Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

III—Deuxième problème de Cousin.

Par

Kiyoshi Oka

(Reçu Jan. 20, 1938.)

Introduction.[1]— P. Cousin le premier s'est posé de trouver des fonctions méromorphes qui aient les pôles et points d'indétermination donnés, et des fonctions holomorphes admettant les zéros donnés; que nous appellerons, avec M. H. Cartan,[2] premier et deuxième problèmes de Cousin, respectivement. Ces deux problèmes intimement reliés différent d'ailleurs plus profondément qu'il ne semble tout d'abord. Le premier problème est toujours résoluble pour les domaines univalents d'holomorphie sans point à l'infini, comme nous l'avons vu dans le mémoire précédent; mais le même résultat n'est plus expectatif pour le deuxième problème, par exemple; car il existe effectivement des domaines du caractère contraire.[3] Dans le présent Mémoire, nous essayerons d'extraire ce qui caractérise le deuxième problème.

Voici un exemple dont l'auteur est parti: Considérons dans l'espace des trois variables réelles x, y et z le cylindre D et le segment L,

$$(D) \qquad x^2 + y^2 < 1, \qquad |z| < 2,$$
$$(L) \qquad x = y = 0, \qquad |z| \leq 1;$$

[1]Pour la bibliographie du problème actuel, nous nous contentons de renvoyer le lecteur à ce qui suit :

H. Behnke et P. Thullen. Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. 1934.

H. Behnke et K. Stein. Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen. Jbr. Deutseh. Math.-Vereinig., 1937.

[2]H. Cartan. Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes. C. R. Acad. Sci., Paris, 1934.

À l'égard de ce mémoire, l'auteur avoue que le théorème I exposé dans le Ménmoire I doit étre attribué à lui.

[3]On trouvera un exemple concret dans le mémoire suivant :

T. H. Gronwall. On expressibility of uniform functions of several complex variables as quotient of two functions of entire character. Amer. Math. Soc. Trans., 1917.

Nous montrerons dans la suivante un nouvel exemple tout simple.

il existe une infinité de fonctions continues, $F(x,y,z)$, bien définies dans D, qui s'annulent pour tout point de L sans l'être à l'extérieur. Mais, un mode purement géométrique comme celui-ci n'est pas celui qui définit des zéros dans le deuxième problème de Cousin; ajoutons donc la condition suivante :

$$F(x,y,0) = (x+iy)\lambda(x,y) \qquad pour \qquad x^2+y^2<\rho^2,$$

i étant l'unité imaginaire, $\lambda(x,y)$ une fonction continue et non-nulle, et ρ un nombre positif quelque petit qu'il soit; et on trouvera que F n'existe plus.

Cet exemple, particulièrement intéressant quand on l'associe à la nature dite plus haut du deuxième problème de Cousin, nous pousse à étendre ce problème jusqu'au champ de fonctions continues. Ceci sera réalisé sans difficulté, en définissant l'équivalence des fonctions continues tout comme des fonctions holomorphes. La condition pour que le problème ainsi généralisé soit toujours résoluble dans un domaine donné est évidemment topologique. Laissant de côté le cas où les zéros donnés remplissent une portion de l'espace, nous l'étudierons pour les domaines cylindriques univalents à l'espace fini de plusieurs variables complexes et trouverons qu'il faut et qu'il suffit pour cela que toutes les projections du domaine donné sur les plans des variables soient simplement connexes, sauf une au plus.

Lorsqu'on définit analytiquement des zéros par le mode habituel dans un domaine univalent D à l'espace fini de plusieurs variables complexes, il se présente à la fois le problème de Cousin et le problème généralisé; entre eux il y a la relation que voici : Quand D est un domaine d'holomorphie, s'il existe une solution non-analytique, les solutions analytiques le sont aussi. Ceci est le résultat que nous avons voulu.[4]

D'après ceux qui précédent, nous trouvons que le deuxième problème de Cousin est toujours résoluble dans le domaine d'holomorphie D, si on peut le représenter topologiquement sur un domaine cylindrique du caractère indiqué plus haut.

---

[4]Pour l'établir, nous ferons usage de quelques résultats exposés dans les deux mémoires précédents :

I–Domains convexes par rapport aux fonctions rationnelles. Ce Journal, 1936.

