SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES

(VII. SUR QUELQUES NOTIONS ARITHMÉTIQUES);

Par M. Kiyoshi Oka.

Introduction. — Ce Mémoire[1] est le septième d'une série dont les précédents sont : I. *Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles,* 1936; II. *Domaines d'holomorphie,* 1937; III. *Deuxième problème de Cousin,* 1939 (*Journal of Science of the Hiroshima University*); IV. *Domaines d'holmorphie et domaines rationnellement convexes,* 1941; V. *L'intégrale de Cauchy,* 1941 (*Japanese Journal of Mathematics)*; VI. *Domaines pseudoconvexes,* 1942 (*Tohoku Mathematical Journal*).

On rencontre déjà certaines notions arithmétiques au théorème II du Mémoire I (lemme fondamental), au théorème I du Mémoire II, et à la condition (β) (condition de A. Weil) du Mémoire V. Plus tard, nous rencontrerons une autre notion arithmétique, dans l'étude des points de ramification; faute de laquelle on ne pourrait pas traiter des fonctions algébriques.

Nous commencerons ici par approfondir ces notions arithmétiques. Les notions de *congruence* et d'*idéal*, par exemple, seront transplantées du champ des polynomes à celui des fonctions anaiytiques. Comme la fonction ne peut pas, en général, être prolongée à tout l'espace, on rencontre de nouveaux problèmes. H. Cartan a découvert un phénomène de cette nature[2], auquel se rattachent plusieurs théorèmes et un problème assez complexe du présent Mémoire (*Voir* §7). Ces théorèmes me sont indispensables pour résoudre les problèmes étudiés depuis le Mémoire I, lorsqu'on veut les étendre au cas des domaines ramifiés; ils sont aussi utiles pour des domaines moins compliqués [3].

---

[1] *Note de la Rédaction.*— Le lecteur observera que, par suite de la guerre, l'auteur n'avait pu prendre connaissance du Mémoire de H. Cartan, *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes (Ann. Éc. Norm. Sup., 61, 1944, p. 149-197)* consacré au même sujet, et faisant suite au Mémoire cité par l'auteur [*voir* ci-dessous, note (2)]. Les résultats que M. Oka obtient ici sont plus complets que ceux du Mémoire de H. Cartan de 1944.

[2] H. Cartan, *Sur les matrices holomorphes de n variables complexes* (Journ. Math., 9° série, 19, 1940, p.1-26). Nous devons beaucoup aux théorèmes de ce Mémoire.

[3] L'auteur désire exprimer ici ses sincères remerciments à Huju-Kai pour son concours à l'époque du Mémoire VI.

Dans le Mémoire actuel, il sera seulement question de domaines *univalents* de l'espace numérique complexe (donc, sans points à l'infini). Nous omettrons de le spécifier.

1. Congruences et équivalences; théorème de H. Cartan. — Parmi les problèmes qui se transportent du champ de l'Arithmétique à celui des fonctions analytiques, se trouve un type de problèmes (comme les ≪problèmes de Cousin≫), où il s'agit de passer de données *locales* à des solutions *globales*. Nous allons résumer les principaux problèmes de ce type.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine dans l'espace de n variables complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$. Considérons, dans $\mathfrak{D}$, deux fonctions holomorphes f, φ, et un système fini de p fonctions holomorphes $F_1, \dots, F_p$. Un point de l'espace sera désigné par une seule lettre (x), et la valeur d'une fonctions f en ce point sera notée $f(x)$. Supposons une relation de la forme

$$f - \varphi = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_p F_p,$$

où les α_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ sont des fonctions holomorphes de (x) dans $\mathfrak{D}$; les fonctions f, φ seront alors dites *congruentes* par rapport à F dans $\mathfrak{D}$, et la relation sera notée

$$f \equiv \varphi \qquad [\operatorname{mod}(F)].$$

Nous dirons que deux fonctions f, φ sont congruentes *en un point* P de $\mathfrak{D}$, si elles sont congruentes dans un voisinage de P. Deux fonctions qui sont congruentes en tout point de $\mathfrak{D}$ ne sont pas nécessairement congruentes (globalement) dans $\mathfrak{D}$. Ceci nous conduit au problème que voici :

Problème $(\mathbf{C_1})$. — *Étant donné un système fini de fonctions holomorphes $(F_1, \dots, F_p)$ et une fonction holomorphe $\Phi(x)$ au voisinage d'un ensemble fermé borné E, telle que $\Phi \equiv 0$ $[\operatorname{mod}(F)]$ en tout point de E, trouver p fonctions $A_i(x)$ holomorphes au voisinage de E, de façon que $\Phi = \sum_i A_i F_i$ identiquement.*

On est conduit d'autre part au problème d'existence :

Problème $(\mathbf{C_2})$. — *Soit donné, au voisinage d'un ensemble fermé E de l'espace (x), un système fini de fonctions holomorphes $(F_1, \dots, F_p)$; supposons attaché à chaque point P de E un polycylindre (γ) autour de P et une fonction $\varphi(x)$ holomorphe dans (γ); supposons que, pour tout couple de polycylindres $(\gamma), (\gamma')$ d'intersection (δ) non vide, on ait la relation $\varphi(x) \equiv \varphi'(x)$ $[\operatorname{mod}(F)]$ entre les fonctions correspondantes en tout point de (δ). On se propose de trouver une fonction $\Phi(x)$ holomorphe au voisinage de E, telle que $\Phi(x) \equiv \varphi(x)$ $[\operatorname{mod}(F)]$ en tout point P de E.*

Nous allons expliquer ce que nous entendons par *polycylindre*. E_i étant un ensemble du plan (x_i), tout ensemble de la forme $x_i \in E_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sera appelé *ensemble cylindrique*, et les ensembles E_i seront appelés ses composantes. Un ensemble cylindrique fermé sera dit *simplement connexe* si, pour chaque i, l'ensemble complémentaire de la composante E_i est simplement connexe lorsqu'on le considère sur la sphère de Riemann. Nous appellerons *polycylindre* tout ensemble cylindrique E dont toutes les composantes E_i sont des cercles.

Considérons alors deux systèmes finis de fonctions holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}$ de l'espace (x), soient $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$. Supposons les deux relations

$$(1) \qquad \varphi_i \equiv 0 \;[\mathrm{mod}(f)], \quad f_j \equiv 0 \;[\mathrm{mod}(\varphi)] \quad (i = 1, \ldots, q;\; j = 1, \ldots, p)$$

globalement pour $\mathfrak{D}$. Nous dirons alors que les systèmes (f) et (φ) sont *équivalents dans* $\mathfrak{D}$, et nous écrirons les relations (1) sous la forme

$$(f) \sim (\varphi);$$

le seul premier groupe des relations (1) s'écrira

$$(\varphi) \subset (f).$$

Nous dirons que deux systèmes de fonctions (f) et (φ) sont équivalents en un point P de $\mathfrak{D}$, s'ils sont équivalents dans un voisinage de P; de même pour $(\varphi) \subset (f)$ en un point P.

L'équivalence des systèmes de fonctions pose le problème suivant :

Problème (**E**). — *Les notations E, (γ), (δ) ayant la même signification que dans le problème* (C_2), *on suppose donné, pour chaque (γ), un système fini de fonctions holomophes (f), de manière que dans chaque intersection non vide (δ) la relation $(f) \sim (f')$ ait lieu en tout point de (δ) entre les systèmes (f) et (f') correspondant aux polycylindres (γ) et (γ') d'intersection (δ). On se propose de trouver un système fini de fonctions holomorphes (F) dans un voisinage de l'ensemble E, de manière que $(F) \sim (f)$ en tout point P de E.*

Tels sont les problèmes que nous nous proposons de résoudre.

Au sujet du problème (E), H. Cartan a montré dans le Mémoire cité plus haut le théorème suivant :

Théorème de H. Cartan. — *Considérons dans l'espace (x) deux ensembles cylindriques fermés bornés Δ', Δ'' qui ont mêmes composantes dans* *les plans de toutes les variables sauf une, et dont l'intersection* $\Delta' \cap \Delta'' = \Delta_0$ *soit non vide et simplement connexe; supposons donné, au voisinage de* Δ', *un système fini de fonctions holomorphes* (f'), *et, au voisinage de* Δ'', *un syslème fini* (f''), *de manière que la relation* $(f') \sim (f'')$ *ait lieu globalement au voisinage de* Δ_0. *Dans ces conditions, on peut trouver un système fini de fonctions holomorphes* (f) *au voisinage de la réunion* $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$, *de façon que* $(f) \sim (f^{(i)})$ *au voisinage de* $\Delta^{(i)}$ $(i = 1, 2)$.

Dans le Mémoire cité, H. Cartan a démontré ce théorème en utilisant la notion de *matrice*. Dans sa manière de faire, si p, q, r désignent le nombre des fonctions des systèmes (f'), (f'') et (f) respectivement, on a toujours $p < r$, $q < r$.

Nous allons appliquer le théorème de Cartan au problème (E). Considérons dans le plan (x_i) $(i = 1, \ldots, n-1)$ un cercle (α_i), et dans le plan (x_n) trois cercles (β_j) $(j = 1, 2, 3)$ empiétant deux à deux. Soit Δ_j le polycylindre fermé dont les composantes sont (α_i) et (β_j); et supposons donné, au voisinage de chaque Δ_j $(j = 1, 2, 3)$, un système fini de fonctions holomorphes (f_j) de façon que deux quelconques de ces systèmes soient équivalents au voisinage de l'intersection correspondante.

Dans ces conditions, essayons d'appliquer le théorème de Cartan. Pour $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, l'application est possible, et l'on trouve un système fini de fonctions holomorphes (f) au voisinage de Δ, tel que $(f) \sim (f_j)$ globalement au voisinage de Δ_j $(j = 1, 2)$. Pour $\Delta \cup \Delta_3$, l'appilcation n'est pas toujours possible : car il n'est pas certain que les systèmes (f) et (f_3) soient globalement équivalents au voisinage de l'intersection correspondante. Mais si le problème (C_1) peut être résolu pour tout polycylindre fermé (c'est-à-dire au voisinage de tout polycindre fermé), on pout évidemment appliquer à nouveau le théorème de Cartan. De là résulte que :

Si le problème (C_1) *peut être résolu pour tout polycylindre fermé, il en est de même du problème* (E).

La démonstration étant facile, et semblable à d'autres démonstrations connues, sera omise. Nous expliquerons pourquoi on peut se borner aux *polycylindres*. Dans le Mémoire présent, nous traiterons les problèmes *exclusivement pour les polycylindres bornés fermés*; ensuite, les propriétés intrinsèques des problème eux-mêmes permettront d'étendre la théorie à des domaines fermés plus généraux.

