SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES,

IX Domaines finis sans point critique intérieur.

Par

KIYOSHI OKA.

(Reçu le 20 octobre, 1953)

Introduction. 1. C'est le neuvième d'une succession de Mémoires[1], dont le premier a été publié en 1936. Nous allons d'abord jeter un coup d'oeil sur le terrain où nous demeurons.

La théorie générale du prolongement analytique à une seule variable est semblable à la plaine campagne; là, on n'a pu trouver, malgré les nombreux efforts[2], aucun fait en dehors des prévisions de la logique formelle. Au contraire, le cas de plusieurs variables nous apparaît comme un pays montagneux, très escarpé.

En 1902, Fabry a remarqué que les rayons de convergence d'une série double ne sont pas arbitraires; d'où nous avons été conduits en 1906 par Hartogs au fait tout fondamental et vraiment curieux que tout domaine d'holomorphie est pseudoconvexe.

Désormais, un problème découvert à nouveau donnait naissance à un autre sur ce terrain jusqu'à 1932, dont la configuration d'accumulation de difficultés, ainsi que le courant d'idées, est dessinée d'une façon trés prononcée dans l'Ouvrage suivant :

Behnke–Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 1934, où les problèmes principaux sont les suivants : problème inverse de Hartogs, premier et deuxième problèmes de Cousin, problème de développement[3].

[1] Les Mémoires précédents sont : I Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936, II Domaines d'holomorphie, 1937, III Deuxième problème de Cousin, 1939 (Journal of Science of the Hiroshima University). IV Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941, V L'intégrale de Cauchy, 1941 (Japanese Journal of Mathematics). VI Domaines pseudoconvexes, 1942 (Tôhoku Mathematical Journal). VII Sur quelques notions arithmétiques, 1950 (Bulletin de la Société Mathématique de France). VIII Lemme fondamental, 1951 (Journal of Mathematical Society of Japan). (Rappelons la voie que nous avons suivie).

[2] Voir, par exemple, des beaux Mémoires de Denjoy (C. R., Paris).

[3] Voir pages 54, 68, 79 de l'Ouvrage. C'est vraiment grâce à cet Ouvrage que nous avons pu commencer nos recherches.

En 1935, Weil a fait un premier pas à la direction inverse, c'est-à-dire, à la direction de résoudre des problèmes, grâce auquel les trois derniers des problèmes ci-dessus sont devenus résolubles pour les domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles[4].

C'est justement à ce temps et pour ces problèmes, que nous avons commencé nos recherches. Pour obtenir l'image vivante sur la transition de problèmes depuis 1934, il y a des Mémoires de Behnke–Stein que voici :

Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null– und Polstellenflächen, 1937[5]. Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, 1940[6]. Die Singularitäten der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen, 1952 [7].

2. Dans le présent Mémoire, nous traiterons les problèmes indiqués plus haut, ainsi que les problèmes arithmétiques introduits au Mémoire VII, pour les domaines pseudoconvexes finis sans point critique intérieur; dont la partie essentielle n'est pas différente de ce que nous avons exposé en japonais en 1943[8].

On verra dans le Mémoire suivant que quand on admet les points critiques intérieurs, on rencontre à un problème qui m'apparaît extrêmement difficile (voir No. 23). C'est pour préparer des méthodes et pour éclaircir la figure de la difficulté, que nous avons décidé à publier le présent Mémoire, séparément[9].

Ce Mémoire consiste en trois chapitres. Dans le Chapitre I, nous adjoidrons un complément quantitatif au lemme exposé au Mémoire VIII. Dans le Chapitre II, nous préparerons le deuxième lemme. Et dans le Chapitre III, nous traiterons les problèmes ci-dessus, en nous servant de ces lemmes. (Précisément, voir Nos. 1, 7, 24.)

Chapitre I. Complément du lemme.

1. Problème. Nous voulons résoudre *le problème inverse de Hartogs* sans faire appel à *l'intégrale de Weil*[10]; ce qui donne naissance à un

[4] Avant lui, ces problèmes n'étaient résolubles que dans les domaines cylindriques.
Voir : A, Weil, Sur les séries de polynômes de deux variables complexes, 1932 (C. R., Paris). A. Weil, L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, 1935 (Math. Annalen).

[5] (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung). Voir aussi : H. Cartan, Note sur le premier problème de Cousin, 1938 (C. R., Paris).

[6] (Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, VIII).

[7] (Nieuw Archief voor Wiskunde, Amsterdam).

[8] Voir la Note à l'Introduction de Mémoire VIII. Dans ce manuscrit-ci on trouve déjà les problèmes (C_1) (C_2) (expricitement) et (E) (implicitement).

[9] cité plus haut.

[10] Voir : Mémoire VI et B. Chapitre III.

problème, concernant le lemme établi au Mémoire précédent, comme ce qui suit :

≪Dans le lemme du Mémoire VIII, on trouve qu'à toute fonction holomorphe u sur (R) au voisinage de Δ_0 correspond une fonction holomorphe $F(x, y)$ au voisinage de (A_0, B_0) telle que $F = uu_0$ sur Σ et que $F \equiv 0$ mod (Φ) globalement. Soit maintenant,

$$F = A_1\Phi_1 + A_2\Phi_2 + \cdots + A_\mu\Phi_\mu$$

identiquement, A_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de (A_0, B_0); supposons que

$$|u| < M \qquad \text{pour} \quad V_0$$

où V_0 est un domaine (connexe ou non) tel que $\Delta_0 \Subset V_0 \subseteq (R)$, et M est un nombre positif; et nous demanderons si l'on peut trouver A_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ dans la borne

$$|A_i| < KM,$$

K étant une constante positive indépendante de u.≫

Nous allons le résoudre successivement, en inspectant les relations quantitatives des théorèmes, qui composent le lemme.

2. Théorème du reste. Commençons par le théorème du reste, formulé au No. 5 du Mémoire VII (dans la suivante, nous supprimerons le mot ≪Mémoire≫), comme suivante :

≪Considérons dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ un domaine de la forme $[\mathfrak{D}, (C)]$, où $\mathfrak{D}$ est un domaine univalent (fini) de l'espace (x), et (C) un cercle du plan y; et considérons dans $[\mathfrak{D}, (C)]$ une fonction holomorphe $F(x, y)$ telle que, pour tout point (x^0) de $\mathfrak{D}$, l'équation $F(x^0, y) = 0$ ait λ racines dans (C), λ étant un entier fini indépendant de (x^0). Alors, toute fonction $f(x, y)$ holomorphe dans $[\mathfrak{D}, (C)]$ peut se mettre sous la forme

$$f(x, y) = f_0(x, y) + \varphi(x, y)F(x, y),$$

où f_0 et φ sont holomorphes dans $[\mathfrak{D}, (C)]$, f_0 étant un polynôme en y, de degré au plus égal à $\lambda - 1$ (identiquement nul si $\lambda = 0$); en outre une telle décomposition est unique.≫

Ce théorème, dû à W. Rückert[11], a été examiné d'une manière quantitative par H. Cartan[12], dont nous formulons le résultat seul :

[11] Math. Annalen, 1933.

[12] H. Cartan, Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, 1944. (Annales de l'Ecole Normale, pages 192-194).

Soit (C_0) *un cercle concentrique à* (C) *et contenu dans* (C)*; supposons que toutes les* λ *racines de* $F(x^0, y) = 0$ *restent dans* (C_0)*,* (x^0) *étant un point quelconque de* $\mathfrak{D}$*. Alors, si* $|f|$ *admet la borne supérieure* M *pour* $[\mathfrak{D}, (C)]$*, on a*

$$|f_0| < KM, \qquad |\varphi| < KM$$

pour $[\mathfrak{D}, (C_0)]$*,* K *étant une constante positive indépendante de* f*.*

3. Problème ($\mathbf{C_1}$) local. I1 s'agit d'inspecter quantitativement le problème (C_1). Considérons-le d'abord, pour problème local; et nous allons montrer que :

≪Aux fonctions holomorphes $F_1, F_2, \ldots, F_p$ dans un *polycylindre* (C), $|x_i| < R \; (i = 1, 2, \ldots, n)$ à l'espace (x)[13], il correspond une constante positive r plus petite que R et une constante positive K qui jouissent du rôle suivant:

Etant donnée une fonction holomorphe $f(x)$ dans (C) telle que $f \equiv 0 \mod (F)$ en tout point de (C) et que $|f| < M$ pour (C) (M étant un nombre positif); on peut trouver des fonctions holomorphes $A_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ dans le polycylindre (γ), $|x_i| < r \; (i = 1, 2, \ldots, n)$ dans la borne

$$|A_j(x)| < KM$$

pour (γ), de façon que l'on ait identiquement

$$f = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p. \gg$$

Généralisons pour l'effet, le problème (C_1) comme ce qui suit :

≪Etant donné un système des équations fonctionnelles simultanées,

$$\text{(a)} \qquad f_i = A_{i1} F_{i1} + A_{i2} F_{i2} + \cdots + A_{ip} F_{ip} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

dont f_i, F_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, p)$ expriment les fonctions holomorphes données dans un domaine $\mathfrak{D}$ sur l'espace (x), et A_{ij} représentent les fonctions inconnues, avec un certain nombre d'identités de la forme

$$A_{ij} = A_{kl} \qquad (i \neq k)$$

$(i, k = 1, \ldots, q;\; j, l = 1, \ldots, p)$, tel que ce système d'équations ait une solution (A) en tout point de $\mathfrak{D}$[14], trouver une solution pour $\mathfrak{D}$. ≫

[13] Sous le mot ≪polycylindre≫ à l'espace (x), nous entendons un ensemble de points de la forme $|x_i - x_i^0| < r_i \; (i = 1, 2, \ldots, n)$, ($(x_0)$ étant un point déterminé et r_i des nombres positifs).

[14] Remarquons que, dans l'équation (a) (avec les identités), même si $f_i \equiv 0 \mod (F_{i1}, F_{i2}, \ldots, F_{ip})$ en tout point de $\mathfrak{D}$, on n'a pas nécessairement de solution locale; voir, par exemple, $x_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2$, $x_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2$, avec $A_{12} = A_{22}$.

Arrangeons la forme de l'équation fonctionnelle. Soit, par exemple,

$$f_1 = A_{11}F_{11} + A_{12}F_{12}, \quad f_2 = A_{21}F_{21} + A_{22}F_{22}, \quad \text{avec} \quad A_{12} = A_{21}.$$

Posons

$$\begin{array}{lll} \Phi_{11} = F_{11}, & \Phi_{12} = F_{12}, & \Phi_{13} = 0, \\ \Phi_{21} = 0, & \Phi_{22} = F_{21}, & \Phi_{23} = F_{22}; \end{array}$$

l'équation fonctionnelle donnée se met alors, sous la forme

$$\begin{aligned} f_1 &= B_1\Phi_{11} + B_2\Phi_{12} + B_3\Phi_{13}, \\ f_2 &= B_1\Phi_{21} + B_2\Phi_{22} + B_3\Phi_{23}. \end{aligned}$$

En appliquant cette méthode d'arrangement à l'équation fonctionnelle de la forme (a) (avec les identités données), nous pouvons toujorus la mettre sous la forme

$$f_i = B_1\Phi_{i1} + B_2\Phi_{i2} + \cdots + B_r\Phi_{ir} \quad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

où $(\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \ldots, \Phi_{ir})$ est égale à $(F_{i1}, F_{i2}, \ldots, F_{ip}, 0, \ldots, 0)$ à ordre près [15].

Nous allons légitimer la proposition pour le problème ainsi généralisé. Comme la proposition est évidemment vrai pour $(0, q)$, il suffit de la justifier pour $(n, q+1)$ et $(n+1, 1)$, en supposant qu'elle soit vraie pour tout (n', q') tel que $n \geq n' > 0$, $q \geq q' > 0$. Commençons par celui pour $(n, q+1)$.

Considérons à l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les équations fonctionnelles simultanées,

$$(1) \qquad f_i = A_1F_{i1} + A_2F_{i2} + \cdots + A_pF_{ip} \quad (i = 1, 2, \ldots, q+1),$$

dont f_i, F_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, p)$ sont les fonctions holomorphes données dans le polycylindre (C), $|x_k| < R$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et A_j signifient les fonctions inconnues; nous supposons que l'équation (1) ait des solutions en tout point de (C), et nous sommes à trouver une solution pour le polycylindre (γ), $|x_k| < r$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dans la borne $|A_j(x)| < KM$ où $r (< R)$, K sont des constantes positives indépendantes de f_i,et M est la borne supérieure de $|f_i(x)|$ pour (C), sous l'hypothèse indiquée.