II–Domains d'holomorphie. Ce Journal, 1937.

1 . Définitions. — Nous allons étendre le deuxième problème de Cousin au champ de fonctions non-analytiques.

Considérons dans un espace de plusieurs variables réelles le domaine D, et dans lequel deux fonctions continues, f_1 et f_2.[5] Si ces fonctions satisfont dans D à une relation de la forme, $f_1 = f_2\lambda$, λ étant une fonction continue et non-nulle, elles seront appelées *équivalentes* dans le domaine.[6] Deux fonctions continues au voisinage d'un point P à l'espace fini seront appelées équivalentes en P, si l'on peut trouver une hypersphère de centre P dans laquelle les fonctions soient équivalentes.

Considérons dans le domaine D un mécanisme comme suivant:
pour tout point P du domaine, il correspond une hypersphère (γ) de centre P et une fonction continue f dans (γ), et cela de telle façon que pour toute paire de hypersphères contiguës, les fonctions correspondantes soient équivalentes dans la partie commune; dont f sera appelée fonction attachée au point P. Dans ces conditions, proposons-nous de trouver une fonction continue F dans D, équivalente en tout point P du domaine à la fonction attachée à P. Nous disons que la fonction F, si elle existe, admet les *zéros* donnés.

Or, le problème ainsi généralisé n'est pas nécessairement résoluble même dans une sphère.[7] Pour l'éviter, *nous abandonnerons une fois pour toutes le cas où les zéros donnés remplissent une portion de l'espace.*

À l'égard de la convention, faisons une remarque. Soit F_1, F_2 deux fonctions continues dans le domaine D, équivalentes en tout point de

[5]Dans le présent Mémoire, les domaines seront sous-entendus être univalents et dans un espace fini, et les fonctions être uniformes, pourvu que la réciproque ne soit pas indiquée explicitement.

[6]Nous appliquerons la même définition à deux fonctions continues sur un ensemble quelconque de points dans l'espace fini.

[7]En effet, considérons dans l'espace des trois variables réelles x, y, z deux sphères de centre $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$ et de rayon 1. On peut trouver une infinité de fonctions continues et réelles dans l'espace fini, qui s'annulent dans chacune des sphères, sans l'être à l'extérieur de toutes les deux. Soit $\psi(x, y, z)$ une des fonctions. Nous attacherons en tout point (x, y, z) de l'espace fini une sphère (γ) autour du point et de rayon ρ et une fonction $f(x, y, z)$ de telle manière que :

$$f(x,y,z) = \psi(x,y,z) \qquad \textit{pour} \quad |z| \geq 1,$$
$$f(x,y,z) = (x+iy)\psi(x,y,z) \qquad \textit{pour} \quad |z| < 1,$$

i étant l'unité imaginaire. Pour le rayon ρ suffisamment petit, la condition d'équivalance est sans doute remplie, mais il n'existe aucune fonction continue admettant les zéros donnés dans la sphère de centre $((0))$ et de rayon 3.

D. Ces fonctions ne sont pas en général équivalentes dans le domaine;[8] mais, elles le sont certainement, si l'ensemble de points pour lesquels elles s'annulent n'admet aucun point intérieur. En effet, F_1 et F_2 étant équivalentes en un point P de D, on trouve la relation $F_1 = F_2\lambda$ au voisinage de P, λ étant continue et non-nulle. Or, grâce à l'hypothèse, λ est déterminée uniquement au voisinage de P; et ceci pour tout P dans D. D'où, il s'ensuit l'éguivalence globale.

Considérons des zéros $(\mathfrak{z})$ dans le domaine D, et représentons D sur un autre domaine D' dans le même espace par une transformation bi-univoque et bicontinue. Le mécanisme définissant $(\mathfrak{z})$ est alors transporté dans D', et engendre évidemment des nouveaux zéros dans D', soit $(\mathfrak{z}')$. Dans cette circonstance, si notre problème est résoluble pour D et $(\mathfrak{z})$, il l'est sans doute pour D' et $(\mathfrak{z}')$, et réciproquement. Ainsi, *le problème généralisé admet les transformations topologiques.*

2. Exemple. — Considérons l'espace des deux variables complexes x, y, et dans lequel un domaine cylindrique (Γ, Γ') de la forme

$$r < |x| < 1, \qquad r' < |y| < 1,$$

où la somme des rayons, $r+r'$ sera supposée plus grande que 1. La surface caractéristique $y = x - 1$ se décompose dans (Γ, Γ') en deux morceaux, dont l'un est situé au-dessus des axes réels, et l'autre au-dessous d'eux; soit (σ) le premier morceau.