Quant à la relation entre les problèmes (C_1) et (C_2), on a le résultat suivant :

Considérons la même configuration géométrique que pour le théorème de Cartan, sauf que l'intersection Δ_0 n'est plus astreinte à être simplement connexe; et supposons donné un système fini de fonctions holomorphes $(F_1, \ldots, F_p)$ au voisinage de Δ, tel que le problème (C_1) soit résoluble pour (F) au voisinage de Δ_0. Dans ces circonstances, si l'on a une fonction f' holomorphe au voisinage de Δ', et une fonction f'' holomorphe au voisinage de Δ'', telles que $f' - f'' \equiv 0\ [\mathrm{mod}(F)]$ en tout point d'un voisinage de Δ_0, on peut trouver une fonction f holomorhe au voisinage de Δ, telle que $f \equiv f'\ [\mathrm{mod}(F)]$ en tout point d'un voisinage de Δ', et $f \equiv f''$ en tout point d'un voisinage de Δ''.

En effet, la fonction $\varphi(x) = f'(x) - f''(x)$ est holomorphe au voisinage de Δ_0 et satisfait à $\varphi(x) \equiv 0[\mathrm{mod}(F)]$ en tout point de Δ_0; en résolvant le problème (C_1) pour cette fonction, on trouve

$$\varphi = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_p F_p,$$

les α_i $(i = 1, \ldots, p)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de Δ_0. Comme Δ_0 est cylindrique, on peut, par *l'intégrale de Cousin*, trouver des fonctions $a_i(x)$ holomorphes au voisinage de Δ' et des fonctions $b_i(x)$ holomorphes au voisinage de Δ'', de façon que

$$a_i(x) - b_i(x) = \alpha_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

identiquement au voisinage de Δ_0. Formons les fonctions

$$\psi' = f' - (a_1 F_1 + \cdots + a_p F_p), \quad \psi'' = f'' - (b_1 F_1 + \cdots + b_p F_p);$$

ψ' est holomorphe au voisinage de Δ', et ψ'' au voisinage de Δ''. Or, au voisinage de Δ_0, on a identiquement

$$\psi' - \psi'' = \varphi - (\alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_2 F_2) = 0;$$

ψ' et ψ'' sont donc des parties d'une seule fonction $f(x)$ holomorphe au voisinage de Δ; cette fonction f est congrue à f' $[\mathrm{mod}(F)]$ au voisinage de Δ', et congrue à f'' $[\mathrm{mod}(F)]$ au voisinage de Δ''. C.Q.F.D.

De ce lemme, il résulte immédiatement que :

Si le problème (C_1) est résoluble pour tout polycylindre fermé, le problème (C_2) l'est aussi.

Les problèmes (C_1), (C_2), (E) sont donc réduits au problème (C_1).

Le lecteur reconnaîtra dans le théorème II du Mémoire I, le théorème I du Mémoire II et la condition (β) du Mémoire V, les problèmes (C_2), (E) et (C_1) respetivement.

2. Idéaux de domaines indéterminés. — Comme H. Cartan, nous allons utiliser ici la notion d'*idéal.*

Considérons dans l'espace (x) un domaine $\mathfrak{D}$ et un ensemble (I) de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$; supposons vérifiées les deux conditions suivantes :

1° si $f \in (I)$ et si α est une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$, alors $\alpha f \in (I)$;
2° si $f' \in (I)$ et $f'' \in (I)$, alors $f' + f'' \in (I)$.

Nous dirons que (I) est un *idéal holomorphe de domaine* $\mathfrak{D}$. Mais nous allon étendre cette notion.

Considérons dans l'espace (x) des couples (f, δ), où δ est un domaine et f une fonction holomorphe dans δ. Considérons un ensemble (I) de couples (f, δ); au lieu de dire que $(f, \delta) \in (I)$, nous dirons parfois que $f \in (I)$ pour δ. Supposons que cet ensemble (I) satisfasse aux deux conditions suivantes :

1° si $(f, \delta) \in (I)$ et si α est une fonction holomorphe dans un domaine (connexe ou non) δ', alors $\alpha f \in (I)$ pour $\delta \cap \delta'$;
2° si $(f, \delta) \in (I)$ et $(f', \delta') \in (I)$, alors $f + f' \in (I)$ pour $\delta \cap \delta'$.

Nous dirons alors que (I) est un *idéal holomorphe de domaines indéterminés* ou, plus briévement, un idéal de domaines indéterminés, ou enfin, tout simplement un idéal.

La définition implique que :

Si (I) est un idéal de domaines indéterminés, et si $(f, \delta) \in (I)$ et $\delta' \subset \delta$, alors $(f, \delta') \in (I)$.

Nous dirons qu'une fonction f appartient à un idéal (I) *en un point P*, si elle appartient à (I) pour un voisinage de P.

Envisageons les propriétés suivantes d'un idéal (I) de domaines indéterminés :

Propriété (T_1). — Si $(f, \delta) \in (I)$ et $(f', \delta') \in (I)$, alors $f \in (I)$ pour $\delta \cup \delta'$.

Propriété (T_2). — Si l'on a une suite infinie croissante $\delta_1 \subset \delta_2, \ldots$ et si $f \in (I)$ pour chacun des δ_i de la suite, alors $f \in (I)$ pour la réunion de la suite.

Examinons si ces propriétés sont toujours réalisées :

Exemple 1. — Considérons dans le plan d'une variable complexe x, le cercle (C) de centre à l'origine et de rayon 1, et dans (C) un domaine (connexe ou non) δ de diamètre d (le *diamètre* est la borne supérieure de la distance de deux points quelconques de δ); et soit (I) l'ensemble des couples (f, δ) tels que $d \leq 1/2$. L'idéal (I) *possède la propriété* (T_2), *mais non la propriété* (T_1).

Exemple 2. — Considérons, dans le cercle (C) précédent, une suite de cercles concentriques (C_i) dont les rayons r_i forment une suite strictement croissante de limite 1; soit (I) l'ensemble des (f, δ) dont le δ est contenu dans au moins un cercle (C_i). L'idéal (I) *possède la propriété* (T_1), *mais non la propriété* (T_2).

Nous allons maintenant étendre la notion de *base finie d'un idéal* au cas des idéaux de domaines indéterminés, et analyser cette notion, en faisant abstraction des propriétés (T_1) et (T_2), et du problème (C_1).

Consldérons dans l'espace (x) un idéal (I) de domaines indéterminés. Un système fini (F) de fonctions holomorphes $F_1, \ldots, F_p$ dans un domaine $\mathfrak{D}$ sera dit une *pseudo-base finie* de (I) dans $\mathfrak{D}$ s'il possède les propriétés suivantes :

1° une quelconque des fonctions F_i appartient à (I) en tout point de $\mathfrak{D}$;

2° pour tout point P de $\mathfrak{D}$, toute fonction f qui appartient à (I) en P est telle que $(f) \subset (F_1, \ldots, F_p)$ au point P.

Nous nous proposons le problème suivant :

Problème (**I**).— *Étant donné, dans l'espace* (x), *un idéal* (I) *de domaine indéterminés et un ensemble fermé borné* E, *trouver une pseudo-base finie de* (I) *dans un voisinage de* E.

Considérons ensuite dans l'espace (x) un idéal (I) de domaines indéterminés deux domaines $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ tels que $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$, et une pseudo-base (F) de (I) pour $\mathfrak{D}$. Il est immédiat que (F) est aussi une pseudo-base de (I) pour $\mathfrak{D}'$.

Étant donné un idéal (I) de domaines indéterminés, nous dirons qu'un système fini (F) de fonctions holomorphes est une pseudo-base de (I) *en un point*, si c'est une pseudo-base dans un voisinage de ce point. Un tel système sera parfois appelé une *pseudo-base locale*. Nous nous proposons encore le problème suivant : -

Problème (**J**). — *Étant donné dans l'espace* (x) *un idéal* (I) *de domaines indéterminés et un point* P*, trouver une pseudo-base finie de* (I) *au point* P.

Le problème (J) est un cas particulier du problème (I). Entre ces deux problèmes il y a la relation suivante :

Soit, dans l'espace (x)*, un idéal* (I) *de domaines indéterminés et un polycylindre borné fermé* E*. Suposons que le problème* (C) *soit résoluble pour l'idéal* (I) *et pour tout point* P *de* E*, et que de plus le problème* (C_1) *soit résoluble pour tout polycylindre fermé borné. Alors le problème* (I) *résoluble pour l'idéal* (I) *et le polycylindre* E.

En effet, soit P un point quelconque de E; puisque le problème (J) est résoluble pour (I) au point P, il existe un polycylindre (γ) au voisinage de P, et un système fini de fonctions holomorphes (f) dans (γ) qui constitue une pseudo-base de (I) dans (γ). Considérons un couple de polycylindres (γ), (γ') d'intersection non vide; soient (f) et (f') les pseudo-bases correspondantes; elles sont équivalentes en chaque point de l'intersection $(\gamma) \cap (\gamma')$. Nous nous proposons de trouver un système fini (F) de fonctions holomorphes au voisinage de E, tel que $(F) \sim (f)$ en tout point P de E. Or ceci est un problème (E) pour le polycylindre fermé E; comme on a supposé que le problème (C_1) est résoluble pour tout polycylindre fermé, l'existence de (F) s'ensuit. Or un tel système (F) est une pseudo-base en tout point P de E, donc est une pseudo-base pour E. C.Q.F.D.

Le problème (I) est donc ramené au problème (J), moyennant le problème (C_1) pour les polycylindres fermés bornés. Or le problème (J) n'a pas toujours de solution, comme le montre le contre-exemple suivant :

Exemple 3. — Soient, dans l'espace de deux variables complexes x, y, deux hypersphères (C), (γ) de centre à l'origine, telles que $(C) \supset (\gamma)$. Désignons par Σ_0 la partie de la surface caractéristique $x = y$ qui est contenue (strictement) dans (C) et non strictement contenue dans (γ). Soit (I) l'ensemble des couple (f, δ) dont le δ est contenue dans (C) et tels que $\dfrac{f}{x-y}$ soit holomorphe en tout point de l'intersection $\Sigma_0 \cap \delta$. Alors (I) est un idéal [qui possède les propriété (T_1) et (T_2)]; mais, puisque l'ensemble des zéros de (f, δ) est $\Sigma_0 \cap \delta$ pour tout élément (f, δ) de (I), cet idéal (I) ne peut posséder une pseudo-base locale finie en aucun point de la frontière de (γ).

On ne peut donc pas résoudre le problème (J) pour n'importe quel idéal de domaines indéterminés. Nous verrons ultérieurement d'autres contre-exemples.

Nous étudierons deux catégories d'idéaux de domaines indéterminés pour lesquels le problème (J) peut être résolu pour les polycylindres fermés bornés. L'une d'elles va être étudiée dans le présent Mémoire. L'autre est celle des *idéaux géométriques de domaines indéterminés* (qui correspondent aux idéaux de polynomes attachés aux variétés algébriques), dont la considération deviendra indispensable quand nous aurons à nous occuper des domaines qui admettent des points de ramification. Pour pouvoir montrer que le problème (J) peut être résolu pour les idéaux de cette espèce (et pour les polycylindres bornés fermés), nous aurons besoin non seulement des résultats du présent Mémoire, mais de quelques notions concernant les domaincs ramifiés. Nous réserverons donc cette étude pour un Mémoire ultérieur.

