Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

VI Domaines pseudoconvexes.

Par
Kiyoshi Oka

(Reçu le 25 octobre, 1941)

Introduction. En 1906, F. Hartogs a découvert une restriction très curieuse, à laquelle sont soumis les domaines d'holomorphie[1], et par cette découverte même, je pense, a commencé le développement récent de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables.

La même restriction a été succesivement trouvée aux fonds des différentes branches de la théorie, par E. E. Levi, G. Julia, W. Saxer et l'auteur[2]. Nous appelons tout domaine restreint de ce mode d'être *pseudoconvexe*[3].

La convexité de cette sorte admet d'être critiquée d'une manière locale. Or, en 1932, H. Cartan et P. Thullen ont trouvé que les domaines d'holomorphie sont encore, en un certain sens, globalement convexes[4]. Et grâce à cette propriété, nous venons d'établir plusieurs théorèmes globaux par rapport aux domaine d'holomorphie [5].

---

[1]F. Hartogs, Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen, 1906. (Münch. Berichte.)

[2]E. E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse, 1910, (Annali di Matematica.)

G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, 1926. (Acta Mathematica.).

W. Saxer, Sur les familles de fonctions méromorphes de plusieurs variables, 1931. (Comptes Rendus, Paris.)

K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes ete., 1934. (Journal of Science of the Hiroshima University.)

[3]Pour les domains univalents et finis, nous l'avons défini à Mémoire IV; voir: No.10, Mémoire actuel.

[4]Et la réciproque: Voir:

H.Cartan–P.Thullen, Regularitäts–und Konvergenzbereiche, 1932. (Mathematische Annalen.) Pour l'idée, voir :

H. Cartan, Sur les domaines d'existence de fonctions de plusieurs variables complexes, 1931. (Bull. Société mathématique de France.)

[5]Mémoires précédents des présentes recherehes: I Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936; II Domaines d'holomorphie, 1937; III Deuxième problème de Cousin, 1939; (Joumal of Science of the Hiroshima University.) IV Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941; V L'intégrale de Cauchy,1941; (Japanese journal of Mathematics.)

Nous avons ainsi plusieurs sortes de domaines pseudoconvexes, et sur lesquels nous ne savons presque rien, sauf sur les domaines d'holomorphie[6]. Nous sommes ainsi ramenés à F. Hartogs, à nous demander réciproquement si tout domaine pseudoconvexe est un domaine d'holomorphie, ou non. Et, si ces 2 types de domaines coïncident, nous aurons un critérium local pour les domaines d'holomorphie. Or, parmi les différentes sortes de domaines pseudoconvexes, ceux de G. Julia ont été affirmés d'eţre des domaines d'holomorphie, lorsqu'ils sont finis, par H. Cartan, P. Thullen, H. Behnke, et K. Stein[7]. Mais, en dehors de ce cas, le problème reste à peu près libre jusqu'à présent[8].

Dans le Mémoire actuel, nous traiterons ce problème; où nous nous bornerons à l'espace de 2 variables complexes, pour la simplicité, mais la conclusion s'appliquera, je crois, aux espaces d'un nombre quelconque de variables complexes. Nous verrons, pour les domaines univalents et finis, que *les domaines pseudoconvexes sont ceux d'holomorphie*[9].

Le problème que nous venons d'expliquer est le dernier de ceux qui faisaient le sujet des recherches actuelles[10].

I. Problème principal.

1. Problème. Nous continueron, de sous-entendre que les domaines dans le Mémoire actuel sont *univalents et finis.*

Dans les présentes recherches, *le premier problème de Cousin* joue un des rôles fondamentaux presque partout; dont la partie essentielle consiste dans le problème suivant :

[6]De plus, par exemple, si dans un domaine univalent et fini à l'espace de 2 variables complexes, le premier problème de Cousin est toujours résoluble, le domaine est nécessairement celui d'holomorphie. Voir :

H. Cartan, Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables, 1934. (Comptes Rendus, Paris.)

[7]On l'appelle problème de Julia. Voir: H. Cartan–P. Thullen, cité plus haut.

H. Behnke–K. Stein: Konvergente Folgen von Regulariätsbereichen und die Meromorphiekonvexität, 1938, (Math. Annalen); Approximation analytischer Funktionen in vorgegebenen Bereichen des Raumes von n komplexen Veränderlichen, 1939, (Göttingen Nachrichten); Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen; 1940, (Mitteilung der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg).

[8]Pour ce problème, voir: L'ouvrage de H. Behnke–P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicben, 1934, pages 54-56; et H. Behnke–K. Stein, 1940, cité ci-dessus.

[9]L'auteur a publié ce résultat dans la Note: Sur les domaines pseudoconvexes, 1941, (Proc. Imp. Acad. Tokyo).

[10]L'auteur a tenté les présentes recherches grâce à l'Ouvrage très intéressant de H. Behnke–P. Thullen, cité plus haut.

Considérons à l'espace de deux variables complexes x, y un domaine borné Δ contenant l'origine, dont la partie supérieure et celle inférieure par rapport à l'hyperplan $x_2 = 0$, où $x = x_1 + ix_2$, i étant l'unité imaginaire, seront désignées par Δ_1 et Δ_2, respectivement. Etant donnée une fonction holomorphe $f(x, y)$ "au voisinage de" la frontière commune à Δ_1, Δ_2[11]*, trouver une paire de fonctions $F_1(x, y), F_2(x, y)$, holomorphes dans Δ_1 et dans Δ_2, respectivement, et restant holomorphes en tout point de Δ sur $x_2 = 0$ de sorte que l'on ait identiquement*

$$F_1(x, y) - F_2(x, y) = f(x, y).$$

En 1895, P. Cousin a résolu ce problème pour les domaines cylindriques[12]. En 1934, H. Cartan a indiqué que ce problème est résoluble pour les domaines rationnellement convexes[13] en appliquant l'intégrale de A. Weil[14]. La même méthode s'applique pour les domaines d'holomorphie, d'après ce que nous avons vu dans le Mémoire V. Et, plus récemment, nous avons résolu, ce problème par une autre méthode pour les domaines d'holomorphie dans les Mémoires I, II.

Nous allons résoudre ce problème pour un domaine pseudoconvexe composé de deux domaines d'holomorphie (continus ou non) empiétant l'un sur l'autre, dont l'un contient Δ_1 et l'autre, Δ_2, mais d'ailleurs à peu près quelconque.

2. Hypothèses. Dans la présente Section, nous traiterons le problème pour Δ satisfaisant aux certaines conditions, que nous allons expliquer, et dont la signification sera discutée dans la Section suivante.

Considérons à l'espace (x, y) un domaine *borné* $\mathfrak{D}$ contenant l'origine et 3 hyperplans parallèles L, L_1, L_2 des formes

$$x_2 = 0, \quad x_2 = a_1, \quad x_2 = a_2, \qquad a_1 < 0 < a_2,$$

respectivement. Supposons $\mathfrak{D}$ traversé par chacun des hyperplans; nous déignerons les parties de $\mathfrak{D}$ supérieure à L_1, inférieure à L_2 et entre L_1 et L_2 par $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ et $\mathfrak{D}_3$, respectivement. *Supposons que les composantes continues des ensembles ouverts $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ soient des domaines*

[11] Nous appelons qu'un phénomène se présente au voisinage d'un ensemble E, s'il l'est pour un certain ensemble ouvert contenant E avec ses points d'accumulation.

Nous appelons qu'un phénomène se présente "à l'intérieur" d'un ensemble ouvert $\mathfrak{D}$, s'il l'est pour tout ensemble ouvert borné et contenu avec ses points frontières dans $\mathfrak{D}$.

[12] Acta mathematica.

[13] Quelconques, à peu près; il en est de même pour ce qui suit.

[14] H. Cartan, cité plus haut.

d'holomorphie. Alors, il en est nécessairement de même pour l'ensemble ouvert $\mathfrak{D}_3$.

Considérons dans $\mathfrak{D}_3$, ν fonctions holomorphes

$$X_j(x,y) \qquad (j=1,2,\dots,\nu)$$

et: 1º *Supposons que l'ensembles des points de $\mathfrak{D}_3$ satisfaisant à*

$$|X_j(x,y)| \leq 1 \qquad (j=1,2,\dots,\nu)$$

n'ait pas de point au voisinage de l'intersection de la frontière de $\mathfrak{D}$ avec L; et que, pour un nombre positif ε suffisamment petit et pour tout j de $(1,2,\dots,\nu)$ l'ensemble des points de $\mathfrak{D}_3$ satisfaisant à

$$|X_j(x,y)| > 1-\varepsilon$$

n'ait pas de point au voisinage des hyperplans L_1, L_2. Les points de $\mathfrak{D}$ qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{D}_3$, ou bien satisfont à

$$|X_j(x,y)| < 1 \qquad (j=1,2,\dots,\nu)$$

constituent un ensemble ouvert. *Supposons que cet ensemble admette une composante continue contenant l'origine et s'étendan au delà de L_1 et de L_2.* C'est ce domaine que nous appellerons Δ.

Comme nous le verrons plus tard, cette hypothèse s'appuie sur *le théorème de H. Cartan–P. Thullen que tout domaine d'holomorphie (fini) est convexe par rapport aux fonctions holomorphes dans le domaine*[15].

2º Soient x_0, y_0 des nouvelles variables. *Supposons que l'on ait identiquement*

$$(X_j - X_j^0)R = (x-x_0)P_j + (y-y_0)Q_j \qquad (j=1,2,\dots,\nu)$$

où X_j^0 exprime $X_j(x_0,y_0)$, P_j, Q_j et R sont des fonctions holomorphes des variables x, y, x_0, y_0 quand $(x,y) \in \mathfrak{D}_3, (x_0,y_0) \in \mathfrak{D}_3$ et *specialement R se réduit à 1 pour $x=x_0,\ y=y_0$.*

A l'égard de cette hypothèse, nous avons *le Lemme de Mémoire V.*

3º *Supposons pour tout j que la dérivée $\partial X_j/\partial y$ ne s'annule pas identiquement.* Soit Σ_j la variété analytique définie dans $\mathfrak{D}_3$ par

$$x_2 = 0, \qquad |X_j| = 1;$$

[15] Math. Ann., 1932.

d'après l'hypothèse précédente, si Σ_j existe, elle est à 2 dimensions. *Supposons que les intersections des variétés Σ_j, Σ_k $(j \neq k; j, k = 1, 2, \ldots, \nu)$, si elles existent, soient à 1 dimension.*

Nous désignerons les parties de Δ supérieure à L, inférieure à L et entre L_1 et L_2 par Δ_1, Δ_2 et Δ_3, respectivement. Δ_3 *consiste*, évidemment *en domaines d'holomorphies*[16]. Pour Δ_1 et Δ_2, nous verrons plus tard qu'il en est de même.

Envisagerons la portion de l'hyperplan L dans Δ. Soit S l'ensemble de points composé de cette portion de L et des points d'accumulation; S est contenu dans $\mathfrak{D}_3$, d'après l'hypothèse 1. Soit σ la frontière de S (considéré comme être un ensemble sur l'hyperplan); σ se pose évidemment sur la somme des variétés Σ_j $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$; nous désignerons la partie de σ sur Σ_j par σ_j. Les σ_j sont à 2 dimensions au plus; les intersections des variétés σ_j, σ_k $(j \neq k; j, k = 1, 2, \ldots, \nu)$ sont à 1 dimension au plus, d'après l'hypothèse précédente. Pour simplifier le raisonnement ultérieur, *supposons encore, pour tout j, que la dérivée $\partial X_j / \partial y$ ne s'annule pas sur σ_j, sauf peut-être aux points d'un nombre fini.*

Nous verrons plus tard que l'on peut toujours trouver un domaine Δ de ces propriétés et arbitrairement approché du domaine donné $\mathfrak{D}$.