Supposons une fonction continue $F(x, y)$ dans (Γ, Γ'), équivalente à $f(x, y) = y - x + 1$ au voisinage de (σ) et équivalente à 1 à l'extérieur de (σ). Considérons dans la couronne Γ' les points ξ_1 et ξ_2, dont ξ_1 est situé sur l'axe réel et positif, et ξ_2 sur l'axe réel et négatif; traçons dans la couronne Γ' une circonférence C' autour de l'origine. Comme $F(\xi_1, y)$ ne s'annule pas sur C', on peut calculer la variation de l'argument de F sans ambiguïté, lorsque le point y trace C' une fois, au sens positif; que nous désignerons par $V(F, \xi_1)$;[9] nous appliquerons la notation au cas général. On pout calculer pareillement $V(F, \xi_2)$. Soit x' un point de Γ situé au-dessous de l'axe réel, mains d'ailleurs quelconque; $F(x', y)$ ne s'annule jamais dans Γ'; d'où il résulte que

$$V(F, \xi_1) = V(F, \xi_2).$$

[8] Les deux fonctions $\psi(x, y, 1)$ et $(x + iy)\psi(x, y, 1)$ sont équivalentes en tout point du cercle $x^2 + y^2 < 2$; mains elles ne sont pas ainsi dans le cercle.

[9] Ceci est évidemment fini.

D'un autre côté, soit A l'ensemble de poins de Γ, situés au-dessus de l'axe réel ou sur lui; puisque les fonctions $F(x,y)$ et $f(x,y)$ sont équivalentes en tout point de (A,Γ'), il existe une fonction $\lambda(x,y)$ continue et non-nulle sur (A,Γ') et telle qu'on y ait identiquement $F=f\lambda$. Pour cette λ, on a

$$V(\lambda,\xi_1)=V(\lambda,\xi_2).$$

Quant à f, puisque elle est égale à $y-x+1$,

$$V(f,\xi_1)=2\pi, \qquad V(f,\xi_2)=0$$

$$\therefore\ V(f,\xi_1)=V(f,\xi_2)+2\pi.$$

Ceci contredit l'égalité établie plus haut; donc, F n'existe pas. Nous avons ainsi vu que *le problème généralisé n'est pas nécessairement résoluble dans le domaine* (Γ,Γ').

Remarque—Nous avons retrouvé à la fois que *le deuxième problème de Cousin n'est pas toujours résoluble même dans un domaine d'holomorphie.*

3. Problème généralisé dans un domaine cylindrique.—Pour éviter la complication d'intervenir dès l'abord, nous étudierons cette fois le problème généralisé dans les domaines cylindriques.

A l'espace des n variables complexes $x_1,x_2,\dots,x_n$, considérons le domaine cylindrique $(X_1,X_2,\dots,X_n)$, X_i étant un domaine sur le plan x_i; nous le désignerons simplement par $((X))$. Or, de l'exemple précédent, il s'ensuit immédiatement que, *si deux au moins des X_i sont multiplement connexes, le problème généralisé n'est pas nécessairement résoluble.* Supposons donc que *tous les X_i soient simplement connexes, sauf un au plus*, toujours dans ce qui suit; et demandons-nous si le problème est résoluble pour $((X))$.

1^o.—Sur le plan x_1, traçons le réctangle R, que nous décomposerons en petits réctangles égaux (ω_i) par deux systèmes de lignes droites parallèles aux côtés de R. Soit A_1 un domaine fermé consistant d'un ou plusieurs de (ω_i) et des contours, soit A_2 un domaine fermé consistant d'un des (ω_i) contigus à A_1 et du contour. Nous désignerons la frontière commune de A_1 et A_2 par L, et le domaine fermé consistant de A_1 et A_2 par A. Dans l'espace $(x_2,x_3,\dots,x_n)$, traçons un domaine B.