3. Équations fonctionnelles linéaires homogènes; solutions formulaires. — Nous allons scruter les environs du problème (C_1) grâce aux notions que nous venons d'introduire.

1° *Équations fonctionnelles linéaires homogènes.*— Soient p fonctions holomorphes F_i $(i = 1, \dots, p)$ non identiquement nulles dans un domaine $\mathfrak{D}$ de l'espace (x). Considérons l'équation

$$A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0, \tag{1}$$

où les A_i désignent des fonctions inconnues; si un système de fonctions A_i holomorphes dans un domaine (connexe ou non) δ contenu dans $\mathfrak{D}$ satisfait dans δ à l'équation (1), nous dirons que le système des A_i est une *solution* (*holomorphe*) de l'équation (1) pour δ. Toute équation de cette nature sera dite *équation fonctionnelle linéaire homogène.*

Considérons l'ensemble (I_1) des couples (A_1, δ) tels qu'il existe $A_2, \dots,$ A_p holomorphes dans δ de manière que $(A_1, A_2, \dots, A_p)$ soit une solution de l'équation (1) pour δ. Je dis que :

(I_1) *est un idéal.*

En effet, si $(A_1, \delta) \in (I_1)$ et si α est une fonction holomorphe dans un domaine (connexe ou non) δ', on a $\alpha A_1 \in (I_1)$ pour $\delta \cap \delta'$; si $(A_1, \delta) \in (I_1)$ et $(A_1', \delta') \in (I_1)$, on a $A_1 + A_1' \in (I_1)$ pour $\delta \cap \delta'$.

Nous ne voyons pas immédiatement si (I_1) satisfait aux propriétés (T_1), (T_2) ou non.

C'est cette espèce d'idéaux que nous avions en vue à la fin du paragraphe précédent. Nous montrerons dans ce Mémoire que le problème (J) peut être résolu pour ces idéaux (et pour les polycylindres bornés fermés). Le problème (J) se formule comme suit :

Problème (**K**).— *Étant donné une équation fonctionnelle linéaire dans un domaine* $\mathfrak{D}$ *de l'espace* (x)*, et un point* P *de* $\mathfrak{D}$*, trouver une pseudo-base finie de l'idéal* (I_1) *au point* P [en désignant par (I_1) l'idéal défini par l'équation, comme il a été expliqué ci-dessus].

2° *Solutions formulaires.*— Nous nous proposons maintenant de trouver une représentation des solutions de l'équation (1). Après l'idéal (I_1), considérons l'équation

$$A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0 \tag{2}$$

et l'idéal correspondant (I_2) des couples (A_2, δ). Et ainsi de suite. Pour finir, on aura à considérer l'équation $A_pF_p = 0$; l'idéal (I_p) correspondant est (0), puisque la fonction F_p n'est pas identiquement nulle. Posons-nous le problème suivant :

Problème (λ).— *Pour tout ensemble fermé* E *contenu dans le domaine* $\mathfrak{D}$*, trouveé, pour chacun des idéaux* $(I_1), (I_2), \ldots, (I_p)$*, une pseudo-base finie dont les fonctions appartiennent globalement, au voisinage de* E*, à l'idéal correspondant.*

Supposons résolu ce problème. Soient

$$(\Phi_1, \ldots, \Phi_p),\ (\Phi'_1, \ldots, \Phi'_p)\ , \ldots,\ (0)$$

les pseudo-bases de $(I_1), (I_2), \ldots, (I_p)$ respectivement. Soit alors P un point quelconque du voisinage de E dont parle l'énoncé du problème (λ), et soit $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ une solution quelconque de l'équation (1) au point P (c'est-à-dire dans un voislnage de P). (Φ) étant une pseudo-base de (I_1) au voisinage de E, la fonction A_1 admet, au voisinage de P, une représentation de la forme

$$A_1 = C_1\Phi_1 + \cdots + C_q\Phi_q,$$

les C_i étant des fonctions holomorphes.

Envisageons ensuite A_2. Comme chaque Φ_i $(i = 1, \ldots, q)$ appartient globalement à (I_1) au voisinage de E, l'équation (1) admettra q solutions de la forme $(\Phi_i, \Psi_{i2}, \ldots, \Psi_{iq})$ au voisinage de E. Posons

$$B_j = C_1\Psi_{1j} + C_2\Psi_{2j} + \cdots + C_q\Psi_{qj} \qquad (j = 2, 3, \ldots, p),$$

et nous aurons une solution de l'équation (1) de la forme $(A_1, B_2, \ldots, B_p)$ au voisinage de P. Et si l'on pose encore

$$A'_j = A_j - B_j,$$

$(A'_2, \ldots, A'_p)$ sera une solution de l'équation (2) pour le point P. Par conséquent, la fonction A_2 sera représentée, au voisinage de P, par une expression de la forme

$$A_2 = B_2 + C'_1 \Phi'_1 + \cdots + C'_r \Phi'_r,$$

où les C'_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sont des fonctions holomorphes, et où B_2 se représente comme ci-dessus. Et ainsi de suite.

Finalement, on voit que la solution $(A_1, \ldots, A_p)$ de l'équation (1) au point P admet la représentation suivante

$$(3) \qquad A_i = C_{i1}\pi_{i1} + C_{i2}\pi_{i2} + \cdots + C_{iN}\pi_{iN} \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

avec quelques identités de la forme $C_{ij} = C_{kl}$ $(k = 1, \ldots, p; l = 1, \ldots, N)$, les π_{ij} étant des fonctions holomorphes au voisinage de E, indépendantes du point P et de la solution $(A_1, \ldots, A_p)$ de l'équation (1), tandis que les C_{ij} dépendent de cette solution et sont seulement holomorphes au point P. Par exemple, pour A_1, on a

$$\pi_{1i} = \Phi_i, \quad \pi_{1j} = 0 \quad (i = 1, \ldots, q;\ j = q+1, \ldots, N);$$

et pour A_2, on a

$$\pi_{2i} = \Psi_{i2}, \quad \pi_{2j} = \Phi'_{j-q}, \quad \pi_{2k} = 0$$
$$(i = 1, \ldots, q;\ j = q+1, \ldots, q+r;\ k = q+r+1, \ldots, N),$$

et

$$C_{1i} = C_{2i} \qquad (i = 1, \ldots, q).$$

Réciproquement, considérons un point quelconque P du voisinage de E, et, d'après (3), un système quelconque de fonctions holomorphes (C) au point P (respectant, bien entendu, les identités indiquées). Les fonctions holomorphes (A) que les formules (3) leur font correspondre satisfont visiblement à l'équation fonctionnelle (1).

Nous appellerons *solution formulaire* de l'équation fonctionnelle (1) pour le domaine $\mathfrak{D}'$ [connexe ou non, contenu dans le domaine $\mathfrak{D}$ où les fonctions $F_1, \ldots, F_p$ de l'équation (1) sont holomorphes], tout système de fonctions π_{ij} $(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, N)$ holomorphes dans $\mathfrak{D}'$, et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° toute solution $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ de l'équation (1), en un point quelconque P de $\mathfrak{D}'$, admet une représentation de la forme (3), où les C_{ij} sont des fonctions holomorphes convenables (respectant naturellement les identités indiquées) au voisinage de P;

2° inversement, tout système de fonctions C_{ij}, holomorphes en un point P de $\mathfrak{D}'$, et satisfaisant aux identités indiquées, définit, au moyen des formules (3), une solution de l'équation (1) au point P.

Le système (π) d'une solution formulaire sera dit le *noyau* de la solution formulaire.

Ainsi, nous venons de prouver :

LEMME 1.— *Si le problème* (λ) *relatif à une équation fonctionnelle linéaire homogène est rśoluble, le problème suivant* (L) *est aussi résoluble pour cette équation fonctionnelle* :

PROBLÈME (L).— *Étant donné une équation fonctionnelle linéaire homogène dans un domaine, et un ensemble fermé borné E dans ce domaine, trouver une solution formulaire de l'équation au voisinage de E.*

3° *Application au problème* (C_1).— Le problème (C_1) se trouve relié à la solution formulaire de l'équation fonctionnelle linéaire homogène par la proposition suivante :

LEMME 2.— *Soient, dans l'espace (x), deux ensembles cylindriques fermés bornés Δ', Δ'', d'intersection non vide; supposons qu'ils aient les mêmes composantes sauf une; posons $\Delta' \cup \Delta'' = \Delta$, $\Delta' \cap \Delta'' = \Delta_0$. Considérons une fonction Φ holomorphe au voisinage de Δ, et un système fini $(F_1, \ldots, F_p)$ de fonctions holomorphes au voisinage de Δ. Supposons une relation,*

$$\Phi = A'_1 F_1 + \cdots + A'_p F_p,$$

où les A'_i sont des fonctions holomorphes au voisinage de Δ', et une relation

$$\Phi = A''_1 F_1 + \cdots + A''_p F_p,$$

où les A''_i sont holomorphes au voisinage de Δ''. Supposons en outre que l'on ait, au voisinage de Δ_0, une solution formulaire de l'équation fonctionnelle (1), $A_1 F_1 + \cdots + A_p F_p = 0$, satisfaisant aux conditions suivantes : 1° le noyau se compose de fonctions holomorphes au voisinage de Δ; 2° toute solution de l'équation au voisinage de Δ_0 est représentée globalement, au *voisinage de Δ_0, par la solution formulaire. Dans ces conditions, la fonction Φ peut se mettre sous la forme*

$$\Phi = B_1 F_1 + \cdots + B_p F_p,$$

où les B_i sont des fonctions holomorphes au voisinage de Δ.

En effet, soit

$$A_i = \sum_i C_{ij} \pi_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, N), \tag{3}$$

avec quelques identités parmi (C), la solution formulaire ayant les propriétés de l'énoncé. Considérons les fonctions

$$\gamma_i = A'_i - A''_i \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

qui sont holomorphes au voisinage de Δ_0 et y satisfont à l'équation (1); elles admettent une représentation de la forme (3), globalement au voisinage de Δ_0

$$\gamma_i = \sum_j d_{ij} \pi_{ij}$$

les d_{ij} étant holomorphes au voisinage de Δ_0.

