ &< (R^2 - R_2^2) \left(\frac{K_2}{2R_0} + \frac{K_1}{2R_2} \right) \Omega = K_3\, \Omega. \end{aligned}$$

Nous savons donc que l'aire de la projection sur le plan x de la portion de Σ dans $[(C), (C')]$ est plus petite que $(K_3 + 1)\Omega$.

Il est facile à voir, en employant la transformation linéaire expliquée plus haut, que l'on remplaçer le cercle special (Γ_0) par un cercle (Γ) donné arbitrairement à l'intérieur de (C), sans changer la conclusion. D'où, en répetant le raisonnement au No. 3, on reconnaitra sans difficulté que, *soit $F(x, y)$ la fonction construite au* No. 3, *pour le dicylindre $[(C_1), (C_1')]$, on a aussi*

$$m \log |F(x, y)| > -B\, \Omega,$$

B étant une constante positive indépendante de Σ.

D'après ce que nous avons vu au No. 4, nous avons donc le résultat suivant :

Lemme. *Soit (C) un cercle sur le plan x, et soit (Γ) un cercle à l'intérieur de (C); soienet (C'), (C'') deux cercles concentriques sur le plan y, dont (C'') est intérieur. Soit Σ une surface caractéristique dans le dicylindre $[(C), (C')]$ (d'un seul tenant ou non), telle que l'aire de la portion de Σ dans $[(C), (C'', C')]$ soit plus petite que Ω et qu'il en soit de même pour $[(\Gamma), (C')]$. L'aire de Σ est alors bornée à l'intérieur de $[(C), (C')]$ de telle manière qu'elle soit $\leqq K\Omega$, K étant une constante positive indépendante de Σ.*

6. Considérons dans l'espace (x, y) un domaine univalent D, que nous supposons fini pour simplifier le langage. Considérons dans D une suite de surfaces caractéristiques

$$(S) \qquad \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \ldots,\ \Sigma_n,\ \ldots,$$

et une suite de nombres positifs

$$(T) \qquad \nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_n,\ \ldots.$$

La suite (T) est quelconque, mais nous la regardons pour être non bornée en générale.

D'après ces suites $(S), (T)$, nous distinguons deux espèces de points dans D :

1° Pour un point P_0, s'il existe un dicylindre (γ) de centre P_0 tel que, soit ω_n l'aire de Σ_n dans (γ), la suite

$$(1) \qquad \frac{\omega_1}{\nu_1},\ \frac{\omega_2}{\nu_2},\ \ldots,\ \frac{\omega_n}{\nu_n},\ \ldots$$

soit bornée, nous appellerons P_0 d'être *de première espèce.*

2° S'il n'existe aucun dicylindre (γ) jouissant de la propriété, nous appellerons P_0 d'être *de deuxième espèce.*

Nous verrons que :

Théorème. *L'ensemble des points de première espèce est pseudoconvexe dans le domaine D.*

Pour l'effet, il suffit de constater le théorème de la continuité (C). Soit E l'ensemble des points de deuxième espèce dans D. E est évidemment fermé dans D. Considérons dans D un dicylindre $[(C), (C')]$. Soit (Γ) un cercle à l'intérieur de (C) et soit (C'') un cercle concentrique à (C') et plus petit que (C'). Supposons qu'il n'y ait pas de points de E dans $[(\Gamma), (C')]$ ni dans $[(C), (C'', C')]$. Il suffit de dire qu'il n'y a pas de points de E dans $[(C), (C')]$.

Supposons par absurde qu'il existe un point (ξ, η) de E dans $[(C), (C')]$. Traçons un dicylindre $[(C_1), (C'_1)]$ concentrique à $[(C), (C')]$ dans $[(C), (C')]$, tel qu'il contienne le point (ξ, η), que (C_1) contienne (Γ) et que la circonférence C'_1 soit contenue dans la couronne (C'', C'). Soit (Γ_0) un cercle concentrique à (Γ) et plus petit que (Γ). Puisque tout point P de l'ensemble fermé $[(\overline{\Gamma}_0), (\overline{C}'_1)] \cup [(\overline{C}_1), (\overline{C}'_1)]$ est le centre d'un dicylindre (γ) tel que la suite (1) soit bornée, on peut recouvrir cet ensemble fermé par un nombre fini des dicylindres (γ) d'après le lemme de Borel. Soit Ω_n l'aire de Σ_n dans $[(\Gamma_0), (C'_1)]$, la suite Ω_n/ν_n $(n = 1, 2, \ldots)$ est donc bornée. Soit

(C_3', C_2') une couronne concentrique à C_1', contenant C_1' et suffisamment étroite; soit Ω_n' l'aire de Σ_n dans $[(C_1), (C_3', C_2')]$, la suite Ω_n'/ν_n est aussi bornée. Soit $[(C_2), (C_4')]$ un dicylindre concentrique à $[(C_1), (C_1')]$, plus petit que $[(C_1), (C_1')]$ et restant contenir le point (ξ, η). D'après le lemme, soit Ω_n'' l'aire de Σ_n dans $[(C_2), (C_4')]$, on a

$$\Omega_n'' \leqq K \max(\Omega_n, \Omega_n'),$$

K étant une constante positive indépendante de n. La suite Ω_n''/ν_n est donc bornée. Ce qui contredit que (ξ, η) soit le point de deuxième espèce.

(1962. 9. 10)