Dans la suivante, nous sous-entendrons que le point $(x_2,\dots,x_n)$ se situe dans le domaine B. Soit f_1, f_2 deux fonctions continues des n variables x_i, définies au voisinage de A_1[10] et à celui de A_2, respectivement,

[10] C'est-à-dire, dans un certain domaine contenant A_1.

et globalement équivalentes au voisinage de L. Dans cette condition, on peut trouver une fonction continue des n variables x_i, définie au voisinage de A, et équivalente à l'une au mains des fonctions données en tout point de A, *si L ne coïncide pas le contour entier du réctangle A_2, et encore si B est linéairement simplement connexe.*

En effet, les fonctions données f_1, f_2, étant globalement équivalentes, satisfont à la relation $f_1 = f_2\lambda$, λ étant une fonction des n variables x_i, continue et non-nulle au voisinage de L. Proposons-nous de trouver une fonction μ des n variables, continue et non-nulle au voisinage du réctangle fermé A_2, et égale à λ au voisinage de L.

Ceci serait généralement impossible, si L coïncidait le contour entier, ou bien si B était linéairement multiplement connexe.[11] Mais, au cas actuel, ceci est immédiat, puisque toute détermination de $\log\lambda$ est uniforme au voisinage de L. Posons au voisinage de A_1

$$F((x)) = f_1((x)),$$

et

$$F((x)) = f_2((x))\mu((x))$$

au voisinage de A_2. La fonction F jouit évidemment des propriétés demandées. C.Q.F.D.

4. 2°.— Étant donnes des zéros ($\mathfrak{z}$) dans le domaine cylindrique $((X))$, à tout domaine Δ à l'intérieur de$((X))$[12] correspond une fonction continue admettant ($\mathfrak{z}$) pour zéros dans le domaine Δ.

C'est la conséquence immédiate de la proposition précédente, puispue tous les X_i sont supposés simplement connexes, sauf un au plus, et encore que les zéros donnés sont supposés ne remplir aucune portion de l'espace.

3°.—On peut trouver toujours une fonction continue admettant les zéros donnés dans le domaine cylindrique $((X))$.

C'est le prolongement de fonctions non-nulles du mode suivant qui deviendra la question pour démontrer la proposition: Soit $\lambda(z)$ une fonction continue et non-nulle de la variable complexe z dans $1 \leq |z| \leq 2$; proposons-nous de prolonger $\lambda(z)$ jusqu'à $0 < |z| < \infty$, sans cesser d'être continue et non-nulle. Ceci sera atteint en prolongeant la fonction, par

[11] Le premier cas est évident. Pour le deuxième cas un exemple sera donné immédiatement d'après ce que nous avons vu au numéro précédent.

[12] Cela veut dire que Δ est contenu avec sa frontière dans $((x))$.

exemple, le long de chaque demi-droite issue de l'origine, sans changer les valeurs initiales.

Considérons dans l'intérieur de chaque X_i, un domaine X_i' délimité par une ou plusieurs courbes de Jordan simples fermées et sans point commun, de façon que chacune des courbes, si elle est entourée par une autre, contienne au moins un point qui ne fait partie de X_i. On peut construire le domaine cylindrique $((X'))$ de manière qu'il contienne un domaine donné à priori dans l'intérieur de $((X))$. Nous aurons ainsi une suite de domaines cylindriques $((X^p))$ du caractère indiqué, $(p = 1, 2, \ldots)$, tendant vers $((X))$; dont nous supposerons que chacun soit contenu dans l'intérieur du suivant.

