

## Sur les domaines pseudoconvexes.

Par Kiyosi OKA.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A, Jan. 13, 1941.)

Au commencement du progrès récent de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables, *F. Hartogs* a découvert que tout *domaine d'holomorphic*<sup>1</sup> est un *domaine pseudoconvexe*. Ces 2 notions sont devenues extrêmement importantes d'après le développement de la théorie; le problème réciproque reste cependant à peu près libre même aujourd'hui. Nous traiterons ce problème dans la présente Note; où nous placerons pour la simplicité à l'espace de 2 variables complexes, mais la conclusion s'appliquera, je crois, à un nombre quelconque de variables.

1. Dans l'espace des 2 variables complexes  $x, y$ , considérons un domaine univalent et fini  $D$ . Nous l'appellerons *pseudoconvexe*, si l'ensemble complémentaire  $E$  de  $D$  satisfait au *théorème de la continuité* au voisinage d'un point fini quelconque  $P$ , et encore si ceci admet toute transformation pseudoconforme biunivoque au voisinage de  $P$ ; dont la première condition veut dire que: lorsque l'on trace une hypersphère suffisamment petite autour de  $P$ , et prend arbitrairement dans la hypersphère un point  $(a, b)$  et une circonférence de la forme,  $x = a, |y - b| = r$ , si  $(a, b)$  appartient à  $E$ , sans l'être pour aucun point de la circonférence, on peut trouver un nombre positif  $d$  de façon que, à tout  $x'$  dans  $|x - a| < d$ , corresponde dans  $|y - b| < r$  au moins un  $y'$  tel que  $(x', y')$  appartienne à  $E$ . Alors :

*Théorème.* Dans l'espace de 2 variables complexes, tout domaine pseudoconvexe univalent et fini est un domaine d'holomorphic.

La démonstration sera donnée dans un Mémoire ultérieur. Dans ce qui suit, nous en exposerons tout rapidement la partie essentielle.

2. Nous allons construire un domaine pseudoconvexe  $\Delta$  satisfaisant aux conditions un peu compliquées, à partir de 2 domaines d'holomorphic empiétant l'un sur l'autre. Considérons dans l'espace  $(x, y)$  un domaine univalent et borné  $D$  et 3 hyperplans de la forme  $x_1 = a, x_1 = a_1, x_1 = a_2$ , que nous désignerons par  $L, L_1, L_2$ , respectivement, où  $x_1$  représente la partie réelle de  $x$  et  $a_2 < a < a_1$ . Supposons  $D$  traversé par chacun des hyperplans, et désignons les parties de  $D$  au côté gauche de  $L_1$ ,

<sup>1</sup>Un domaine est appelé domaine d'holomorphic, s'il l'est pour une au moins des fonctions.

au côté droit de  $L_2$  et entre  $L_1$  et  $L_2$  par  $D_1, D_2$  et  $D_3$ , respectivement. Supposons d'abord que toute composante continue des ensembles  $D_1, D_2$  soit un domaine d'holomorphie. Ensuite, pour les fonctions holomorphes  $X_j(x, y)$  ( $j = 1, 2, \dots, \nu$ ) dans  $D_3$  :

1°. Supposons que l'ensemble des points de  $D_3$  satisfaisant à

$$|X_j(x, y)| \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

n'ait pas de point au voisinage de l'intersection de la frontière de  $D$  avec  $L$ .

2°. Supposons que, pour un nombre positif  $\varepsilon$  suffisamment petit et pour tout  $j$  de  $1, 2, \dots, \nu$ , l'ensemble des points de  $D_3$  satisfaisant à  $|X_j(x, y)| > 1 - \varepsilon$  n'ait pas de point au voisinage de  $L_1$ , ni de  $L_2$ .