Puisque Δ_0 est cylindrique, on peut, grâce à *l'intégrale de Cousin*, trouver des fonctions a_{ij} holomorphes au voisinage de Δ', et des fonctions b_{ij} holomorphes au voisinage de Δ'', telles que

$$a_{ij} - b_{ij} = d_{ij} \qquad \text{identiquement},$$

et de plus, comme les fonctions (d) satisfont aux identités de la solution formulaire (3), on peut choisir (a) et (b) de manière à y satisfaire également. Posons alors

$$\alpha_i = \sum_j a_{ij} \pi_{ij}, \qquad \beta_i = \sum_j b_{ij} \pi_{ij};$$

on aura

$$\alpha_i - \beta_i = \gamma_i.$$

Or, puisque (3) est solution formulaire de l'équation (1), on a identiquement, au voisinage de Δ_0,

$$\sum_i \alpha_i F_i = 0, \qquad \sum_i \beta_i F_i = 0;$$

en outre, puisque le noyau (π) se compose de fonctions holomorphes au voisinage de Δ, les fonctions (α) sont holomorphes au voisinage de Δ' et y satisfont à l'équation (1), les fonctions (β) sont holomorphes au voisinage de Δ'' et y satisfont à l'équation (1).

Posons

$$B'_i = A'_i - \alpha_i, \quad B''_i = A''_i - \beta_i \qquad (i = 1, \ldots, p);$$

les fonctions (B') sont holomorphes au voisinage de Δ', les fonctions (B'') holomorphes au voisinage de Δ''; au voisinage de Δ', on a

$$\Phi = B'_1 F_1 + \cdots + B'_p F_p,$$

et, au voisinage de Δ'',

$$\Phi = B''_1 F_1 + \cdots + B''_p F_p.$$

Or, au voisinage de Δ_0,

$$B'_i - B''_i = (A'_i - A''_i) - (\alpha_i - \beta_i) = \gamma_i - \gamma_i = 0,$$

donc les fonctions B'_i et B''_i ne sont que les parties d'une même fonction B holomorphe au voisinage de Δ. C.Q.F.D.

4° *Application du théorème de H. Cartan.*

LEMME 3.— *Dans la configulation géométrique du lemme 2, supposons que l'intersection Δ_0 soit simplement connexe et jouisse de la propriété que tout problème* (C_1) *soit résoluble au voisinage de Δ_0. Considérons p fonctions holomorphes F_i non identiquement nulles au voisinage de Δ, et le problème (λ) correspondant; supposons les problèmes (λ) résolus au voisinage de Δ' et Δ''. Alors le problème (λ) est aussi résoluble au voisinage de Δ.*

Une fois ce lemme démontré, on pourra, grâce au lemme 1, trouver une solution formulaire de l'équation (1) dont il est question dans le lemme 2, de manière à satisfaire aux conditions posées dans ce lemme 2.

Nous allons démontrer le lemme 3 par récurrence par rapport à p. Pour $p = 1$, il y a un seul idéal $(I_1) = (0)$, et le problème (λ) est trivialement résolu. Envisageons donc le cas de p, en supposant le lemme démontré pour $1, 2, \ldots, p-1$.

Soit $(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_q)$ une pseudo-base de (I_1) au voisinage de Δ', telle que chaque Φ'_i appartienne globalemcnt à (I_1); et soit $(\Phi''_1, \ldots, \Phi''_r)$ une pseudo-base analogue au voisinage de Δ''. Les systèmes de fonctions (Φ') et (Φ'') sont équivalents en tout point d'un voisinage de Δ_0; comme tout problème

(C_1) est, par hypothèse, résoluble au voisinage de Δ_0, l'équivalence est globale. Puisque Δ_0 est simplement connexe, *le théorème de Cartan* prouve 1'existence d'un système de fonctions $(\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$ holomorphes au voisinage de Δ, tel que $(\Phi) \sim (\Phi')$ globalement pour Δ', et $(\Phi) \sim (\Phi')$ globalement pour Δ''.

Puisque Φ_i' $(i = 1, \ldots, q)$ appartient globalement à (I_1) au voisinage de Δ', on y a globalement

$$\Phi_i' F_1 \equiv 0 \quad [\mathrm{mod}(F_2, \ldots, F_p)] \qquad (i = 1, \ldots, q);$$

il en est donc de même pour $\Phi_i F_i$ $(i = 1, \ldots, s)$; la même chose a lieu pour Δ''. Or l'équation fonctionnelle

$$A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p = 0$$

étant dans le cas de $p - 1$, admet une solution formulaire au voisinage de Δ_0, de manière à satisfaire aux conditions indiquées dans le lemme 2. On a donc $\Phi_i F_1 \equiv 0$ $[\mathrm{mod}(F_2, \ldots, F_p)$ $(i = 1, \ldots, s)$ globalernent au voisinage de Δ; autrement dit, les fonctions Φ_i appartiennent globalement à (I_1) au voisinage de Δ'.

Ce système de fonctions (Φ) est une pseudo-base de (I_1) au voisinage de Δ', puisque $(\Phi) \sim (\Phi')$; de même pour Δ''. (Φ) est donc une pseudo-base de (I_1) au voisinage de Δ; dans le problème (λ) pour Δ, la partie concernant (I_1) est résolue; et comme le reste est résolu par hypothèse, le lemme 3 est entièrement démontré.

4. Réduction des problèmes au problème local (K). — Prenons un cercle fermé $(\overline{C}_i)$ dans chaque plan x_i $(i = 1, \ldots, n)$ et soit $(\overline{C})$ le polycylindre fermé ayant pour composantes les $(\overline{C}_i)$. Désignons par E_0 n'importe quel point de $(\overline{C})$.

Dans x_n, séparons les parties réelle et imaginaire

$$x_n = X + iY,$$

et considérons une droite de la forme

$$x_i = x_i^0 \quad (i = 1, \ldots, n - 1), \quad Y = Y^0,$$

les x_i^0 étant des valeurs complexes et Y_0 une valeur réelle. Soit E_1 l'intersection de cette droite et du polycylindre $(\overline{C})$; E_1 est un segment qui peut être réduit à un point.

Envisageons de même $E_2, E_3, \ldots$; la dimension réelle augmentant chaque fois d'une unité, on terminera par E_{2n}. E_2, par exemple, est un ensemble cylindrique fermé dont la composante dans le plan x_i $(i = 1, \dots, n-1)$ est un point de $(\overline{C}_i)$ et la composante dans le plan x_n est $(\overline{C}_n)$; et E_{2n} désigne le polycylindre $(\overline{C})$.

En appliquant à cette configuration géométrique les lemmes du paragraphe 3, nous allons voir que les problèmes (C_1) et (λ) se laissent résoudre successivement pour E_0, $E_1, \dots, E_{2n}$, *pourvu que le problème* (K) *soit toujours résoluble.*

Cas de E_0.— Au voisinage d'un point, le problème (C_1) est trivialement résoluble. Le problème (λ) l'est aussi, d'après l'hypothèse faite au sujet du problème (K).

Cas de E_1.— Considérons un quelconque des ensembles E_1, et désignons cet ensemble par la même lettre E_1; nous pouvons supposer que c'est un vrai segment.

1° Considérons des fonctions $F_1, \dots, F_p$ holomorphes et non identiquement nulles au voisinage de l'ensemble E_1; pour ces fonctions, le problème (λ) est résoluble en chaque point de E_1.

La composante de E_1 suivant l'espace $(x_1, \dots, x_{n-1})$ est un point que nous désignerons par Q, et sa composante suivant le plan x_n est un segment que nous désignerons par l; l est horizontal, son extrémité gauche sera désignée par m_0, son extrémité droite par m_q, en introduisant $q-1$ points $m_1, \dots, m_{q-1}$ sur le segment, de gauche à droite. Soit l_i le segment fermé (m_{i-1}, m_i) $(i = 1, \dots, q)$. Soit, dans l'espace (x), M_i l'ensemble cylindrique (Q, m_i), et L_i l'ensemble cylindrique (Q, l_i). Notons

$$L_1 \cup L_3 \cup L_5 \cup \cdots = \Delta_1, \quad L_2 \cup L_4 \cup L_6 \cup \cdots = \Delta_2.$$

On aura alors

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = E_1, \quad \Delta_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2 = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{q-1}.$$

Or le problème (λ) pour le système (F) est résoluble en tout point de E_1; donc, si tous les segments L_i sont assez petits, le problème (λ) deviendra résoluble au voisinage de chacun d'eux, comme le montre le lemme de Borel–Lebesgue. Il sera donc résoluble pour chacun des domaines Δ_1 et Δ_2. Or tout problème (C_1) étant résoluble pour Δ_0, le lemme 3 montre que le problème (λ) pourra être résolu pour E_1. Ceci montre que *tout problème* (λ) *est résoluble au voisinage de tout* E_1.

2° Envisageons ensulte le problème (C_1) au voisinage de E_1. Soit un système de fonctions $F_1, \dots, F_p$ holomorphes au voisinage de E_1, et une fonction f holomorphe au voisinage de E_1; considérons le problème (C_1) relatif à (F), f et E_1. Comme le problème (C_1) est résoluble au voisinage de tout point de E_1, nous pouvons, comme nous l'avons fait en 1°, considérer Δ_1, Δ_2, Δ et Δ_0 de façon que le problème (C_1) soit résolu au voisinage de Δ_1 et de Δ_2. Or le problème (λ) pour les fonctions (F) est, comme on l'a vu, résoluble pour l'ensemble E_1; de plus tout problème (C_1) est résoluble pour l'intersection Δ_0. D'après le lemme 1, nous aurons pour (F) une solution formulaire ayant la propriété indiquée au lemme 2; le lemme 2 montre alors que le problème (C_1) est résoluble pour (F) et f au voisinage de E_1. Ceci prouve que *tout problème* (C_1) *est résoluble au voisinage de tout ensemble* E_1.

Cas de E_2.— Nous procéderons comme pour E_1.

1° *Problème* (λ) : considérons un E_2; désignons par Q la composante de E_2 suivant l'espace $(x_1, \ldots, x_{n-1})$; la composante suivant le plan x_n est $(\overline{C}_n)$. Considérons ensuite des fonctions $F_1, \ldots, F_p$, holomorphes et non identiquement nulles au voisinage de E_2, et le problème (λ) correspondant. Ce problème est déjà résolu pour tout E_1 contenu dans E_2.

Entre l'extrémité inférieure et l'extrémité supérieure du cercle fermé $(\overline{C}_n)$, considérons $q-1$ droites horizontales, qui partagent $(\overline{C}_n)$ en q parties fermées que nous désignerons par $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ (de bas en haut). Soit, dans l'eapace (x), A_i le polycylindre fermé (Q, α_i), et posons

$$A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \cdots = \Delta_1, \quad A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup \cdots = \Delta_2.$$

Alors $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = E_2$ et l'intersection $\Delta_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2$ se compose d'ensemble E_1 en nombre fini.

Le problème (λ) pour (F) étant résoluble au voisinage de tout sous-ensemble E_1 de E_2, on pourra partager E_2 en morceaux assez petits pour qu'il soit résoluble au voisinage de chaque A_i; il sera donc résoluble pour Δ_1 et pour Δ_2. Or tout problème (C_1) est résoluble pour tout E_1 et par conséquent pour Δ_0; d'après le lemme 3, le problème (λ) peut être résolu pour l'ensemble E_2. Ainsi on a prouvé que *tout problème* (λ) *est résoluble au voisinage de tout ensemble* E_2.