La proposition étant vraie pour $(n, 1)$, d'après l'hypothèse, pour l'équation fonctionnelle,

$$(2) \qquad f_1 = A_1F_{11} + A_2F_{12} + \cdots + A_pF_{1p},$$

[15] Par cette méthode d'arrangement seule, H. Cartan a beaucoup contracté notre démonstration que le problème (K) est toujours résoluble (VII, No. 6). Voir : H. Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiques de plusieurs variables, 1950, (Bulletin de la Société Mathématique de France).

il existe des constantes positives R_1 ($< R$), K_1 indépendantes de f_1 telles que l'on puisse trouver des fonctions holomorphes $A_i^0(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ pour le polycylindre (C_1), $|x_k| < R_1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dans la borne

$$|A_i^0| < K_1 M,$$

de façon qu'elles satisfassent identiquement à (2). Posons

$$B_i = A_i - A_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

l'équation (2) devient alors, à

$$B_1 F_{11} + B_2 F_{12} + \cdots + B_p F_{1p} = 0. \tag{3}$$

L'équation fonctionnelle (3) admet une solution formulaire dans tout polycylindre Δ tel que $\Delta \Subset (C)$ (Théorèmes 4 et 3 de VII), de la forme suivante :

$$B_i = \sum C_{ij} \Pi_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, p\,; j = 1, \ldots, r'),$$

avec quelques identités de la forme $C_{ij} = C_{kl}$ $(i \neq k; i,\, k = 1, \ldots, p;\, j, l = 1, \ldots, r')$. En appliquant la même méthode d'arrangement, nous obtenons une solution formulaire de la forme,

$$B_i = \sum C_i \Pi_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, p\,; j = 1, \ldots, r).$$

En substituant cette solution, ainsi que $B_i = A_i - A_i^0$, dans

$$f_i = \sum A_k F_{ik} \qquad (i = 2, \ldots, q+1;\, k = 1, \ldots, p), \tag{4}$$

on a l'équation fonctionnelle de la forme

$$\varphi_i = \sum C_j \Phi_{ij} \qquad (i = 2, \ldots, q+1;\, j = 1, \ldots, r), \tag{5}$$

dont $\varphi_i = f_i - \sum A_k^0 F_{ik}$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ et Φ_{ij} sont des fonctions holomorphes déterminées dans (C_1), indépendantes de (f). Cela étant évidemment le cas (n, q), il existe une solution de (5) jouissant de la propriété demandée; il en est donc, de même pour l'équation donnée (1).

Considérons ensuite, à l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, le polycylindre (C), $|x_i| < R$, $|y| < R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et l'équation fonctionnelle

$$f = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p, \tag{6}$$

dont f et F_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ représentent les fonctions holomorphes données dans (C), telles que $f \equiv 0 \mod (F)$ en tout point de (C), et A_j expriment les fonctions inconnues; nous allons justifier la proposition pour cette équation sous l'hypothse indiquée. Nous supposons que l'une au moins des F_j ne soit pas nulle identiquement (si non, il n'y a pas de problème); soit $F_1(x,y) \neq 0$ identiquement, pour fixer l'idée. Grâce à Weierstrass, nous pouvons regarder $F_1(x,y)$ pour être un polynôme de y tel que le coefficient de la plus haute puissance de y soit 1 (en changeant (x,y) et R). Choisissons trois nombres positifs ρ, ρ', ρ'' tels que $\rho < R$, $\rho'' < \rho' < R$, de façon que, pour tout (x') dans le polycylindre Δ, $|x_i| < \rho$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, l'équation $F_1(x', y) = 0$ ait le même nombre de racines dans le cercle (C''), $|y| < \rho''$, et n'ait pas de racines sur $\rho'' \leq |y| < \rho'$. Soit λ le nombre de racines. Nous pouvons toujours supposer que F_1 soit de degré λ par rapport à y, en nous plaçant toujours dans $[\Delta, (C')]$, (C') représentant le cercle $|y| < \rho'$.

La fonction $f(x,y)$ se met alors, d'après le *théorème du reste*, sous la forme $f = f_0 + \varphi F_1$, où f_0 et φ expriment des fonctions holomorphes dans $[\Delta, (C')]$, et spècialement f_0 est un polynôme de y de degré $\lambda - 1$ au plus (identiquement nul si $\lambda = 0$), et de plus, si $|f| < M$ pour $[\Delta, (C')]$, on a $|f_0| < KM$, $|\varphi| < KM$ pour $[\Delta, (C'')]$, K étant une constante positive indépendante de f. Nous pouvons donc supposer que la fonction f de l'équation (6) soit un polonôme de y de degré au plus égal à $\lambda - 1$ (supposons dans la suivante que $\lambda > 0$, puisque, si non, il n'y a pas de problème). Pareillement nous pouvons supposer que, les fonctions F_k $(k = 2, 3, \ldots, p)$ de l'équation (6) soient des polynômes de degré au plus égal à $\lambda - 1$.

Nous considérons l'équation (6) pour $[\Delta, (C'')]$ dans ces conditions. Soit $A_j(x,y)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ une solution de (6); nous l'appellerons, pour le moment, solution spéciale, si toutes les fonctions A_j sont des polynômes de y de degré $\lambda - 1$ au plus. Le degré de $A_1(x,y)$ d'une solution spéciale est nécessairement $\lambda - 2$ au plus (si $\lambda = 1$, $A_1 = 0$).

Soit (x_0) un point quelconque de Δ. L'équation (6) possède une solution locale pour (x^0, y'), y' étant un point quelconque de (C'); par suite, d'après *le théorème 1 de* VII, l'équation (6) possède une solution pour un certain voisinage de $[(x^0), (C'')]$. De là, grâce aux conditions posées sur l'équation (6), spécialement à celle de F_1, il s'ensuit que, pour tout point (x^0) de Δ, l'équation (6) possède une solution spéciale locale (en appliquant *le théorème du reste* à la solution précédente).

Posons

$$f = \varphi_1 y^{\lambda-1} + \varphi_2 y^{\lambda-2} + \cdots + \varphi_\lambda,$$

$$F_1 = y^\lambda + \Phi_1 y^{\lambda-1} + \Phi_2 y^{\lambda-2} + \cdots + \Phi_\lambda, \quad A_1 = B_2 y^{\lambda-2} + \cdots + B_\lambda,$$

$$F_i = \Phi_{i1} y^{\lambda-1} + \Phi_{i2} y^{\lambda-2} + \cdots + \Phi_{i\lambda}, \quad A_i = B_{i1} y^{\lambda-1} + B_{i2} y^{\lambda-2} + \cdots + B_{i\lambda},$$

$(i = 2, 3, \ldots, p)$; alors, pour que (A) soit une solution spéciale de l'équation

(6), il faut et il suffit que (B) satisfasse aux équations fonctionnelles simultanées suivantes :

$$(7)\quad 0=B_2+\sum B_{i1}\Phi_{i1},\quad 0=(B_2\Phi_1+B_3)+\sum(B_{i1}\Phi_{i2}+B_{i2}\Phi_{i1}),\ldots,$$
$$\varphi_\lambda = B_\lambda\Phi_\lambda+\sum B_{i\lambda}\Phi_{i\lambda},\quad (i=2,3,\ldots,p)$$

définies dans Δ. Les équations (7) possèdent une solution locale en tout point de Δ, puisque l'équation (6) possède une solution spéciale locale pour tout point de Δ. Donc, ceci est le cas (n,q); par suite d'après l'hypothèse, il existe une solution en origine, satisfaisant à la condition démandée. Il en est donc, de même pour l'équation (6).

La proposition en question est donc vrai. Disant un mot, nous avons vu que *le problème* (C_1) *général possède toujours la solution locale satisfaisant à la condition quantitative.*

4. Problème $(\mathbf{C_1})$ global. Il s'agit maintenant d'inspecter le problème (C_1) de la manière quantitative et globale. Pour cela, il faut continuer de le traiter en forme générale.

Rappelons la configuration géométrique de No. 4 de VII :

≪Prenons un cercle fermé $(\overline{C}_i)$ dans chaque plan x_i $(i=1,\ldots,n)$ et soit $(\overline{C})$ le polycylindre fermé ayant pour composantes les $(\overline{C}_i)$. Désignons par E_0 n'import quel point de $(\overline{C})$.

Dans x_n, séparons les parties réelle et imaginaire, $x_n=X+iY$ et considérons une droite de la forme $x_i=x_i^0$ $(i=1,\ldots,n-1)$, $Y=Y^0$, les x_i^0 étant des valeurs complexes et Y^0 une valeur réelle. Soit E_1 l'intersection de cette droite et du polycylindre fermé $(\overline{C})$: E_1 est un segment qui peut être réduit à un point.

Considérons de même $E_2, E_3,\ldots$; la dimension réelle augmentant chaque fois d'une unité, on terminera par E_{2n}. E_2, par exemple, est un ensemble cylindrique fermé dont la composante dans le plan x_i $(i=1,2,\ldots,n-1)$ est un point de $(\overline{C}_i)$, et la composante dans le plan x_n est $(\overline{C}_n)$, et E_{2n} désigne le polycylindre $(\overline{C})$. ≫

Nous venons de voir que le problème (C_1) (général et quantitatif) est résoluble au voisinage de E_0; passons donc, au *cas de* E_1 :

≪Considérons un quelconque des ensembles E_1, et désignons cet ensemble par la même lettre E_1; et nous pouvons supposer que c'est un vrai segment.

La composante de E_1 suivant l'espace $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ est un point que nous désignons par Q, et sa composante suivant le plan x_n est un segment que nous désignons par l; l est horizontal, son extrémité gauche sera désigné par m_0, son extrémité droite par m_q, en introduisant $q-1$ points $m_1, \ldots, m_{q-1}$ sur le segment, de gauche à droite. Soit l_i le segment fermé $[m_{i-1}, m_i]$ $(i = 1, \ldots, q)$. Soit, dans l'espace (x), M_i l'ensemble cylindrique (Q, m_i), et L_i l'ensemble cylindrique (Q, l_i). Notons

$$L_1 \cup L_3 \cup L_5 \cup \cdots = \Delta_1, \quad L_2 \cup L_4 \cup L_6 \cup \cdots = \Delta_2.$$

Alors,

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad \Delta_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2 = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{q-1}. \gg$$

Considérons maintenant, dans un polycylindre (C') concentrique à $(\overline{C})$ et contenant $(\overline{C})$, l'équation fonctionnelle,

$$(1) \qquad f_i = A_1 F_{i1} + A_2 F_{i2} + \cdots + A_p F_{ip} \quad (i = 1, 2, \ldots, p'),$$

en supposant qu'elle ait une solution en tout point de (C'), (notations ayant les significations usuelles). Comme ce problème (C_1) est résoluble (de la manière quantitative) en tout point de E_1, en prenant les segments l_h $(h = 1, 2, \ldots, q)$ suffisamment petits, nous pouvons le résoudre au voisinage de chaque l_h; précisément, on peut tracer sur le plan x_n un cercle α_h autour du milieu de l_h, contenant l_h, et à l'espace $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ un polycylindre (β) de centre Q, d'une manière indépendante de f_i, de façon que, dans le polycylindre (β, α_h), il y ait des fonctions holomorphes A_j $(j=1, 2, \ldots, p)$ satisfaisant aux identités (1) et aux conditions

$$|A_j| < K_1 M$$

dans (β, α_h), dont K_1 est une constante positive indépendante de f_i, et M, la borne supérieure de $|f_i|$ pour (C').

Soit $\alpha_h \cap \alpha_{h+1} = \gamma_h$ $(h < q)$; considérons,

$$(\beta, \alpha_1) \cup (\beta, \alpha_3) \cup \ldots = V_1, \quad (\beta, \alpha_2) \cup (\beta, \alpha_4) \cup \ldots = V_2;$$

et notons, $A_j = A'_j$ pour V_1, $A_j = A''_j$ pour V_2, $A'_j - A''_j = B_j$; nous avons alors, identiquement sur $V_0 = V_1 \cap V_2 = (\beta, \gamma_1) \cup (\beta, \gamma_2) \cup \cdots \cup (\beta, \gamma_{q-1})$,

$$(2) \qquad B_1 F_{i1} + B_2 F_{i2} + \cdots + B_p F_{ip} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p').$$

Pour l'équation fonctionnelle (2), nous avons la solution formulaire,

$$(3) \qquad B_j = \sum C_k \Phi_{jk} \quad (j = 1, \ldots, p\,;\ k = 1, \ldots, p'')$$

pour un polycylindre (C'') concentrique à (C) et tel que $(C) \Subset (C'') \Subset (C')$ (Théorème 4 et 3 de VII ; Φ_{jk} étant des fonctions holomorphes). Supposons que $V_0 \subset (C'')$.

Soient encore, $B_j = A'_j - A''_j$, alors l'expression (3) donne un problème (C_1) dans V_0, puisque B_j sont des fonctions holomorphes dans V_0 telles que cette équation ait une solution (C) en tout point de V_0. Traçons, sur le plan x_n autour du point m_h $(h = 1, 2, \ldots, q-1)$, un cercle δ_h, et à l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ un polycylindre (β') de centre Q, de façon que $\delta_h \Subset \gamma_h$, $(\beta') \Subset (\beta)$ et que, pour toutes fonctions holomorphes B_j ayant la propriété indiquée et satisfaisant à $|B_j| < M$ dans V_0, on puisse trouver des fonctions holomorphes C_j satisfaisant aux identités (3) et aux conditions

$$|C_k| < K_2 M$$

pour le polycylindre fermé (β', δ_h), K_2 étant une constante positive indépendant de B_j (et naturellement de M).