3°. Les points de  $D$  qui n'appartiennent pas à  $D_3$ , ou bien satisfont à  $|X_j(x, y)| < 1$  ( $j = 1, 2, \dots, \nu$ ) constituent un ensemble ouvert, d'après l'hypothèse précédente. Supposons que cet ensemble admette une composante continue  $\Delta$  s'étendant du côté gauche de  $L_2$  au côté droit de  $L_1$ .<sup>2</sup>

4°. Supposons que l'on ait identiquement

$$(X_j - X_j^0)R = (x - x_0)P_j + (y - y_0)Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

quand  $(x, y) \in D_3$ ,  $(x_0, y_0) \in D_3$ , où  $X_j^0$  exprime  $X_j(x_0, y_0)$ ,  $P_j, Q_j$  et  $R$  sont les fonctions holomorphes des variables  $x, y, x_0, y_0$  et spécialement,  $R$  se réduit à 1 pour  $x = x_0, y = y_0$ .<sup>3</sup>

5°. Supposons pour toute  $X_j$  que le nombre des points satisfaisant à

$$\frac{\partial X_j}{\partial y} = 0, \quad x_1 = a, \quad |X_j(x, y)| = 1$$

---

<sup>2</sup>Ces 3 hypothèses s'appuient sur le théorème de H. Cartan-P. Thullen que tout domaine d'holomorphie fini est convexe par rapport aux fonctions holomorphes dans le domaine. Voir: H. Cartan et P. Thullen, Math. Ann., 1932.

<sup>3</sup>Pour cette hypothèse, voici la proposition: Soit  $D$  un domaine d'holomorphie univalent et fini à l'espace  $(x, y)$ . Etant donné un nombre positif  $\varepsilon$  et un domaine univalent et borné  $D_0$  contenu avec sa frontière dans  $D$ , on peut trouver une fonction holomorphe  $R$  des variables  $x, y, x_0, y_0$  dans  $(x, y) \in D_0, (x_0, y_0) \in D_0$ , se réduisant à 1 pour  $x = x_0, y = y_0$ , de façon que, à toute fonction holomorphe  $f(x, y)$  dans  $D$ , corresponde une fonction holomorphe  $\varphi(x, y)$  satisfaisant toujours à

$$|f - \varphi| < \varepsilon, \quad (\varphi - \varphi_0)R = (x - x_0)P + (y - y_0)Q$$

dans  $D_0$ , dont  $\varphi_0$  signifie  $\varphi(x_0, y_0)$ , et  $P$  et  $Q$  sont des fonctions holomorphes des variables  $x, y, x_0, y_0$ . — On peut le démontrer en vertu du théorème précédent de H. Cartan-P. Thullen, d'un théorème de A. Weil et d'un théorème de l'auteur. Pour les 2 derniers théorèmes, voir: K. Qka, J. Sci. Hiroshima Univ., 1936, No.4; et 1937, Théorème I.

soit fini au plus à l'intérieur de  $D_3$ .

6°. Nous désignerons la variété analytique  $x_1 = a, |X_j(x, y)| = 1$  définie dans  $D_3$  par  $\Sigma_j$ . D'après l'hypothèse précédente, toute  $\Sigma_j$  est à 2 dimensions au plus. *Supposons que toutes les intersections des variétés  $\Sigma_j$  et  $\Sigma_k$  ( $j \neq k$ ) soient à 1 dimension au plus.*

Le domaine  $\Delta$  ainsi construit est pseudoconvexe. Nous désignerons les parties de  $\Delta$  au côté gauche de  $L$ , au côté droit de  $L$  et entre  $L_1$  et  $L_2$  par  $\Delta_1, \Delta_2$  et  $\Delta_3$ , respectivement. Toute composante continue des ensembles  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  est un domaine d'holomorphic.