3. Cas de domaines d'holomorphie. Nous allons d'abord résoudre le problème pour Δ_3 au moyen de *la méthode due à A. Weil et à H. Cartan.*

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction holomorphe donnée au voisinage de S. Considérons l'intégrale double, étendue sur la partie à 2 dimensions de σ,

$$I(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma_j} \psi_j(x, y; x_0, y_0) \varphi(x, y)\, dx dy \tag{1}$$

en posant

$$\psi_j(x, y; x_0, y_0) = \frac{Q_j}{(x - x_0)(X_j - X_j^0)},$$

$(j = 1, 2, \ldots, \nu)$; que nous allons définir d'une manière précise. Sur la variété σ_j, j étant quelconque, comme $\partial X_j / \partial y$ ne s'annule pas, excepté peut-être pour un nombre fini de points, prenons un point P différent des points exceptionnels, mais d'ailleurs quelconque. Au voisinage de P, nous pouvons représenter la variété analytique Σ_j à l'aide des paramètres réels u, v, de la forme

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$

[16] Précisément-dit, en composantes continues qui sont des domaines d'holomorphie.

dont les deuxième membres expriment des séries entières en u, v, de façon que (x, y) et (u, v) soient en correspondance biunivoque. Nous pouvons prendre pour paramètres (x_1, θ_j) par exemple, θ_j étant l'argument de X_j. Regardons (u, v) pour être un point sur le plan, au moyen des axes rectangulaires dans la géométrie cartésienne; à la frontière de σ_j, correspondent des arcs analytiques d'un nombre fini sur le plan (u, v). Choisissons (u, v) de façon que

$$\frac{\partial(x_1, \theta_j)}{\partial(u, v)} > 0;$$

nous avons alors, par définition

$$\int_{\sigma_j} \psi_j \varphi \, dx dy = \iint \psi_j \varphi \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \, du dv$$

au voisinage de P, le deuxième membre étant une intégrale double étendue sur la portion du plan (u, v) correspondant à la partie à 2 dimensions de σ.

Soit (x_0, y_0) un point tel que $\psi_j(x, y; x_0, y_0)$ soit holomorphe par rapport à x, y au voisinage de σ_j, j étant quelconque; l'intégral $I(x_0, y_0)$ sera alors, déterminée et finie[17].

Quand $(x, y) \in \sigma_j$, puisque $|X_j| = 1$, $\psi_j(x, y; x_0, y_0)$ est holomorphe par rapport à x_0, y_0 dans Δ_3, excepté sur L; par suite, *la fonction* $I(x_0, y_0)$ *est holomorphe dans* Δ_3*, excepté sur* L[18].

Nous allons étudier l'allure de $I(x_0, y_0)$ au voisinage de L[19]. Soit (ξ, η) un point quelconque sur la portion de L dans Δ. Traçons sur le plan x un petit cercle (γ) autour de ξ; nous désignerons les parties de σ et de σ_j dans (γ) par σ' et σ'_j, respectivement; et nous considérons l'intégrale

$$I_1(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma'_j} \psi_j(x, y; x_0, y_0) \varphi(x, y) \, dx dy,$$

[17]Nous allons montrer que l'intégrale double $\int_{\sigma_j} f(x, y) dx dy$, $f(x, y)$ étant une fonction holomorphe au voisinage de σ_j, est déterminée et finie. Soit P un point de σ_j tel que $\partial X_j / \partial y = 0$; les points de cette propriété sont finis en nombre sur σ_j. Traçons une hypersphère autour de P avec un rayon suffisamment petit ρ. Soit σ' la partie de σ_j dans cette hypersphère. Nous trouvons facilement que $\int_{\sigma'} |dx dy|$ tend vers 0 avec ρ. Il en est donc de même pour $\int_{\sigma'} f dx dy$. D'où, il en résulte immédiatement l'énoncé.

[18]Car, l'intégrale $I(x_0, y_0)$ est la limite d'une suite de fonctions holomorphes en tout point de l'ensemble ouvert $(x_0, y_0) \in \Delta_3, (x_0, y_0) \in L$, convergeant uniformément en ce point d'après la définition même de l'intégrale.

[19]Ceci sera fait d'une manière directe; on peut aussi prendre $R\psi_j$ à la place de ψ_j et appliquer, à l'intégrale correspondante, le théorème de A. Weil exposé dans le Mémoire V.

$(j=1,2,\ldots,\nu)$. La différence $I-I_1$ est évidemment holomorphe dans l'ensemble ouvert $x_0 \in (\gamma), (x_0, y_0) \in \Delta_3$. Il suffit donc, d'étudier I_1 à la place de I.

Posons

$$\Phi_j(x,y;x_0,y_0) = \frac{Q_j}{X_j - X_j^0}\,\varphi(x,y);$$

désignons par Γ la projection sur le plan y, de l'intersection de σ avec $x=\xi$. Lorsque $(x,y)\in\sigma_j$, puisque $|X_j|=1$, la fonction $Q_j/(X_j-X_j^0)$ est holomorphe par rapport à x_0, y_0 dans Δ_3; $\varphi(x,y)$ est holomorphe au voisinag de S; $\Phi_j(x,y;x_0,y_0)$ est donc holomorphe en tout point de l'ensemble

$$x=\xi, \quad y\in\Gamma; \quad x_0=\xi, \quad y_0=\eta.$$

Sur le plan y, décrivons un cercle (γ') autour de η et un ensemble ouvert E contenant Γ. Pour que $\Phi_j(x,y;x_0,y_0)$ soit holomorphe dans l'ensemble ouvert

$$(2) \qquad x\in(\gamma), \quad y\in E; \quad x_0\in(\gamma), \quad y_0\in(\gamma'),$$

et que σ' soit contenu dans $[(\gamma),E]$, il suffit de prendre, d'abord (γ') et E suffisamment approchés de η et de Γ, respectivement, et ensuite (γ) suffisamment rapproché de ξ.

Dans ces conditions, posons

$$\Psi_j(y;x_0,y_0) = \Phi_j(x_0,y;x_0,y_0);$$

cette fonction est aussi holomorphe dans l'ensemble (2) et satisfait identiquement à

$$\Phi_j - \Psi_j = (x-x_0)\chi(x,y;x_0,y_0),$$

χ étant une fonction holomorphe dans l'ensemble (2). Considérons l'intégrale

$$I_2(x_0,y_0) = \frac{-1}{4\pi^2}\sum_j \int_{\sigma'_j} \frac{\Psi_j}{x-x_0}\,dxdy,$$

$(j=1,2,\ldots,\nu)$. $I_1 - I_2$ est holomorphe dans le dicylindre $[(\gamma),(\gamma')]$, d'après l'identité ci-dessus. Il suffit donc, d'étudier I_2 au lieu de I_1.

Or, dans la relation

$$(X_j - X_j^0)R = (x-x_0)P_j + (y-y_0)Q_j,$$

en posant $x=x_0$, on a

$$(X_j - X_j^0)R = (y-y_0)Q_j.$$

Donc,

$$I_2(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma'} \frac{R(x_0, y; x_0, y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)} \varphi(x_0, y)\, dx dy.$$

Nous allons envisager le champ d'intégration σ'. Soit l le diamètre du cercle (γ) sur l'axe réel et soit x' un point quelconque de l. Considérons la projection sur le plan y de l'intersection de σ avec $x = x'$ et celle de σ_j, j étant quelconque; nous les désignerons respectivement par $\Gamma_{x'}$ et $\Gamma_{x'}^{(j)}$. La figures $\Gamma_{x'}^{(j)}$, si elle existe, se pose sur

$$|X_j(x', y)| = 1.$$

Deux cas sont possibles: ou bien cette relation est remplie identiquement, ce qui entraîne que $\Gamma_{x'}^{(j)}$, est composé d'un nombre fini de points, puisqu'alors $\partial X_j(x', y)/\partial y$ s'annule pour tout point de $\Gamma_{x'}^{(j)}$; ou bien c'est une équation, et qui représente par suite un nombre fini de courbes analytiques sur le plan y; dans ce cas général, *la figure* $\Gamma_{x'}^{(j)}$ *est composée d'un nombre fini de arcs analytiques* (et de points).

L'intersection des variétés analytiques Σ_j, Σ_k $(j \neq k; j, k = 1, 2, \dots, \nu)$, si elle existe, est à 1 dimension; par suite, la variété analytique donnée par

$$|X_j(x', y)| = 1, \qquad |X_k(x', y)| = 1$$

n'admet qu'un nombre fini de points à l'espace au voisinage de S, sauf peut-être pour un nombre fini de points sur le diamètre l. Nous supposons dès maintenant *que* x' *soit situé en dehors des points exceptionnels*, (s'ils existent.) *Les figures* $\Gamma_{x'}^{(j)}$, $\Gamma_{x'}^{(k)}$ *n'admettent alors aucun arc en commun.* $\Gamma_{x'}$ est la somme des ν figures $\Gamma_{x'}^{(j)}$, jouissant des propriétés comme précédentes.

Soit s un arc quelconque de $\Gamma_{x'}$ et soit s' un arc convenable de s. Supposons que 1'arc s' soit compris par une seule des figure $\Gamma_{x'}^{(j)}$, compris par $\Gamma_{x'}^{(1)}$, pour fixer l'idée, et que $\partial X_1(x', y)/\partial y$ ne s'annule pas sur s'. s' étant convenable, ces conditions sont toujours atteintes. Nous avons alors, $|X_1(x', y)| < 1$ pour un des côtés de s'. Pour les autres X_j, nous avons $|X_j(x', y)| \leq 1$, d'après la définition même de σ; dont l'égalité ne se présente qu'aux points d'un nombre fini au plus, d'après ce que nous avons vu plus haut. Supposons donc que $|X_j(x', y)| < 1$ $(j = 2, \dots, \nu)$ sur s'. L'arc s' est ainsi situé sur la frontière de 1'ensemble ouvert

$$(3) \qquad |X_j(x', y)| < 1, \qquad (j = 1, 2, \dots, \nu).$$

Encore, puisque $\partial X_1/\partial y \neq 0$ et $|X_j| < 1$ $(j = 2, 3, \ldots, \nu)$, l'arc à l'espace donné par $x = x'$, $y \in s'$ est situé sur un morceau régulier de l'hypersurface $|X_1| = 1$, et ce morceau appartient par suite à la frontière d'une seule composante continue de l'ensemble ouvert

$$|X_j(x, y)| < 1, \quad (x, y) \in \mathfrak{D}_3 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Comme l'arc ci-dessus appartient à la frontière de Δ, cette composante continue appartient nécessairement à Δ. Par suite, la frontière de la composante continue de (3) comprenant l'arc s' appartient entièrement à $\Gamma_{x'}$; où s' est une partie d'un arc quelconque de $\Gamma_{x'}$. Donc, *la figure* $\Gamma_{x'}$, *consiste en courbes fermées* (et en points).

Soit $(\Gamma_{x'})$ la portion du plan y délimitée par les courbes fermées $\Gamma_{x'}$. Ce que nous venons de voir exige encore que *la projection sur le plan* y*, de l'intersection de* Δ *avec* $x = x'$ *est donnée par* $(\Gamma_{x'})$; ce qui est nécessairement vrai pour tout point x' de l (exceptionnel ou non).

Maintenant, (ξ, η) étant un point intérieur de S, prenons $[(\gamma), (\gamma')]$ suffisamment rapproché de (ξ, η), de sorte que tout $(\Gamma_{x'})$ contient (γ'), et que les fonctions $\varphi(x_0, y)$, $R(x_0, y; x_0, y_0)$ sont holomorphes au voisinage de l'ensemble

$$y \in (\Gamma_{x'}); \quad x_0 \in (\gamma), \quad y_0 \in (\Gamma_{x'}).$$

Soit (x_0, y_0) un point de $[(\gamma), (\gamma')]$, en dehors de L, mais d'ailleurs quelconque; soit x' un point de l, différent des points exceptionnels (d'un nombre fini au plus), mais d'ailleurs quelconque. Nous avons alors, en vertu du théorème de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{x'}} \frac{R(x_0, y; x_0, y_0)}{(x' - x_0)(y - y_0)} \varphi(x, y)\, dy = \frac{\varphi(x_0, y_0)}{x' - x_0}$$

l'intégrale étant prise au sens positif, puisque $R = 1$ pour $x = x_0$, $y = y_0$. De là, il en résulte immédiatement que

$$I_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(x_0, y_0)}{x - x_0}\, dx, \text{[20]}$$

où l'intégrale est prise au sens positif, puisque $\partial(x_1, \theta_j)/\partial(u, v) > 0$.

Donc, *l'intégrale* $I(x_0, y_0)$ *est une solution du problème par rapport à* Δ_3

[20] Pour le constater, il suffit de prendre (x_1, θ_j) pour paramètres et de ramener l'intégrale double I_2 à deux intégrales simples prises suceessivement; dont la possibilité est évidente.