2° *Problème* (C_1) : choisissons un E_2 et un problème (C_1) au voisinage de cet ensemble E_2. On pourra réaliser une configuration géométrique comme ci-dessus, de manière que le problème (C_1) soit déjà résolu au voisinage de Δ_1 et au voisinage de Δ_2. Puisque le problème (λ) correspondant est résoluble pour Δ, et que tout problème (C_1) est résoluble pour Δ_0, les lemmes 1 et 2 montrent que le problème (C_1) est résoluble pour l'ensemble E_2. On a donc montré que *tout problème* (C_1) *est résoluble au voisinage de tout ensemble* E_2.

En continuant ainsi, on prouvera finalement que les problèmes (C_1) et (λ) soit toujours résolubles au voisinage du polycylindre borné fermé, pourvu que le problème (K) soit toujours résoluble. Nous avons donc obtenu le résultat intermédiaire suivant :

Les problèmes (C_1), (C_2), (E) *et* (L) *sont toujours résolubles au voisinage d'un polycylindre fermé, pourvu que le problème* (K) *soit toujours résoluble.*

5. Théorème du reste. — En vue de la résolution du problème (K), nous allons démontrer le résultat auxiliaire suivant :

Théorème du reste. — *Considéons, dans l'espace* $(x_1, \ldots, x_n, y)$, *un domaine de la forme* $[\mathfrak{D}, (C)]$, *où* $\mathfrak{D}$ *est un domaine* (univalent et fini) *de l'espace* (x), *et* (C) *un cercle du plan* y. *Envisageons dans* $[\mathfrak{D}, (C)]$ *une fonction holomorphe* $F(x, y)$ *telle que, pour tout point* (x^0) *de* $\mathfrak{D}$, *l'équation* $F(x^0, y) = 0$ *ait* λ *racines dans* (C), λ *étant un entier fini indépendant de* (x^0). *Alors toute fonction* $f(x, y)$ *holomorphe dans* $[\mathfrak{D}, (C)]$ *peut se mettre sous la forme*

$$f(x, y) = f_0(x, y) + \varphi(x, y)F(x, y),$$

où f_0 *et* φ *sont holomorphes dans* $[\mathfrak{D}, (C)]$, f_0 *étant un polynome en* y, *de degré au plus égal à* $\lambda - 1$ (identiquement nul si $\lambda = 0$)*; en outre, une telle décomposition est unique.*

Commençons par prouver l'*unicité*. On peut supposer $\lambda > 0$. Si l'on avait deux décompositions (f_0, φ) et (f_0', φ'), on aurait

$$(f_0 - f_0') + (\varphi - \varphi')F = 0$$

identiquement; or, pour un point (x^0) de $\mathfrak{D}$, l'équation $F(x^0, y) = 0$ possède λ racines dans (C); si l'on pose $f_0 - f_0' = \psi$, l'équation $\psi(x^0, y) = 0$ a au moins λ racines, et comme ψ est un polynome en y de degré au plus égal à $\lambda - 1$, il s'ensuit que ψ est identiquement nul. C.Q.F.D.

Cherchons quelle forme doit avoir $F(x, y)$ pour satisfaire à la condition de l'énoncé. Soit (ξ) un point arbitraire de $\mathfrak{D}$; lorsque (x) est au voisinage de (ξ) et y dans (C), on a, grâce au *théorème de Weierstrass*,

$$F(x, y) = \omega(x, y)F_0(x, y),$$

où ω et F_0 sont holomorphes, ne s'annulant jamais, et

$$F_0(x, y) = y^\lambda + \alpha_1(x)y^{\lambda-1} + \cdots + \alpha_\lambda(x) \qquad (\lambda \geq 0),$$

les $\alpha_i(x)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de (ξ). Or, puisqu'une telle expression est unique, elle vaut globalement pour $[\mathfrak{D}, (C)]$.

Examinons à quelle condition l'équation $F(x^0, y) = 0$ a, dans (C), un nombre de racines indépendant de x^0. Dans l'espace de deux variables complexe x et y, prenons $F = y - x$, $f(x, y) = f(y)$, où f est une fonction de la seule variable y admettant le cercle $|y| < 1$ comme domaine d'holomorphie. Si (C) est précisément ce cercle, la condition relative à F ne sera remplie que si $|x| < 1$. Si $\mathfrak{D}$ est un domaine (connexe) du plan x s'étendant simultanément à l'extérieur et à l'intérieur du cercle $|x| < 1$, supposons que l'on ait, dans $[\mathfrak{D}, (C)]$, la relation

$$f(y) = f_0 + (y - x)\varphi,$$

f_0 étant une fonction holomorphe de x seul. Pour $x = y$, il viendrait

$$f(y) = f_0(y),$$

ce qui contredit les hypothèses.

La condition posée dans l'énoncé du théorème du reste *est donc inévitable*. C'est là un des phénomènes curieux que l'on rencontre dans le champ des fonctions analytiques, dès qu'on quitte le champ des fonctions d'une seule variable.

Envisageons le cas d'une seule variable. Alors F et f sont des fonctions de la seule variable y; la condition ci-dessus est donc toujours remplie; et le théorème devra être vrai, s'il est vrai pour plusieurs variables.

Nous allons maintenant démontrer la proposition. Supposons que $F(x, y)$ ait la forme

$$F(x, y) = y^\lambda + \alpha_1(x)y^{\lambda-1} + \cdots + \alpha_\lambda(x) \quad (\lambda > 0),$$

les $\alpha_i(x)$ étant holomorphes dans $\mathfrak{D}$; supposons que (C) soit le cercle $|y| < 1$. On aura alors

$$f(x, y) = \beta_0 + \beta_1 y + \cdots + \beta_m y^m + R_m, \text{ avec } R_m = \beta_{m+1} y^{m+1} + \beta_{m+2} y^{m+2} + \cdots,$$

où les β_i $(i = 0, 1, \ldots)$ sont des fonctions des variables (x), holomorphes dans $\mathfrak{D}$. On a donc, dans $[\mathfrak{D}, (C)]$,

$$(1) \qquad f(x, y) = A_m(x, y)F(x, y) + B_m(x, y) + R_m(x, y),$$

où A_m et B_m sont holomorphes, B_m étant un polynome en y de degré au plus égal à $\lambda - 1$, polynome que nous désignerons par

$$B_m(x, y) = \gamma_1^{(m)} y^{\lambda-1} + \gamma_2^{(m)} y^{\lambda-2} + \cdots + \gamma_\lambda^{(m)},$$

les $\gamma_i^{(m)}$ $(i = 1, \ldots, \lambda)$ étant des fonctions holomorphes de (x) dans $\mathfrak{D}$. C'est l'allure de la suite de fonctions $B_m(x, y)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ qui est en question lorsque m tend vers l'infini; on omettra l'indice m, lorsque celui-ci sera fixé.

Pour un point déterminé (x) du domaine $\mathfrak{D}$ l'équation $F(x, y) = 0$ possède λ racines dans le cercle (C), soient

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_\lambda;$$

en substituant la racine y_i $(i = 1, \ldots, \lambda)$ à y dans la relation (1), on obtient

$$f(x, y_i) - R(x, y_i) = B(x, y_i),$$

dont le second membre sera noté B_i pour abréger. Alors

$$\gamma_1 y_i^{\lambda-1} + \gamma_2 y_i^{\lambda-2} + \cdots + \gamma_\lambda = B_i \quad (i = 1, \ldots, \lambda).$$

Considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^{\lambda-1} & y_1^{\lambda-2} & \cdots & 1 \\ y_2^{\lambda-1} & y_2^{\lambda-2} & \cdots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ y_\lambda^{\lambda-1} & y_\lambda^{\lambda-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

et le déterminant Δ_p obtenu en remplaçant la $p^{i\grave{e}me}$ colonne de Δ par $(B_1, B_2, \ldots, B_\lambda)$ $(p = 1, \ldots, \lambda)$; par exemple

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} y_1^{\lambda-1} & y_1^{\lambda-2} & \cdots & B_1 \\ y_2^{\lambda-1} & y_2^{\lambda-2} & \cdots & B_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ y_\lambda^{\lambda-1} & y_\lambda^{\lambda-2} & \cdots & B_\lambda \end{vmatrix}.$$

Supposons $F(x, y)$ sans facteur multiple. La variété analytique

$$F(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 0$$

est alors à $n - 1$ dimensions complexes; et de plus, d'après la forme de F, la *projection* S de la variété sur l'espace (x) est une surface caractéristique. Pour tout point (x) de $\mathfrak{D}$, extérieur à S, les racines y_i $(i = 1, \ldots, \lambda)$ de l'équation $F(x, y) = 0$ sont toutes différentes, et par suite, Δ étant différent de zéro, on a

$$\gamma_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i = 1, \ldots, \lambda). \tag{2}$$

Nous allons évaluer la valeur absolue de $\gamma_i^{(m)}(x)$ en faisant tendre m vers l'infini. Considérons d'abord un ensemble borné fermé E contenu dans $\mathfrak{D}$ et ne contenant aucun point de S, mais par ailleurs quelconque; le déterminant Δ est indépendant de m; sa valeur absolue admet une borne inférieure non nulle sur E; la fonction $B^{(m)}(x, y_i)$ possédant visiblement une borne supérieure indépendante de m sur E, il en est de même de $\Delta_i^{(m)}$, et par suite de $\gamma_i^{(m)}$. Considérons ensuite un ensemble fermé borné quelconque E' dans $\mathfrak{D}$; puisque S est une surface caractéristique, et que les $\gamma_i^{(m)}$ sont des fonctions holomorphes, le fait qu'elles sont bornées sur E entraîne qu'elles sont bornées sur E'.

La suite des fonctions $B_m(x, y)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ forme donc une famille normale dans $\mathfrak{D}$. Soit B_{p_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ une suite partielle admettant la limite B_0; cette limite est une fonction holomorphe des variables (x, y) dans $\mathfrak{D}$, et c'est un polynome en y de degrée $\gamma - 1$ au plus. Or, d'après la relation (1), on a

$$f = A_{p_i} F + B_{p_i} + R_{p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

et, lorsque i tend vers l'infini, B_{p_i} tend vers B_0 et R_{p_i} tend vers zéro; A_{p_i} tend donc vers une limite $A_0(x, y)$ dans $[\mathfrak{D}, (C)]$; c'est une fonction méromorphe, et régulière en dehors de $F = 0$. Comme A_{p_i} est holomorphe dans $[\mathfrak{D}, (C)]$, $A_0(x, y)$ est une fonction holomorphe dans tout $[\mathfrak{D}, (C)]$ (d'aprés le même mode de raisonnement que ci-dessus, ou grâce à la théorie des familles normales). Et l'on obtient la relation voulue

$$f(x, y) = B_0(x, y) + A_0(x, y) F(x, y),$$

lorsque $F(x, y)$ n'a pas de facteur multiple.