**3.** Soit  $S$  l'ensemble de points consistant de la partie de  $L$  dans  $\Delta$  et des points d'accumulation;  $S$  est contenu dans  $D_3$ , d'après l'hypothèse 1. Soit  $\sigma$  la frontière de  $S$  (considéré comme ensemble sur  $L$ );  $\sigma$  se situe sur la somme de  $\Sigma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \nu$ ); la partie de  $\sigma$  sur  $\Sigma_j$  sera désignée par  $\sigma_j$ . Les  $\sigma_j$  sont à 2 dimensions au plus; les intersections des variétés  $\sigma_j$  et  $\sigma_k$  ( $j \neq k$ ) sont à 1 dimension au plus, d'après l'hypothèse 6.

Dans cette circonstance,  $\varphi(x, y)$  étant une fonction holomorphe quelconque dans un certain ensemble ouvert contenant  $S$ , considérons l'intégrale double, étendue sur la partie à 2 dimensions de  $\sigma$ ,

$$I(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma_j} \psi_j(x, y; x_0, y_0) \varphi(x, y) dx dy \quad (j = 1, 2, \dots, \nu),$$

$$\psi_j(x, y; x_0, y_0) = \frac{Q_j}{(x - x_0)(X_j - X_j^0)}.^4$$

Quand  $(x, y) \in \sigma_j$ ,  $\psi_j$  étant holomorphe dans  $(x_0, y_0) \in \Delta_3$  excepté à  $L$ , il en est de même pour  $I(x_0, y_0)$ . Soit  $I_1(x_0, y_0)$  la partie de  $I(x_0, y_0)$  au côté gauche de  $L$ , et  $I_2$  celle du côté droit; on trouve facilement, d'après

---

<sup>4</sup>Nous en expliquerons quelques points. Sur chaque  $\sigma_j$ ,  $\partial X_j / \partial y$  ne s'annule pas, sauf peut-être à un nombre fini de points, d'après l'hypothèse 5. Prenons un point quelconque  $P$  sur  $\sigma_j$ , en dehors des points exceptionnels. Au voisinage de  $P$ , nous pouvons représenter la variété  $\Sigma_j$  à l'aide des paramètres réels  $u, v$ , sous la forme  $x = x(u, v), y = y(u, v)$ , où les deuxièmes membres sont des séries entières des variables  $u, v$ ; et cela de telle façon que  $(x, y)$  et  $(u, v)$  soient en correspondance biunivoque; dont  $(u, v)$  sera considéré pour point du plan, au moyen des axes rectangulaires usuels. A la frontière de  $\sigma_j$  correspondent des arcs analytiques d'un nombre fini sur le plan. Soit  $x_2$  la partie imaginaire de  $x$ ,  $\theta_j$  l'argument de  $X_j(x, y)$ ; choisissons  $(u, v)$  de façon que  $\partial(x_2, \theta_j) / \partial(u, v) > 0$ ; et nous aurons par définition

$$\int_{\sigma_j} \psi_j \varphi dx dy = \int \int \psi_j \varphi \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$$

au voisinage du point  $P$ , le deuxième membre étant une intégrale double étendue sur la partie du plan  $(u, v)$  correspondant à la partie à 2 dimension de  $\sigma_j$ .

l'hypothèse 6, que  $I_1$  et  $I_2$  peuvent se prolonger analytiquement un peu, passant par  $L$  dans  $\Delta_3$ , de façon que  $I_1 - I_2 = \varphi$ .

Nous allons modifier  $\psi_j$ . Soit  $\Sigma'_j$  la partie de  $\Sigma_j$  sur  $|X_p(x, y)| \leq 1$  ( $p = 1, 2, \dots, \nu; p \neq j$ );  $\Sigma'_j$  contient  $\sigma_j$ . Construisons un ensemble ouvert  $V_j$  contenant  $\Sigma'_j$ , suffisamment voisin de  $\Sigma'_j$  et tel que toutes ses composantes continues soient des domaines d'holomorphic.  $V_j$  existe certainement, puisque  $\Sigma'_j$  est contenu dans  $D_3$  d'après l'hypothèse 1.

