Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

V. L'intégrale de Cauchy.

Par

Kiyosi OKA.

(reçu le 27, Mars, 1940.)

Dans le présent Mémoire, nous nous occuperons du problème de représenter les fonctions holomorphes dans un domaine univalent d'holomorphie. Or, comme nous l'avons vu, à l'aide des séries de fonctions rationnelles, ceci est généralement impossible. Nous passerons donc, aux intégrales de Cauchy, précisément dit, à l'intégrale de M.A. Weil.

1. L'intégrale de Weil. Nous commençons par expliquer l'intégrale de M. Weil en citant une partie de son Mémoire,[1] mot par mot.

≪Soit dans un domaine D (univalent et borné) de l'espace des deux variables complexes x, y, N fonctions holomorphes $X_1, X_2, \ldots, X_N$ (différentes des constantes); et, dans le plan de X_i, un domaine fermé borné (et univalent) Δ_i, dont la frontière C_i se compose d'arcs analytiques en nombre fini. Soit Δ une composante connexe ou la somme de plusieurs composantes connexes de l'ensemble défini dans D par les conditions :

$$X_i(x, y) \in \Delta_i \, .$$

Supposons Δ complètement intérieur à D; et, S_i désignant l'ensemble des points frontières de Δ où $X_i \in C_i$, supposons que les S_i n'aient deux à deux en commun aucun éléments à plus de deux dimensions; (il suffit toujours, pour satisfaire la condition-ci, de donner au besoin aux contours C_i des déplacements infiniment petits convenables;) soit σ_{ij} la somme des éléments à deux dimensions de l'intersection de $S_i$et S_j, l'orientation étant convenablement défini par la suite $S_i, \ S_i \times S_j$. ≫

Nous dirons que ce Δ est de type (α), D étant considéré pour être un ensemble ouvert et borné, contenant l'ensemble fermé Δ, mais d'ailleurs quelconques.

≪Supposons d'autre part que l'on puisse faire correspondre à chaque $X_i(x, y)$ 2 fonctions $P_i(x, y; x_0, y_0), \ Q_i(x, y; x_0, y_0)$ holomorphes quand

[1] L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, 1935. (Math. Annalen.)

$(x,y) \in D$ et $(x_0, y_0) \in D$, et telles que l'on ait identiquement :

$$X_i(x,y) - X_i(x_0,y_0) = (x-x_0)P_i + (y-y_0)Q_i. \gg$$

Nous l'appellerons condition (β).

$\ll$Dans ces conditions, soit $f(x,y)$ une fonction uniforme, holomorphe en tous les points de Δ; considérons la somme d'intégrales :

$$I = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_{(i,j)} \int_{\sigma_{ij}} \frac{(P_i Q_j - P_j Q_i) f(x,y)}{[X_i(x,y) - X_i(x_0,y_0)][X_j(x,y) - X_j(x_0,y_0)]} dx dy$$

la sommation étant étendue à tous les combinaisons d'indices (i,j) deux à deux; on a

$$I = f(x_0, y_0), \qquad ou = 0,$$

suivant que (x_0, y_0) est un point intérieur de Δ ou est extérieur à Δ.$\gg$

C'est le résultat de M. Weil. Brièvement dit, *si le $\ll$polyèdre$\gg$ Δ est de type (α) et satisfait à la condition (β), Δ possède une intégrale de Cauchy* $I(x_0, y_0)$. L'intégrale est prise le long des σ_{ij}, intérsections des $\ll$faces$\gg$ S_i et S_j.

2. Nouvelle condition (γ). Nous proposons à nouveau *la condition* (γ) comme suivante :

Supposons qu'on puisse faire correspondre à chaque $X_i(x,y)$, 2 fonctions $P_i(x,y;x_0,y_0)$, $Q_i(x,y;x_0,y_0)$; holomorphes quand $(x,y) \in D$ et $(x_0,y_0) \in D$, et telles qu'on ait identiquement :

$$(X_i - X_i^0)R = (x-x_0)P_i + (y-y_0)Q_i,$$

dont X_i^0 signifie $X_i(x_0,y_0)$ et $R(x,y;x_0,y_0)$ est une nouvelle fonction, holomorphe quand $(x,y) \in D$ et $(x_0,y_0) \in D$, indépendente de X_i , et telle que