Considérons *l'intégrale de Cousin* suivante[16]:

$$I_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_h \int_{d_h} \frac{C_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)}{t - x_n} dt \quad (h = 1, 2, \ldots, q-1),$$

où d_h exprime le diamètre vertical de δ_h, sur lequel l'intégration est faite de bas en haut (et i, l'unité imaginaire).

Soit r un nombre positif plus petit que la moitié de la longueur de tout d_h; soit λ l'ensemble des points sur le plan x_n tels que les distances au segment l soient plus petites que r; partageons λ par les diamètres d_h de la manière suivante; soit λ_1 la partie de λ qui se situe à gauche de d_1, soit λ_2 celle entre d_1 et d_2 et ainsi de suite. Soient

$$\mu_1 = \lambda_1 \cup \lambda_3 \cup \lambda_5 \cup \ldots, \quad \mu_2 = \lambda_2 \cup \lambda_4 \cup \lambda_6 \cup \ldots.$$

Dans cette configuration géométrique, l'intégrale $I_k(x)$ donne une fonction holomorphe dans chacun des domaines (connexes ou non) (β', μ_g) $(g = 1, 2)$, que nous dénotons par $\varphi_k^{(g)}(x)$; elles restent holomorphes en tout point de $[(\beta'), (d_h \cap \lambda)]$ $(h = 1, 2, \ldots, q-1)$, de façon que l'on ait identiquement

$$\varphi_k^{(1)}(x) - \varphi_k^{(2)}(x) = C_k(x),$$

et encore on a évidemment

$$|\varphi_k^{(1)}(x)| < K_3 M, \quad |\varphi_k^{(2)}(x)| < K_3 M,$$

où K_3 exprime une constante positive et M représente la borne supérieure de $|B_j|$ pour V_0.

Posons maintenant,

$$\psi_i^{(g)}(x) = A_1^{(g)} F_{i1} + A_2^{(g)} F_{i2} + \cdots + A_p^{(g)} F_{ip} \quad (i = 1, 2, \ldots, p'),$$

[16] Nous venons d'appeler intégrale de Cousin toute intégrale de la forme ayant la propriété et jouissant du rôle (Voir: Cousin, Acta Math., 1895).

$$-\sum_j \left[\sum_k \varphi_k^{(g)} \Phi_{jk}\right] F_{ij} = a_1^{(g)} F_{i1} + a_2^{(g)} F_{i2} + \cdots + a_p^{(g)} F_{ip}$$

$$(j = 1, \ldots, p\,;\ k = 1, \ldots, p'')$$

pour chaque (β, μ_g) respectivement $(g = 1, 2;\ A_j^{(1)} = A'_j,\ A_j^{(2)} = A''_j)$.

On trouve alors, $\psi_i^{(g)} = f_i,\ a_i^{(1)} = a_i^{(2)}$ identiquement, par suite

$$f_i = a_1 F_{i1} + a_2 F_{i2} + \cdots + a_p F_{ip} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p')$$

identiquement pour (β', λ), et encore que

$$|a_j| < K_4 M \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

dont K_4 représente une constante positive indépendante de f_i et M signifie le même nombre que ci-dessus. Soit r' le plus petit des nombres, r et les rayons de (β').

Nous avons ainsi vu que, étant donné un problème (C$_1$) général dans le polycylindre (C'), on puisse trouver les constantes positives K_4 et r', indépendantes de (f), jouissant des rôles indiqués; en autre mot, le problème (C$_1$) général et quantitatif est toujours résoluble pour E_1. En répétant le même mode de raisonnement, on arrive au résultat suivant :

Étant données des fonctions holomorphes $F_{i1}, F_{i2}, \ldots F_{ip}$ et f_i dans un polycylindre (C) à l'espace (x) telles que l'équation fonctionnelle,

$$f_i = A_1 F_{i1} + A_2 F_{i2} + \cdots + A_p F_{ip} \quad (i = 1, 2, \ldots, p')$$

ait une solution (A) en tout point de (C), et un polycylindre (C_0) concentrique à (C) tel que $(C_0) \Subset (C)$, on peut toujours trouver une constante positive K indépendante de f_i, de façon que, M étant la borne supérieure de $|f_i|$ pour (C), on puisse choisir des fonctions holomorphes A_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ dans (C_0) satisfaisant à l'équation fonctionnelle et à la condition $|A_j| < KM$.

5. Problème (C$_2$) Entre les problèmes (C$_1$) et (C$_2$), il y a la relation que nous avons vue au No. 1 de VII; par suite, du résultat ci-dessus, il s'ensuit immédiatement le résultat suivant :

Traçons, à l'espace (x), deux polycylindres (C), (C_0) concentriques, avec les rayons R_i, R_i^0, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dont $R_i > R_i^0$, respectivement. Soit r un nombre positif tel que $r < R_i - R_i^0$, soit (x^0) un point quelconque de (C_0) décrivons le polycylindre (γ) de centre (x^0) et de rayon r. Soit $F_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ un système de fonctions holomorphes dans (C). Dans ces circonstances, il existe une constante positive K jouissant du rôle *suivant : Etant donnée une fonction holomorphe $\varphi(x)$ dans (γ) telle que $|\varphi| < M$, M étant un nombre positif indépendant de (γ), et que, pour toute paire de (γ), $((\gamma_1),(\gamma_2))$, les fonctions correspondantes φ_1, φ_2 satisfassent à $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \mod (F)$ en tout point de $(\gamma_1) \cap (\gamma_2)$; on peut trouver une fonction holomorphe $\Phi(x)$ dans (C_0) telle que $|\Phi| < KM$ et que $\Phi \equiv \varphi \mod (F)$ en tout point de de (γ).*

Nous avons traité les problèmes (C_1), (C_2) dans les polycylindres, mais les résultats subsistent pour les domaines univalent cylindriques, pour l'affirmer, il suffit d'appliquer le procédé usuel, passage à l'espace supérieur.

6. Fonction (W), complément du lemme. Nous allons examiner les fonctions (W) d'une manière quantitative. Rappelons No. 7 de VIII. Considérons sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un domaine (connexe ou non) $\mathfrak{D}$, qui peut admettre des points critiques non-transcendants comme points intérieurs. Soient $\eta_1(P), \eta_2(P), \ldots, \eta_m(P)$ des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$. Supposons que, pour toutes paires de points réguliers de $\mathfrak{D}$ ayant les mêmes coordonnées, les éléments analytiques de $\eta_1(P)$ soient différents. Considérons à l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ la variété caractéristique Σ donnée par

$$y_j = \eta_j(p), \quad p \in \mathfrak{D} \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

1°. Soit Δ un domaine (*connexe ou non*) tel que $\Delta \Subset \mathfrak{D}$ et que Δ soit *la surface de recouvrement* (Überlagerungsbereich) de $\underline{\Delta}$, $\underline{\Delta}$ étant la projection de Δ sur l'espace (x) (Grundbereich). Δ est alors d'un même nombre, ν de feuilles. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ les points de Δ sur le point (x), (x) étant un point quelconque de $\underline{\Delta}$; formons la fonction

$$F_1(x, y_1) = \prod [y_1 - \eta_1(P_i)] \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Grâce à Weiersirass, on sait que : $\ll$toute fonction holomorphe $u(P)$ sur Δ il correspond, d'une manière déterminée, un polynôme de y_1, $\Phi(x, y_1)$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de (x) dans $\underline{\Delta}$, de façon que $u\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} = \Phi$ sur $F_1 = 0$. $\gg$ En inspectant le mode de raisonnement[17], nous trouvons immédiatement que :

Pour tout domaine (connexe ou non) A tel que $A \Subset \Delta$, il correspond une constante positive K indépendante de u, telle que les coefficients de y_1 du polynôme $\Phi(x, y_1)$ soient plus petits que KM en modules pour A, M étant la borne supérieure de $|u|$ pour Δ.

[17] Voir: W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II_1, 1929, Pages 116, 117.

2°. Soit (x_0, y_0) un point quelconque de la variété caractéristique Σ. Considérons une transformation linéaire non-singulière $\mathfrak{L}$ de la forme

$$x'_i = \sum A_{i,k}(x_k - x_k^0) + \sum A_{i,n+l}(y_l - y_l^0),$$
$$y'_j = \sum A_{n+j,k}(x_k - x_k^0) + \sum A_{n+j,n+l}(y_l - y_l^0),$$
$$(i, k = 1, \dots, n;\ j, l = 1, \dots, m).$$

Nous avons construit la fonction $u\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}$ dans l'espace (x, y) par rapport à Σ; d'après la même méthode, nous voulons construire la fonction $W(x, y)$ dans l'espace (x', y') par rapport à l'image de Σ au voisinage de l'origine du nouvel espace; si nous choisissons pour $\mathfrak{L}$ une transformation convenable, ceci est possible et de plus W jouit de la même propriété que $\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}$. A l'égard de ces fonctions W, en examinant le mode de raisonnement de l'autre fois, nous trouvons facilement que :

≪On peut choisir $n+1$ transformations $\mathfrak{L}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n+1)$, telles que les fonctions correspondantes W_i existent et jouissent de la propriété indiquée, et que l'ensemble de zéros communs de ces fonctions soit contenu dans l'ensembles de points singuliers S_0 de Σ au voisinage de (x^0, y^0). ≫

3°. Supposons que le point (x^0, y^0) appartienne à S_0. Soit $U(x, y)$ une fonction holomorphe au voisinage de (x^0, y^0), qui s'annule identiquement sur S_0. D'après le ≪*Nullstellensatz*≫ (No. 8 de VIII), nous trouvons alors que ≪ $U^\lambda \equiv 0 \bmod (W_1, W_2, \dots, W_{n+1})$ au voisinage de (x^0, y^0), λ étant un entier positif.≫

4°. Considérons maintenant, le problème exposé à No. 1 (Voir No. 10 de VIII). D'après ce que nous avons vu depuis No. 4 (à l'aide du lemme de Borel), nous trouvons facilement que *la réponse est affirmative, pourvu que l'entier positif λ soit choisi suffisamment grand.*

Chapitre II. Domaines pseudoconvexes, deuxième lemme.

7. Généralités. Rappelons ce que nous avons exposé à l'Introduction du Mémoire VI. Comme nous avons dit, F. Hartogs a fait en 1906 une découverte faisant époque de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables, je pense, à savoir : Tout domaine d'holomorphie est soumis à une restriction très curieuse que nous appelons d'être *pseudoconvexe*[18].

La même restriction a été successivement trouvée aux différentes places de la théorie, que nous allons rappeler tout rapidement. En 1910, E. E. Levi

[18] F. Hartogs, Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen (Münch. Berichte).

a montré que *les domaines de méromorphie* sont aussi pseudoconvexe[19]. En 1926, G. Julia a indiqué que *les domaines de normalité* pour les familles de fonctions holomorphes le sont aussi[20]. En 1931, W. Saxer a adjouté qu'il en est de même (dans un sens) pour *les familles de fonctions méromorphes*[21]. Et finalement, en 1934 l'auteur a indiqué que *les familles de surfaces caractéristiques* le sont aussi [22].

Ces théorèmes ont été étudiés, avec diverses conséquences déductives, par des découverteurs et des autres mathématiciens[23], spécialement par Harlogs et E. E. Levi.

Le présent Chapitre sera partagé en trois parties A, B, C. Dans A, nous exposerons abstraitement ce que l'on doit à Hartogs et à E. E. Levi.

Dans B, nous étendrons ce que nous avons exposé dans le Mémoire VI sur les fonctions pseudoconvexes. Et dans C, nous traiterons un nouvel problème, qui est propre pour les domaines multivalents[24].

A. Domaines pseudoconvexes.

8. Domaines. Les domaines que nous considérerons désormais dans le présent Mémoire sont *finis et sans point critique intérieur* sauf une seule exception à No. 24. Nous ometterons donc, d'indiquer ces conditions chaque fois. Les domaines de précisément cette sorte sont expliquées dans *l'Ouvrage de Behnke–Thullen* ce que nous allons faire dans la suivante est seulement d'y introduire et d'adjoindre quelques termes et notations, utiles dans la suivante.

Nous considérons l'espace de n variablcs complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$; et sur cet espace (x); nous considérons un point P; un point est une chose (Ding) qui possède les coordonnées déterminées (x) : le point (x) à l'espace (x) est appelé la *projection* du point P (sur l'espace (x)), et est exprimé par $\underline{P}$;

[19] E. E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse (Annali di Matematica).

[20] G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables (Acta Mathematica).

[21] W. Saxer, Sur les familles de fonctions méromorphes de plusieurs variables (C. R., Paris).

[22] K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc. (Journal of Science of the Hiroshima Univ.).

[23] Voir l'Ouvrage de Behnke-Thullen et les prolongements indiqués à I'Introduction. (Voir aussi la Note ci-dessus de l'auteur).