Soit $(\mathfrak{z})$ les zéros donnés dans $((X))$. En vertu de la proposition précédente, à tout p correspond une fonction continue $F((x))$ admettant $(\mathfrak{z})$ pour zéros au voisinage du domaine fermé $((X^p))$. Il s'agit de construire une fonction continue $F((x))$ admettant les zéros $(\mathfrak{z})$ dans le domaine $((X))$, que nous allons faire successivement comme ce qui suit: Pour le domaine fermé $((X^1))$, posons

$$F((x)) = F_1((x))$$

Passons à $((X^2))$. Les deux fonctions F_1 et F_2, étant équivalentes sur $((X^1))$ fermé, satisfont à la relation $F_1 = F_2\lambda$, λ étant une fonction continue et non-nulle sur $((X^1))$ fermé. On peut sans doute prolonger cette fonction λ jusqu'à $((X))$, sans perdre la propriété. Soit μ le prolongement; posons

$$F((x)) = F_2((x))\mu((x))$$

La nouvelle F est le prolongement continu de l'ancienne, elle admet les zéros donnés au voisinage du domaine fermé $((X^2))$. Répétant le même procédé pour $((X3))$, $((X4))$, $\ldots$, nous obtiendrons la fonction demandée. C.Q.F.D.

LEMME I—*Soit* $((X))$ *un domaine cylindrique univalent dans l'espace fini* $((x))$. *Pour que le problème généralisé soit résoluble dans* $((X))$, *toujours excepté le cas dont les zéros, donnés remplissent une portion de l'espace* $((x))$, *il faut et il suffit que tous les* X_i *soient simplement connexes, sauf un au plus.*

5. Définitons.—Nous étudierons dès maintenant le deuxième problème de Cousin dans les domaines d'holomorphie à l'aide de ce que nous venons de voir.

Considérons le domaine D dans l'espace des n variables complexes x_i. Des zéros $(\mathfrak{z})$ donnés dans D seront appelés *analytiques*, si à tout point de D, correspond une fonction holomorphe (des variables x_i) admettant $(\mathfrak{z})$ pour zéros au voisinage du point. Le deuxième problème de Cousin consiste à trouver une fonction holomorphe admettant les zéros analytiques donnés dans D, dont les solutions seront par fois appelées analytiques pour distinguer de celles du problème généralisé.

Introduisons la notion auxiliaire suivante: Des zéros $(\mathfrak{z})$ donnés dans D seront appelés *balayables*, s'il correspond pour tout point P de D, une hypersphère (γ) de centre P et une fonction continue $f((x),t)$ sur $[(\gamma), 0 \leq t \leq 1]$, de telle façon que:

1^o $f(x),0)$ admette $(\mathfrak{z})$ pour zéros, et $f((x),1)$ soit non-nulle;

2^o $f((x),t)$ ne s'annule identiquement dans aucune portion à $(2n+1)$ dimensions;

3^o pour toute paire de hypersphères contigues $(\gamma_1), (\gamma_2)$, les fonctions correspondantes $f_1((x),t), f_2((x),t)$ soient équivalentes sur $[(\delta), 0 \leq t \leq 1]$, (δ) étant la partie commune de (γ_1) et (γ_2).

La deuxième condition est inévitable, puisque sans cela, tous les zéros deviendraient balayables.[13] Soient $F_1((x),t), F_2((x),t)$ des fonctions continues sur $[\Delta, 0 \leq t \leq 1]$, Δ étant un domaine quelconque dans D, et équivalentes à une au moins des fonctions $f((x),t)$ lorsque $((x))$ reste au voisinage d'un point quelconque de Δ et t sur l'intervalle fermé. Grâce à la même condition, il résulte alors que F_1 et F_2 sont globalement équivalentes sur $[\Delta, 0 \leq t \leq 1]$.

S'il existe une fonction continue admettant les zéros donnés dans D, les zéros sont nécessairement balayables. En effet, soit $F((x))$ la solution. Posons

$$f((x),t) = (1-t)F((x),t) + t;$$

et nous trouvons les trois conditions remplies.

C'est la réciproque dont nous nous occuperons dans la suivante.

[13]En effet, soit $f((x))$ une quelconque des fonctions attachées, posons $f((x),t) = (1-3t)f((x)), = 0, = (3t-2)$, selon que $0 \leq 3t \leq 1, 1 \leq 3t \leq 2, 2 \leq 3t \leq 3$. Les fonctions $f((x),t)$ ainsi acquises satisfont aux première et troisième conditions.

6. Proposition préliminaire.—De l'exemple exposé dans l'introduction, nous allons extraire une proposition dont nous ferons souvent usage dans la suivante.