4. Cas de domaines pseudoconvexes. Il s'agit de modifier l'intègrale (1) de No. 3. Regardons le champ d'intégration σ. Chaque σ_j se pose sur le morceau (continu ou non) de variété analytique, Σ'_j,

$$x_2 = 0, \quad |X_j(x,y)| = 1,$$
$$|X_p(x,y)| \leq 1 \qquad (p = 1, 2, \ldots, \nu)$$

On trouvera immédiatement que Σ'_j est la limite d'une suite décroissante d'ensembles ouverts consistant en domaines d'holomorphie. Soit V_j un des ensembles de la suite; V_j contient σ_j à l'intérieur.

Nous allons trouver *une fonction méromorphe* $\Phi_j(x, y; x_0, y_0)$ *dans* $(x,y) \in V_j$, $(x_0, y_0) \in \mathfrak{D}_1$ *de façon que* Φ_j *admette les même pôles que* ψ_j *quand* $(x_0, y_0) \in \mathfrak{D}_3$, *et soit holomorphe quand* $(x_0, y_0) \notin \mathfrak{D}_3$, j étant un quelconque de $(1, 2, \ldots, \nu)$. L'ensemble ouvert $(V_j, \mathfrak{D}_1)$, (c'est-à-dire, $(x.y) \in V_j$, $(x_0, y_0) \in \mathfrak{D}_1$) consiste en domaines d'holomorphie. Quant aux pôles de $\psi_j(x, y; x_0, y_0)$, lorsque (x, y) reste dans un V_j suffisamment approché de Σ'_j, ψ_j n'admet grâce à l'hypothèse 1 aucun pôle au voisinage des ensembles $(x_0, y_0) \in L_1$, $(x_0, y_0) \in L_2$. Donc, en prenant V_j suffisamment approché de Σ'_j nous obtenons la fonction voulue. (Théorème, II, Mémoire II.)

La fonction $\Phi_j - \psi_j$ est holomorphe dans $(V_j, \mathfrak{D}_3)$; où $\mathfrak{D}_3$ est convexe par rapport aux fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}_1$ en vertu du théorème de Cartan–Thullen exposé à No. 2, en tenant compte de la forme de $\mathfrak{D}_3$. Donc, étant donnés un nombre positif ε, et des ensembles ouverts V'_j, $\mathfrak{D}'_3$ à l'intérieur de V_j, et à celui de $\mathfrak{D}_3$ respectivement, nous trouvons *une fonction holomorphe* $\Psi_j(x, y; x_0, y_o)$ *dans* $(V_j, \mathfrak{D}_1)$, *telle que*

$$|\Phi_j - \psi_j - \Psi_j| < \varepsilon$$

dans $(V'_j, \mathfrak{D}'_3)$. (No. 5, Mémoire II.) Nous prenons $(V'_j, \mathfrak{D}'_3)$ de manière qu'il contienne l'ensemble fermé (σ_j, S).

Nous avons ainsi acquis les fonction Φ_j, Ψ_j par rapport à $\mathfrak{D}_1$; nous poserons

$$A_j = \Phi_j - \Psi_j - \psi_j.$$

Construisons pareillement des fonctions B_j $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ par rapport à $\mathfrak{D}_2$; et nous considérerons les intégrales suivantes:

$$(1) \qquad J_1(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma_j} (\psi_j + A_j)\varphi(x,y)dxdy,$$

$$(2) \qquad J_2(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma_j} (\psi_j + B_j)\varphi(x, y)dxdy,$$

$(j = 1, 2, \ldots, \nu)$, où $\varphi(x, y)$ représente une fonction holomorphe quelconque au voisinage de S.

Quand $(x, y) \in \sigma_j$, la fonction $\psi_j + A_j$, étant égale à $\Phi_j - \Psi_j$, est holomorphe par rapport à x_0, y_0 dans Δ; donc, $J_1(x_0, y_0)$ *est holomorphe dans* Δ_1. *Pareillement,* $J_2(x_0, y_0)$ *est holomorphe dans* Δ_2.

Les fonctions $J_1(x_0, y_0) - J_2(x_0, y_0)$ *restent holomorphes en tout point de* L *dans* Δ, puisqu'il en est ainsi pour les fonctions données par l'intégrale (1) de No. 3, et que les fonctions A_j, B_j sont holomorphes dans $(V_j, \mathfrak{D}_3)$; De la propriété de l'intégral (1) de No. 3, ils s'ensuit encore que l'on ait identiquement

$$J_1(x_0, y_0) - J_2(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_j \int_{\sigma_j} (A_j - B_j)\varphi(x, y)dxdy,$$

$(j = 1, 2, \ldots, \nu)$. Nous trouvons de plus, d'après cette relation même, que la fonction J_1–J_2 reste holomorphe au voisinage de S. Nous poserons

$$f(x_0, y_0) = J_1(x_0, y_0) - J_2(x_0, y_0).$$

Considérons maintenant f comme donnée et φ comme inconnue dans la relation; et nous aurons une équation intégrale de la forme

$$(3) \qquad \varphi(x_0, y_0) = \lambda \sum_j \int_{\sigma_j} K_j(x, y; x_0, y_0)\varphi(x, y)dxdy + f(x_0, y_0),$$

en posant

$$K_j = \frac{A_j - B_j}{4\pi^2},$$

dont $\lambda = 1$ et $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$. La solution est demandée au voisinage de S d'être holomorphe[21]. Si une solution $\varphi(x, y)$ de cette nature est trouvée, la solution du problème sera donnée par les intégrales (1) et (2); ce qui est évident.

Nous allons appliquer à l'équation la méthode usuelle des approximations successives, en choisissant ε suffisamment petit. Posons formellement

$$\varphi(x_0, y_0) = \varphi_0(x_0, y_0) + \lambda\varphi_1(x_0, y_0) + \cdots + \lambda^p\varphi_p(x_0, y_0) + \cdots,$$

[21]En realité, il suffit de trouver une solution holomorphe sur σ, car, alors, la solution restera holomorphe sur S, en vertu d'un théorème de F. Severi, Lincei, 1932.

où nous considérons λ pour paramètre complexe. En substituant cette série dans 1'équation (3) et en égalant les coefficients des mêmes puissances de λ des 2 membres, d'une manière formelle, nous avons les relations

$$\varphi_0 = f_0,\ \varphi_1 = K(\varphi_0),\ \ldots,\ \varphi_{p+1} = K(\varphi_p),\ \ldots,$$

en posant

$$K[\varphi_p(x_0, y_0)] = \sum_j \int_{\sigma_j} K_j(x, y; x_0, y_0)\varphi_p(x, y)\, dxdy.$$

Les fonctions $\varphi_p(x_0, y_0)$ ainsi déterminées successivement sont holomorphes au voisinage de S, puisqu'il en est ainsi pour $f(x_0, y_0)$ et pour $K_j(x, y; x_0, y_0)$ quand $(x, y) \in \sigma_j$. En substitutant ces fonctions φ_p dans la série formelle, nous obtenons une série de fonctions holomorphes au voisinage de $(x_0, y_0) \in S$. Si cette série converge uniformément au voisinage de S, pour $|\lambda| < 1+\varepsilon'$, ε' étant un nombre positif quelconque, la somme $\varphi(x_0, y_0)$ satisfera à l'équation (3), pour $|\lambda| \leq 1$; ce qui est manifeste. Donc, il ne nous reste qu'à examiner la convergence.

Soit U un ensemble ouvert contenu à l'intérieur de $\mathfrak{D}'_3$, contenant S et tel que f soit holomorphe au voisinage de U; U existe certainement. Soit M_p la borne supérieure de $|\varphi_p|$ dans U, et soit

$$N = \sum_j \int_{\sigma_j} |dxdy|.$$

Alors, dans U

$$|K[\varphi_p(x_0, y_0)]| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi^2} N M_p,$$

puisque

$$|A_j| < \varepsilon, \qquad |B_j| < \varepsilon,$$

pour tout j, dans $(V'_j, \mathfrak{D}'_3)$. Par conséquent, on a

$$M_p \leq \left(\frac{\varepsilon N}{2\pi^2}\right)^p M_0$$

Supposons donc,

$$\varepsilon < \frac{2\pi^2}{N}.$$

La série en question converge alors, uniformément dans U pour $|\lambda| < 1+\varepsilon'$, ε' étant un normbre positif suffisamment petit. Nous avons ainsi vu que:

Le problème de No. 1 est résoluble pour le domaine Δ de No. 2.

II. Résultat intermédiaire.

5. Propositions préliminaires. Dans la présente Section, nous arrangerons le résultat que nous venons d'obtenir, à l'aide du travail bien connu de H. Cartan–P. Thullen[22] et d'un théorème récent de H. Behnke–K. Stein. Nous commencerons par faire des remarques simples sur ces travaux.

Théorème de H. Behnke–K. Stein. *Etant donnée une suite croissante de domaines d'holomorphie à l'espace de plusieurs variables complexes, la limite de la suite est encore un domaine d'holomorphie*[23].

Ce théorème n'est démontré précisément que pour les domaines bornés, je pense. Nous allons donc examiner le cas où la limite, $\mathfrak{D}$, n'est pas borné. Prenant un point M du domaine $\mathfrak{D}$ pour centre, traçons un polycylindre (γ_p) de rayon p, p étant un nombre positif quelconque. Nous désignerons par $\mathfrak{D}_p$ la composante continue contenant M, de la partie de $\mathfrak{D}$ dans (γ_p). La suite de domaines $\mathfrak{D}_p$ converge vers $\mathfrak{D}$. Or, chaque $\mathfrak{D}_p$, étant borné et ayant le même caractère que $\mathfrak{D}$, est un domaine d'holomorphie. Par suite, en vertu du théorème de Cartan-Thullen, en tenant compte de la forme de $\mathfrak{D}_p$, $\mathfrak{D}_p$ est convexe par rapport aux fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}_{p+q}$, q étant un nombre positif quelconque. Par conséquent, comme nous l'avons dit plus haut, étant donnée une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}_p$, nous pouvons trouver une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}_{p+q}$, arbitrairement approchée de la fonction donnée dans tout domaine donné à l'intérieur de $\mathfrak{D}_p$. (No. 5, Mémoire II.) D'où, d'après le même mode de raisonnement qu'au cas de domaines bornés[24], il s'ensuit qu'on peut, faire l'approximation au moyen des fonctions holomorphe dans $\mathfrak{D}$. Le domaine $\mathfrak{D}$, étant par suite convexe par rapport aux fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$, est un domaine d'holomorphie, grâce à H. Cartan et à P. Thullen.

Etant donnés un domaine d'holomorphie borné $\mathfrak{D}$ à l'espace (x, y) et une fonction holomorphe χ dans le domaine, considérons, pour un nombre positif quelconque r, l'esemble de points tels que la "Randdistanz"[25] *d'un point quelconque P de cet ensemble par rapport à $\mathfrak{D}$, soit*

[22]Math. Ann., 1932.

[23]Pour les domaines (univalents) bornés, voir: Behnke-Stein, Math. Ann., 1938.

[24]voir: Hilfssatz I, Mémoire précédent.

[25]C'est-à-dire, la borne supérieure des rayons ρ tels que les dicylindres de centre P et du même rayons ρ soient contenus dans $\mathfrak{D}$. (Nous appliquerons cette terminologie aux ensembles ouverts, continus ou non.)

plus grande que $r|\chi(P)|$; et nous désignerons cet ensemble par $\mathfrak{D}(\chi, r)$. Alors:

1^o $\mathfrak{D}(\chi, r)$ consiste en domaine d'holomorphie.

2^o Si $1/\chi$ est holomorphe et bornée dans $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}(\chi, r)$ est contenu à l'intérieur de $\mathfrak{D}$ en jouit de la propriété (α), que l'on peut trouver un ensemble ouvert contenant $\mathfrak{D}(\chi, r)$ à l'intérieur, indéfiniment approché de $\mathfrak{D}(\chi, r)$ et convexe par rapport aux fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$[26].