$$R(x_0,y_0;x_0,y_0) = 1.$$

Il s'agit de construire une intégrale de Cauchy concernant le $\ll$polyèdre$\gg$ Δ de type (α), sous la nouvelle hypothèse. Construisons l'intégrale de la même forme que I, avec les nouvelles fonctions P_i, Q_j,

$$J = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_{(i,j)} \int_{\sigma_{ij}} \frac{(P_i Q_j - P_j Q_i) f(x,y)}{(X_i - X_i^0)(X_j - X_j^0)} dx dy.$$

On trouvera *tout analoguement* que

$$J = f(x_0, y_0), \qquad ou = 0,$$

suivant que (x_0, y_0) est un point intérieur de Δ ou est extérieur à Δ.

Les intégrales J continnent comme ensemble les intégrales I. Nous appellerons à nouveau cette intégrale J *intégrale de Weil.*

Nous étudierons la condition (γ).

3. Nous faisons d'abord une remarque au Théorème I du Mémoire II.

Considérons, dans l'espace des 2 variables complexes x, y, un ensemble fermé Δ appartenant à la classe (H_0), comme ce qui suit :

$$(\Delta) \qquad |x| \leq r, \qquad |y| \leq r', \qquad |f_j(x, y)| \leq 1,$$
$$(x, y) \in G \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où G est un ensemble ouvert et borné à l'espace (x, y), f_j sont des fonctions holomorphes dans G, r et r' sont des nombres positifs, et on sous-entend que Δ est contenu dans l'intérieur de G, en sorte que Δ devienne fermé. Elevant les dimensions de l'espace en introduisant ν nouvelles variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$, considérons dans l'espace $[x, y, (z)]$ un ensemble fermé Σ sur une variété caractéristique à 4 dimensions, comme ce qui suit :

$$(\Sigma) \qquad z_j = f_j(x, y), \qquad (x, y) \in \Delta, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Σ appartient alors, à la classe (P_1); c'est-à-dire, on peut trouver une suite d'ensembles ouverts convexes par rapport aux polynomes des x, y et z_j, tendant de l'extérieur vers Σ. C'est le Théorème I du Mémoire II.

Nous allons fairs *algébrique* la variété caractéristique sur laquelle Σ se situe, par une déformation suffisamment petite. Comme Σ est de classe (P_1), en choisissant au besoin un ensemble ouvert V contenant Σ, on peut développer les fonctions holomorphes

$$z_j - f_j(x, y) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

en séries de polynomes des x, y, z_j uniformément convergentes dans V. Nous pouvons donc trouver des polynomes $F_j[x, y, (z)]$ suffisamment voisines des fonctions initiales. Nous allons observer les systèmes de racines des équations simultanées

$$(1) \qquad F_j(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_\nu) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

en considérant x et y pour variables indépendantes.

Nous sommes à repartir de

$$F_j[x, y, (z)] \longrightarrow z_j - f_j(x, y) :$$

Soit (x, y) un point quelconque de Δ; traçons d'abord dans l'espace $((z))$ le polycylindre,

$$(\gamma) \qquad |z_j - f_j(x, y)| < \rho \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

en choisissant ρ suffisamment petit pour que l'ensemble ouvert V contienne l'ensemble de points $[\Delta, (\gamma)]$ dans son intérieur. Nous prenons ensuite les F_j suffisamment voisines des $(z_j - f_j)$, respectivement, pour que dans l'ensemble ouvert V *les 3 conditions* suivantes soient remplies:

1^o Soit δ un nombre positif donné à priori tel que $\delta < \rho$, et p, un quelconque des $1, 2, \ldots, \nu$;

$$\text{si} \qquad z_p = f_p(x, y), \qquad \text{on a} \qquad |F_p[x, y, (z)]| < \delta.$$

2^o Soit de plus ρ' un nombre positif donné à priori tel que $\rho' < \delta$;

$$\begin{array}{llll} \text{si} & |F_p| \leq \delta, & \text{on a} & |z_p - f_p(x, y)| < \rho\,; \\ \text{si} & |F_p| = \delta, & \text{on a} & |z_p - f_p(x, y)| > \rho'. \end{array}$$

3^o

$$J = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_\nu)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, \nu)} \neq 0\,.$$

Ce sont les 3 conditions. Pour les 2 premières conditions, elles sont certainement réalisables. Quant à celui de la troisième, il n'y aura qu'à remarquer $J \to 1$.