Soit D un domaine à l'espace $((x))$, et $\lambda((x))$ une fonction continue et non-nulle dans D. Nous appellerons $\lambda((x))$ de satisfaire à *la coudition* (α) dans le domaine, s'il existe une fonction $\lambda((x), t)$ pour $(D, 0 \leq t \leq 1)$, continue non-nulle et telle que

$$\lambda((x), 0) = \lambda((x)), \qquad \lambda((x), 1) = 1.$$

Si les $\log \lambda((x))$ sont uniformes dans D, la condition (α) est nécessairement remplie, pour l'affirmer il suffit de poser

$$\lambda((x), t) = e^{(1-t)\log \lambda((x))}.$$

Supposons réciproquement que la condition (α) soit remplie pour la fonction $\lambda((x))$ dans le domaine D; soit $\lambda((x), t)$ une des fonctions qui le réalisent. Traçons la courbe fermée C dans D. Lorsque$((x))$ parcourt C à un sens déterminé et t reste à un point fixe de $0 \leq t \leq 1$, la variation de l'argument de $\lambda((x), t)$ sera calculée sans ambiguïté puisque $\lambda((x), t)$ ne s'annule jamais; nous désignerons la variation par $V(t)$. Ceci est une fonction continue de la variable t sur $0 \leq t \leq 1$; les valeurs qu'elle peut prendre sont discrètes; elle est donc une constante, et spécialement $V(0) = V(1)$.

Or, pour $t = 1$ on a identiquement $\lambda = 1$, $V(1)$ est donc égale à zéro, et $V(0)$ l'est aussi; et ceci quel que soit C. Toute détermination de $\log \lambda((x))$ est donc uniforme dans D.

Nous avons ainsi établi la proposition suivante: *Pour que toute détermination de* $\log \lambda((x))$ *soit uniforme dans* D*, il faut et il suffit que* $\lambda((x))$ *remplisse la condition* (α) *pour* D.

7. Zéros balayables. 1^o.—Retraçons sur le plan x_1 la figure du N^o 3: les rectangles R, (ω_i), les domains fermés A, A_1, A_2 et la frotière commune L de A_1 et A_2. Considérons l'ensemble fermé Δ à l'espace fini $((x))$.

Dans ce qui suit, nous sous-entendrons toujours que $((x))$ reste au voisinage de Δ et t sur l'intervalle fermé $(0, 1)$. Soit f_1 une fonction continue des variables x_i, t, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, au voisinage de A_1 *analytique pour* $t = 0$ *et identique à* 1 *pour* $t = 1$. Soit f_2 une fonction ayant le même caractère au voisinage de A_2. Supposons que f_1 et f_2 soient globalement équivalentes au voisinage de L comme fonctions des $n+1$ variables. Nous allons montrer que :

On peut trouver une fonction continue des $n+1$ variables ayant le caractère indiqué au voisinage de A et équivalentes à une au moins des fonctions données en tout point $((x))$, t étant sur $(0,1)$, si L ne coïncide pas le contour entier du réctangle A_2, et encore *si* Δ *appartient à la classes* (P_1)

En effet, comme f_1 et f_2 sont globalement équivalentes, on a la relation

$$f_1((x),t) = f_2((x),t)\lambda((x),t)$$

dont λ est une fonction continue et non-nulle au voisinage de L; d'où, il s'ensuit que $\lambda((x),0)$ est analytique et $\lambda((x),1)=1$. D'après la proposition précédente $\log\lambda((x),0)$ est donc uniforme, détermination étant une quelconque. Ainsi, $\log\lambda((x),0)$ est une fonction holomorphe au voisonage de L; Δ est un ensemble de la classe (P_1). Grâce à ce que nous avons vu au N9 3 du Mémoire I, on peut donc trouver deux fonctions holomorphes $\varphi((x)$, $\varphi((x))$ au voisinage de A_1 et à celui de A_2, respectivement, ayant au voisinage de L la relation

$$\varphi_1((x)) - \varphi_2((x)) = \log\lambda((x),0).$$

Posons

$$f_1((x),t)e^{(t-1)(\varphi_1+2k\pi i)} = \mu((x),t)f_2((x),t)e^{(t-1)\varphi_2},$$