[24] Tout récement, l'auteur a reçu plusieurs Mémoires de P. Lelong et de F. Norguet sur le sujet du présent Chapitre, ainsi que sur le problème inverse de Hartogs; mais, maintenant, puisque l'auteur se dévoue à inspecter sa résolution (naturellement subjective) du problème dit à l'Introduction, il en parlera (d'une manière objective), à l'occasion ultérieur. A propos, ce problème et celui du lemme exposé au Mémoire VIII (pour lequel le Mémoire VII a été écrit) étaient les difficultés essentielles à l'auteur, depuis le Mémoire VI (1942) (dont la difficulté essentielle à l'auteur la découverte d'employer l'équation intégrale; il l'a poursuivi depuis le Mémoire I (1936). (Voir No. 29).

nous dirons par fois que P se situe sur $\underline{P}$. Soit E l'ensemble des points P; l'ensemble des projections $\underline{P}$ est appelé la projection de E, et est exprimé par $\underline{E}$.

Pour les ensembles de points sur l'espace (x), nous emploierons généralement les termes et les notations de la théorie des ensembles abstraits[25].

Nous appelons domaine un ensemble de points sur l'espace (x), s'il possède un système (S) d'ensembles partiels appelés voisinages (Umgebungen) qui satisfait à ≪Umgebungspostulate≫, et encore s'il connexe dans un sens respectant (S).

Considérons un domaine $\mathfrak{D}$ sur l'espace (x). $\mathfrak{D}$ possède d'après la définition, un système déterminé (S) de voisinages, nous pouvons donc, tracer des courbes continues sur $\mathfrak{D}$. Soit P_1, P_2 une paire quelconque de points sur $\mathfrak{D}$; nous dénotons par $d(P_1, P_2)$ la borne inférieure des longueurs des courbes rectifiables sur $\mathfrak{D}$ joignant P_1 et P_2; $d(P_1, P_2)$ satisfait à ≪Entfernungspostulate≫, nous définirons par ce $d(P_1, P_2)$ la *distance* (Entfernung) des points P_1, P_2 sur le domaine $\mathfrak{D}$. En l'introduisant, nous pouvons employer pour les domaine les termes de ≪metrische Räume≫.

Nous allons considérer des relations de deux domaines sur le même espace (x) : Soient $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_0$ deux domaines tels que tout point de $\mathfrak{D}_0$ appartienne à $\mathfrak{D}$. Considérons la correspondance qui joint un point quelconque de $\mathfrak{D}_0$ au même point de $\mathfrak{D}$, si cette correspondance est bicontinue, nous appellerons que $\mathfrak{D}_0$ est un *domaine partiel* de $\mathfrak{D}$, et le dénoterons par $\mathfrak{D}_0 \subseteq \mathfrak{D}$, nous dirons aussi que $\mathfrak{D}$ est *le prolongement* de $\mathfrak{D}_0$. De plus si $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$ comme ensembles, nous appellerons que les deux domaines $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}$ sont *égaux* (ou *identiques*), et le dénoterons par $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$.

Soient $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ deux domaines, si l'on peut établir une correspondance biunivoque et bicontinue entres des points de $\mathfrak{D}_1$ et de $\mathfrak{D}_2$, de façon que les points correspondants aient la même projection (sur l'espace (x)), nous dirons que ces deux domaines sont *équivalents*, et le dénoterons par $\mathfrak{D}_1 \sim \mathfrak{D}_2$.

Pour définir les domaines pseudoconvexes, il faut distinguer clairement les deux sortes de relations, $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ et $\mathfrak{D}_1 \sim \mathfrak{D}_2$.

Soient $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}$ deux domaines, si l'on peut établir une correspondance entre tous les points de $\mathfrak{D}_0$ et une partie des points de $\mathfrak{D}$, telle qu'à un point quelconque de $\mathfrak{D}_0$ corresponde un point de $\mathfrak{D}$ de la manière univoque et continue, et encore que les points correspondants aient la même projection nous appelons avec Behnke et Thullen que $\mathfrak{D}_0$ est *contenu* dans $\mathfrak{D}$, en le désignant par $\mathfrak{D}_0 < \mathfrak{D}$. (Il faut remarquer que ce cas contient le cas $\mathfrak{D}_0 \sim \mathfrak{D}$.)

[25] Voir : F. Hausdorff, Mengenlehre.

Et ainsi de suite (Voir l'Ouvrage).

Si $\mathfrak{D}_0 \subseteq \mathfrak{D}$, et encore si l'ensemble des points de $\mathfrak{D}_0$ est compact sur le domame $\mathfrak{D}$, précisément dit, si de tout suite infinie des points de $\mathfrak{D}_0$ on peut choisir une suite partielle infinie convergente vers un point de $\mathfrak{D}$, nous appelons que le domaine partiel $\mathfrak{D}_0$ est *à l'intérieur complet* du domaine $\mathfrak{D}$, et le dénotons par $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$.

Nous venons d'expliquer restrictivement pour les domaines (connexes), mais il en est de même pour *les domaines* (*connexes ou non*), (par définition).

Soit E un ensemble de points sur l'espace (x), soit $\mathfrak{D}$ un domaine sur le même espace; désignons par E' l'ensemble des points de $\mathfrak{D}$. Nous entendrons sous les notations $E = \mathfrak{D}$ et $E \subseteq \mathfrak{D}$, les relations $E = E'$ et $E \subseteq E'$, respectivement. La notation $E \Subset \mathfrak{D}$ signifiera que l'ensemble de points E soit contenu dans l'ensemble $\mathfrak{D}$, et de plus que E soit compact sur le domaine $\mathfrak{D}$; nous l'appellerons encore que E soit contenu *à l'intérieur complet* de $\mathfrak{D}$.

L'intersection d'un ensemble de domaines. Considérons, avec Behnhe et Thullen, un ensemble abstrait $M = \{m, n, p, \ldots\}$ et un ensemble de domaines $\{\mathfrak{D}_m, \mathfrak{D}_n, \mathfrak{D}_p, \ldots\}$ sur l'espace (x), d'où, construisons l'ensemble de points δ sur le même espace comme ce qui suit : s'il existe un polycylinder γ_0 de centre (x^0) tel que tout domaine $\mathfrak{D}_m$ de l'ensemble ait un domaine partiel V_m équivalent à γ_0, en désignant le point de V_m sur (x^0) par P_m, nous appellerons $Q = \{P_m\}$ un point de δ (de coordonnées (x^0)). Soit $Q = \{P_m\}$, $Q' = \{P'_m\}$ une paire quelconque des points de δ; nous définirons que $Q = Q'$, si et seulement si $P_m = P'_m$ pour tout m de M.

A l'ensemble de points δ ainsi défini sur l'espace (x), attachons le système de voisinage (S) comme suivant : Soit Q un point quelconque de δ, traçons un polycylindre γ de centre Q et contenu dans γ_0; soit (x') un point quelconque de γ, et soit P'_m le point de V_m sur (x'), considérons le point $Q' = \{P'_m\}$ de δ; si l'on fait à (x') parcourir γ, le point Q' trace un ensemble v; v est un ensemble partiel univalent de δ; nous définirons que $(S) = \{v\}$. (S) satisfait à ≪Umgebungspostulate≫. Nous dénoterons, par la même lettre δ, l'ensemble δ ayant ce système de voisinage (S); δ est alors, un domaine (connexe ou non) sur l'espace (x).

Ce domaine (connexe ou non) δ jouit évidemment des propriétés suivantes :

1° $\delta < \mathfrak{D}_m$ pour tout $m \in M$.

2° Soit δ' un domaine (connexe ou non) sur l'espace (x) ayant la première propriété, on a toujours $\delta' < \delta$.

Il n'y a qu'un seul domaine (connexe ou non) sur l'espace (x) jouissant de ces deux propriétés, à l'équivalence près. Nous appellerons δ *intersection* de l'ensemble de domaine $\{\mathfrak{D}_m, \mathfrak{D}_n, \mathfrak{D}_p, \dots\}$ en dénotant $\delta \sim \mathfrak{D}_m \cap \mathfrak{D}_n \cap \mathfrak{D}_p \cap \cdots$. (Il en est de même pour l'intersection de domaines connexes ou non.)

Pareillement, définissons le *noyau* d'une suite de domaines (connexes ou non). Mais, pour la *convergence* d'une suite de domaines, il faut obéir à la définition de l'Ouvrage, sans modification.

Points frontières. Pour les points frontières, il n'y a rien à modifier, ni à adjoindre; mais, pour définir les domaines pseudoconvexes, nous allons commencer par écouter pour le moment ce que l'Ouvrage en explique.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace (x). Considérons dans $\mathfrak{D}$ une suite de points P_i $(i = 1, 2, \dots)$; supposons que cette suite n'admette pas de point d'accumulation dans $\mathfrak{D}$, et encore qu'elle jouisse des propriétés suivantes :

1° La suite des projections $\underline{P}_i$ $(i=1,2,\dots)$ converge vers un point (x^0).

2° Pour tout nombre positif ρ, on trouve un entier positif m tel que deux points P_i, P_j dont $i \geq m$, $j \geq m$, puissent être joints par une courbe continue passant par $\mathfrak{D}$ et restant dans le polycylindre γ de centre (x^0) et de rayon ρ.

On appelle alors, que $R = (P_1, P_2, \dots)$ définit un *point frontière* de $\mathfrak{D}$, ayant les coordonnées (x^0). Soit $R' = (P'_1, P'_2, \dots)$ un autre point frontière de $\mathfrak{D}$, on dit que $R = R'$, lorsque R' possède les mêmes coordonnées (x^0) et encore que R et R' se relient de la manière suivante : Pour tout nombre positif ρ, on trouve un entier positif m tel que des points P_i, P'_i dont $i \geq m$ puissent être joints par une courbe continue dans $\gamma \cap \mathfrak{D}$, γ étant le polycylindre ci-dessus. On appelle *voisinage* d'un point frontitère R tout domaine partiel univalent de $\mathfrak{D}$ contenant presque tous des points de la suite P_i $(i = 1, 2, \dots)$.

Rotations. Nous appellerons désormais, *rotation* de l'espace (x) autour d'un point (ξ) une transformation linéaire de la forme

$$x'_i - \xi_i = \sum a_{ij}(x_j - \xi_j) \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

a_{ij} étant des constantes, qui conserve les distances (euclidiennes) mais d'ailleurs quelconques.

9. Domaines pseudoconvexes. Commençons par définir le théorème de la continuité. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, dont $n \geq 1$ (mais, nous expliquerons d'abord pour le cas $n > 1$), soit M un point frontière de $\mathfrak{D}$; nous appellerons que M satisfait au *théorème de la continuité*, si, toute fois que la condition (C) suivante soit remplie, M jouit de la propriété (P) ci-dessous. Nous appellerons que $\mathfrak{D}$ remplit le même théorème, s'il en est ainsi pour tout point frontière de $\mathfrak{D}$.

Condition (C). On distingue une des variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ($n \geq 2$), on le désigne par y et les autres, par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; soient (ξ, η) les coordonnées de M; il correspond alors, à M, un nombre positif ρ, de façon que, si l'on désigne par A l'ensemble des points (x, y) satisfaisant à $x_i = \xi_i$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$, $0<|y-\eta|<\rho$, il y ait l'ensemble de points A^* contenu dans un seul voisinage de M tel que $\underline{A}^* = A$.

A tout nombre positif δ' tel que $\delta' < \rho$, il correspond alors un nombre positif r tel que, si l'on désigne l'ensemble de points $|x_i - \xi_i| < r$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$, $|y-\eta| = \delta'$, par E, il existe un ensemble de points E^* contenu dans un seul domaine partiel univalent de $\mathfrak{D}$ et satisfaisant à $\underline{E}^* = E$, $A^* \cap E^* \supset O$[26].

Propriété (P). Pour le point M, il correspond une paire de nombres positifs (δ, δ'), dont $\delta \leq r$ (correspondant à δ'), de façon qu'à tout point (x') du polycylindre $|x'_i - \xi_i| < \delta$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ corresponde au moins un point y' sur la circonférence $|y-\eta| = \delta'$ satisfaisant à la condition suivante : Soit P le point de E^* sur (x', y'), soit l le segment (fermé) de droite sur le plan y joignant les points y', η, et soit L le segment à l'espace (x, y) de la forme $((x'), l)$. Alors, si l'on trace un segment sur $\mathfrak{D}$, à partir du point P et de manière que la projection soit toujours sur L, on rencontre nécessairement un point frontière de $\mathfrak{D}$ (sur le point final de L ou en chemin).

Le cas $n = 1$ peut être regardé comme cas spécial, où le domaine $\mathfrak{D}$ est indépendant de $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Soit maintenant, $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ($n \geq 1$); nous appellerons que $\mathfrak{D}$ est *pseudoconvexe*, si tout point frontière M de $\mathfrak{D}$ satisfait au théorème de la continuité et encore si cette propriété de M admet toute transformation pseudoconforme biunivoque de l'espace (x) au voisinage de la projection $\underline{M}$.

Pour le cas $n = 1$, tout domaine est pseudoconvexe.