Comme le premier problème de *Cousin* est toujours résoluble dans un domaine d'holomorphic univalent et fini<sup>5</sup>, nous pouvons trouver, d'après l'hypothèse 2, *une fonction méromorphe*  $\Phi_j(x, y; x_0, y_0)$  dans  $(x, y) \in V_j$ ,  $(x_0, y_0) \in D_1$  de façon qu'elle admette les mêmes pôles que  $\psi_j$  quand  $(x_0, y_0) \in D_3$  et soit holomorphic quand  $(x_0, y_0) \notin D_3$ .

$\Phi_j - \psi_j$  est holomorphic dans  $(x, y) \in V_j$ ,  $(x_0, y_0) \in D_3$ .  $D_3$  étant convexe par rapport aux fonctions holomorphes dans  $D_1$ , pour un nombre positif donné  $\varepsilon$ , nous pouvons trouver *une fonction holomorphic*  $\Psi_j(x, y; x_0, y_0)$  dans  $(x, y) \in V_j$ ,  $(x_0, y_0) \in D_1$ , telle que  $|\Phi_j - \psi_j - \Psi_j| < \varepsilon$  dans  $(x, y) \in V'_j$ ,  $(x_0, y_0) \in D'_3$ , dont  $V'_j$  est un ensemble ouvert suffisamment voisin de  $V_j$ , contenu avec sa frontière dans  $V_j$  et donné à priori, et  $D'_3$  celui de  $D_3$ <sup>6</sup>.

Nous avons ainsi acquis les fonctions  $\Phi_j$  et  $\Psi_j$  par rapport à  $D_1$ . Posons  $A_j = \Phi_j - \Psi_j - \psi_j$ . Construisons pareillement des fonctions  $B_j$  pour  $D_2$ ; et considérons, au lieu de  $I(x_0, y_0)$ , les intégrales suivantes :

$$J_1(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma_j} (\psi_j + A_j) \varphi(x, y) dx dy,$$

$$J_2(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma_j} (\psi_j + B_j) \varphi(x, y) dx dy \quad (j = 1, \dots, \nu).$$

$J_1(x_0, y_0)$  est holomorphic dans  $\Delta_1$ , puisqu'il en est ainsi pour toute  $\psi_j + A_j$  quand  $(x, y) \in \sigma_j$ ; et pareillement,  $J_2(x_0, y_0)$  est holomorphic dans  $\Delta_2$ . Ces fonctions peuvent se prolonger analytiquement un peu, passant par  $L$  dans  $\Delta$  et satisfont alors à la relation

$$J_1(x_0, y_0) - J_2(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma_j} (A_j - B_j) \varphi(x, y) dx dy \quad (j = 1, \dots, \nu).$$

Posons  $f = J_1 - J_2$ ; de la relation, il s'ensuit que  $f$  est holomorphic en tout point de  $S$ .

<sup>5</sup>Voir: K. Oka, J. Sci. Hiroshima Univ., 1937, No. 5.

<sup>6</sup>Voir: K. Oka, cité plus haut.

Considérons maintenant  $f$  comme donnée et  $\varphi$  comme inconnue dans la relation, et nous aurons une équation intégrale de *Fredholm* de seconde espèce. En choisissant le nombre  $\varepsilon$  suffisamment petit, nous trouvons donc  $\varphi(x, y)$  demandée, holomorphe en tout point de  $S$ . D'où, il en résulte que :

*Dans la condition de No.2, étant donnée une fonction uniforme  $f(x, y)$  holomorphe en tout point de la frontière commune  $S$  des ensembles  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , on peut trouver 2 fonctions holomorphes  $F_1(x, y), F_2(x, y)$  dans  $\Delta_1$  et dans  $\Delta_2$ , respectivement, telles qu'on puisse les prolonger analytiquement un peu, passant par  $L$  dans  $\Delta$  et que l'on ait alors, identiquement:  $F_1(x, y) - F_2(x, y) = f(x, y)$ .—Ceci nous donne le point de départ.*