Envisageons maintenant l'*hypothèse contraire*. Envisageons la fonction

$$\Phi(x, y, t) = F(x, y) + t,$$

où t est une variable complexe ($|t| < \rho$). La fonction Φ est évidemment sans facteur multiple, et elle a la forme

$$\Phi(x, y, t) = y^\lambda + a_1(x, t) y^{\lambda - 1} + \cdots + a_\lambda(x, t) \quad (\lambda > 0).$$

Quant au nombre des racines de 1'équation $\Phi(x', y, t') = 0$, étant donneé un domaine borné $\mathfrak{D}'$ tel que $\mathfrak{D}' \Subset \mathfrak{D}$, mais par ailleurs quelconque, on peut choisir ρ assez petit pour que, pour tout point (x', t') dans $(x) \in \mathfrak{D}'$, $|t| < \rho$, l'équation ait λ racines dans (C). La fonction $\Phi(x, y, t)$ satisfait ainsi à la condition de la proposition lorsque

$$(x) \in \mathfrak{D}', \qquad |t| < \rho, \qquad |y| < 1,$$

et de plus elle est sans facteur multiple. D'après ce que nous venons de voir, on a donc identiquement dans ce domaine

$$f(x,y) = G(x,y,t) + H(x,y,t)\,\Phi(x,y,t)$$

où G et H sont holomorphes, et spécialement G est un polynorne en y de degré au plus égal à $\lambda - 1$. Faisons alors $t = 0$; il vient

$$f(x,y) = G(x,y,0) + H(x,y,0)\,F(x,y,);$$

c'est la relation cherchée dans le domaine $[\mathfrak{D}', (C)]$. Puisque $\mathfrak{D}'$ est quelconque et qu'une telle décomposition est unique, cette relation est valable dans $[\mathfrak{D}, (C)]$. C.Q.F.D.

6. Résolution du problème local (K). — Nous allons nous consacrer maintenant au problème (K).

1° Dans l'espace (à distance finie) E d'un nombre fini de variables complexes, considérons un domaine $\mathfrak{D}$, p fonctions $F_1, \dots, F_p$ holomorphes dans $\mathfrak{D}$ et non identiquement nulles, et un point P quelconque de $\mathfrak{D}$. Nous allons étudier le problème (K) pour le système (F) au point P.

Supposons que l'équation fonctionnelle

$$A_1F_1 + \cdots + A_pF_p = 0 \tag{1}$$

admette en P (c'est-à-dire au voisinage de P) la solution formulaire

$$A_i = C_{i1}\pi_{i1} + C_{i2}\pi_{i2} + \cdots + C_{iN}\pi_{iN} \qquad (i = 1, \dots, p), \tag{2}$$

avec quelques identités parmi les (C).

Dans cette relation, nous supposerons encore les C_{1i} $(i = 1, \dots, N)$ tous différents; s'ils ne l'étaient pas, on pourrait facilement déformer l'expression pour qu'il en fût ainsi. Dans ces conditions, si l'on pose $C_{11} = 1$ et que tous les autres C_{ij} soient nuls, on aura $A_1 = \pi_{11}$; la fonction π_{11} appartient donc à l'idéal (I_1) au point P. De même pour les autres π_{1i} $(i = 2, \dots, N)$. Ensuite, pour toute fonction A_1 appartenant à (I_1) au point P, on a en ce point

$$(A_1) \subset (\pi_{11}, \pi_{12}, \dots, \pi_{1N});$$

le système de fonctions (π_1) est donc une pseudo-base de l'idéal (I_1) au voisinage de P, c'est-à-dire que le problème (K) est résolu.

Nous venons ainsi de montrer que la résolution du problème (K) se ramène à celle du problème suivant :

Problème (μ). — *Trouver une solution formulaire de l'équation fonctionnelle* (1) *au voisinage d'un point P du domaine $\mathfrak{D}$.*

Nous allons désormais traiter ce dernier problème.

2° Commençons par le cas d'un espace E *à une dimension complexe.* Soit x la variable complexe, et ramenons le point P à l'origine. Si parmi les fonctions $F_1(x), \ldots, F_p(x)$ il y en a une qui ne s'annule pas à l'origine, par exemple $F_p(0) \neq 0$, on aura la solution formulaire

$$A_i = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$
$$A_p = \frac{-1}{F_p}(C_1 F_1 + \cdots + C_{p-1} F_{p-1})$$

de l'équation (1) à l'origine.

Supposons donc $F_i(0) = 0$ pour $i = 1, \ldots, p$. Dans ce cas, il existe visiblement un nombre m tel que toutes les fonctions $F_i(x)$ soient divisibles par x^m à l'origine, et que parmi elles il y en ait au moins une, soit $F_p(x)$ qui ne soit pas divisible par x^{m+1}. La solution formulaire donnée ci-dessus reste donc valable.

Le problème (μ) est ainsi résoluble pour l'espace (E) à une dimension complexe. Il suffira de le résoudre pour l'espace (E) à $n+1$ dimensions complexes, en supposant qu'il soit résolu pour (E) à un nombre moindre de dimensions complexes.

3° Appelons $x_1, \ldots, x_n, y$ les variables de l'espace (E) et ramenons le point P à l'origine; et supposons choisies les coordonnées complexes de manière que

$$F_i(0, y) \not\equiv 0 \qquad \text{pour} \qquad i = 1, \ldots, p,$$

ce qui est toujours possible. L'équation $F_i(0, y) = 0$ admet pour $y = 0$, λ_i racines ($\lambda_i \geq 0$); si l'un des entiers λ_i est nul, soit λ_p par exemple, on aura $F_p(0, 0) \neq 0$, et l'équation fonctionnelle (1) admettra au voisinage de l'origine une solution formulaire de la même forme que pour $n = 1$. Supposons donc les λ_i tous > 0; nous désignerons λ_p par la notation abrégée λ, en supposant $\lambda_i \leq \lambda$ ($i = 1, \ldots, p-1$).

Soit (C') un petit cercle de centre à l'origine, dans le plan y; et soit, dans l'espace (x), un polycylindre (C) de centre O, assez petit en comparaison de (C'). Les fonctions $F_i(x, y)$ seront alors holomorphes dans le polycylindre $[(C), (C')]$ et y admettront une décomposition de Weierstrass

$$F_i(x, y) = \Omega_i(x, y)\, \Phi_i(x, y) \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

avec

$$\Phi_i(x, y) = y^{\lambda_i} + a_{i1}(x) y^{\lambda_i - 1} + \cdots + a_{i\lambda_i}(x),$$

où les $a_{ij}(x)$ $(i = 1, \ldots, p\,;\; j = 1, \ldots, \lambda_i)$ sont holomorphes, les $\Omega_i(x, y)$ sont des fonctions holomorphes non nulles. Pour chaque i, l'équation algébrique $\Phi_i(x', y) = 0$ admettra, pour tout point (x') de (C), λ_i racines dans (C'), et par suite n'aura pas de racine à l'extérieur de (C') ni sur la circonférence.

Considérons l'équation fonctionnelle

$$\text{(A)} \qquad B_1\Phi_1 + \cdots + B_p\Phi_p = 0,$$

où les (B) sont des fonctions inconnues. Pour résoudre le problème (μ), au voisinage de l'origine, pour l'équation (1), il suffit de le résoudre pour l'équation (A), comme on s'en assure immédiatement.

4° Nous supposerons donc que, dans l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad A_1F_1 + \cdots + A_pF_p = 0$$

les fonctions $F_1, \ldots, F_p$ jouissent des mêmes propriétés que $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ par rapport au polycylindre $[(C), (C')]$. Nous cherchons une solution formulaire de l'équation (1), au voisinage de l'origine

$$(2) \qquad A_i = C_{i1}\pi_{i1} + C_{i2}\pi_{i2} + \cdots + C_{iN}\pi_{iN} \quad (i = 1, \ldots, p).$$

Considérons une solution (A) de l'équation (1) en un point (x^0, y^0) du polycylindre $[(C), (C')]$. Soit (γ') un petit cercle de centre y^0 dans (C'), et soit (γ) un polycylindre de centre (x^0) dans (C), assez petit en comparaison de (γ'). Les fonctions $A_i(x, y)$ $(i = 1, \ldots, p)$ seront holomorphes dans $[(\gamma), (\gamma')]$, et l'équation $F_p(x', y) = 0$ admettra, pour tout (x') de (γ) le même nombre de racines dans (γ'), soit μ $(0 \leq \mu \leq \lambda)$. En appliquant le *théorème du reste*, on aura, dans $[(\gamma), (\gamma')]$,

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} A_i = A_i^0 + \alpha_i F_p \qquad (i = 1, \ldots, p-1), \\ A_p = A_p^0 - (\alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_{p-1}F_{p-1}), \end{cases}$$

où A_p^0 est défini par la dernière relation, et A_i^0 et α_i $(i \leq p-1)$ sont des fonctions holomorphes de (x, y), et spécialement des polynomes en y, de degré au plus égal à μ (identiquement nuls si $\mu = 0$). A_p^0 est donc holomorphe dans $[(\gamma), (\gamma')]$, et le système de fonctions (A^0) ainsi défini est une solution de l'équation (1) dans $[(\gamma), (\gamma')]$. La fonction A_p^0 est telle que $A_p^0 F_p$ est un polynome en y, donc c'est une fonction rationnelle de y.

Or la fonction $F_p(x, y)$ ne s'annule pas lorsque (x) est dans (γ) et y sur la circonférence (γ'); elle se décompose donc sous la forme

$$F_p = F'\,F'',$$

où F' et F'' sont des polynomes en y, à coefficients holomorphes en (x) dans (γ), les coefficients des plus hautes puissances de y étant égaux à 1; et ceci, de manière que si (x') est un point donné de (γ), l'équation $F''(x', y) = 0$ n'ait de racines qu'à l'extérieur du cercle (γ'). Pour $\lambda = \mu$, on aura $F'' = F_p$, $F'' = 1$. La fonction $\Phi(x, y) = A_p^0 F_p$ est alors divisible par $F'(x, y)$ dans $[(\gamma), (\gamma')]$. Posons

$$\text{(B)} \qquad B_i = F'' A_i^0 \qquad (i = 1, \dots, p),$$

B_p est un polynome en y, à coefficients holomorphes pour $(x) \in (\gamma)$. Il en est de même des autres B_i, et le système des fonctions (B) satisfait à l'équation (1) dans $[(\gamma), (\gamma')]$. Posons encore

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} B_i = B_i^0 + \beta_i F_p & (i = 1, \dots, p-1), \\ B_p = B_p^0 - (\beta_1 F_1 + \dots + \beta_{p-1} F_{p-1}), \end{cases}$$

où B_i^0 et β_i $(i = 1, \dots, p-1)$ sont des polynomes en y, holomorphes pour $(x) \in (\gamma)$, et spécialement B_i^0 est de degré au plus égal à $\lambda - 1$. La fonction B_p^0 définie par ces relation est donc un polynome en y, holomorphe pour $(x) \in (\gamma)$. Le système de fonctions (B^0) satisfait à l'équation (1) pour $(x) \in (\gamma)$. Comme $B_p^0 F_p$ est de degré au plus égal à $2\lambda - 1$, puisque $\lambda_i \leq \lambda$ pour $i = 1, \dots, p-1$, on voit que B_p^0 est un polynome en y, de degré $\leq \lambda - 1$.