10. Autres définitions. Nous allons définir les domaines pseudoconvexes en formes différentes. Commençons par le théorème de la continuité. Nous appellerons celui du numéro précédent *théorème de la continuité* (A), et considérerons les théorèmes de la continuité (B), (C) dans la suivante.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dont $n > 1$, soit M un point frontière de $\mathfrak{D}$. Soit $(x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$ un échange quelconque de $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, soit (ξ, η) les coordonnées de M. Dans l'espace (x), on prend un point (a) différent de (ξ) : on trace l'hypershère S de centre (a) telle que la frontière passe par (ξ), et une hypersphère σ de centre (ξ);

[26] De là, il s'ensuit que tout point de E^* sur $x_i = \xi_i$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ appartient à A^*.

soit β la partie de σ extérieure à S, β est un domaine linéairement simplement connexe. Soit $B = (\beta, \eta)$ à l'espace (x, y). Dans ces circonstances géométriques, s'il n'existe pas d'ensemble de points contenu dans un seul voisinage de M, tel que sa projection soit B, pour n'importe quels (a), σ, nous appellerons que M satisfait au *théorème de la continuité* (B). Nous appellerons $\mathfrak{D}$ (sur l'espace (z)) par le même mot, s'il en est ainsi pour tout point frontière de $\mathfrak{D}$

Pour le cas $n=1$, nous pouvons considérer que tout domaine satisfasse au théorème de la continuité (B).

Soit encore $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dont $n>1$. Soit y un de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ les autres. Traçons dans l'espace (x, y) deux domaines des formes suivantes :

$$\begin{array}{lll} |x_i - x_i^0| < r & \rho' < |y - y^0| < \rho & (i = 1, 2, \ldots, n-1); \\ |x_i - x_i^0| < r' \ (< r), & |y - y^0| < \rho & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \end{array}$$

(où (x^0, y^0) est un point déterminé, et r, r', ρ, ρ' sont des nombres positifs); et dénotons la somme de ces deux domaines par Δ; Δ est un domaine linéairement simplement connexe. Dénotons le polycylindre $|x_i - x_i^0| < r$, $|y-y^0|<\rho$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ par C. Dans cette configuration géométrique, le domaine $\mathfrak{D}$ (sur l'espace (z)) sera appelé de satisfaire au *théorème de la continuité* (C), s'il jouit de la propriété que, toute fois qu'il corresponde un domaine Δ^* tel que $\Delta^* \sim \Delta$, $\Delta^* \Subset \mathfrak{D}$, il y ait nécessairement un domaine C^* tel que $C^* \sim C$, $\Delta^* \subseteq C^* \subseteq \mathfrak{D}$.

Nous pouvons considérer que tout domaine sur le plan d'une variable complexe satifasse au théorème de la continuité (C). Remarquons que le théorème de la continuité (C) seul est *global*.

Considérons maintenant, un domaine $\mathfrak{D}$ sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 1)$; nous appellerons que $\mathfrak{D}$ est *pseudoconvexe* (B), si un point frontière quelconque M de $\mathfrak{D}$ satisfait au théorème de la continuité (B), et encore si cette propriété de M admet toute transformation pseudoconforme biunivoque de l'espace (x) au voisinage de $\underline{M}$.

Soit encore $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 1)$, soit M un point frontière de $\mathfrak{D}$; traçons un polycylindre γ autour $\underline{M}$ avec un rayon ρ; soit δ la composante connexe de la portion de $\mathfrak{D}$ sur γ, admettant M pour son point frontière. Dans cette configuration géométrique, nous appellerons que $\mathfrak{D}$ est *pseudoconvexe* (C), s'il correspond à tout M, un nombre positif ρ_0 tel que, pour tout $\rho \leq \rho_0$, le domaine partiel δ correspondant satisfasse au théorème de la continuité (C), et encore que ceci admette toute transformation pseudoconforme biunivoque du polycylindre γ.

De la définition, il s'ensuit que tout domaine sur le plan x_1 est pseudoconvexe (B) et (C), à la fois.

11. Coïncidence des définitions. Nous allons montrer que ces trois sortes de domaines pseudoconvexes signifient une seule et la même sorte, que nous appellerons dès lors, simplement ≪domaines pseudoconvexes≫. Comme ceci est évident sur le plan d'une variable complexe, nous nous placerons dans la suivante, sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que $n > 1$.

1°. Il est facile à voir que *tout domaine pseudoconvexe* (C) *est pseudoconvexe* (A) (de No. 9).

2°. Nous allons montrer que *tout domaine pseudoconvexe* (A) *est pseudoconvexe* (B). Pour cela il suffit évidemment à verifier que ≪tout domaine pseudoconvexe (A) satisfait au théorème de la continuité (B). ≫

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine pseudoconvexe (A) sur l'espace (x), soit M un point frontière de $\mathfrak{D}$. Désignons à nouveau deux de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par x_1, x_2 et des autres, s'ils existent, par $y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}$. Considérons la configuration indiquée, et supposons, par absurde, qu'il y ait un ensemble B^* sur l'espace (x, y) contenu dans un seul voisinage de M et dont $\underline{B}^* = B$.

Transformons l'espace (x) à l'espace (x') par des translations et rotations convenables, et continuons de désigner les images de S, $\sigma, \ldots$ par les même lettres, de façon que l'image de $(a), (\xi)$ soient $(0,0), (R,0)$, respectivement, R étant le rayon de S. Dans l'espace (x'), sur $x'_1 = R$, le seul point $(R, 0)$ est sur S et les autres points sont extérieur à S. De plus, les points (x') satisfaisant à $\Re(x'_1) > R$, $\Re(x'_1)$ étant la partie réelle de x'_1 se situent en dehors de S. Dans cette configuration, l'existence de B^* contredit clairement que le domaine $\mathfrak{D}$ sur l'espace (x, y) satisfait au théorème de la continuité (A). Donc, $\mathfrak{D}$ satisfait nécessairement au théorème de la continuité (B).

3°. Il ne nous reste qu'à montrer que *tout domaine pseudoconvexe* (B) est *pseudoconvexe* (C). Pour cela, nous allons constater d'abord que ≪toute composante connexe de l'intersection de deux domaines pseudoconvexes (B) est encore pseudoconvexe (B).≫

En effet, considérons sur l'espace (x) deux domaines pseudoconvexes (B), $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$; choisissons arbitrairement une composante connexe $\mathfrak{D}_0$ de l'intersection $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$. Soit M un point frontière quelconque de $\mathfrak{D}_0$; transformons un voisinage du point $\underline{M}$ dans l'espace (x) par une transformation pseudoconforme biunivoque, désignons les images de $(x), M, \mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ par $(x'), M', \mathfrak{D}'_0, \mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2$ respectivement (dont $\mathfrak{D}'_0$, $\mathfrak{D}'_1$ et $\mathfrak{D}'_2$ ne sont définis naturellement qu'au voisinage de $\underline{M'}$), et supposons, par absurde, l'existence de l'ensemble de points indiqué par rapport à $\mathfrak{D}'_0$ et à M'. Comme $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2$

sont pseudoconvexes (B), de là, il s'ensuit immédiatement que M' serait un point intérieur de $\mathfrak{D}_0$.

D'après ce que nous venons de voir, pour justifier la proposition en question, il suffit à dire que ≪tout domaine pseudoconvexe (B) remplie le théorème de la continuité (C).≫ Nous allons le vérifier, soit $\mathfrak{D}$ un domaine pseudoconvexe (B) sur l'espace (x). Désignant à nouveau par $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$ un échange de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, considérons la configuration géométrique indiquée, et supposons qu'il y ait un domaine Δ^* tel que $\Delta^* \sim \Delta$, $\Delta^* \Subset \mathfrak{D}$. Il suffit de montrer qu'il existe un domaine C^* tel que $C^* \sim C$, $\Delta^* \subset C^* \subseteq \mathfrak{D}$. Pour simplifier l'écriture, supposons que (x^0, y^0) soit $(0,0)$.

Soit (x') un point quelconque du polycylindre $|x_i| < r$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$, soit y' un point quelconque de la circonférence Σ', $|y| = \rho''$, dont $\rho'' = \frac{1}{2}(\rho + \rho')$, et soit L le segment de droite à l'espace (x, y) ayant le point initial (x', y') et le point final $(x', 0)$. Soit P le point de Δ^* sur (x', y'); à partir de P, traçons continûment un segment dans le domaine $\mathfrak{D}$, de façon que sa projection soit toujours sur L; il se présente alors deux cas possibles: ou bien on rencontre un point frontière M de $\mathfrak{D}$ (en chemin ou sur le point final de L), ou bien on ne rencontre aucun point frontière; au premier cas, nous dénoterons les coordonnées de M par (x', y'').

Si (x') se situe dans le polycylindre $|x_i| < r'$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, le point M n'existe jamais, pour n'importe quel y'. Désignons ce polycylindre par γ_0.

Examinons, pour cette propriété, le polycylindre γ_1,

$$|x_1| < r, \quad |x_j| < r' \qquad (j = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Supposons qu'il y ait un point (a) dans γ_1 tel que, à (a, b) corresponde M (a, b'), dont b est un point convenable sur Σ' $(|y| = \rho'')$. Considérons l'expression,

$$d(x, y) = \left(\left| \frac{K}{x_1} \right|^2 + |y|^2 \right)^{1/2}$$

où K est un nombre positif, et le deuxième membre exprime la détermination non-négative. Soit Σ le cercle à l'espace (x) donné par $|x_1| < r$, $x_i = a_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$. Soit (x', y') un point quelconque sur (Σ, Σ'); s'il correspond à (x', y') le point M (x', y''), nous ferons correspondre à (x', y') le nombre $d = d(x', y'')$, si non, nous ne ferons correspondre rien. Comme pour tout (x') de γ_0 il ne se présente que le deuxième cas, l'ensemble $\{d\}$ est borné; soit d_0 la borne supérieure.

Pour K suffisamment grand et pour r_1 tel que $0 < r_1 < r$ et suffisamment voisin de r, on a

$$d(a, b') = \left(\left| \frac{K}{a_1} \right|^2 + |b'|^2 \right)^{1/2} > \left[\left(\frac{K}{r_1} \right)^2 + (\rho'')^2 \right]^{1/2} = d_1.$$

Donc pour ce K, $d_0 > d_1$. Pour tout point (x', y') de (Σ, Σ') satisfaisant à $r_1 < |x_1| < r$, le nombre correspondant d, même s'il existe, satisfait nécessairement à $d < d_1$ $(< d_0)$. D'où, il s'ensuit facilement qu'il existe un point (ξ, η) sur (Σ, Σ'), auquel correspond un point frontière M_0 (ξ, η') tel que l'on ait effectivement $d(\xi, \eta') = d_0$ $(\xi_i = a_i,\ i = 2, 3, \ldots, n-1)$.

Transformons l'espace (x) par

$$X_1 = \frac{K}{x_1}, \quad X_2 = x_2, \ \ldots, \ X_{n-1} = x_{n-1}, \quad Y = y\,;$$

soient $\mathfrak{D}'$, M_0' les images de $\mathfrak{D}$, M_0 sur l'espace (X), respectivement. Dans l'espace (X_1, Y), prenons les deux points, $(0, 0)$, $Q\left(\dfrac{K}{\xi_1}, \eta'\right)$, décrivons l'hypersphère S autour de $(0, 0)$ telle que la frontière passe par Q et une hypersphère σ suffisamment petite de centre Q et désignons la partie de σ extérieure à S par β. Soit B l'ensemble de point à l'espace (X, Y) donné par $(X_1, Y) \in \beta$, $X_i = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. On trouve alors sans difficulte, qu'il existe un ensemble B^* sur l'espace (X, Y) contenu dans un seul voisinage de M_0' et tel que $\underline{B}^* = B$. Comme M_0' est un point frontière de $\mathfrak{D}'$ et que $\mathfrak{D}'$ est pseudoconvexe (B) au voisinage de M_0' ceci est absurde. Donc, à tout point (x', y') de l'ensemble (γ_1, Σ'), il ne peut correspondre aucun point frontière de $\mathfrak{D}$.

Passons à γ_2, $|x_1| < r$, $|x_2| < r$, $|x_k| < r'$ $(k = 3, 4, \ldots, n-1)$ et raisonnons tout pareillement, et ainsi de suite; et nous trouverons finalement qu'il existe un domaine C^* tel que $C^* \sim C$, $\Delta^* \subset C^* \subseteq \mathfrak{D}$. Nous avons ainsi vu que :

Les trois sortes de domaines pseudoconvexes (A), (B), (C) *signifient une seule et la même sorte.*

Nous appliquerons le terme, pseudoconvexe aussi aux domaines non-connexes. Nous avons vu, en chemin, que :

L'intersection de deux domaines pseudoconvexes (sur le même espace) est encore pseudoconvexe.

Tout domaine pseudoconvexe satisfait au théorème de la continuité (C).

12. Noyau d'une suite de domaines pseudoconvexes. *Etant donnée sur l'espace (x) une suite de domaines pseudoconvexes, le noyau (connex ou non), s'il existe, est aussi pseudoconvexe.*

Soit en effet, $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_p, \ldots$ la suite de domaines pseudoconvexes sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; dont nous pouvons supposer que $n \geq 2$. Pour le critère de domaines pseudoconvexes, nous adopterons le théorème de la continuité (C).