Dans ces conditions, nous allons démontrer, pour les systèmes de racines

$$z_j = \varphi_j(x, y) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

des équations simultanés (1), *qu'il existe un système dans* (γ) *et un seul, et encore que les fonctions* $\varphi_i(x, y)$ *sont holomorphes, quand* $(x, y) \in \Delta$.

Considérons les équations simultanées auxiliaires

$$(2) \qquad F_j[x, y, (z)] = u_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

dont u_j sont des variables complexes indépendantes. Prenons un point quelconque, (x_0, y_0) de Δ que nous considérons comme fixe; les seules variables sont alors, z_j et u_j; nous désignerons le polycylindre (γ) correspondant au point (x_0, y_0) par (γ_0), et $f_j(x_0, y_0)$ par z_j^0.

D'après la première condition, an centre $((z^0))$ de (γ_0), correspond un point de $|u_j| < \delta$, que nous appellerons $((u^0))$. Comme $J \neq 0$, pour tout point $((u))$ au voisinage de $((u^0))$, les équations simultanées (2) possèdent un système de racines au voisinage de $((z^0))$,

$$z_j = \Phi_j((u)) \qquad (j = 1, 2, \dots, \nu),$$

et un seul; les fonctions $\Phi_j((u))$ sont holomorphes.

Prolongeons analytiquement le système de fonctions $\Phi_j((u))$ dans le polycylinedre $|u_j| < \delta$: D'après la deuxième condition le point $\Phi_j((u))$ reste toujours dans (γ_0); Donc, d'après la troisième condition, J ne s'annule jamais; on ne rencontre conséquemment aucun point singulier des fonctions du système; $\Phi_j((u))$ sont donc holomorphes dans $|u_j| < \delta$. Donc, la transformation pseudoconforme $z_j = \Phi_j((u))$ $(j = 1, 2, \dots, \nu)$ représente le polycylindre $|u_j| < \delta$ sur un domaine, univalent et contenu dans (γ_0); que nous désignerons par Z; Z contient le polycylindre $|z_j - z_j^0| < \rho'$, d'après la deuxième condition.

Supposons un autre système de racines de (2),

$$z_j = \Psi_j((u)) \qquad (j = 1, 2, \dots, \nu),$$

tel que le point $((\Psi))$ intervienne dans (γ_0), lorsque $((u))$ trace tout le polycylindre $|u_j| < \delta$. De cette hypothèse, il en résultera tout pareillement que $z_j = \Psi_j((u))$ $(j = 1, 2, \dots, \nu)$ représente $|u_j| < \delta$ sur un domaine univalent Z' contenant $|z_j - z_j^0| < \rho'$. Les domaines Z et Z' possèdent ainsi le polycylindre $|z_j - z_j^0| < \rho'$ en commun; donc, si l'on choisit avec soin un point $((z))$ dans ce polycylindre, il correspond au moins 2 points dans $|u_j| < \delta$, chacun satisfaisant aux équations simultanèes (2); ce qui est évidemment absurde. $z_j = \Phi_j((u))$ est ainsi le seul système de racines qui intervient dans (γ_0), quand $((z))$ trace $|u_j| < \delta$. Et de plus, comme nous l'avons vu, ce système reste toujours dans (γ_0).