1^o C'est une conséquence visible d'un théorème de H. Cartan-P. Thullen. Commençons par démontrer la première partie. $\mathfrak{D}$ étant un domaine d'holomorphie, nous pouvons trouver une fonction $\Phi(x.y)$ admettant $\mathfrak{D}$ pour son proper domaine d'holomorphie; avec cette fonction formons la famille de fonctions

$$\Phi[x + \rho\chi(x, y)e^{i\theta}, y + \rho'\chi(x, y)e^{i\theta'}],$$

où $\rho, \rho', \theta, \theta'$ expriment des paramètres réels tels que $|\rho| \leq r$, $|\rho'| \leq r$. L'ensemble $\mathfrak{D}(\chi, r)$ est ouvert, (s'il existe). Soit P un point quelconque de cet ensemble; décrivons le dicylindre (γ) de centre P et de rayon $r|\chi(P)|$. Les valeurs que prennent les fonctions de la famille au centre P, sont celles que prend $\Phi(x, y)$ dans (γ). D'où il s'ensuit immédiatement que la famille de fonctions admet $\mathfrak{D}(\chi, r)$ pour son propre domaine d'holomorphie (continu ou non). L'ensemble $\mathfrak{D}(\chi, r)$ consiste donc, en domaines d'holomorphie, grâce à Cartan et à Thullen.

2^o Supposons $1/\chi$ holomorphe et bornée dans $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{D}(\chi, r)$ est alors contenu dans l'intérieur de $\mathfrak{D}$, puisque $\mathfrak{D}$ est borné. Soit F un ensemble fermé contenu à l'intérieur de $\mathfrak{D}$, contenant $\mathfrak{D}(\chi, r)$ et jouissant de la propriété (α). Toute $\mathfrak{D}(1, \rho)$, ρ étant un nombre positif, jouit de la propriété (α), en vertu de Cartan et de Thullen; F existe donc, certainement. Considérons l'intersection F_0 de tous les F. F_0 est un ensemble fermé contenant $\mathfrak{D}(\chi, r)$. Toute intersection F_1 d'un nombre fini d'ensembles F est un ensemble du même caractère; nous pouvons trouver un F_1 arbitrairement approché de F_0; F_0 jouit donc, de la propriété (α). Il suffit par suite de monter que F_0 est composé de $\mathfrak{D}(\chi, r)$ et des points d'accumulation. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit r' le nombre positif tel que tout point de F_0 soit compris dans $\mathfrak{D}(\chi, r')$ ou sur sa frontière, et que r' soit le plus grand des nombre de ce caractère. On

[26]On peut aussi prendre 2 fonctions holomorphes φ, ψ et considérer $\mathfrak{D}(\varphi, \psi, r)$ au moyen des dicylindres de la forme $|x - x_0| < r|\varphi(x_0, y_0)|$, $|y - y_0| < r|\psi(x_0, y_0)|$ sans changer la conclusion.

a $r' < r$; $\mathfrak{D}(\chi, r')$ contient $\mathfrak{D}(\chi, r)$ à l'intérieur. Soit M un point de F_0, tel que la "Randdistanz" de M par rapport à $\mathfrak{D}$ soit égale à $|r'\chi(M)|$; choisissons un nombre positif r'' plus petit que r' et suffisamment approché de r' pour que la "Randdistanz" de M par rapport à $\mathfrak{D}(\chi, r'')$ soit plus petit que la moitié de celle d'un point quelconque de $\mathfrak{D}(\chi, r)$. Comme $\mathfrak{D}(\chi, r'')$ consiste en domaines d'holomorphie, le théorème de Cartan–Thullen exige l'existence d'une fonction $f(x, y)$ holomorphe dans $\mathfrak{D}(\chi, r'')$ et telle que

$$|f(M)| > 1, \qquad |f(x, y)| < 1 \quad \text{pour} \quad \mathfrak{D}(\chi, r).$$

Or, alors, puisque F_0 jouit de la propriété (α), nous pouvons trouver une fonction holomorphe $\varphi(x, y)$ dans $\mathfrak{D}$, telle que

$$|\varphi(x, y)| < |\varphi(M)|$$

pour tout point (x, y) au voisinage de $\mathfrak{D}(\chi, r)$, d'aprs la proposition souvent utilisée; ce qui contredit à la définition de F_0. C.Q.F.D.

Nous désignerons $\mathfrak{D}(1, r)$ *par* $\mathfrak{D}^{(r)}$; $\mathfrak{D}^{(r)}$ représente alors, l'ensemble des points de $\mathfrak{D}$ tels que les "Randdistanzen" par rapport à $\mathfrak{D}$ soient plus gandes que r.

6. Arrangement des hypothèses. Commençons par arranger les hypothèses. Considérons à nouveau, dans l'espace (x, y) une domaine *borné* $\mathfrak{D}$ contenant l'origine, et 3 hyperplans parallèls L, L_1, L_2 des formes

$$x_2 = 0, \quad x_2 = a_1, \quad x_2 = a_2 \qquad a_1 < 0 < a_2,$$

respectivement, tels que chacun traverse $\mathfrak{D}$. Nous désignerons par $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ et $\mathfrak{D}_3$, les parties de $\mathfrak{D}$ supérieure à L_1, inférieure à L_2 et entre L_1 et L_2, respectivement, et supposerons que *les ensembles ouverts* $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ *consistent en domaine d'holomorpie.* Nous allons repartir de cette seule hypothèse.

Considérons dans $\mathfrak{D}$ les ensembles

$$A = \mathfrak{D}(\chi_1, \rho), \quad B = \mathfrak{D}(\chi_2, \rho), \quad C = \mathfrak{D}^{(\rho)},$$

dont

$$\chi_1 = e^{-ix}, \qquad \chi_2 = e^{ix},$$

ρ étant un nombre positif suffisamment petit pour qu'il satisfasse plusieurs conditions ultérieures. Remarquons avant tout que χ_1 et χ_2 ne s'annule jamais. Nous désignerons les parties des A, B, C sur un hyperplan de la forme $x_2 = x'_2$, x'_2 étant une constante, par $(a), (b), (c)$, respectivement.

1^o Si $x'_2 = 0$, puisque $|\chi_1| = |\chi_2| = 1$, on a

$$(a) = (b) = (c).$$

2^o Si $x'_2 > 0$, puisque $|\chi_1| > 1 > |\chi_2|$ $(\rho|\chi_1| > \rho > \rho|\chi_2|)$, on a

$$(a) \leq (c) \leq (b).$$

Plus précisément, si (a) existe, (c) existe certainement et contient (a) à 1'intérieur; pareillement, si (c) existe, (b) existe et contient (c) à l'intérieur.

3^o. Si $x'_2 < 0$, on a pareillement

$$(b) \leq (c) \leq (a).$$

Soit P, Q 2 points fixes de $\mathfrak{D}$ tels que l'un soit inférieur à L_1 et l'autre soit supérieur à L_2; nous choisirons ρ suffisamment petit pour que la partie commune des ensembles ouverts A, B contienne P, Q et l'origine dans une seule et même composante continue. Nous l'appellerons G, cette composante continue. Prenant 2 nombres réels b_1, b_2 tels que

$$a_1 < b_1 < 0 < b_2 < a_2,$$

nous désignerons les hyperplans $x_2 = b_1$, $x_2 = b_2$ par L'_1 et L'_2, respectivement. Ce sont le domaine G, et les hyperplans L, L'_1, L'_2 qui correspondent aux $\mathfrak{D}, L, L_1$ et L_2 de No. 2. Nous désignerons les parties de G supérieure à L'_1 inférieure à L'_2 et entre L'_1 et L'_2 par G_1, G_2 et G_3 respectivement. Lorsque ρ tend vers 0, G tend vers le domaine donné $\mathfrak{D}$.

Il s'agit de montrer que *l'ensemble* G_1, *ainsi que* G_2, *consiste en domaine d'holomorphie.* Soit A_1 la partie de A supérieure à L'_1, soit B_2 celle de B inférieure à L'_2. D'après la proposition que nous venons de préparer, puisque $\mathfrak{D}_1$ consiste en domaines d'holomorphie, il l'est aussi pour A_1, (ρ étant supposé suffisamment petit.) Et G_1, ensemble en question, est compris dans cet A_1. Regardons la frontière de G_1: elle est composée de la frontière de A_1 et de celle de B_2; soit M un point quelconque sur la deuxième partie de la frontière de G_1. M est nécessairement inférieur à L, ou sur L, d'après la relation entre A

et B. Grâce à la proposition dite plus haut, $\mathfrak{D}_2$ étant des domaines d'holomorphie, B_2 jouit de la propriété (α) par rapport aux fonctions holomorphes dans D_2, (ρ étant supposé suffisamment petit). Soit F un ensemble fermé quelconque dans G_1 soit L_2'' un hyperplan parallèle à L, situant entre L et L_2'. Dans ces conditions, on pourra facilement trouver une fonction holomorphe $f(x, y)$ dans $\mathfrak{D}_2$ telle que

$$f(M) = 1, \qquad |f(x, y)| < 1$$

sur la partie de F inférieure à L_2'' et au voisinage de la partie de L_2'' dans A_1. Nous allons trouver une fonction méromorphe $\Phi(x, y)$ dans A_1, admettant les pôles

$$\frac{1}{f(x, y) - 1}$$

dans la portion inférieure à L_2'' et restant ailleurs holomorphe. Comme A_1 consiste en domaines d'holomorphie et que les pôles donnés n'est pas distribués au voisinage de L_2'', $\Phi(x, y)$ existe certainement. Cette Φ admet M pour pôle et est holomorphe en tout point de F, où M est un point quelconque sur la frontière commune à G_1, B_2. Nous pouvons donc, trouver un ensemble ouvert consistant en domaines d'holomorphie, contenu, dans G_1 et contenant F, en vertu de Cartan et de Thullen. Dont F étant un ensemble fermé quelconque dan G_1, G_1 même consiste en domaine d'holomorphie, grâce au théorème de Behnke–Stein. Pareillement pour G_2. Remarquons de plus que *l'ensemble G_1 ainsi que G_2 est la limite d'une suite décroissante d'ensembles ouverts consistant en domaines d'holomorphie*; dont la démonstration est immédiate, d'après la forme de G_1 ainsi que celle de G_2.

Prenant un nombre positif δ plus grand que ρ et suffisamment approché de ρ, nous considérerons

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_3^{(\rho)}, \quad \mathfrak{D}'' = \mathfrak{D}_3^{(\delta)} \qquad (\rho < \delta).$$

$\mathfrak{D}''$ est contenu à l'intérieur de $\mathfrak{D}'$; comme $C = \mathfrak{D}^{(\rho)}$, C et $\mathfrak{D}'$ coïncident entre L_1' et L_2', ainsi qu'au voisinage de ces hyperplans (ρ étant supposé suffisamment petit). Puisque $\mathfrak{D}_3$ consiste en domaines d'holomorphie, en vertu du théorème de Cartan-Thullen, à tout point frontière de $\mathfrak{D}'$ correspondent un petit dicylindre (γ) et une fonction holomorphe $f(x, y)$ dans $\mathfrak{D}_3$, de façon que

$$|f| > 1 \quad \text{pour} \quad (\gamma), \qquad |f| < 1 \quad \text{pour} \quad \mathfrak{D}''.$$

Grâce au lemme de Borel-Lebesgue, on peut recouvrire la frontière de $\mathfrak{D}'$ avec un nombre fini de (γ); soient

$$X_j(x, y) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

les fonctions $f(x, y)$ correspondant à ces (γ). L'ensemble G_3 est contenu à l'intérieur de $\mathfrak{D}_3$, par suite *les fonctions X_j sont holomorphes au voisinage de G_3.*

Examinons *l'hypothèse 1°* (No. 2). 1° Au voisinage de l'hyperplan L, G est composé d'une ou plusieurs composantes continues de $C = \mathfrak{D}'$. Donc, il n'y a aucun point satisfaisant à

$$|X_j(x, y)| \leq 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

au voisinage de l'intersection de la frontière de G avec L.

2° La partie de G sur L'_2 est contenues à l'intérieur de celle de C, par suite à l'intérieur de celle de $\mathfrak{D}'$. Donc, si δ est choisi suffisamment rapproché de ρ, il n'y a aucun point satisfaisant à une des ν conditions

$$|X_j(x, y)| > 1 - \varepsilon$$

au voisinage des portions de L'_1, L'_2 dans G, ε étant un nombre positif suffisamment petit.