k étant un nombre entier convenable dépendant des domaines. La fonction μ est continue et non-nulle au voisinage de L; elle se réduit à 1 pour $t=0$, ou pour $t=1$. I1 s'agit de touver une fonction $\nu((x),t)$ ayant le même caractère que μ au voisinage du rectangle fermé A_2, et identique à μ au voisinage de L. En vertu de la proposition préliminaire, toute détermination de $\log\mu((x),t)$ est uniforme; ν existe donc certainement. Posons

$$F((x),t) = f_1((x),t)e^{(t-1)\varphi_1}$$

ou

$$F((x),t) = \nu((x),t)f_2((x),t)e^{(t-1)\varphi_2},$$

selon que x_1 se situe au voisinage de A_1 ou à celui de A_2. La fonction F satisfait à la condition posée. C.Q.F.D.

8. 2^o—Considérons le *domaine d'holomorphie* D à l'espace $((x))$. Construisons une suite d'ensembles fermés,

$$(S) \qquad \Delta_1,\, \Delta_2,\, \dots,\, \Delta_p,\, \dots,$$

tendant de l'intérieur vers D, telle que tout Δ_p soit de la forme

$$|x_i| \leq r_{pi}, \quad |g_{pj}((x))| \leq 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p'),$$

où r_{pi} sont des constantes positives, et $g_{pi}((x))$ des fonctions holomorphes dans D. Grâce à MM. H. Cartan et P. Thullen; (S) existe toujours. Nous supposerons pour fixer l'idée que chaque Δ_p consiste des points intérieurs de Δ_{p+1}.

Considérons dans le domaine D les zéros $(\mathfrak{z})$ *analytiques et baloyables*. Il correspond alors, pour tout point P du domaine une hypersphère (γ) de centre P, une fonction holomorphe $\varphi((x))$ admettant les zèros $(\mathfrak{z})$ dans (γ) et une fonction $f((x), t)$ satisfaisant aux trois conditions formulées à N^o 5 pour $[(\gamma), (0, 1)]$. Or, on peut toujours supposer que f devienne analytique pour $t = 0$ et se réduise à 1 pour $t = 1$. En effet, $\varphi((x))$ et $f((x), 0)$ sont équivalentes dans (γ); $f((x), 1)$ est non-nulle. Donc, si l'on pose

$$\varphi((x)) = \frac{f((x), 0)}{f((x), 1)} \lambda((x)),$$

λ est une fonction continue et non-nulle dans (γ); elle remplit la condition (α) pour (γ), puisque (γ) est simplement connexe. Soit $\lambda((x), t)$ la fonction qui la réalise; posons

$$\varphi((x), t) = \frac{f((x), t)}{f((x), 1)} \lambda((x), t).$$

Les fonctions $\varphi((x), t)$ jouissent des propriétés demandées; que nous désignerons de nouveau par $f((x), t)$.

Nous allons montrer que : À tout Δ_p de la suite (S) correspond une fonction continue $F_p((x), t)$ au voisinage de Δ_p, équivalente à une au mains des fonctions $f((x), t)$ en tout point de Δ_p, t étant sur $(0, 1)$, devenant holomorphe pour $t = 0$ et réduite à 1 pour $t = 1$.

Quand les Δ_p font partie de (P_1), ceci est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Considérons le cas général. En vertu du théorème I exposé au Mémoire II, l'ensemble fermé Σ,

$$y_j = g_{pj}((x)), \qquad ((x)) \in \Delta_p,\ (j = 1, \dots, p'),$$

appartient toujours à la classe (P_1) de l'espace $((x, y))$. Posons-nous donc le problème actuel dans l'espace $((x, y))$, en regardant les fonctions $f((x), t)$ comme données au voisinage de Σ. Ceci étant le cas précédent, il existe une fonction continue $\Phi((x, y), t)$ jouissant despropriétés indiquées plus haut, au voisinage de Σ. Substituant $y_j = g_{p_j}((x))$ dans Φ, nous obtenons la fonction demandé.