Considérons, $E_1 \sim \mathfrak{D}_1$, $E_2 \sim \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$, ..., $E_p \sim \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{D}_p \cdots$; tout élément de la suite est alors pseudoconvexe.

Considérons, $\delta_1 \sim \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{D}_p \cap \cdots$. Comme $E_p > E_{p+1}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ et que E_p est pseudoconvexe, d'après le critère adopté, on trouve immédiatement que δ_1 est aussi pseudoconvexe.

En posant $\delta_p \sim \mathfrak{D}_p \cap \mathfrak{D}_{p+1} \cap \cdots$, considérons la suite $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p, \ldots$; on a alors, $\delta_p < \delta_{p+1}$. Considérons le domaine (connexe ou non) δ_0 jouissant des deux propriétés suivantes :

1° $\delta_0 > \delta_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$.

2° Soit δ un domaine (connexe ou non) jouissant de la première propriété, alors, $\delta > \delta_0$.

Par un mode de raisonnement analogue au cas de l'intersection, on peut constater que δ_0 existe effectivement, pourvu qu'un au moins de δ_p $(p = 1, 2, \ldots)$ existe. Quand δ_0 existe, il est unique, à l'équivalence près. C'est ce δ_0 que l'on appelle le *noyau* de la suite $\mathfrak{D}_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$.

Supposons que δ_0 existe. Dénotons, à nouveau par $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$, un échange de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Décrivons dans l'espace (x, y) un polycylindre C de la forme

$$|x_i - x_i^0| < r, \quad |y - y^0| < \rho \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Soit Δ l'ensemble des points de C satisfaisant à une au moins des deux conditions,

$$\rho' < |y - y^0| < \rho, \qquad |x_i - x_i^0| < r' \ \ (< r) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dans cette configuration, supposons qu'il y ait un domaine Δ^* tel que $\Delta^* \sim \Delta$, $\Delta^* \subseteq \delta_0$.

Or, du mode de raisonnement même, par lequel on a vérifier l'existence de δ_0, il s'ensuit qu'à tout point P de δ_0, il corresponde un polycylindre γ autour de P et un entier positif m, de façon que, soit P_p le point de δ_p correspondant à P de δ_0 (par la correspondance indiquée implicitement dans la première propriété de δ_0) tout δ_p, dont $p \geq m$, ait un domaine partiel équivalent à γ et contenant P_p; dénotons, à nouveau par m, le plus petit de tels entiers positifs.

Supposons que $\Delta^* \Subset \delta_0$. D'après ce que nous venons de voir à l'aide du lemme de Borel, on trouve alors, qu'il existe un domaine C^* tel que

$C^* \sim C$, $\Delta^* \subset C^* \subseteq \delta_0$. D'où, il s'ensuit le même résultat, sans l'hypothèse. Le noyau δ_0 de la suite $\mathfrak{D}_p$ $(p = 1, 2, \dots)$ satisfait ainsi, au théorème de la continuité (C)

Soit ensuite, γ un polycylindre quelconque dans l'espace (x); transformons γ d'une manière pseudoconforme et biunivoque; le noyau de la suite des images de $\gamma \cap \mathfrak{D}_p$ $(p = 1, 2, \dots)$ est l'image de $\gamma \cap \delta_0$. Comme l'image de chaque $\gamma \cap \mathfrak{D}_p$ est pseudoconvexe, d'après ce que nous venons de voir, l'image de $\gamma \cap \delta_0$ satisfait encore au théorème de la continuité (C). δ_0 est donc pseudoconvexe.

B. Fonctions pseudoconvexes.

13. Définition. Les fonctions (réelles) satisfaisant à la condition différentielle de E. E. Levi n'admettent pas l'addition, c'est-à-dire, même si $\mathfrak{L}(\varphi_1) \geq 0$, $\mathfrak{L}(\varphi_2) \geq 0$, on n'a pas nécessairement $\mathfrak{L}(\varphi_1 + \varphi_2) \geq 0$. (Par suite, on ne peut pas prendre la moyenne arithmétique, par exemple.) C'est pour enlever cet inconvénient que nous avons conçu les fonctions pseudoconvexes dans le Mémoire VI. Comme nous ne l'avons fait que pour deux variables complexes, nous allons l'étendre.

Considérons dans l'espace $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une variété caractéristique L à une dimension complexe de la forme,

$$x_i = f_i(u) \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dont u signifie une des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $f_i(u)$ représentent des polynômes de u de degré 1 au plus; dans la suivante, nous appellerons L *droite caractéristique.* Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace (x) (fini et sans point critique intérieur), soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}$, et soit (x) les coordonnées de P. Soit $\varphi(P)$ une fonction *réelle et univoque* de P (qui peut prendre la valeur $-\infty$); nous appellerons $\varphi(P)$ *fonction pseudoconvexe*[27] de P dans le domaine $\mathfrak{D}$ si cette fonction satisfait aux conditions suivanies :

1° $e^{\varphi(P)}$ est finie et semi–continue supérieurement (par rapport à P).

2° Soit P_0 un point quelconque de $\mathfrak{D}$, ayant les coordonnées (x^0), et soit L une droite caractéristique passant par P_0, mais d'ailleurs quelconque; la trace de $\varphi(P)$ est alors une fonction subharmonique par rapport à x_j au voisinage de x_j^0, dont x_j signifie une des $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui n'est pas constante sur L, mais d'ailleurs quelconque.

Pour les fonctions subharmoniques[28] comme on saura bien, nous n'exp-

[27] Plurisousharmonique, d'après P. Lelong.
[28] ou sousharmonique

liquerons pas[29]. Rappelons seulement que nous convenons de compter *la constante* $-\infty$ comme une des fonctions subharmoniques. Encore, il nous convient de faire ici une remarque simple sur le critère de cette sorte de fonction.

Comme on peut critiquer les fonctions subharmoniques, localement, il suffit d'acquérir un *critère local.* Soit $\psi(z)$ une fonction réelle et univoque de la variable complexe z (qui peut prendre la valeur $-\infty$) au voisinage d'un point z_0, telle que $e^{\psi(z)}$ soit finie et semi–continue supérieurement; pour que la fonction soit subharmonique (par rapport à z au voisinage de z_0), il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux deux conditions suivantes :

1° $\psi(z)$ *ne possède pas de maximum relatif au sens strict* (c'est-à-dire, il n'existe pas de cercle de la forme $|z-z'|<\rho$ où $\psi(z)<\psi(z')$, z' étant déterminé).

2° Soit $u(z)$ une fonction harmonique de z (c'est-à-dire, par rapport aux parties réelle et imaginaire de z) pour $|z|<+\infty$, mais d'ailleurs quelconques, il en reste alors, *de même pour* $\psi(z)+u(z)$.

Des propriétés de fonctions subharmoniques, il s'ensuit immédiatement les propriétés correspondantes de fonctions pseudoconvexes, comme ce quit suit :

1° Etant données une fonction pseudoconvexe $\varphi(x)$ et une constante positive c, $c\varphi(x)$ l'est aussi.

2° Si $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ sont des fonctions pseudoconvexes, $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ l'est aussi.

3° Dans la même condition, la borne supérieure, $\max[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ l'est aussi.

4° Étant donnée, dans un domaine $\mathfrak{D}$ sur l'espace (x), une suite de fonctions pseudoconvexes $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_p(P), \ldots$, telle que la suite $e^{\varphi_p(P)}$ converge vers $e^{\varphi(P)}$; si la convergence est uniforme à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$, ou bien si la suite est décroissante, la limite $\varphi(P)$ est aussi pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}$.

5° Toute fonction croissante et convexe (excepté la constante $+\infty$) d'une fonction pseudoconvexe est encore ainsi.

14. Rayons de Hartogs. Nous sommes maintenant à récolter des exemples de fonctions pseudoconvexes. Or, pour le cas actuel, nous rap-

[29] Voir, par exemple : F. Riesz, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport avec la théorie du potentiel, I, 1926 ; II, 1930 (Acta Mathematica).
T. Radó, Remarques sur les fonctions subharmoniques, 1928 (C. R., Paris).

pelons immédiatement à une conception due à Hartogs; ce sont les *rayons d'holomorphie.*

Nous allons les définir abstraitement. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, soit P un point de $\mathfrak{D}$, et soit (x^0) les coordonnées de P. Autour du point (x^0), traçons un polycylindre C, $|x_i - x_i^0| < r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, de façon qu'il existe un domaine C^* satisfaisant aux conditions, $C^* \sim C$, $C^* \subseteq \mathfrak{D}$, $P \in C^*$. Nous dénoterons la borne supérieure de $\{r_n\}$ par $R(P)$ et l'appellerons *rayon de Hartogs* de domaine $\mathfrak{D}$ (sur l'espace (x)) par rapport à x_n. Pareillement, pour les autres x_i.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine pseudoconvexe sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Le rayon de Hartogs $R(P)$ de $\mathfrak{D}$ par rapport à x_n est une fonction telle que $-\log R(P)$ soit pseudoconvexe.

En effet pour éclaircir les images, supposons que $\mathfrak{D}$ soit borné. Ceci ne perd pas de généralité, puisque l'intersection de deux domaines pseudoconvexes est encore ainsi, et que la limite d'une suite décroissante de fonctions pseudoconvexes l'est aussi.

La fonction $\log 1/R(P)$ est réelle, univoque, bornée à l'intérieur complet et évidemment semi-continue supérieurement. Pour affirmer qu'elle soit pseudoconvexe, il sufiit donc, d'envisager la deuxième condition.

Soit P_0 un point quelconque de $\mathfrak{D}$ ayant les coordonnées (x^0), que nous supposons (0) pour simplifier l'écriture, soit L une droite caractéristique passant par P_0, mais d'ailleurs quelconque; distinguons deux cas, suivant la position de L par rapport aux axes de coordonnées :

Nous nous plaçons d'abord au cas général où L s'exprime paramétriquement par l'une convenable des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, soit x_1 pour fixer l'idée, de la forme suivante,

$$(1) \qquad x_i = A_i x_1, \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

A_i étant des constantes. Faisons à l'espace (x) la transformation,

$$X_1 = x_1, \quad X_i = x_i - A_i x_1 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

et continuons de désigner les images $\mathfrak{D}$, P et L par les mêmes lettres; l'équation de L se réduit alors à $X_i = 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. D'un autre côté, soit $R'(P)$ le rayon de Hartogs de $\mathfrak{D}$ sur l'espace (X) par rapport à X_n. Quand on regarde x_1 comme déterminé, la transformation $X_n = x_n - A_n x_1$ représente une translation du plan x_n, on a donc,

$$R'(P) = R(P).$$

Le premier cas se réduit donc, au cas spécial où L s'exprime de la forme suivante :

$$x_i = 0 \qquad (i = 2, 3, \dots, n). \tag{2}$$

Dans ce cas, la trace de $R(P)$ sur L est une fonction de la seule variable x_1 que nous désignons par $R(x_1)$; je dis que $[R(x_1)]^{-1}$ ne peut admettre aucun maximum relatif au sens strict au voisinage de l'origine. Ceci sera évident, puisque $\mathfrak{D}$ satisfait au *théorème de la continuité* (C).

Soit ensuite, $u(x_1)$ une fonction harmonique de x_1 pour $|x_1| < \infty$, mais d'ailleurs quelconque, et soit $f(x_1)$ une fonction entière admettant $-u(x_1)$ comme partie réelle : considérons la transformation,

$$X_j = x_j, \quad X_n = x_n e^{f(x_1)} \qquad (j = 1, 2, \dots, n-1);$$

elle est biunivoque pour l'espace (x). Continuons de désigner les images de $\mathfrak{D}$, L par les mêmes lettres; $\mathfrak{D}$ reste pseudoconvexe sur l'espace (X); L s'exprime de la même forme, $X_k = 0$ $(k = 2, 3, \dots, n)$. La trace sur L du rayon de Hartogs de $\mathfrak{D}$ sur l'espace (X) par rapport à X_n, est donnée par

$$R(x_1)e^{-u(x_1)}.$$

Par suite, la propriété ci-dessus de $-\log R(x_1)$ est conservée par la fonction, $-\log R(x_1) + u(x_1)$. Donc, d'après le critère, la trace $-\log R(x_1)$ est subharmonique.

Il ne nous reste qu'à examiner le cas spécial, où L s'exprime de la forme,

$$x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1). \tag{3}$$

La trace de $R(P)$ sur L est alors, une fonction de la seule variable x_n, que nous dénoterons par $R(x_n)$.

Sur le plan x_n traçons le cercle γ de centre l'origine et de rayon $\frac{1}{3}R(0)$. Soit x'_n un point quelconque de γ; le cercle $C, |x_n - x'_n| < R(x'_n)$ contient le cercle γ et sur la circonférence, il y a au moins un point ξ_n tel que sur $(0, \dots, 0, \xi_n)$, il existe un point frontière M de $\mathfrak{D}$, que l'on atteint en partant de P_0 et en suivant la ligne brisée sur $\mathfrak{D}$ dont les sommets de la projection sur l'espace (x) sont (0), $(0, \dots, 0, x'_n)$, $(0, \dots, 0, \xi_n)$, par ordre. Faisons à x'_n tracer le cercle γ, et considérons l'ensemble $\{\xi\}$. On a évidemment

$$-\log R(x_n) = \max(-\log|x_n - \xi|),$$

pour γ, dont la deuxième membre signifie la borne supérieure lorsque ξ parcourt l'ensemble indiqué. La trace $-\log R(x_n)$ est donc subharmonique.

