# Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

## IV.—Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes.

Par
Kiyoshi Oka

(Reçu le 27 Mars, 1940.)

Comme nous l'avons dit, le sujet des recherches actuelles consiste des problèmes suivants; problèmes de Cousin, représenter les fonctions holomorphes et classifier les domaines.[1] Dans le présent Mémoire, nous nous occuperons du dernier problème.[2]

**1.** Dans l'espace $((x))$ tracé par les variables complexes $x_1, x_2, \ldots,$ $x_n$, considérons les domaines, que nous supposons toujours, dans les recherches actuelles, univalent et sans point à l'infini, pour éviter les complications d'intervenir dès l'abord. En classifiant les domaines ayant *le type trouvé par F. Hartogs, d'après la méthode de M. H. Cartan*, puis en simplifiant la classification, nous obtenons les types suivants :

( I ) Domaine cylindrique.
( II ) Domaine rationnellement convexe.
(III) Domaine d'holomorphie.
(IV) Domaine pseudoconvexe.

Un domaine $D$ sera appelé *rationnellement convexe*, s'il est convexe par rapport aux fonctions rationnelles qui sont holomorphes dans $D$, ou bien si $D$ est approximatif de l'intérieur par les domaines de la classe précédente.

Considérons un domaine borné $D$. Soit $E$ l'ensemble consistant des points de l'espace fini $((x))$ qui n'appartiennent pas à $D$. Si, au voisinage d'un point quelconque $P$ sur la frontière de $D$, l'ensemble

[1]Pour ces problèmes, voir avant tout:
G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, 1926. (Acta mathematica.)

[2]Les 3 Mémoires précédents sont les suivants :
I —Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936.
II —Domaines d'holomorphie, 1937.
III—Deuxième problème de Cousin, 1939. (Journal of Science of the Hirosima University.)

$E$ satisfait au théorème de la continuité,[3] et si cette propriété admet toute transformation pseudoconforme biunivoque au voisinage de $P$, $D$ sera appelé *pseudoconvexe*. Plus généralement, nous appellerons pseudoconvexe tout domaine approximatif de l'intérieur par les domaines du caractère précédent.

Les 4 types fondamentaux satisfont aux relations suivantes :

$$(\mathrm{I}) < (\mathrm{II}) \leq (\mathrm{III}) \leq (\mathrm{IV}).$$

C'est-à-dire, les domaines des types s'emboîtent les uns dans les autres; les 2 dernières distinctions ne sont que provisoires.[4] Il peut arriver qu'il n'existe que 2 types, (I) et (II). *Voici donc 2 problèmes* : (II) $\leq$ (III)? et (III) $\leq$ (IV)? Le deuxième sera traité plus tard. Dans le présent Mémoire, nous nous occuperons du premier.

2. A l'espace des deux variables complexes $x$, $y$, considérons la dicouronne

$$(\Gamma, \Gamma') \qquad r < |x| < 1, \qquad r' < |y| < 1;$$

considérons à la fois le plan caractéristique

$$y = x - 1.$$

La portion de la caractéristique dans la dicouronne sera décomposé en deux morceaux (continus), si les rayons satisfont à la relation

$$r + r' > 1.$$

Considérons ce cas. Un des morceaux consiste des points $(x', y')$ tels que $x'$ ainsi que $y'$ se situent dans le demi-plan supérieur; que nous désignerons par $(\sigma)$.[5]

Construisons une fonction $G(x, y)$, méromorphe dans $(\Gamma, \Gamma')$, admettant

---

[3] Ceci signifie qu'il existe une hypersphère $S$ de centre $P$, ayant le caractère suivant: Considérons dans $S$ un point quelconque $((a))$ et une circonférence de la forme, $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}, |x_n - a_n| = r$ $r$, étant un rayon quelconque. Si cette circonfèrence reste extérieur à $E$, sans l'être pour le point $((a))$, on peut trouver un nombre positif $d$ de façon que, à tout point $(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ dans $|x_k - a_k| < d$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ corresponde au moins un point $x_n^0$ dans $|x_n - a_n| < r$ tel que le point $((x^0))$ appartienne à E.

[4] Dans le, Mémoire I, nous avons cherché la méthode pour (II) $\to$ (I); et dans le Mémoire II, pour (III) $\to$ (II).