Nous avons ainsi prouvé que, étant donné l'équation fonctionnelle (1) jouissant de la propriété indiquée, à toute solution (A) pour un point (x^0, y^0) quelconque de $[(C), (C')]$, il correspond une solution (B_0) pour le point (x^0, y^0), consistant en polynomes en y de degré au plus égal à $\lambda - 1$, de façon que la correspondance soit donnée par les trois groupes de relations (A), (B) et (C).

La comparaison de ces relations donne

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} A_i = \delta_p B_i^0 + \delta_i F_p & (i = 1, \dots, p-1), \\ A_p = \delta_p B_p^0 - (\delta_1 F_1 + \dots + \delta_{p-1} F_{p-1}), \end{cases}$$

avec

$$\delta_i = \alpha_i + \frac{\beta_i}{F''}, \qquad \delta_p = \frac{1}{F''};$$

les (δ) sont donc holomorphes dans $[(\gamma), (\gamma')]$.

Considérons à nouveau l'équation fonctionnelle (1). Pour tout polycylindre

$$(x) \in (C_0), \qquad y \in C_0'$$

ayant son centre à l'origine, et contenu dans $[(C), (C')]$, supposons qu'on ait des expressions

$$\text{(3)} \qquad B_i^0 = C_{i1}\theta_{i1} + \dots + C_{iN'}\theta_{iN'} \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

avec quelques identités parmi les (C), les θ_{ij} $(i = 1, \ldots, p\,;\; j = 1, \ldots, N')$ étant holomorphes dans le polycylindre $[(C_0), (C_0')]$, de manière que soient satisfaites les conditions suivantes :

a Considérons une solution (B^0) de l'équation (1), formée de polynomes en y de degrés $\leq \lambda - 1$, holomorphes en un point (x^0) de (C_0), mais par ailleurs quelconques. Alors (B^0) admet une représentation de la forme (3) en tout point $(x) = (x^0)$, $y \in (C_0')$, où les (C) sont des fonctions holomorphes convenables satisfaisant naturellement aux identités indiquées;

b Considérons des fonctions (C) holomorphes en un point (x^0, y^0) de $[(C_0), (C_0')]$ satisfaisant naturellement aux identités indiquées; le système de fonctions (B^0) correspondant satisfait alors en (x^0, y^0) à l'équation (1).

Toute expression de ce caractère sera provisoirement appelée une *solution formulaire conditionnelle*, et (B^0) une *solution spéciale.*

Supposons maintenant que l'on ait une solution formulaire conditionnelle comme ci-dessus. Je dis que la réunion de (3) et (D) donne une (vraie) solution formulaire de l'équation (1) dans le polycylindre $[(C_0), (C_0')]$, lorsqu'on y regarde les δ_i $(i = 1, \ldots, p-1)$ et les $\varepsilon_{ij} = (\delta_p C_{ij})$ $(i = 1, \ldots, p; j = 1, \ldots, N')$ comme les fonctions inconnues indépendantes.

En effet, la réunion prend la même forme que (2), dont le noyau consiste en fonctions déterminées (F) et (θ), holomorphes dans $[(C_0), (C_0')]$. Considérons une solution (A) de l'équation (1) en un point quelconque (x^0, y^0) de $[(C_0), (C_0')]$; alors, d'après ce qui précède, la solution est représentée par la réunion de (3) et (D). Réciproquement, considérons des fonctions (δ, ε) holomorphes en un point quelconque (x^0, y^0) de $[(C_0), (C_0')]$; en substituant (ε) à (C) de (3), formons un système de fonctions (B^0); il satisfait alors à l'équation (1) pour (x^0, y^0). Or, entre ce système (B^0) et le système (A) correspondant aux fonctions (δ, ε), il y a une des relations (D), dans laquelle $\delta_p = 1$. Comme (B^0) satisfait à l'équation (1) pour (x^0, y^0), (A) y satisfait aussi. C.Q.F.D.

Il ne reste plus qu'à démontrer que l'équation fonctionnelle (1) admet une solution formulaire conditionnelle au voisinage de l'origine.

5° Soit (B^0) une solution spéciale de l'équation (1) en un point (x^0) de (C); on a

$$B_1^0 F_1 + \cdots + B_p^0 F_p = 0 \tag{A}$$

Posons

$$\begin{aligned} B_i^0 &= \alpha_{i0} y^{\lambda-1} + \alpha_{i1} y^{\lambda-2} + \cdots + \alpha_{i\lambda-1}, \\ F_i &= f_{i0} y^{\lambda} + f_{i1} y^{\lambda-1} + \cdots + f_{i\lambda} \quad (i = 1, \ldots, p). \end{aligned}$$

(α) et (f) sont des fonctions holomorphes des variables (x) au point (x^0). On a alors

$$\sum_i B_i^0 F_i = \Phi_0 y^{2\lambda-1} + \Phi_1 y^{2\lambda-2} + \cdots + \Phi_{2\lambda-1} \quad (i=1,\ldots,p),$$

avec

$$\begin{aligned}
&\Phi_0 = \sum \alpha_{i0} f_{i0},\\
&\Phi_1 = \sum \alpha_{i0} f_{i1} + \sum \alpha_{i1} f_{i0},\\
&\Phi_2 = \sum \alpha_{i0} f_{i2} + \sum \alpha_{i1} f_{i1} + \sum \alpha_{i2} f_{i0},\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\\
&\Phi_{2\lambda-1} = \sum \alpha_{i\lambda-1} f_{i\lambda}.
\end{aligned}$$

La relation (A) est donc équivalente aux suivantes :

$$\text{(B)} \qquad \Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \ \ldots, \ \Phi_{2\lambda-1} = 0.$$

Dans les relations (B), les (f) sont des fonctions holomorphes données dans (C), et les (α) des fonctions inconnues. (B) est donc un *système d'équations fonctionnelles* (*linéaires homogènes*) *simultanées,* et (α) une *solution* de ce système au point (x^0, y^0). Or ce système, considéré comme système d'équations dans l'espace (x), admet en tout point de (C), comme nous le verrons plus tard, une *solution formulaire*, grâce à l'hypothèse suivant laquelle le problème (μ) est toujours résoluble dans l'espace (E) pour un nombre de dimensions au plus égal à n.

Nous allons en déduire une solution formulaire pour l'équation (1) dans un polycylindre de l'espace (x, y). Nous partons d'une solution formulaire du système (B) :

$$\text{(C)} \qquad \alpha_{ij} = \sum \beta_{ijk} \rho_{ijk} \ (i=1,\ldots,p; \ j=0,\ldots,\lambda-1; \ k=1,\ldots,\nu),$$

avec quelques identités parmi les (α). Les ρ_{ijk} sont des fonctions déterminées, holomorphes dans un polycylindre (C_0) contenu dans (C), et qui jouit des propriétés suivantes :

a Toute solution (α) du système (B) pour un point (x^0) quelconque de (C_0) est représentée par des expressions de la forme (C) en (x^0);

b Pour tout système de fonctions (β) holomorphes en un point (x^0) quelconque de (C_0), le système de fonctions (α) correspondant satisfait aux équations (B) au point (x^0).

Dans les expressions B_i^0, substituons les α_{ij} tirés des équations (C); on obtient

$$\text{(D)} \qquad B_i^0 = \sum \beta_{i0k}(\rho_{i0k} y^{\lambda-1}) + \sum \beta_{i1k}(\rho_{i1k} y^{\lambda-2}) + \cdots$$
$$+ \sum \beta_{i(\lambda-1)k}(\rho_{i(\lambda-1)k}) \quad (i = 1, \dots, p;\ k = 1, \dots, \nu),$$

avec le même système d'identités parmi les (β) *que dans le système* (C), où les $(\rho_{i0k} y^{\lambda-2}), \dots$, sont des fonctions déterminées, holomorphes dans (C_0); ces fonctions constituent le noyau, et les (β), les fonctions inconnues.

Considéront une solution spéciale de l'équation (1), dont les fonctions sont holomorphes en un point (x^0) de (C_0), d'ailleurs quelconque. Cela veut dire que le système (α) correspondant satisfait au système d'équations simultanées (B) au point (x^0); donc (α) admet une représentation de la form (C) en (x^0). Par suite, (B^0) admet une représentation de la forme (D) en tout point (x^0, y).

Réciproquement, considérons des fonctions holomorphes (β) en un point (x^0, y^0) tel que $(x^0) \in (C_0)$, mais d'ailleurs quelconque. Associons-lui, par (D), le système des fonctions (B^0) des variables (x, y), holomorphes au point (x^0, y^0). Demandons-nous si (B^0) satisfait à l'équation (A) en (x^0, y^0). Or il revient au même, visiblement, de former le système des fonctions (α) des variables (x, y), holomorphes en (x^0, y^0), grâce au système (C) et en utilisant le même système de fonctions (β), puis de se demander si ces (α) satisfont au système d'équations simultanées (B). Nous envisagerons donc le problème que voici :

En substituant dans (C) le développement des (β) en séries de puissances de $y - y_0$, on obtient le développement des (α); et en substituant ce développement-ci dans les Φ_i du système d'équations simultanées (B) $(i = 1, \dots, 2\lambda - 1)$, on obtient les développements des Φ_i. Or tous les coefficients sont visiblement nuls; donc les Φ_i sont aussi nuls.

Ainsi les expressions (D) donnent une solution formulaire conditionnelle de l'équation fonctionnelle pour $[(C_0), (C')]$. Il ne nous reste donc qu'à montrer l'existence de la solution formulaire (C) du système d'équatiohs fonctionnelle simultanées (B).