3° En soustrayant de G les points de G_3 qui ne satisfont pas à la condition

$$|X_j(x, y)| < 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

nous avons un ensemble ouvert; cet ensemble tend vers G, lorsque δ tend vers ρ. Nous choisirons δ suffisamment rapproché de ρ pour que cet ensemble contienne les points P, Q et l'origine dans une seule et même composante continue; et l'appellerons Δ, cette composante continue. Nous avons ainsi former dans G un domaine Δ satisfaisant à 1a condition 1 et arbitrairement approché de G.

7. Passons à *l'hypothèse 2°*. Nous avons vu dans le Mémoire V que:

"Pour un domaine d'holomorphie V à l'espace (x, y), étant donnés un nombre positif ε et un domaine V_0 contenue à l'intérieur de V, on peut trouver une fonction holomorphe R des variables complexes $x, y; x_0, y_0$ dans (V_0, V_0), se réduisant à 1 pour $x = x_0, \ y = y_0$, de façon que, à toute fonction holomorphe $f(x, y)$ dans V, corresponde une fonction holomorphe $\varphi(x, y)$ telle que $|f - \varphi| < \varepsilon$, et que

$$(1) \qquad (\varphi - \varphi_0)R = (x - x_0)P + (y - y_0)Q,$$

identiquement, dont φ_0 signifie $\varphi(x_0, y_0)$ et P, Q expriment des fonctions holomorphes des variables $x, y; x_0, y_0$ pour (V_0, V_0)."

Nous allons appliquet ce lemme à $\mathfrak{D}_3$, qui consiste en domaines d'holomorphie, en prenant $\mathfrak{D}_3$ pour V, et pour V_0 un ensemble ouvert contenant $\mathfrak{D}'(= \mathfrak{D}_3^{(\rho)})$ à l'intérieur. Alors, ρ étant supposé suffsamment petit, V_0 contient G_3 à l'intérieur. Considérons la famille consistant de toutes les fonctions $\varphi(x, y)$, holomorphes et jouissant de la propriété (1) pour V_0. Et repartons de cette famille à la place de la famille de fonctions $f(x, y)$ de No. 6; nous arriverons alors, en poursuivant la même voie, à obtenir un nouveau domaine Δ réalisant les hypothèses 1, 2 à la fois.

Envisageons *l'hypothèse* 3^o. 1^o Nous pouvons pareillement partir d'une famille des fonctions $\varphi(x, y)$ telles que les dérivées $\partial X_j/\partial y$ ne s'annulent pas identiquement; nous aurons alors, un domaine Δ satisfaisant aux 2 conditions 1, 2 et tel que les ν dérivées $\partial X_j/\partial y$ ne soient pas nulles identiquement. C'est toujours sur des domaines de ce caractère que nous allons discuter.

2^o Considérons dans G_3 les ν variétés analytiques Σ_j,

$$x_2 = 0, \qquad |X_j(x, y)| = 1.$$

Les Σ_j sont à 2 dimensions au plus, d'après la propriété de Δ sur les dérivées $\partial X_j/\partial y$. Nous allons faire remplir à Δ la condition que les intersections des variétés Σ_j, Σ_k $(j \neq k; j, k = 1, 2, \dots, \nu)$ soient 1 dimension au plus. Prenant 2 nombres positifs r, r' plus grands que $1/2$, considérons dans G_3 la variété analytique T_{jk},

$$x_2 = 0, \quad |X_j(x, y)| = r, \quad |X_k(x, y)| = r'.$$

La variété analytique définie par $x_2 = 0, |X_j| = r$ dans G_3, est évidemment à 2 dimensions au plus; par conséquent, la variété T_{jk} est à 1 dimension au plus, sauf peut-être pour un nombre fini de r', r étant considéré comme déterminé. Il suffit donc, pour le but actuel, de faire une modification convenable de la forme

$$Y_j = \alpha_j X_j \qquad (j = 1, 2, \dots, \nu), \tag{2}$$

α_j étant des nombres positifs, puisque, pour la nouvelle condition, il suffit de choisir ces $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ successivement, en évitant chaque fois un nombre fini de valeurs au plus, et que les 3 anciennes propriétés de Δ

admettent cette modification, pourvu que l'on prenne α_j suffisamment rapprochés de 1.

3^o. Il s'agit de faire remplir à Δ la condition que $\partial X_j/\partial y$ ne soit pas nulle sur la variété Σ_j sauf peut-être aux points d'un nombre fini, j étant quelconque. La variété caractéristique $\partial X_j/\partial y=0$ peut comprendre des plans caractéristiques de la forme $x=\xi$, ξ étant un point sur l'axe réel. Pour l'éviter dans G_3, il suffit de prendre les fonctions

$$X_j(x+\beta, y)$$

au lieu de $X_j(x, y)$, β étant un nombre purement imaginaire, suffisamment petit et convenable. Quant à l'effet de cette modification, nous trouvons facilement que Δ reste remplir toutes les conditions, excepté la dernière, (c'est-à-dire, 2^o). Comme la modification (2) ne donne au contraire aucun effet à la condition en question, faisant successivement les 2 modifications en permutant l'ordre, nous trouvons les 2 conditions, ainsi que les autres, remplies à la fois. La variété analytique définie dans G_3 par

$$x_2 = 0, \qquad \frac{\partial X_j}{\partial y} = 0,$$

et alors, à 1 dimension au plus, j étant quelconque. Par suite, quant à l'intersection de cette variété avec $|X_j|=r$, r étant un nombre positif plus grand que 1/2, elle est composée d'un nombre fini de points, sauf peut-être pour un nombre fini de r. Par conséquent, les 2 dernières conditions (2^o et 3^o) peuvent être simultanément atteintes par une modification convenabie de la forme (2), de manière que Δ reste remplir les autres conditions. En résumé :

On peut trouver un domaine Δ arbitrairement approché du domain donné $\mathfrak{D}$, ayant le caractère, exposé à No. 2.

8. Refonte des domaines d'holomorphie contigus. Envisageons Δ_1. C'est un ensemble ouvert dans G_1; G_1 consiste en domaines d'holomorphie. Les points frontières de Δ_1 appartiennent ou bien à la frontière de G_1 ou bien à L, ou bien à un des ν hypersurfaces $|X_j(x, y)| = 1$. Considérons le troisième cas. Soit M un point frontière de Δ de cette sorte, mais d'ailleurs quelconque; nous supposerons pour fixer l'idée que $|X_1(M)|=1$. La fonction $X_1(x, y)$ est holomorphe au voisinage de G_3. Nous allons trouver une fonction méromorphe $\Phi(x, y)$ dans G_1 admettant les pôles

$$g(x, y) = \frac{1}{X_1(x, y) - X_1(M)}$$

dans G_3 et restant ailleurs holomorphe. D'après la condition 1 de Δ, $g(x,y)$ est holomorphe en tout point de la partie de L'_2 dans G; donc, $\Phi(x,y)$ existe. Par suite, Δ_1 *consiste en domaines d'holomorphie*, grâce à Cartan et à Thullen. De plus, G_1 est approximatif de l'extérieur par les ensembles ouverts consistant en domaines d'holomorphie, (No. 6.). Donc, nous trouvons pareillement *qu'il existe un ensemble ouvert arbitrairement approché de* Δ_1 *contenant* Δ_1 *à l'intérieur et consistant en domaines d'holomorphie.* Il en est de même pour Δ_2.

Soit $(\wp)$ des pôles donnés an voisinage de Δ; il existe une fonction méromorphe $\Phi_1(x,y)$ prenant les pôle $(\wp)$ au voisinage de Δ_1. Pareillement, soit $\Phi_2(x,y)$ celle de Δ_2. Soit $f=\Phi_1-\Phi_2$; $f(x,y)$ est une fonction holomorphe au voisinage de la frontière commune S à Δ_1, Δ_2; correspondant à cette fonction, nous pouvons trouver la solution $F_1(x,y), F_2(x,y)$ du problème de la Section I par rapport à Δ. Posons

$$\Phi = \Phi_1 - F_1, \quad \text{ou} \quad \Phi_2 - F_2,$$

suivant que $(x,y) \in \Delta_1$ ou $\in \Delta_2$. $\Phi(x,y)$ est méromorphe dans Δ et admet les pôles $(\wp)$. Nous avons ainsi vu que, *étant donnèes des pôles au voisinage de* Δ*, on peut trouver une fonction méromorphe, admettant les pôles dans* Δ.

Nous allons montrer d'après cela que Δ est un domaine d'holomorphie[27]. La frontière de Δ est composé de 3 parties :

1^o Soit M un point frontière de Δ tel que une au moins des ν fonctions $X_j(x,y)$ prenne 1 pour valeur absolute, mais d'ailleurs quelconque. Soit, pour fixer l'idée, $|X_1(M)|=1$. Soit Δ_0 un domaine donné l'intérieur de Δ, Nous allons choisir un point N de Δ, suffisamment approché de M pour que la surface caractéristique $X_1(x,y)=X_1(N)$, définie au voisinage de G_3, ne passe par Δ_0, ni s'approche indéfiniment des hyperplans L'_1, L'_2. N existe certainement, grâce à la condition 1 de Δ. Nous pouvons alors trouver une fonction méromorphe $\Phi(x,y)$ dans Δ, qui admet dans Δ les pôles

$$\frac{1}{X_1(x,y) - X_1(N)},$$

et est ailleurs holomorphe. $\Phi(x,y)$ est holomorphe dans Δ_0, et admet N pour pô1e, dont N est un point de Δ dans un certain voisinage de M, mais d'ailleurs quelconque.

[27]Le résultat correspondant dû à H. Cartan, (Note 1, d'Introduction), n'est pas applicable au cas actuel.

2^o Soit M' un point quelconque de la frontière commune à Δ et à G_1. Comme G_1 est approximatif de l'extérieur par les ensembles ouverts consistant en domaines d'holomorphie, grâce au théorème de Cartan–Thullen, en tenant compte de la condition 1 de Δ, il s'ensuit que, si l'on prend un point N' dans Δ, suffisamment approché de M', on peut trouver une fonction holomorphe $f(x,y)$ au voisinage de G_1, telle que

$$f(N') = 1, \quad \text{et} \quad |f(x,y)| < 1$$

dans la partie Δ_0 supérieur à L et au voisinage de la partie de L dans Δ. Il existe donc une fonction méromorphe $\Psi(x,y)$ dans Δ admettant les pôles

$$\frac{1}{f(x,y)-1}$$

pour la portion supérieure à L et restant ailleurs holomorphe. $\Psi(x,y)$ est holomorphe dans Δ_0 et admet N' pour pôle, N' étant un point de Δ dans un certain voisinage de M', mais d'ailleurs quelconque.

3^o Il en est de même pour la frontière commune à Δ et à G_2.

Il existe donc, un ensemble ouvert dans Δ contenant Δ_0 et consistant en domaines d'holomorphie, en vertu de Cartan et de Thullen, dont Δ_0 est un domaine quelconque à l'intérieur de Δ. Par suite, grâce au théorème de Behnke–Stein, Δ est un domaine d'holomorphie; et il en est de même pour $\mathfrak{D}$. Nous avons ainsi vu que :

Etant donné un domaine borné $\mathfrak{D}$ et 2 hyperplans de la forme $x_2 = a_1$, $x_2 = a_2$, $a_1 < a_2$, x_2 étant la partie imaginaire de x, si la partie de $\mathfrak{D}$ supérieure à $x_2 = a_1$ et celle inférieure à $x_2 = a_2$ consistent en domaines d'holomorphie, $\mathfrak{D}$ est un domaine d'holomorphie.

9. Domaines pseudoconvexes au sens de H. Cartan. Comme nous l'avons dit souvent, c'est H. Cartan qui a introduit dans notre théorie la notion, convexité globale. Or, dans le même Mémoire[28], il a considéré un type de domaines tel que; $\mathfrak{D}$ étant le domaine en question, *la partie de $\mathfrak{D}$ dans une hypersphère suffisamment petite autour d'un point frontière (fini) quelconque de $\mathfrak{D}$, consiste en domaine d'holomorphie*; et il l'a appelé d'être (partout) *pseudoconvexe*. Nous allons appliquer ce que nous venons de voir à ce type de domaines.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine quelconque de ce type. Supposons d'abord $\mathfrak{D}$ borné. Partageons le plan x en rectangles égaux ω par 2 systèmes de

[28] Bll. Soc. Math. France, 1931.

lignes droites parallèles aux réel et imaginaire, respectivement; pareillement, partageons le plan y en ω'. D'après la définition précédente, si l'on partage l'espace (x, y) en suffisamment petits (ω, ω'), pour tout domaine d'holomorphie Δ suffisamment approché d'un quelconque de (ω, ω'), la partie de $\mathfrak{D}$ dans Δ consiste en domaine d'holomorphie. Donc, d'après la proposition précédente, il est facile à voir que $\mathfrak{D}$ est un domaine d'holomorphie.