[5] C'est la configuration que nous avons appliquée une fois, au deuxième problème de Cousin.

$$\frac{1}{y-x+1}$$

pour pôles sur $(\sigma)$, et holomorphe en dehors de $(\sigma)$; $G(x,y)$ existe certainement d'après le théorème de Cousin. Avec cette $G$, construisons l'ensemble de points de la forme,

$$(A) \qquad r < |x| < 1, \qquad r' < |y| < 1,$$

$$|G(x,y)| < M,$$

dont $M$ est un nombre positif que nous déterminerons plus tard. L'ensemble $A$ est ouvert; il consiste des domaines d'holomorphie.

Choisissons un nombre positif $d$ comme suivant,

$$6d < 1 - r';$$

traçons sur le plan $x$, une circonférence $C$ autour de l'origine avec la moitie de $(1+r)$ pour rayon; et sur le plan $y$ la couronne

$$(\Gamma'_0) \qquad r' + d < |y| < 1 - d.$$

Soit $(x', y')$ un point quelconque de $(\sigma)$; sur le plan caractéristique $x = x'$ décrivons un cercle $(\gamma_{x'})$ de centre $y'$ et de rayon $d$; $(\gamma_x)$ est déterminé uniquement, s'il existe, par $x$. Soit $E$ l'ensemble de points consistant de tous les cercles $(\gamma_{x'})$. Soit, à nouveau, $(x', y')$ un point appartenant à l'ensemble,

$$|x| = \frac{1+r}{2}, \qquad r' + d \leq |y| \leq 1 - d,$$

sans l'être à $E$; l'ensemble consistant de tous les $(x', y')$ sera désigné par $F$. $F$ est un continium; $F$ est contenu dans $(\Gamma, \Gamma')$; à un point quelconque de $F$, $G(x,y)$ est holomorphe; $A$ contient donc $F$, pourvu que $M$ soit suffisamment grand. *Nous appellerons* $A_0$ *le domaine appartenant à* $A$ *et contenant* $F$. Nous allons démontrer que *le domaine d'holomorphie* $A_0$ *n'est pas rationnellement convexe.*

Supposons $A_0$ rationnellement convexe. Alors, grâce au théorème de Weil expliqué au No. 4 du Mémoire I, on peut représenter la fonction $G(x,y)$ au voisinage de $F$ [6] comme limite d'une suite de fonctions holomorphes rationnelles.

$$(S) \qquad f_1(x,y),\ f_2(x,y),\ \ldots,\ f_n(x,y),\ \ldots,$$

[6] Nous appelons que certain phénomène se présente au voisinage d'un ensemble $E$, s'il en est ainsi pour un certain ensemble ouvert contenant $E$ avec ses points d'accumulation,

qui converge uniformément.

Soit $\xi$ un point sur la circonférence $C$ tel que $(\gamma_\xi)$ soit contenu dans la couronne $\Gamma_0'$; $\xi$ existe certainement, puisque la distance entre les deux frontières de $\Gamma_0'$ surpasse $4d$, et au contraire le rayon de $(\gamma_\xi)$ est égale à $d$; soit $\eta$ le centre du cercle. Alors, dans la suite

$$(S') \qquad f_1(\xi, y),\ f_2(\xi, y),\ \ldots,\ f_n(\xi, y),\ \ldots,$$

on trouve toujours au moins une fonction admettant des pôles dans $(\gamma_\xi)$ du plan $y$. En effet, si non, toute fonction de $(S')$ serait holomorphe dans $(\gamma_\xi)$. Or, elle est à priori holomorphe au voisinage de la circonférence, puisque la circonférence, considérée à l'espace, appartient à $F$; et, d'après la même raison, la suite $(S')$ converge uniformément vers $G(\xi, y)$ sur la circonférence. $G(\xi, y)$ serait donc, holomorphe dans le cercle, contredisant le pôle $1/(y - \xi + 1)$ au centre du cercle. Soit donc, $f_m(\xi, y)$ une fonction de $(S')$ admettant des pôles dans $\gamma_\xi$; Posons

$$f_m(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

$\varphi$ et $\psi$ étant 2 polynomes sans facteur commun.