Nous allons modifier les rayons de Hartogs, un peu, puisqu'il est plus commode pour nous.

Considérons un domaine $\mathfrak{D}$ sur l'espace (x); soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}$. Dans l'espace (x), traçons une hypersphère S autour du point $\underline{P}$ de façon qu'il y ait un domaine S^* sur l'espace (x) satisfaisant aux $S^* \sim S$, $S^* \subseteq \mathfrak{D}$, $P \in S^*$; soit r le rayon de S; désignons la borne supérieure de tous les r par $d(P)$, et nous l'appellerons *distance frontière (euclidienne)* du domaine $\mathfrak{D}$.

Soit $d(P)$ la distance frontière euclidienne d'une domaine pseudoconvexe $\mathfrak{D}$ sur l'espace (x); $-\log d(P)$ est pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}$.

Nous pouvons supposer, pour l'effet, que $\mathfrak{D}$ soit borné. Soit P_0 un point quelconque de $\mathfrak{D}$, soit (x^0) les coordonnées. Soit $R(P)$ *le rayon de Hartogs* de $\mathfrak{D}$ par rapport à x_n; on a évidemment

$$d(P_0) \leq R(P_0).$$

Soit T une rotation quelconque autour du point P_0, qui change les coordonnées de P dans $\mathfrak{D}$ de (x) à (X); et soit $R_T(P)$ le rayon de Hartogs de $\mathfrak{D}$ sur l'espace (X) par rapport à X_n; on a

$$d(P_0) \leq R_T(P_0).$$

D'un autre côté, soit M un des points frontières de $\mathfrak{D}$ tels que les distances (Entfernungen) sur $\mathfrak{D}$ du point P_0 soient les plus courtes, et soit (ξ) les coordonnées de M; il est évident que la distance des points (x_0), (ξ) est $d(P)$. On peut trouver une rotation T_0 autour de (x^0) telle que, soit (ξ') l'image de (ξ), on ait

$$\xi'_j = x^0_j, \quad \xi'_n = x^0_n + d(P_0) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

on a alors,

$$d(P_0) = R_{T_0}(P_0).$$

On a donc,

$$d(P) = \min[R_T(P)]$$

(dont la deuxième membre signifie la borne inférieure quand T parcourt l'ensemble indiqué). Comme $-\log R_T(P)$ est pseudoconvexe, $-\log d(P)$ l'est aussi.

La fonction $-\log d(P)$ jouit des propriétés suivantes :

1° Elle est *continue* dans $\mathfrak{D}$, excepté le cas où $\mathfrak{D}$ coïncide à l'espace (x); dans ce cas, elle se réduit à la constante $-\infty$.

2° *Lorsque P tend vers la frontière de $\mathfrak{D}$, elle tend vers $+\infty$.*

15. Condition différentielle. Considérons une fonction $\varphi(x)$ réelle (biunivoque) continue et admettant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport aux parties réelles et imaginaires des variables x_i $(i=1,2,\dots,n)$, dans une portion de l'espace (x). Nous allons chercher la condition pour que $\varphi(x)$ soit pseudoconvexe.

Prenons un point (x^0) (dans la portion), et considérons (au voisinage de ce point) une variété caractéristique λ à une dimension (complexe) passant par ce point de la forme

$$x_j = f_j(t) \qquad (j = 1, 2, \dots, n),$$

où $f_j(t)$ sont des fonctions holomorphes de t au voisinage de l'origine (telles que $f_j(0) = x_j^0$). Partageant t, x_j en parties réelles et imaginaires, posons

$$t = u + iv, \qquad x_j = u_j + iv_j,$$

(i signifiant l'unité imaginaire). Nous dénoterons comme

$$\varphi(x) = \varphi(u_1, u_2, \dots u_n;\, v_1, v_2, \dots, v_n) = \varphi(u_j; v_j).$$

Dans ces circonstances, concernant la trace de $\varphi(x)$ sur λ,

$$\Phi(u,v) = \varphi[u_j(u,v), v_j(u,v)],$$

calculons

$$\Delta\Phi(u,v) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2},$$

au voisinage de (x^0). En posant

$$\frac{\partial u_j}{\partial u} = \frac{\partial v_j}{\partial v} = \alpha_j, \qquad \frac{\partial v_j}{\partial u} = -\frac{\partial u_j}{\partial v} = \beta_j,$$

nous avons

$$\Delta\Phi = \sum_j \sum_k \Bigg[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j \partial u_k} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v_j \partial v_k}\right)(\alpha_j\alpha_k + \beta_j\beta_k) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j \partial v_k} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_k \partial v_j}\right)(\alpha_j\beta_k - \alpha_k\beta_j)\Bigg]$$

$(j, k = 1, 2, \dots, n)$. *Nous dénoterons le deuxième membre de cette identité par $W(\varphi; \alpha, \beta)$.*

Comme, pour que $\Phi(t)$ soit subharmonique, il faut et il suffit que l'on ait partout $\Delta\Phi \geq 0$, du calcul il en résulte que :

Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle continue admettant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre (par rapport aux parties réelles et imaginaires des variables complexes). Pour que $\varphi(x)$ soit pseudoconvexe, il faut et il suffit que l'on ait partout $W(\varphi;\alpha,\beta)\geq 0$.

Encore, du calcul, il s'ensuit immédiatement que :

Dans la même condition, ce que $\varphi(x)$ soit pseudoconvexe admet tout transformation pseudoconforme biunivoque.

16. Propriété principale. Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ une fonction réelle continue au voisinage d'un point (x^0, y^0) de l'espace (x, y). Partageons x_j, y $(j=1,2,\ldots,n)$ en parties réelles et imaginaires, posons

$$x_j = u_j + i\,v_j, \qquad y = y_1 + i\,y_2,$$

désignons comme $\varphi(x,y) = \varphi(u,v,y_1,y_2)$. Supposons que $\varphi(u,v,y_1,y_2)$ admette les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre, et que $W(\varphi;\alpha,\beta)$ soit partout positive pour tout système de valeurs réelles (α,β) excepté $(0,0)$, que nous dénoterons dans la suivante, simplement (s'il n'y aura pas de confusion),

$$W(\varphi;\alpha,\beta) > 0.$$

Supposons encore,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2 > 0 \qquad \text{en} \quad (x^0, y^0).$$

Dans ces circonstances, proposons-nous de tracer une surface caractéristique σ passant par (x^0, y^0) de façon qu'elle ne passe que la portion de l'espace,

$$\varphi(x,y) > \varphi(x^0,y^0),$$

au voisinage de (x^0, y^0), excepté à ce point même.

Pour simplifier l'écriture, supposons que (x^0, y^0) soit l'origine, et que $\varphi(x^0, y^0)$ soit nulle; et considérons une surface caractéristique σ de la forme

$$y = f(x) = \sum_j a_j x_j + \sum_j \sum_k b_{jk} x_j x_k, \quad \text{avec} \quad b_{jk} = b_{kj} \quad (j,k=1,2,\ldots,n).$$

Partageons α_j, b_{jk} et $f(x)$ en parties réelles et imaginaires comme

$$a_j = \alpha_j + i\,\beta_j, \quad b_{jk} = \gamma_{jk} + i\,\delta_{jk}, \quad f(x) = P(u,v) + i\,Q(u,v)$$

alors,

$$\gamma_{jk} = \gamma_{kj}, \qquad \delta_{jk} = \delta_{kj}.$$

En substituant $y_1 = P(u,v)$, $y_2 = Q(u,v)$ dans $\varphi(x,y) = \varphi(u,v,y_1,y_2)$, on a

$$\Phi(x) = \Phi(u,v) = \varphi(u,v,P(u,v),Q(u,v)).$$

Comme la fonction $\Phi(u,v)$ admet les dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre, on peut la développer en origine comme ce qui suit :

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &= \sum_j \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}u_j + \frac{\partial\Phi}{\partial v_j}v_j\right)\\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_j\sum_k\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial u_k}u_ju_k + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial v_k}u_jv_k + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_j\partial v_k}v_jv_k\right] + \varepsilon,\\ \varepsilon &= \frac{1}{2}\sum_j\sum_k|\xi_{jk}u_ju_k + 2\eta_{jk}u_jv_k + \zeta_{jk}v_jv_k| \quad (j,k = 1,2,\ldots,n),\end{aligned}$$

dont les dérivées partielles signifient des valeurs à l'origine (pour le moment, il en est de même dans la suivante), quant à ξ_{jk}, η_{jk}, ζ_{jk}, on a

$$\xi_{jk} = \frac{\partial^2\Phi(\theta u,\theta v)}{\partial u_j\partial u_k} - \frac{\partial^2\Phi(0,0)}{\partial u_j\partial u_k}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

par exemple; puisque les dérivées partielles sont continues, lorsque (u,v) tend vers $(0,0)$, ξ_{jk} tend vers 0, il en est de même pour η_{jk}, ζ_{jk}.

Supposons maintenant, que l'on puisse faire à $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ de l'équation de σ, satisfaire aux conditions suivantes :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_j} = \frac{\partial\Phi}{\partial v_j} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial u_k} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_j\partial v_k}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial v_k} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_k\partial v_j} \qquad (j,k = 1,\ldots,n).$$

On a alors,

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &= \frac{1}{4}\sum_j\sum_k\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial u_k} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_j\partial v_k}\right)(u_ju_k + v_jv_k)\right.\\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial v_k} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_k\partial v_j}\right)(u_jv_k - u_kv_j)\right] + \varepsilon = \frac{1}{4}W(\Phi;u,v) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse, on a $W(\varphi;\alpha,\beta) > 0$, par suite, d'après le calcul du numéro précédent, on a facilement $W(\Phi;u,v) > 0$. D'après la form de ε, on peut donc, choisir un nombre positif ρ, tel que l'on ait,

$$\Phi(u,v) > 0 \quad \text{pour} \quad |x_j| < \rho \qquad (j = 1,2,\ldots,n),$$

sauf à l'origine. Cela veut dire que σ reste dans la portion $\varphi(x,y) > 0$, sauf à l'origine. Il nous donc, suffit de choisir un système de $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ satisfaisant aux conditions indiquées.

D'abord, pour la condition, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_j} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_j} = 0$, d'après un calcul simple, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\alpha_j + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\beta_j = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial v_j} &= \frac{\partial \varphi}{\partial v_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\beta_j + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\alpha_j = 0.
\end{aligned}$$

Comme $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^2 > 0$, on peut résoudre cette équation linéaire.

Quant à la deuxième condition, puisque le système de valeur (α, β) est déjà déterminé, c'est un système des équations algébriques simultanées par rapport à (γ, δ) seul, dont la forme est donnée par

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial u_k} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_j \partial v_k}\right) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\gamma_{jk} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\delta_{jk} + c_1 = 0, \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial v_k} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_k \partial v_j}\right) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\gamma_{jk} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\delta_{jk} + c_2 = 0,
\end{aligned}$$

pour tout (j, k) tel que $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$, dont c_1, c_2 sont indépendantes de (γ, δ). Comme $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^2 > 0$, on peut résoudre cette équation. Nous avons ainsi tracé la surface caractéristique σ voulue, que nous formulons :

Etant donnée une fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ réelle continue au voisinage d'un point (x^0) de l'espace (x), telle que soient u_j, v_j la partie réelle et la partie imaginaire de x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ et soit $\varphi(x) = \varphi(u, v)$, $\varphi(u, v)$ admette les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre, et que l'on ait $W(\varphi; \alpha, \beta) > 0$ et encore que l'une au moins des dérivées $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ne soit pas nulle à (x^0); on peut tracer une surface caractéristique σ au voisinage de (x^0), passant par (x^0), de façon que σ reste dans la portion de l'espace $\varphi(x) > \varphi(x^0)$, excepté à (x^0) même. De plus, si l'une au moins des dérivées $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_n}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v_n}$ n'est pas nulle à (x^0), on peut faire à σ prendre la forme, $x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, f étant un polynôme de x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$, de degré au plus égal à 2.

17. Modification des fonctions pseudoconvexes. Il s'agit de modifier les fonctions pseudoconvexes pour faire satisfaire aux conditions du théorème ci-dessus.

Commençons par le problème d'élever le degré de continuité. Ce problème est déjà résolu pour les fonctions subharmoniques par T. Radó[30] et F. Riesz[31], dont la méthode est applicable à notre cas, que nous allons expliquer.

[30] cité plus haut.
[31] 1930. cité plus haut.