En posant $|u_j| = 0$ $(j = 1, 2, \dots, \nu)$, on trouve que les équations simultanées (1) possèdent, pour $(x, y) = (x_0, y_0)$, un système de racines, que nous désignerons comme

$$\Phi_j[x, y, (0)] = \varphi_j(x_0, y_0) \qquad (j = 1, 2, \dots, \nu),$$

dans (γ_0), et un seul, (x_0, y_0) étant un point quelconque de Δ. Les fonctions $\varphi(x, y)$, évidemment uniformes, sont encore holomorphes en tout point de Δ, puisque $J \neq 0$. Formulons ce que nous avons vu :

Complément du Théorème I du Mémoire II. ≪Etant donné ρ de façon que $0 < \rho < \rho_0$, où ρ_0 est une certain borne supérieure; on peut toujours trouver des équations simultanées *algébriques*,

$$F_j(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_\nu) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

F_j étant des polynomes, telles que les équations admettent un système de racines

$$z_j = \varphi_j(x, y) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

dans

$$|z_j - f_j(x, y)| < \rho \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

et un seul, et que $\varphi_j(x, y)$ soient des fonctions holomorphes, quand $(x, y) \in \Delta$. ≫

Nous avons vu en passant que l'on peut supposer que

$$J = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_\nu)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_\nu)} \neq 0$$

en tout point de $(x, y) \in \Delta$, $|z_j - f_j(x, y)| < \rho$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Faisons une autre remarque quoiqu'elle ne soit pas nécessaire dans la suivante. Nous pouvons supposer sans perdre la généralité que les fonctions algébriques $\varphi_j(x, y)$ n'admettent ni pôle ni point d'indéterminations dans toute portion finie de l'espace (x, y). Il suffit pour cela de prendre des polynomes de la forme

$$F_j[x, y(z)] = \alpha_j z_j^{N_j} + \cdots \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où α_j sont des constantes différentes de zéro, et les termes abrégés sont plus petits que N_j en degré par rapport aux z_k $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$.

4. Considérons un domaine d'holomorphie D, univalent et sans point à l'infini, dans l'espace (x, y). Il existe une suite d'ensembles de classe (H_0) tendant de l'intérieur vers D, grâce au théorème de Cartan–Thullen. Soit Δ un ensemble quelconque de la suite, et de la forme,

$$(\Delta) \qquad |x| \leq r, \qquad |y| \leq r', \qquad |f_j(x, y)| \leq 1,$$
$$(x, y) \in G \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

les notations ayant les mêmes significations qu'au commencement du numéro précédent. Or, d'après ce que nous venons de voir, nous pouvons supposer, sans perdre la généralité, que $z_j = f_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ soient un système de racines des équations simultanées algébriques,

$$F_j[x, y, (z)] = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

et de plus que F_j soient des polynomes tels que

$$J = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_\nu)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_\nu)} \neq 0$$

dans (V)

$$(x, y) \in G, \qquad |z_j - f_j(x, y)| < \rho \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

ρ étant un certain nombre positif.

Soit $[x, y, (z)]$, $[x_0, y_0, (z^0)]$ deux points quelconques dans une portion finie de l'espace; F_j étant des polynomes, nous pouvons poser

$$(1) \qquad F_j - F_j^0 = (x - x_0)A_j + (y - y_0)B_j + \sum (z_k - z_k^0)C_{jk},$$
$$(j, k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où F_j^0 signifie $F_j[x_0, y_0, (z^0)]$; nous emploierons souvent des signes abrégés analogues dans la suivante; A_j, B_j et C_{jk} sont des polynomes des x, y, z_j, x_0, y_0, z_j^0. Regardant les $(z_k - z_k^0)$, pour seules variables indépendantes, résolvons les équations simultanées linéaires,

$$(2) \qquad \sum (z_k - z_k^0)C_{jk} + (x - x_0)A_j + (y - y_0)B_j = 0$$
$$(j, k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

et nous aurons

$$(z_k - z_k^0)N = (x - x_0)a_k + (y - y_0)b_k$$

N, a_k et b_k étant des polynomes des $x, y, z_j, x_0, y_0, z_j^0$, et spécialement

$$N = |C_{jk}|\ ^2 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Observons le déterminant $|C_{jk}|$: pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z_j = z_j^0$, on a évidemment

$$C_{jk}^0 = \left(\frac{\partial F_j}{\partial z_k}\right)_0;$$

[2] Ceci signifie le déterminant tracé par $C_{j1}, C_{j2}, \ldots, C_{j\nu}$, j parcourant successivement $1, 2, \ldots, \nu$.

on a donc,

$$N_0 = J_0\,;$$

J_0 est un polynome des x_0, y_0, z_j^0, non-nul dans V.