6° Considérons à nouveau dans l'espace (x) un domaine $\mathfrak{D}$, et dans ce domaine des fonctions holomorphes $A_{ij}(x)$ $(i = 1, \dots, q;\ j = 1, \dots, p)$, dont certaines peuvent s'annuler identiquement. Et considérons *le système d'équations fonctionnelles (linéaires homogènes) simultanées*

$$\text{(1)} \qquad \sum_{j=1}^{p} A_{ij} F_j = 0 \qquad (i = 1, \dots, q),$$

avec quelques identités parmi les (A); les (A) sont les fonctions inconnues, entre lesquelles il existe en général quelques identités. Tout système de fonctions holomorphes (A), respectant naturellement les identités indiquées, et satisfaisant à l'équation (1), sera appelée une *solution.* Considérons l'expression

$$A_{ij} = \sum C_{ijk}\pi_{ijk} \qquad (k = 1, \ldots, \lambda), \tag{2}$$

avec quelques identités parmi les (C), où les π_{ijk} sont des fonctions déterminées holomorphes dans $\mathfrak{D}$, et les C_{ijk} des fonctions holomorphes indéterminées; supposons vérifiées les conditions suivantes :

1° Toute solution (A) de l'équation (1) pour un point P quelconque de $\mathfrak{D}$ admet une représentation de la forme (2) au point P en choisissant convenablement le système de fonctions (A) holomorphes en P, de manière qu'il respecte les identités;

2° A tout système de fonctions (C), holomorphes en P, et respectant les identités, (2) fait correspondre une solution (A) de (1) pour le point P.

Nous dirons alors que l'expression (2) est une *solution formulaire* de l'équation (1). Nous nous proposons le problème suivant :

Problème (**M**).— *Trouver une solution formulaire du système d'équations fonctionnelles simultanées* (1) *au voisinage d'un domaine fermé* Δ *contenu dans* $\mathfrak{D}$.

Nous disons que *le problème* (M), *dans l'espace* (x), *est toujours résoluble, pourvu que le problème* (λ) *relatif au même espace soit toujours résoluble.*

En effet, prenons les r premières équations $(r \leq q)$ du système (1), avec les identités qui concernent ces équations. Soit (E_r) le système d'équations fonctionnelles simultanées ainsi obtenu.

Comme (E_1) ne comprend qu'une seule équation fonctionnelle, le problème (M) correspondant est résoluble par hypothèse; il nous suffit donc de résoudre le problème (M) pour le système (E_{r+i}) en le supposant résolu pour $(\mathrm{E}_1), \ldots, (\mathrm{E}_r)$ $(r + 1 \leq q)$.

Remplaçons les lettres $A_{r+1,j}$ et $F_{r+1,j}$ $(j = 1, \ldots, p)$ de la dernière équation de (E_{r+1}) par les nouvelles lettres B_j et Φ_j; il vient

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{p} A_{ij}F_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r), \\ B_1\Phi_1 + \cdots + B_p\Phi_p = 0, \end{cases} \tag{3}$$

avec quelques identités parmi les (A, B).

Par hypothèse, (E_r) admet une solution formulaire

$$(4) \qquad A_{ij} = \sum C_{ijk}\Psi_{ijk} \qquad (k = 1, \ldots, \mu),$$

avec quelques identités parmi les (C), cette solution étant valable au voisinage de Δ. Substituons cette solution dans l'équation

$$(5) \qquad B_1\Phi_1 + \cdots + B_p\Phi_p = 0,$$

et étudions ce qu'elle devient.

Supposons les B_i $(i = 1, \ldots, p)$ tous différents, et considérons B_1. Si par exemple B_1 est indépendant de (A) de (E_r), on conservera le terme $B_1\Phi_1$. Passons à B_2; si par exemple $B_2 = A_{11}$, on remplacera $B_2\Phi_2$ par

$$C_{11k}(\Psi_{11k}\Phi_2);$$

et ainsi de suite. On obtiendra, à la place de (5),

$$(6) \qquad B_1\Phi_1 + C_{111}(\Psi_{111}\Phi_2) + C_{112}(\Psi_{112}\Phi_2) + \cdots = 0,$$

équation que nous noterons à nouveau

$$(7) \qquad D_1X_1 + D_2X_2 + \cdots + D_sX_s = 0,$$

où il y aura en général quelques identités parmi les (D), et où les (X) sont des fonctions déterminées, holomorphes au voisinage de Δ.

Cela étant le cas de (E_1), on trouve la solution formulaire suivante de l'équation (7), au voisinage de Δ,

$$(8) \qquad D_i = \sum \gamma_{ij}\theta_{ij} \qquad (j = 1, \ldots, \nu),$$

avec quelques identités parmi les (γ).

Dans (8), chacun des (D) est soit un des (B), soit un des (C). Prenons les A_i dans l'ordre; si l'on n'est pas dans le cas où $A = B$, on conservera pour cet A_j l'expression de (4); dans le cas contraire, on substituera, dans l'expression du A de (4) les expressions des C_{ijk} qui le concernent, tirées de (8). Ensuite, prenons les B_i dans l'ordre; si l'on trouve un B dans (8), on l'écrira; sinon, ce B est un A, et l'on récrira alors la nouvelle expression du A écrite ci-dessus. On obtiendra ainsi une nouvelle expression que nous désignerons à nouveau par

$$(9) \qquad \begin{cases} A_{ij} = \sum \delta_{ijk}\rho_{ijk} \\ B_i = \sum \delta'_{ik}\rho'_{ik} \quad (i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, t), \end{cases}$$

avec quelques identités parmi les (δ, δ'), où (ρ, ρ') signifie le noyau et (δ, δ') les fonctions inconnues; parmi les identités indiquées, les unes viennet de (4), d'autres de (8), et d'autres sont nouvelles. Nous allons étudier le caractère de cette expression.

Soit une solution quelconque (A, B) de l'équation (3) pour un point quelconque P de Δ; puisque (A) satisfait à (E_r), il se représente sous la forme (4) au point P; et puisque (B) satisfait à (5), si l'on forme (D) suivant la règle qui a été expliquée, (D) satisfera à (7) au point P. Par suite, (D) admet une représentation de la forme (8) et (A, B) une reprśentation de la forme (9) au point P.

Réciproquement, considérons un système quelconque de fonctions (δ, δ') holomorphes en un point quelconque P de Δ, et formons le système de fonctions (A, B) correspondant d'après (9). Envisageons d'abord (A); la partie de (9) qui représente (A) ayant été formée en substituant (8) dans (4), n'est qu'un cas spécial de (4); (A) satisfait donc à (E_r) au point P. Il reste à vérifier que (B) satisfait à (5) au point P. Or la condition (7) étant un cas spécial de la condition (5), il suffit que la condition (7) soit vérifiée pour que (5) le soit; envisageons (9) : la partie qui représente (B) correspond à (D) de (8) par une relation de la forme

$$B = B = D \quad \text{ou} \quad B = A = \sum C\Psi = \sum D\Psi;$$

or le (D) correspondant satisfait évidemment à (7), et par suite le (B) satisfait à (5) au point P.

L'expression (9) est donc une solution formulaire de l'équation (3) au voisinage de Δ. Le problème (M) relatif à l'espace (x) est ainsi résoluble pour (E_{r+1}) sous l'hypothèse qu'il le soit pour $(\mathrm{E}_1), \ldots, (\mathrm{E}_r)$. Et la proposition est démontrée.

Finalement nous avons prouvé que *le problème* (K) *est toujours résoluble*. Il en résulte que, au voisinage d'un polycylindre fermé, les problèmes (C_1), (C_2), (E), (L) et (M) sont résolubles.

7. Conclusions. — Résumons les résultats obtenus.

Théorème 1. — *Étant donné un système de fonctions $F_1, \ldots, F_p$ et une fonction Φ, toutes holomorphes au voisinage d'un polycylindre fermé Δ de l'espace (x) de façon que $\Phi(x) \equiv 0$ [mod(F)] en tout point de Δ, on peut choisir des fonctions A_i $(i = 1, \ldots, p)$ holomorphes au voisinage de Δ, telles que l'on ait identiquement*

$$\Phi = A_1 F_1 + \cdots + A_p F_p$$

au voisinage de Δ. (Un *polycylindre* est un ensemble cylindrique dont les composantes sont des cercles.)

Théorème 2. — *Étant donné un système de fonctions $F_1, \dots, F_p$ holomorphes au voisinage d'un polycylindre fermé Δ, s'il correspond à tout point P de Δ un polycylindre (γ) autour de P, et une fonction φ holomorphe dans (γ) de façon que pour tout couple de polycylindres $(\gamma'), (\gamma'')$ d'intersection non vide (δ), les fonctions correspondantes φ' et φ'' satisfassent à $\varphi'(x) \equiv \varphi''(x)$ $[\mathrm{mod}(F)]$ en tout point de (δ), on peut trouver une fonction $\Phi(x)$ holomorphe au voisinage de Δ telle que $\Phi(x) \equiv \varphi(x)$ $[\mathrm{mod}(F)]$ en tout point P de Δ.*

Théorème 3. — *Dans la configuration géométrique du théorème 2, supposons attaché à tout (γ) un système fini de fonctions holomorphes (f), de façon que, pour tout couple $(\gamma'), (\gamma'')$ les systèmes correspondants $(f'), (f'')$ soient équivalents en tout point de l'intersection (δ). Alors on peut trouver un système fini de fonctions (F) holomorphes au voisinage de Δ, tel que $(F) \sim (f)$ en tout point P de Δ.*

Théorème 4. — *Étant donné des fonctions F_i $(i = 1, \dots, p)$ holomorphes au voisinage d'un polycylindre fermé Δ, on peut trouver une solution formulaire de l'équation fonctionnelle $A_1F_1 + \cdots + A_pF_p = 0$ au voisinage de Δ. Il en est de même pour les systèmes d'équations fonctionnelles linéaires homogènes simultanées.*

Nous nous sommes restreint aux polycylindres fermés; en effet, en vertu des propriétés trouvées, les mêmes problèmes pourront ensuite être résolus pour des ensembles fermés de nature plus générale. Outre les quatre théorèmes que nous venons d'énoncer ici, nous avons vu au paragraphe 5 le *théorème du reste*. Au sujet de ces théorèmes, si nous pensons que cela peut être utile en vue des applications, nous serons obligé d'en faire une étude *quantitative*.

Ainsi, nous venons d'exposer les résultats obtenus. D'un autre côté, nous sommes conduit au nouveau problème :

Problème (**J**). — *Pour les idéaux de domaines indéterminés, trouver une pseudo-base finie locale.*

Au sujet de ce problème, je ne sais presque rien, pas même quelle sera l'attitude favorable pour l'aborder. Ce qui est sûr, c'est que ce problème ne peut pas être résolu sans conditions, puisque nous avons vu un contre-exemple au paragraphe 2.

C'est un cas, particulier de ce problème qui a été résolu sous la forme du problème (K). La solution du problème (K) nous était indispensable pour établir les théorèmes ci-dessus. Nous reviendrons une autre fois sur le problème (J), et montrerons qu'il est résoluble sans condition pour les *idéaux géométriques de domaines indéterminés.* Cela nous sera indispensable si nous voulons pouvoir traiter les problèmes envisagés depuis le Mémoire I, dans le cas où des points de ramification ne sont pas exclus. Ces deux exemples mettront en évidence l'importance du problème.

(Manuscrit reçu le 15 octobre 1948).