Quand $\mathfrak{D}$ n'est pas borné, traçons une hypersphère (γ_p) autour d'un point M de $\mathfrak{D}$, et de rayon p, p étant un entier positif quelconque. Soit $\mathfrak{D}_p$ la composante continue contenant M, de la partie de $\mathfrak{D}$ dans (γ_p); $\mathfrak{D}_p$ est un domaine d'holomorphie, d'après ce qui précède. La suite de domaines d'holomorphie $\mathfrak{D}_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ converge vers $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$ est donc un domaine d'holomorphie; en vertu du théorème de Behnke–Stein. Ainsi :

Tout domaine pseudoconvexe au sens de H. Cartan est un domaine d'holomorphie.

L'auteur croit que la conclusion, ainsi que la partie essentielle de la démonstration, s'applique à un nombre quelconque de variables complexes.

III. Problème complémentaire.

10. Préliminaires. *Soit $\mathfrak{D}$ uu domaine à l'espace (x, y), soit E le complémentaire de $\mathfrak{D}$. Nous appelons $\mathfrak{D}$ pseudoconvexe, quand E satisfait au théorème de la continuité, dû à F. Hartogs, au voisinage d'un point frontière quelconque (ξ, η) de E, et que cette propriété est invariable par rapport aux transformations pseudoconformes biunivoques au voisinage de (ξ, η). Dont la première condition veut dire que, s'il n'y a aucun point de E sur le plan caractéristique $x = \xi$ au voisinage de (ξ, η), excepté (ξ, η) même, à tout nombre positif donné ρ correspond un nombre positif r suffisamment petit pour que, à tout x' dans $|x - \xi| < r$ corresponde au moins un y' dans $|y - \eta| < \rho$ de façon que (x', y') appartienne à E.*[29]

Les propriétés principales de domaines pseudoconvexe sont étudiées par F. Hartogs et E. E. Levi, et se trouvent sous une forme très systéma-

[29] Cette définition est en peu différente de celle que nous avons donnée au Mémoire IV, mais elles sont équivalentes. Voir le Mémoire ci-dessous de G. Julia.

tique dans le Mémoire de G. Julia, cité plus haut.[30]

Considérons à l'espace (x, y) un domaine borné Δ, tel que la frontière S soit donnée par $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$, dont $x = x_1 + ix_2$ et $y = y_1 + iy_2$, de manière que l'on ait $\varphi < 0$ pour les points de Δ et $\varphi > 0$ pour les points extérieurs, où φ exprime une fonction réelle, *bien définie*[31] et continue au voisinage de S, ayant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre. Dans ces conditions, E. E. Levi a montré que, pour que Δ soit pseudoconvexe, il *faut* que l'on ait $L(\varphi) \geq 0$ sur S, dont

$$\begin{aligned} L(\varphi) = & \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\right] \\ & + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right] \\ & -2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right) \\ & -2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right) \end{aligned}$$

C'est une conséquence de la proposition suivante: *Si $L(\varphi) < 0$ à un point P de S, on peut trouver une surface caractèristique passant par P, régulière en P et restant dans Δ au voisinage de P, sauf à P.* Remarquons ici que $L(-\varphi) = -L(\varphi)$.

D'où il s'ensuit, d'après le résultat que nous venons d'obtenir, que, *si $L(\varphi) > 0$ partout sur S, Δ est un domaine d'holomophie.* Donc, en tenant compte du *théorème de H. Behnke–K. Stein, il s'agit si un domaine pseudoconvexe quelconque est approximatif de l'intérieur par une suite de domaines ayant cette caractère* $(L(\varphi) > 0)$. C'est ce problème que nous traiterons dans la présente Section.

Or, on n'a pas nécessairement $L(\varphi_1 + \varphi_2) > 0$, même si $L(\varphi_1) > 0$ et $L(\varphi_2) > 0$. Pour traiter le problème, nous allons d'abord chercher une autre condition jouissant d'un rôle analogue et restant invariable par rapport à l'addition de fonctions.

Considérons un domaine pseudoconvexes $\mathfrak{D}$ à l'espace (x, y), nous désignerons par $\mathfrak{D}(\xi)$ la projection sur le plan y, de l'intersection de $\mathfrak{D}$ avec un plan caractéristique de la forme $x = \xi$, ξ étant une constante. $\mathfrak{D}(\xi)$ est un ensemble ouvert sur le plan y. Nous désignerons par $R_\eta(\xi)$

[30] Acta math., 1926. Dans ce qui suit. l'auteur se contentera souvent d'y renvoyer le lecteur.

[31] C'est-à-dire, à tout point (x, y) correspond une valeur de φ, finie ou non. mais une seule.

la distance (au sens usuel) d'un point η de $\mathfrak{D}(\xi)$ à la frontière de $\mathfrak{D}(\xi)$. Cette fonction $R_y(x)$ définie dans $\mathfrak{D}$; correspond du *rayon d'holomorphie de F. Hartogs. Hartogs a montré que*

$$-\log R_y(x)$$

est une fonction subharmonique par rapport à x, (détermination du logarithme étant réelle).

Faisons ici une remarque sur la définition de fonctions subhamoniques. Soit A un domaine sur le plan x; on appelle *fonction subharmonique* par rapport à x dans A, toute fonction réelle $\varphi(x)$ bien définie dans A, satisfaisant aux conditions suivantes: 1^o $e^{\varphi(x)}$ est finie et semi-continue supérieurement dans A. 2^o Soit (δ) un domaine quelconque à l'intérieur de A, soit γ la frontière de (δ); et soit $u(x)$ une fonction harmonique par rapport à x, (c'est-à-dire, par rapport à x_1, x_2) dans (δ) restant continue jusqu'à la circonférence γ; alors, si

$$\varphi(x) \leq u(x)$$

sur γ, il en est de même pour (δ). Les fonctions subharmoniques ainsi définies peuvent prendre la valeur $-\infty$. *Nous entendrons que la constante $-\infty$ est y comprise.*[32]

Or, pour le *rayon de Hartogs*, on trouvera de plus que *cette fonction est subharmonique sur tout plan caractéristique, par rapport à x ou à y.*[33] En étudiant les fonctions ayant cette propriété, nous trouverons que la condition différentielle possède le caractère demandé. Et nous verrons, pour le problème formulé ci-dessus, que tout domaine pseudoconvexe est approximatif de l'intérieur par une suite de domaines ayant le nouveau caractère; cela nous suffit.

11. Nouvelle classe de fonctions réelles. Considérons dans l'espace (x, y) un domaine quelconque $\mathfrak{D}$, pseudoconvexe ou non.

Nous appellerons fonction pseudoconvexe par rapport à x, y dans $\mathfrak{D}$, toute fonction réelle $\varphi(x, y)$ bien définie et satisfaisant aux conditions suivantes: 1^o La fonction $e^{\varphi(x,y)}$ est finie et semi-continue supérieurement par rapport à x, y dans $\mathfrak{D}$. 2^o Sur tout plan caractéristique L

[32]Pour les fonctions subharmoniques, voir par exemple: F. Riesz, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport avec la théorie du potentiel. I, 1926. (Acta math.)

[33]Voir: No. 11.

passant par un point de $\mathfrak{D}$, $\varphi(x,y)$ est une fonction subharmonique de x ou de y sur la portion de L dans $\mathfrak{D}$.

Aux propriétés de fonctions subharmoniques correspondent immédiatement des propriétés de *fonctions pseudoconvexes*, dont nous signalerons seulement celles qui sont utiles dans la suivante.

1^o *Soient $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)$ 2 fonctions pseudoconvexes, la somme $\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)$ l'est aussi.*

2^o *Il en est de même pour la borne supérieure $\psi(x,y)$ des quantités $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)$.*

3^o *Etant donnée une suite de fonctions pseudoconvexes $\varphi_n(x,y)$, $(n = 1,2,\ldots)$, dans un domaine $\mathfrak{D}$; si la suite e^{φ_n} converge uniformément, ou en décroissant à l'intérieur de $\mathfrak{D}$ vers e^{φ}, $\varphi(x,y)$ est pseudconvexe dans $\mathfrak{D}$.*

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine pseudoconvexe à l'espace (x,y), soit $R_y(x)$ le rayon de Hartogs par rapport à $\mathfrak{D}$. La fonction

$$\varphi(x,y) = -\log R_y(x)$$

est pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}$, (détermination du logarithme étant réelle).

En effet, $1/R_y(x)$ est une fonction bien définie et finie dans $\mathfrak{D}$. Pour examiner la semi-continuité, supposons d'abord $\mathfrak{D}$ borné. Soit (ξ,η) un point quelconque de $\mathfrak{D}$; soit (ξ_p,η_p) $(p=1,2,\ldots)$ une suite de points de $\mathfrak{D}$ tendant vers (ξ,η), mais d'ailleurs quelconque. Soit α une quelconque des limites de la suite $R_{\eta_p}(\xi_p)$ $(p=1,2,\ldots)$; nous allons montrer que

$$\alpha \geq R_\eta(\xi) \tag{1}$$

Soit Y_p un point frontière du domaine $\mathfrak{D}(\xi_p)$, tel que

$$|Y_p - \eta_p| = R_{\eta_p}(\xi_p);$$

Y_p existe certainement, puisque $R_{\eta_p}(\xi_p)$ est la distance du point η_p à la frontière du domaine borné $\mathfrak{D}(\xi_p)$. La suite Y_p possède nécessairement une limite Y_0 telle que

$$|Y_0 - \eta| = \alpha,$$

puisque α est une des limites de la suite $|Y_p - \eta_p|$. Tout point de la suite (ξ_p, Y_p) étant sur la frontière de $\mathfrak{D}$, il l'est aussi pour le point limit

(ξ, Y_0). Y_0 est donc sur la frontière ou à l'extérieur de $\mathfrak{D}(\xi)$; d'où, il en résulte la relation (1). $R_y(x)$ est ainsi semi-continue inférieurement dans $\mathfrak{D}$.

Lorsque $\mathfrak{D}$ n'est pas borné, on peut trouver une suite de domaines pseudoconvexes et bornés $\mathfrak{D}_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ croissante et tendent vers à $\mathfrak{D}$. Soit R_p le rayon de Hartogs par rapport à $\mathfrak{D}_p$. La fonction $1/R_p$ est semi-continue supérieurement dans $\mathfrak{D}_p$, d'après ce qui précède; la suite $1/R_p$ est décroissante. La limite $1/R_y(x)$ est donc semi-continue supérieurement dans $\mathfrak{D}$.

Nous allons examiner la deuxième condition. Prenons un point quelconque P de $\mathfrak{D}$, que nous supposerons d'être à l'origine, pour simplifier l'écriture. Grâce à Hartogs, la fonction $\varphi(x, 0)$ est subharmonique par rapport à x au voisinage de l'origine. Transformant $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{D}'$ à l'espace (X, Y), par

$$X = x, \qquad Y = y - ax,$$

a étant une constante quelconque, nous considérerons le rayon de Hartogs $R'_Y(X)$ par rapport à $\mathfrak{D}'$. Pour tout x fixe, $Y = y - ax$ n'est qu'une translation du plan y; on a donc,

$$R'_Y(X) = R_y(x).$$

La fonction $-\log R'_0(X)$ est subharmonique au voisinage de $X = 0$, puisque $\mathfrak{D}'$ est un domaine pseudoconvexe contenant l'origine $X = 0$, $Y = 0$. La fonction $\varphi(x, ax)$ est donc, subharmonique au voisinage de $x = 0$.