Or si l'on substitue $z_j = f_j(x,y)$, $z_j^0 = f_j(x_0,y_0)$ dans (1), on a $F_j = F_j^0 = 0$; donc si l'on désigne par N', a'_k, b'_k, J'_0, ceux qui seront obtenus en faisant les substitutions précédentes dans N, a_k, b_k, J_0, et si l'on pose

$$\frac{N'}{J'_0} = R(x,y;x_0,y_0)$$
$$\frac{a'_k}{J'_0} = p_k, \qquad \frac{b'_k}{J'_0} = q_k;$$

on a

$$(3) \qquad (f_k - f_k^0)R = (x-x_0)p_k + (y-y_0)q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

dont R, p_k, et q_k sont des fonctions des $x, y; x_0, y_0$, holomorphes dans (G,G), et spécialement

$$R(x_0,y_0;x_0,y_0) = 1.$$

Soit maintenant $\varphi(x,y)$ une fonction holomorphe au voisinage de Δ; en vertu du théorème I au Mémoire II et du théorème de Weil, nous pouvons développer la fonction en série de polynomes de x, y et $f_j(x,y)$, convergente uniformément au voisinage de Δ. Donc, correspondant à tout nombre positif ε, nous pouvons trouver un polynome de x, y et $f_j(x,y)$, que nous désignerons par $\psi(x,y)$, tel que

$$|\varphi(x,y) - \psi(x,y)| < \varepsilon$$

au voisinage de Δ. $\psi - \psi_0$ est de la forme

$$\psi - \psi_0 = (x-x_0)\alpha + (y-y_0)\beta + \sum (f_j - f_j^0)\gamma_j,$$

α, β et γ_j étant des fonctions holomorphes des variables $x, y; x_0, y_0$, au voisinage de (Δ, Δ). D'où, en substituant (3), il s'ensuit que

$$(\psi - \psi_0)R = (x-x_0)P + (y-y_0)Q,$$

P et Q étant des fonctions holomorphes des mêmes variables au voisinage de (Δ, Δ). Nous avons ainsi obtenu le lemme suivant :

Lemme.—*Soit D un domaine d'holomorphie univalent et sans point à l'infini à l'espace (x,y) et D_0 un domaine univalent contenu dans l'intérieur de D. On peut trouver une fonction holomorphe $R(x,y;x_0,y_0)$ dans (D_0,D_0), telle que*

$$R(x_0,y_0;x_0,y_0)=1$$

et jouant le rôle que ε étant un nombre positif donné à priori, à toute fonction holomorphe $f(x,y)$ dans D corresponde une fonction holomorphe $\varphi(x,y)$ dans D_0 telle que

$$|f(x,y)-\varphi(x,y)|<\varepsilon,$$

et que

$$(\varphi-\varphi_0)R=(x-x_0)P+(y-y_0)Q,$$

dont φ_0 signifie $\varphi(x_0,y_0)$, et P et Q sont des fonctions holomorphes des variables $x,y;x_0,y_0$ dans (D_0,D_0).

Cette proposition subsiste pour un nombre quelconque de variables complexes. On peut l'affirmer tout pareillement.

5. Revenons à l'intégrale de Weil. Considérons le ≪polyèdre≫ de type (α) donné au N^o 1; Δ est de la forme

$$X_i(x,y)\in\Delta_i \qquad (i=1,2,\ldots,N).$$

Δ est évidemment approximatif de l'extérieur par les ensembles ouverts consistant des domaines d'holomorphie. Donc, d'après le lemme ci-dessus, *on peut construir un ≪polyèdre≫ Δ' de type (α) et de propriété (γ) en donnant à X_i et à Δ_i des déformations infiniment petites convenables, de sorte que Δ' admet l'intégrale de Weil au N^o 2.* De la, en vertu du théorème de Cartan–Thullen, il en résulte que :

Théorème.—*Etant donné dans l'espace de 2 variables complexes un domaine d'holomorphie D univalent et sans point à l'infini, on peut représenter les fonctions holomorphes dans D par l'intégrale de Weil à l'intérieur de D.*[3]

L'auteur pense que ce théorème sera aussi indépendant du nombre de variables complexes.

[3] La forme de l'intégral dépend naturellement des domaines à l'intérieur de D.