9. 3°.—À partir de la suite de fonctions ainsi acquises

$$F_1((x), t),\ F_2((x), t), \ \ldots\ ,\ F_p((x), t), \ \ldots\ ,$$

nous allons construire une fonction holomorphe $\Phi((x))$ admettant (σ) pour zéros dans le domaine D.

Soit ε_p, $(p = 1, 2, \ldots)$, une suite de nombres positifs telle que la série $\sum \varepsilon_p$ soit convergente. D'abord, posons

$$\Phi_1((x)) = F_1((x), 0),$$

Φ_1 est une fonction holomorphe admettant (σ) pour zéros au voisinage de Δ_1.

Les fonctions $F_1((x), t)$, $F_2((x), t)$ sont globalement équivalentes au voisinage de Δ_1, puisqu'elles admettent les mêmes zéros ne remplissant aucune portion de l'espace $((x), t)$; donc, si l'on pose

$$F_1((x), t) = F_2((x), t)\lambda_1((x), t),$$

la fonction λ_1 est continue et non-nulle au voisinage de Δ_1, t étant sur $(0, 1)$; elle devient holomorphe pour $t = 0$, et se réduit à 1 pour $t = 1$. Donc, $\log \lambda_1((x), 0)$ est holomorphe au voisinage de Δ_1, détermination étant une quelconque. Grâce à ce qui est exposé au N^o 5 du Mémoire II, on peut donc trouver une fonction holomorphe $\varphi_1((x))$ dans le domaine D, remplissant au voisinage de Δ_1 la condition

$$|\varphi((x)) - \log \lambda_1((x), 0)| < \varepsilon_1.$$

Posons

$$\Phi_2((x)) = F_2((x), 0)\, e^{\varphi_1}.$$

Φ est une fonction holomorphe admettant les zéros (σ) au voisinage de Δ_2; on trouve que

$$e^{-\varepsilon_1} < \left|\frac{\Phi_2((x))}{\Phi_1((x))}\right| < e^{\varepsilon_1},$$

au voisinage de Δ_1; les logarithmes de Φ_2/F_3 sont holomorphes pour $t=0$ au voisinage de Δ_2.

À partir de la dernière propriété de Φ_2, nous formons une fonction holomorphe $\Phi_3((x))$ au voisonage de Δ_3, remplissant la condition

$$e^{-\varepsilon_2} < \left|\frac{\Phi_3((x))}{\Phi_2((x))}\right| < e^{\varepsilon_2}$$

au voisinage de Δ_2, et telle que les logarithmes de Φ_3/F_4 soient holomorphes pour $t=0$ au voisinage de Δ_3; et ainsi de suite. La limite de la suite de fonctions ainsi acquises donne bien la fonction voulue.

Nous avons ainsi établi la proposition suivante :

Lemme II.—*Étant donnés des zéros analytiques et balayables dans un domaine univalent d'holomorphie sans point à l'infini, on peut trouver une fonction holomorphe admettant les zéros dans le domaine.*

Remarque.—Signalons pour le problème généralisé la proposition correspondante. *Étant donnés des zéros balayables dans un domaine univalent à l'espace fini de plusieurs variables complexes, on peut trouver une fonction continue admettant les zéros dans le domaine.*[14] On peut le démontrer tout analogiquement et même plus simplement.

10. Théorème I. —*Étant donnés des zéros analytiques dans un domaine d'holomorphie, univalent et sans point à l'infini, s'il existe la solution non-analytique, la solution analytique l'est aussi.*

C'est une conséquence immédiate du lemme II, puisque les zéros admettant une solution continue sont nécessairement balayables.

Théorème II.—*Soit* Γ *un domaine cylindrique univaleut à l'espace fini de plusieurs variables complexes, dont toutes les projections sur les plans des variables soient simplement connexes, sauf une au plus. Pour un domaine univalent d'holomorphie dans le même espace fini, que l'on peut ramener à* Γ *par une transformation topologique, le deuxième problème de Cousin est toujours résoluble.*

Car, le problème généralisé est toujours résoluble pour Γ, d'après le lemme I; il en est par suite de même pour le domaine d'holomorphie.

[14]N'importe si les zéros donnés remplissent une portion de l'espace, ou non.