Il ne reste qu'à examiner $\varphi(0, y)$ au voisinage de $y = 0$. $R_y(0)$ représente la distance du point y à la frontère de $\mathfrak{D}(0)$, $\mathfrak{D}(0)$ contient l'origine $y = 0$. Donc, $1/R_y(0)$ est continue. Cette fonction se réduit à la constante nulle, lorsque $\mathfrak{D}(0)$ coïncide avec le plan y. Supposons donc que $\mathfrak{D}(0)$ ait des points frontières (finis); soit η un quelconque de ces points; alors, on a évidemment

$$\varphi(0, y) = \max[-\log|y - \eta|],$$

où le signe "max" représente la borne supérieure des quantités dans les crochets et la détermination du logarithme est réelle. Les fonctions $-\log|y - \eta|$ sont harmoniques par rapport à y. D'où, il en résulte facilement que $\varphi(0, y)$ est une fonction subharmonique en y, d'après les propriétés de fonctions subharmoniques correspondant aux propriétés 2, 3 de fonctions pseudoconvexes. C.Q.F.D.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine pseudoconvexe, soit $d(x,y)$ la distance (au sens usuel) d'un point (x,y) de $\mathfrak{D}$ à la frontière de $\mathfrak{D}$. La fonction $-log\, d(x,y)$ est pseudoconvexes dans $\mathfrak{D}$, (détermination du logarithme étant réelle).

En effet, la proposition sera vraie, si elle est vraie pour les domaines bornés, puisqu'alors, $-\log d(x,y)$ peut s'exprimer comme limite d'une suite décroissante de fonctions pseudoconvexes. Supposons donc que le domaine $\mathfrak{D}$ soit borné.

Avec 2 nombres a, b tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ considérons la transformation T,

$$X = ax - by, \qquad Y = \bar{b}x + \bar{a}y,$$

dont $\bar{a}, \bar{b}$ expriment respectivement les conjugués de a, b. Cette transformation laisse évidemment la distance invariable. Soit $\mathfrak{D}'$ le transforme de $\mathfrak{D}$ par T, et soit $R'_Y(X)$ le *rayon de Hartogs* par rapport à $\mathfrak{D}$. La fonction $-\log R'_Y(X)$ est pseudoconvexe en X, Y dans $\mathfrak{D}'$ (logarithme étant réel); par suite

$$\psi(x,y) = -\log R'_Y(X)$$

est pseudoconvexe en x, y dans $\mathfrak{D}$, d'après la définition même.

Or, soit (x', y') un point quelconque de $\mathfrak{D}$, soit (x'', y'') celui de la frontière, et soient $(X', Y'), (X'', Y'')$ leurs transformés par T respectivement; si l'on choisit (a, b) tel que

$$a(x' - x'') = b(y' - y''),$$

comme

$$X' = X''$$

on a

$$|Y' - Y''| \geq R'_{Y'}(X');$$

donc

$$-\frac{1}{2}\log[|x' - x''|^2 + |y' - y''|^2] \leq \psi(x', y').$$

De là, il en résulte immédiatement que la fonction $-\log d(x,y)$ peut s'exprimer comme limite d'une suite de fonctions pseudoconvexe, uniformément convergante à l'intérieur de $\mathfrak{D}$, d'après la propriété 2^o. Donc, d'après la proropriété 3^o, $-\log d(xy)$ est pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}$. C.Q.F.D.

Cette fonction $-\log d(x,y)$ jouit spécialement des propriétés suivantes: 1^o Elle est *continue* dans $\mathfrak{D}$, pourvu que $\mathfrak{D}$ ne coïncide pas avec l'espace (fini) (x,y). 2^o Lorsque le point (x,y) de $\mathfrak{D}$ s'approche de la *frontière* de $\mathfrak{D}$ d'une manière quelconque, *cette fonction tend toujours vers* $+\infty$.

12. Condition différentielle. Dans un domaine quelconque $\mathfrak{D}$ à l'espace (x, y), étant donnée une fonction réelle continue $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ admettant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre, nous allons chercher la condition pour que φ soit pseudoconvexe en x, y.

Prenons un point quelconque P de $\mathfrak{D}$, que nous supposerons d'être à l'origine pour simplifier l'écriture. Considérons un plan caractéristique de la forme

$$y = ax, \qquad a = \alpha + i\beta;$$

sur lequel nous avons

$$\Phi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2),$$

dont

$$y_1 = \alpha x_1 - \beta x_2, \qquad y_2 = \beta x_1 + \alpha x_2;$$

$\Phi(x_1, x_2)$ est définie au voisinage de $x = 0$. Nous allons calculer

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}\,.$$

En posant

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}, & D &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}, \\ B &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}, & C &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\,, \end{aligned}$$

nous obtenons sans difficulté que

$$\Delta\Phi = A + 2B\alpha + 2C\beta + D(\alpha^2 + \beta^2). \tag{1}$$

En considérant A, B, C, D comme constantes réelles et α, β comme paramètres réels nous envisagerons la forme

$$U(\alpha, \beta) = A + 2B\alpha + 2C\beta + D(\alpha^2 + \beta^2) \tag{2}$$

pour

$$-\infty < \alpha < +\infty, \quad -\infty < \beta < +\infty.$$

Calculons d'abord *la borne inférieure* m de U: 1° Quand $D \le 0$; si $B = C = D = 0$, on a $m = A$; si non, on a $m = -\infty$. 2° Quand $D > 0$, il existe certainement au moins un (α, β) pour lequel $U = m$; par suite ce (α, β) sera donné par

$$\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \alpha} = B + D\alpha = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \beta} = C + D\beta = 0.$$

Donc,

$$mD = AD - (B^2 + C^2). \tag{3}$$

Cherchons ensuite la condition pour que la forme $U(\alpha, \beta)$ soit *non-négative*. Pour cela, il faut d'abord que $D \geq 0$, puisque, si non, $m = -\infty$. De plus; 1^o Si $D = 0$, il faut que $B = C = 0$ et $A \geq 0$. 2^o Si $D > 0$, il faut que $mD \geq 0$. En résumé,

$$A \geq 0, \quad D \geq 0, \quad AD - (B^2 + C^2) \geq 0 \tag{4}$$

donne la condition *nécessaire*.

Supposons réciproquement que la condition (4) soit remplie; alors, il n'y a que deux cas possibles: ou bien $D = 0$, ce qui entraîne $m = A \geq 0$, puisqu'alors $B = C = 0$ nécessairement; ou bien $D > 0$, on a alors $mD \geq 0$ d'après (3), et par suite $m \geq 0$. La condition (4) est ainsi *suffisante*.

Revenons au problème origrinal; et nous supposerons une fonction pseudoconvexe φ dans $\mathfrak{D}$. Φ étant alors subharmonique par rapport à x en l'origine, nous avons nécessairement $\Delta\Phi \geq 0$ pour $x = 0$, et cela pour tout plan caractéristique de la forme $y = ax$. La condition (4) est donc nécessaire pour P, d'après ce que nous venons de voir, dont P est un point quelconque dans $\mathfrak{D}$.

Supposons réciproquement que la condition (4) soit remplie dans $\mathfrak{D}$. Pour un point quelconque P de $\mathfrak{D}$, φ est alors subharmonique sur tout plan caractéristique de la forme $y = ax + b$ passant par P, au voisinage de P, puisque l'on a nécessairement $\Delta\Phi \geq 0$. Il en est nécessairement de même pour tout plan caractéristique de la forme $x = ay + b$, car, la condition (4) est symétrique par rapport à x, y. La fonction φ est donc pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}$. Nous avons ainsi vu que :

Soit $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ une fonction réelle continue admettant les dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre dans un domaine $\mathfrak{D}$. Pour que

φ soit pseudoconvexe par rapport à x, y dans $\mathfrak{D}$, il faut et il suffit que l'on ait dans $\mathfrak{D}$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\geq 0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\geq 0,$$

$$V(\varphi)=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right)-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right)^2$$
$$-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right)^2\geq 0.$$ [34]

13. Propriété principale. Nous continuerons de considérer une fonction réelle continue $\varphi(x_2, x_2, y_1, y_2)$ admettant les déerivées partielles jusqu'au deuxième ordre dans un domaines $\mathfrak{D}$. *Nous supposerons que*

$$A>0,\qquad V=AD-(B^2+C^2)>0$$

dans $\mathfrak{D}$. D'où, il s'ensuit que $D>0$.

Soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}$. *Supposons d'abord que*

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\neq 0$$

au point P. Nous allons examiner le signe de $L(\varphi)$ de E. E. Levi. En posant

$$a=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2,\qquad d=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2,$$
$$b=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2},\qquad c=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1},$$

nous avons

$$L(\varphi)=Ad+Da-2Bb-2Cc.$$

Dans ce quit suit, nous sous-entendrons par a, b, c, d et A, B, C, D, les valeurs au point P. D'après l'hypothèse, un au moins des a, d n'est pas nul. Supposons, pour fixer l'idée, que

$$d>0.$$

On a

$$ad-(b^2+c^2)=0.$$

[34] Cette condition est encore nécessaire et suffisante pour que φ soit subharmonique sur toute surface caractéristique régulière.

En possant
$$\alpha = \frac{-b}{d}, \qquad \beta = \frac{-c}{d},$$
on a donc,
$$\frac{L(\varphi)}{d} = A + 2B\alpha + 2C\beta + D(\alpha^2 + \beta^2).$$

Regardons la forme $U(\alpha, \beta)$ de No. 12. Si $D > 0$, la borne inférieure m est donnée par $mD = V$. Par suite, encore si $V > 0$, nous avons toujours $U(\alpha, \beta) > 0$. On a donc $L(\varphi) > 0$.

Ainsi $d > 0$ et $L(\varphi) > 0$ pour P. Grâce à E. E. Levi, on peut donc trouver une surface caractéristique de la fornie $y = f(x)$, passant par P et telle que l'on ait sur la surface $\varphi > \varphi(P)$ au voisinage de P, sauf pour P où $f(x)$ exprime une fonction holomorphe au voisinage de la projection de P sur le plan x; on peut même choisir $f(x)$ parmi les polynômes du deuxième degré en x. Il en est tout pareil pour le cas $a > 0$.

Nous allons envisager le *cas exceptionnel*. Supposons que l'on ait
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} = 0$$
au point P. Supposons pour simplifier 1'écriture que P est à l'origine et $\varphi(P) = 0$. Prenant un plan caractéristique de la forme
$$y = ax, \qquad a = \alpha + i\beta,$$
considérons
$$\Phi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2),$$
dont
$$y_1 = \alpha x_1 - \beta x_2, \qquad y_2 = \beta x_1 + \alpha x_2$$
Comme φ admet les dérivés partielles continues jusqu'au deuxième ordre, on a
$$\Phi = \frac{1}{2}(\mu_1 x_1^2 + 2\mu_2 x_1 x_2 + \mu_3 x_2^2) + (\varepsilon_1 x_1^2 + 2\varepsilon_2 x_1 x_2 + \varepsilon_3 x_2^2)$$
au voisinage de $x = 0$, où μ_1, μ_2, μ_3 sont des constantes réelles dépendant de a, et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont des fonctions réelles de x_1, x_2, bien définie, finie et tendant vers 0 avec x. Pour que le plan caractéristique $y = ax$ ne passe par aucun point de $\varphi \leq 0$ au voisinage de l'origine, excepté à l'origine, il suffit que $\Phi > 0$ dans un cercle suffisamment petit du plan y autour de l'origine, sauf au centre. Et pour cela, il suffit que

$$(1) \qquad \mu_1 > 0, \qquad \mu_1\mu_3 - \mu_2^2 > 0.$$

Par un calcul simple, nous avons

$$\begin{aligned}
\mu_1 =& \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}\alpha^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\beta^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1\partial y_2}\alpha\beta + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}\alpha + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2}\beta + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2},\\
\mu_3 =& \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\alpha^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}\beta^2 - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1\partial y_2}\alpha\beta + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\alpha - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\beta + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2},\\
\mu_2 =& \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1\partial y_2}(\alpha^2-\beta^2) - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right)\alpha\beta + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right)\alpha\\
&- \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right)\beta + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2},
\end{aligned}$$

où on sous-entend que les dérivées représentent les valeurs à l'origine.