Soit $(x', y')$ un point jouissant de la même propriété que $(\xi, \eta)$, mais d'ailleurs quelconque. Considérons l'équation

$$\psi(x, y) = 0,$$

dont nous regarderons $x$ comme variable indépendante. $\psi(x, y)$ étant non-nulle sur $F$, lorsqu'on fait tracer à $x$ l'arc de $C$ de $\xi$ à $x'$, aucune des racines de l'équation ne sort du cercle $(\gamma_{x'})$; l'équation $\psi(x', y) = 0$ possède conséquemment, au moins une racine dans le cercle $(\gamma_{x'})$ du plan $y$, $x'$ étant quelconque; le nombre de racines est indépendant de $x'$, que nous désignerons par $\lambda$.

Traçons sur le plan $y$, autour de l'origine une circonférence $C'$ avec la moitie de $(1 + r')$ pour rayon. $x'$ décrivant la circonférence $C$ une fois au sens positif, le cercle $(\gamma_{x'})$ du plan $y$ traverse $C'$ une fois de l'intérieur du cercle $(C')$ à l'extérieur. Or, le rayon de $(\gamma_{x'})$ est égale à $d$; la distance de la circonférence $C'$ à la frontière de $\Gamma_0'$ surpasse 2d; le cercle $(\gamma_{x'})$ est donc, contenu dans $\Gamma_0'$ avec la circonférence, au moment où il traverse $C'$.

C'est très curieux. Car, alors, $x$ décrivant $C$ une fois au sens positif, $\lambda$ racines de l'équation algébrique $\psi = 0$ dans $(C')$ quitterons se cercle; c'est naturellement absurde. Donc, $A_0$ n'est pas rationnellement convexe.

THÉORÈME.— *Un domaine d'holomorphie n'est pas nécessairement ratiannellement convexe, même s'il est univalent (et sans poinit à l'infini).*

C'est la base du *théorème I établi* au Mémoire II: Nous avons affirmé à la fois que *la convexité de M.H. Cartan*[7] et *le théorème MM. H. Cartan et P. Thullen*[8] (Hauptsatz über die gleichzeitige Forsetzbarkeit) sont indispensables déjà pour les domaines univalents. Le théorème montre de plus qu'il est généralement impossible de développer les fonctions holomorphes dans un domaine d'holomorphie univalent et sans point à l'infini, en séries de fonctions rationnelles (holomorphes dans le domaine ou non) qui converge uniformément à l'intérieur du domaine.[9] Autrement dit, *le théorme de Runge* ne subsiste plus pour les domaines univalents d'holomorphie le plus général.

**Errata.**

*Mémoire* I. L'ensemble ouvert $D'$ donné à la page 249 (No. 2) n'est pas nécessairement contenu dans l'intérieur de $D$. C'est un phénomène qui se présente à cause des points d'indétermination. Pour l'éviter, nous procéderons comme ce qui suit : $1^o$. La raisonnement du Mémorie I est exact pour les polynomes. $2^o$. On peut donc constater le théorème au No. 4 et le théorème I tout analogument qu'au No. 5 du Mémoire II dont le théorème I du Mémoire II est évident pour les fonctions rationnelles. $3^o$. On peut donc constater le théorème II, sans modifier la démonstration donnée au No. 5.

*Mémoire* II. Page 117. Adjoindre à la proposition la condition que $f((x), t)$ soit une fonction uniforme et continue sur $((x)) \in \bar{U}, 0 \leq t \leq 1$, dont $\bar{U}$ signifie le domaine fermé consistant de $U$ et de sa frontière, $U$ étant conséquemment supposé borné.

*Mémoire* III. Page.16. Remplacer la troisième formule par

$$f_1((x), t)e^{(1-t)(\varphi_1+2k\pi i)} = \ \cdots$$

$k$ étant un nombre entier convenable dépendant des domaines.

Page 19. Remplacer ≪*La limite*≫ à la troisième ligne par ≪Toute limite≫.

[7] H. Cartan: Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes, 1931. (Bull. Soc. Math. France.)

[8] H. Cartan und P. Thulien: Regularitäts- und Konvergenzbereiche, 1932. (Math. Annalen.)

[9] Nous appelons qu'un phénomène se présente à l'intérieur d'un domaine $D$, s'il en est ainsi pour tout domaine contenu avec sa frontière dans $D$.