Considérons (α,β) pour être un point sur le plan au moyen des axes réctangulaires dans la géometrie cartésienne. Nous allons distinguer 2 cas d'après la forme de l'équation $\mu_2=0$: Ou bien

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1\partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2},$$

on a alors,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2} > 0,$$

puisque $D>0$; par suite, en prenant α suffisamment grand, la condition (1) est remplie par le point $(\alpha,0)$. *Supposons donc*,

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right)^2 + \left(4\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1\partial y_2}\right)^2 > 0.$$

L'équation $\mu_2=0$ représente alors, une hyperbole ou, comme cas limite, une paire de droites (réelles) se croisant. Quant aux équations $\mu_1=0$, $\mu_3=0$, puisque $\partial^2\varphi/\partial y_1^2$ et $\partial^2\varphi/\partial y_2^2$ ne peuvent pas s'annuler à la fois, elles sont effectivement du deuxième degré. Nous trouvons d'abord

$$\mu_1+\mu_3 = D(\alpha^2+\beta^2) + 2B\alpha + 2C\beta + A.$$

$$\therefore \quad \mu_1+\mu_3 > 0. \tag{3}$$

Supposons pour fixer l'idée que $\mu_2=0$ soit une hyperbole. Faisant tracer à (α,β) une des branches de l'hyperbole, regardons le signe de μ_1. Si μ_1 change le signe à un point M, puisque $\mu_2=0$ et $\mu_3>0$ d'après (3) au point M, la condition (1) est certainement remplie à un point convenable voisin de M. Il en est de même pour le signe de μ_3, ainsi que pour le cas où $\mu_2=0$ représente une paire de droites. Supposons donc que, quand $\mu_2=0$ représente une hyperbole, μ_1 *et* μ_3 *ne change pas les signes* sur chacune des branches, et quand $\mu_2 = 0$ représente une paires de droites se croisant, il le soit pour toute la courbe. Dans cette condition, nous allons montrer l'existence d'un point (α, β) satisfaisant à la condition (1); cela nous suffit.

Nous désignerons les parties du deuxième degré en α, β de μ_1, μ_2, μ_3 par

$$\lambda_1(\alpha, \beta), \quad \lambda_2(\alpha, \beta), \quad \lambda_3(\alpha, \beta),$$

respectivement. Considérons la transformation

$$\alpha' = -\beta, \qquad \beta' = \alpha\,;$$

ce qui exprime la rotation du plan autour de l'origine par $\pi/2$. Nous avons

$$\lambda_2(\alpha', \beta') = -\lambda_2(\alpha, \beta).$$

Donc, $\mu_2 = 0$ représente une hyperbole ou 2 droites *rectangulaires*. Nous avons ensuite

$$\lambda_1(\alpha', \beta') = \lambda_3(\alpha, \beta), \qquad \lambda_3(\alpha', \beta') = \lambda_1(\alpha, \beta)\,;$$

et encore

$$\lambda_1 + \lambda_3 = D(\alpha^2 + \beta^2)\,;$$

la portion $\lambda_1 > 0$ est donc *plus grand* que la portion $\lambda_1 < 0$ *en angle* à l'origine; il en est de même pour λ_3.

Considérons le cas où $\mu_2 = 0$ représent une hyperbole rectangulaire. D'après ce qui précède, lorsque le point (α, β) s'éloigne indéfiniment le long d'une quelconque des branches de l'hyperbole à un sens convenable, ce point ne peut rester sur la portion $\lambda_1 \leq 0$; par suite, sur cette branche, il y a au moins un point pour lequel $\mu_1 > 0$. On a donc $\mu_1 \geq 0$ partout sur $\mu_2 = 0$, d'après l'hypothèse ci-dessus. Il en est de même pour λ_3, ainsi que pour le cas où $\mu_2 = 0$ représente 2 droites rectangulaires. On a ainsi $\mu_1 \geq 0$, $\mu_3 \geq 0$ partout sur $\mu_2 = 0$; la courbe $\mu_2 = 0$ ne peut coïncider avec $\mu_1 = 0$, ni avec $\mu_3 = 0$, puisque les asymptotes ne le sont pas. Nous pouvons donc trouver un point (α, β) satisfaisant aux conditions $\mu_1 > 0$, $\mu_3 > 0$, $\mu_2 = 0$, et par suite à la condition demandée $\mu_1\mu_3 - \mu_2^2 > 0$.

Soit $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ une fonction réelle continue admettant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre, et telle que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} > 0, \quad V(\varphi) > 0,$$

dans un domaine $\mathfrak{D}$. Pour un point quelconque P de $\mathfrak{D}$, on peut trouver une surface caractéristique passant par P, régulière en P et restant dans la portion $\varphi > \varphi(P)$ au voisinage de P, P étant exclu.

14. Nous allons d'abord faire quelques remarques sur la proposition ci-dessus. Traçons autour du point P une hypersphère S à l'intérieur du domaine $\mathfrak{D}$. Considérons la portion $\varphi < \varphi(P)$ dans S ; si elle existe, nous désignerons une quelconque des composantes continues par Δ. Nous allons montrer que Δ est un domaine d'holomorphie.

Considérons les domaines d'holomorphie (univalents) contenant Δ. Grâce à H. Cartan–P. Thullen[35], il existe le plus petit de ces domaines, que nous désignerons par G. G est nécessairement contenu dans S. *Supposons que* $\Delta \neq G$. D'après la forme de Δ, G possède alors, au moins un point pour lequel φ prend la valeur $\varphi(P)$. Soit α la borne supérieure des valeurs que prend φ dans G; φ ne peut prendre α dans G, en vertu de la proposition précédente. On a donc, $\varphi(P) < \alpha$.

Soit Q un point frontière de G tel que $\varphi(Q) = \alpha$. Il existe une surface caractéristique $F(x, y) = 0$ passant par Q et restant dans la $\varphi > \alpha$ au voisinage de Q, sauf à Q, d'après la proposition précédente. Traçons une hypersphère (δ) autour de Q, suffisamment petit pour que $F(x, y)$ soit holomorphe au voisinage de (δ), et que l'intersection de $F = 0$ avec la frontière de (δ) soit située à 1'extérieur de G, et encore que (δ) ne contienne aucun point de Δ; (δ) existe certainement. Prenons un nombre positif ε suffisamment petit pour que l'intersection de l'hypersurface $|F| = \varepsilon$ avec la frontière de (δ) soit aussi située à l'extérieur de G; et nous considérons l'ensemble E composé des points de G qui n'appartiennent pas à (δ), ou bien satisfont à la condition $|F| > \varepsilon$. E est un ensemble ouvert contenant Δ; toute composante continue de E est un domaine pseudoconvexe au sens de H. Cartan, et est par suite un domaine d'holomorphie; ce qui contredit à la définition de G. On a donc, $\Delta = G$ Ainsi :

Dans la condition de la proposition précédente, S étant une hypersphère autour du point P à l'intèrieur du domaine $\mathfrak{D}$, la portion de l'ensemble $\varphi < \varphi(P)$ dans S, si elle existe, consiste en domaine d'holomorphie.

Soit ensuite, $\varphi(x, y)$ une fonction réelle et *continue* dans un domaine

[35]Voir: H. Cartan–P. Thullen, cité plus haut.

$\mathfrak{D}$. Soit (x', y') un point de $\mathfrak{D}$, tel que le dicylindre (γ),

$$|x - x'| < r, \qquad |y - y'| < r$$

soit contenu à l'intérieur de $\mathfrak{D}$, mais d'ailleurs quelconque, où r est un rayon donné à priori. Nous désignerons la moyenne des valeurs que prend φ dans (γ) par $\varphi_1(x', y')$. La fonction $\varphi_1(x, y)$ est définie dans $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}^{(r)}$; ($\mathfrak{D}^{(r)}$ signifie l'ensemble des points de $\mathfrak{D}$, tels que les "Randdistanzen" par rapport à $\mathfrak{D}$ soient plus grandes que r). Nous désignerons ce procédé par

$$\varphi_1(x, y) = A_r[\varphi(x, y)]\,;$$

ce qui est une analogie d'un procédé sur le plan, bien connue[36]. Les propriétés suivantes de A_r seront donc évidentes :

$A_r(\varphi)$ admet les dérivées partielles continues du premier ordre par rapport à x_1, x_2, y_1, y_2.

Si φ admet les dérivées partielles continues du premier ordre, $A_r(\varphi)$ admet celles du deuxième ordre, continues.

Considérons

$$A_r[A_r(\varphi)] = A_r^2(\varphi).$$

La fonction $A_r^2(\varphi)$ est définie et continue dans $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1^{(r)}$ et admet les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport à x_1, x_2, y_1, y_2, d'après ce qui précéde.

Lorsque r tend vers 0, $\mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}_2$ tend vers $\mathfrak{D}$, $A_r(\varphi)$ et $A_r^2(\varphi)$ tendent uniformément vers φ à l'intérieur de $\mathfrak{D}$.

Si la fonction $\varphi(x, y)$ est *pseudoconvexe*, $A_r(\varphi)$ est aussi pseudoconvexe, d'après les propriétés 1 et 3, et par suite, il en est de même pour $A_r^2(\varphi)$.

Soit $\psi(x, y)$ une fonction pseudoconvexe continue admettant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport à x_1, x_2, y_1, y_2 dans le domaine $\mathfrak{D}$. D'après ce que nous avons vu au No. 12, on a alors, dans $\mathfrak{D}$,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_2^2} \geq 0, \quad V(\psi) \geq 0.$$

Considérons

$$\chi(x, y) = \psi(x, y) + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2),$$

[36]Voir par exemple: F. Riesz, cité plus haut.

ε étant un nombre positif quelque petit qu'il soit. Nous trouvons que

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2} > 0, \qquad V(\chi) > 0.$$

En résumé, nous avons vu que :

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction pseudoconvexe continue dans un domaine $\mathfrak{D}$. Etant donné un nombre positif ε et un domaine $\mathfrak{D}_0$ contenue à l'intérieur de $\mathfrak{D}$, il existe dans $\mathfrak{D}_0$ une fonction pseudoconvexe continue $\xi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ admetant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre et telle que

$$|\varphi - \chi| < \varepsilon, \qquad \frac{\partial^2\chi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2} > 0, \qquad V(\chi) > 0.$$

Considérons maintenant, un domaine pseudoconvexe $\mathfrak{D}$ à l'espace (x, y). Supposons d'abord $\mathfrak{D}$ borné. Apportons la fonction

$$\varphi(x, y) = -\log d(x, y)$$

de No. 11, où $d(x, y)$ représente la distance du point (x, y) de $\mathfrak{D}$ la frontière de $\mathfrak{D}$. Comme $\varphi(x, y)$ est pseudoconvexe et continue dans $\mathfrak{D}$, d'après la proposition précédente, nous obtenons une fonction $\chi(x, y)$ ayant la propriété indiquée. Pour déterminer $\mathfrak{D}_0$ et ε, prenons 3 nombres réels tels que

$$\alpha < \beta < \gamma,$$

de façon que l'on ait effectivement des points satisfaisant à $\varphi < \alpha$. Nous choisirons $\mathfrak{D}_0$ suffisamment grand pour qu'il contient l'ensemble $\varphi < \gamma$ à l'intérieur; $\mathfrak{D}_0$ existe certainement, puisque, $\mathfrak{D}$ étant borné, l'ensemble $\varphi < \gamma$ est contenu à l'intérieur de $\mathfrak{D}$. Nous choisirons ε suffisamment petit pour que $\chi < \beta$ contienne l'ensemble $\varphi < \alpha$ et soit contenu dans l'ensemble $\varphi < \gamma$. D'après la première des propositions précédentets, l'ensemble $\chi < \beta$ consiste en domaines pseudoconvexes au sens de H. Cartan, par suite, en domaines d'holomorphie. Quand α tend vers $+\infty$, l'ensemble $\varphi < \alpha$ tend vers $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}$ est donc un domaine d'holomorphie, en vertu du *théorème de H. Behnke–K. Stein.*

Lorsque $\mathfrak{D}$ n'est pas borné, comme nous l'avons vu souvent, on peut trouver une suite croissante de domaines pseudoconvexes bornés tendant vers $\mathfrak{D}$. D'après ce qui précède, $\mathfrak{D}$ est donc un domaine d'holomorphie.

Théorème. *Dans l'espace de 2 variables complexes, tout domaine pseudoconvexe, univalent et fini est un domaine d'holomorphie.*

L'auteur pense que cette conclusion sera aussi indépendante des nombres de variables complexes.

(Reçu le 25 octobre, 1941.)