1°. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Selon *l'Ouvrage de Behnhe-Thullen*, considérons *la distance frontière* (Randdistanz) comme ce qui suit : Soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}$, soit (x^0) ses coordonnées. Traçons un polycylindre γ de centre (x^0) et de rayon r', tel qu'il y ait un domaine γ^* satisfaisant aux conditions, $\gamma^* \sim \gamma$, $\gamma^* \subseteq \mathfrak{D}$ et $P \in \gamma^*$; γ^* sera appelé *voisinage polycylindrique* de domaine $\mathfrak{D}$ de centre P et de rayon r'; soit r la borne supérieure de tous les r'. On appelle r la distance frontière de P par rapport à $\mathfrak{D}$. (Nous l'appellerons parfois, pour éviter la confusion, *distance frontière polycylindrique.*) On dénote par $\mathfrak{D}^{(\rho)}$ l'ensemble des points de $\mathfrak{D}$ tels que la distance frontière soit plus grande que ρ.

Soit maintenant, $\varphi(P)$ une fonction réelle univoque semi–continue supérieurement et *bornée* pour $\mathfrak{D}$. (Pour le présent Mémoire seul, il nous suffit de partir d'une fonction continue.) Soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}$, soit P' un point déterminé de $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}^{(r)}$, r étant un nombre positif déterminé (tel que $\mathfrak{D}^{(r)} \supset O$; traçons un voisinage polycylindrique γ de centre P' et de rayon r, et considérons, par *l'irtégrale de Lebesgue*, la moyenne arithmétique de $\varphi(P)$ sur γ,

$$\varphi_1(P') = \frac{1}{V} \int_\gamma \varphi(P)\, dP, \qquad V = (\pi r^2)^n.$$

La fonction $\varphi_1(P)$ est définie dans $\mathfrak{D}_1$, elle prend une valeur finie et déterminée pour tout point P de $\mathfrak{D}_1$. Elle est évidemment *continue.* Nous dénotons, avec F. Riesz, par

$$\varphi_1(P) = A_r[\varphi(P)]$$

l'opération de construire $\varphi_1(P)$ à partir de $\varphi(P)$.

Supposons, dans la suivante que $\varphi(P)$ soit *pseudoconvexe* et bornée pour $\mathfrak{D}$. Nous allons montrer d'abord que $\varphi_1(P)$ *est encore pseudoconvexe pour* $\mathfrak{D}_1$. Supposons pour l'effet, que $\mathfrak{D}$ soit un domaine *univalent* dans l'espace (x); ceci ne perd pas de généralité. Soit (x^0) un point quelconque de $\mathfrak{D}_1$, soit L une droite passant par (x^0), mais d'ailleurs quelconque. Il suffit de montrer que la trace de $\varphi_1(x)$ sur L est subharmonique au voisinage de (x^0). Traçons une circonférence C sur L, autour de (x^0) et suffisamment petit pour que le cercle soit contenu à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}_1$; et considérons, par *l'intégrale de Riemann*, la valeur moyenne arithmétique de φ_1 sur C,

$$m = \frac{1}{2\pi\rho} \int_C \varphi_1(x) ds,$$

ρ étant le rayon de C. Il suffit de dire que $m \geq \varphi_1(x^0)$.

Soit C_0 la circonférence autour de l'origine, telle que l'on peut la transporter sur C par une translation, soit (X) un point quelconque de C_0. On peut alors, exprimer m de la forme,

$$m = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{C_0} \varphi(x^0 + X)\, d(X),$$

l'intégrale étant prise au sens de Lebesgue ((X) signifie ici un point quelconque de C_0 ayant les coordonnées (X)). Soit γ_0 le polycylindre dans l'espace (x) de centre l'origine et de rayon r, soit (X') un point quelconque de γ_0; alors,

$$m = \frac{1}{2\pi\rho V} \int_{C_0} d(X) \int_{\gamma_0} \varphi(x^0 + X + X')\, d(X'),$$

au sens de Lebesgue. Comme la fonction $\varphi(x^0 + X + X')$ est semi-continue supérieurement, dans l'espace (X, X'), elle est mesurable (B). De plus, elle est bornée, par suite, on peut changer l'ordre des intégrations en vertu de Lebesgue; on a donc,

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2\pi\rho V} \int_{\gamma_0} d(X') \int_{C_0} \varphi(x^0 + X + X')\, d(X) \\ &\geq \frac{1}{V} \int_{\gamma_0} \varphi(x^0 + X')\, d(X') = \varphi_1(x^0). \end{aligned}$$

Ensuite si $r_1 \geq r_2 \geq 0$, *on a*

$$A_{r_1}(\varphi) \geq A_{r_2}(\varphi) \geq \varphi$$

pour $\mathfrak{D}^{(r_1)}$; dont la démonstration est pareille et immédiate.

Soit r_p $(p = 1, 2, \ldots)$ une suite décroissante de nombres positifs ayant la limite 0. La suite de fonctions $A_{r_p}(\varphi)$ est alors, aussi décroissante, par suite, comme elle est bornée, elle est convergente. Soit $\Phi(P)$ la limite, elle existe pour $\mathfrak{D}$. Comme $A_r(\varphi) \geq \varphi$, on a $\Phi(P) \geq \varphi(P)$. D'un autre côté, puisque $\varphi(P)$ est semi-continue supérieurement, on a $\Phi(P) \leq \varphi(P)$. Donc, $\Phi(P) = \varphi(P)$. Nous avons ainsi vu que

$\ll$la suite de fonctions $A_{r_p}(\varphi)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ converge en décroissant vers φ, dont chaque $A_{r_p}(\varphi)$ est une fonction pseudoconvexe et continue définie dans $\mathfrak{D}^{(r_p)}$. $\gg$

2°. Considérons le cas *non-borné*. Soit $\varphi(P)$ une fonction *pseudoconvexe* dans un domaine $\mathfrak{D}$ sur l'espace (x), qui n'est pas bornée à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$. Construisons alors, la suite de fonctions

$$\psi_p(P) = \max[\varphi(P), -p] \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Elle est décroissante et tendant vers $\varphi(P)$. Comme toute fonction semi-continue supérieurement dans $\mathfrak{D}$ et bornée supérieurement à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$, chacune des $\psi_p(P)$ est bornée à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$. Ceci n'est que le cas précédent.

3°. Soit à nouveau $\varphi(P)$ une fonction réelle *continue* dans $\mathfrak{D}$. Si l'on désigne les parties réelles et imaginaires de x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ par u_i, v_i respectivement, il est évident que la fonction $\varphi_1(P)=A_r(\varphi)$ est continue et définie pour $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}^{(r)}$ et qu'elle admet *les dérivées partielles continues du premier ordre* par rapport à (u,v). Et, si $\varphi(P)$ jouit déjà de ces propriété pour $\mathfrak{D}$, $\varphi_1(P)$ admet évidemment *les dérivées partielles continue jusqu'au deuxième ordre* par rapport à (u,v) pour $\mathfrak{D}$. Comme $\varphi(P)$ est continue dans $\mathfrak{D}$, lorsque r tend vers 0, $A_r(\varphi)$ tend *uniformément* vers φ, à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$.

Itérant l'opération A_r, nous avons,

$$\varphi_2(P)=A_r[\varphi_1(P)]=A_r^{(2)}[\varphi(P)]\,;$$

$\varphi_2(P)$ est définie dans $\mathfrak{D}_1^{(r)}=\mathfrak{D}^{(2r)}$. Pareillement, nous considérons $\varphi_3(P)=A_r^{(3)}[\varphi(P)]$ pour $\mathfrak{D}_3=\mathfrak{D}^{(3r)}$. Si $\varphi(x)$ est une fonction pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}$, comme $\varphi_1(P)$ est pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}_1$, $\varphi_2(P)$ est ainsi pour $\mathfrak{D}_2$, et par suite, $\varphi_3(P)$ l'est aussi pour $\mathfrak{D}_3$. Nous avons ainsi acquis le résultat suivant :

Étant données une fonction pseudoconvexe $\varphi(P)$ dans un domaine $\mathfrak{D}$ sur l'espace $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et une suite de nombres positifs r_p $(p=1,2,\ldots)$ tendant en décroissant vers zéro; on peut construire une suite de fonctions $\varphi_p(P)$ telle que chaque $\varphi_p(P)$ soit une fonction pseudoconvexe continue admettant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport aux parties réelles et imaginaires de x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ dans $\mathfrak{D}^{(r_p)}$, et que la suite tende en décroissant vers $\varphi(P)$ dans $\mathfrak{D}$.

Comme conséquence immédiate, de la remarque de No. 16, il s'ensuit que :

Toute fonction pseudoconvexe admet toute transformation pseudoconforme biunivoque.

18. Deuxième modification. Soit $\varphi(P)$ une fonction *pseudoconvexe* dans un domaine $\mathfrak{D}$ sur l'espace $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. D'après ce qui précède, nous pouvons supposer que $\varphi(P)$ soit continue et qu'elle admette les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport à u_j, v_j $(j=1,2,\ldots,n)$, u_j, v_j étant les parties réelles et imaginaires de x_j, respectivement. Pour faire à $\varphi(P)$ jouir de la propriété principale, il suffit donc, de faire satisfaire aux conditions suivantes :

$$W(\varphi;\alpha,\beta)>0,\quad \sum\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_j}\right)^2\right]>0\quad (j=1,2,\ldots,n).$$

Rappelons que la deuxième condition n'a pas apparu au cas de deux variables complexes (No. 13, Mémoire VI).

1° Considérons la première condition, $W(\varphi;\alpha,\beta)>0$. Soit $\psi(P)$ une autre fonction ayant les mêmes propriétés que $\varphi(P)$; on a

$$W(\varphi+\psi;\alpha,\beta)=W(\varphi;\alpha,\beta)+W(\psi;\alpha,\beta).$$

Comme φ est pseudoconvexe, on a $W(\varphi;\alpha,\beta)\geq 0$. Donc, si $W(\psi;\alpha,\beta)>0$, on a nécessairement $W(\varphi+\psi;\alpha,\beta)>0$. Or, pour

$$\psi(P)=\sum(u_j^2+v_j^2)\qquad(j=1,2,\ldots,n),$$

on a

$$W(\psi;\alpha,\beta)=4(\alpha_j^2+\beta_j^2)>0.$$

Prenons donc, une suite de nombres positifs ε_p $(p=1,2,\ldots)$ décroissante et tendant vers zéro, et posons

$$\varphi_p(P)=\varphi(P)+\varepsilon_p\psi(P);$$

la suite de fonctiones $\varphi_p(P)$ est alors, décroissante et tendant uniformément vers $\varphi(P)$ dans l'intérieur complet de domaine $\mathfrak{D}$, dont chaque φ_p admet les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre et remplie $W(\varphi_p;\alpha,\beta)>0$.

2°. Maintenant il ne nous reste que la deuxième condition. Envisageons cette condition, et nous trouvons qu'il faut modifier le problème même. Commençons par classifier les fonctions pseudoconvexes.

Soit $\varphi(P)$ une fonction *pseudoconvexe* dans un domaine $\mathfrak{D}$ sur l'espace $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Nous appellerons que $\varphi(P)$ jouit de *la propriété* (P_0) pour $\mathfrak{D}$, si elle est continue et admet les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport à (u,v) dans $\mathfrak{D}$, et encore si elle satisfait pour $\mathfrak{D}$ aux conditions,

$$W(\varphi;\alpha,\beta)>0,\quad \sum\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_j}\right)^2\right]>0\quad(j=1,2,\ldots,n).$$

Nous appellerons que $\varphi(P)$ jouit de *la propriété* (P_1) pour $\mathfrak{D}$, si à tout point P_0 de $\mathfrak{D}$ correspond un voisinage polycylindique γ de $\mathfrak{D}$ autour de P_0, telle que $\varphi(P)$ soit donnée dans γ par la borne supérieure d'un nombre fini de fonctions pseudoconvexes ayant la propriété (P_0).

Toute fonction pseudoconvexe $\varphi(P)$ ayant la propriété (P_1) dans $\mathfrak{D}$, jouit de la propriété principale pour $\mathfrak{D}$, précisément-dit, étant donné un point P_0 de $\mathfrak{D}$, soit $\varphi(P_0)=\alpha$, on peut toujours tracer une surface caractéristique sur $\mathfrak{D}$ passant par P_0 et restant dans la portion $\varphi > \alpha$, excepté à P_0, au voisinage de P_0. Ceci est évident.

Problème. $\ll$Etant donnée une fonction pseudoconvexe continue $\varphi(P)$ dans un domaine $\mathfrak{D}$ sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, soit $\mathfrak{D}_0$ un domaine tel que $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$ et soit ε un nombre positif, trouver une fonction pseudoconvexe $\Phi(P)$ ayant la propriété (P_1), de façon que $|\varphi(P) - \Phi(P)| < \varepsilon$, dans $\mathfrak{D}_0$.$\gg$

Pour ce problème, le principe suivant subsiste évidemment :

$\ll$Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$, soit $\mathfrak{D}_1$ la partie de $\mathfrak{D}$ sur $u_1 < b$ et soit $\mathfrak{D}_2$ celle de $u_1 > a$. Si le problème est résoluble pour $\mathfrak{D}_1$ et pour $\mathfrak{D}_2$, il est résoluble pour $\mathfrak{D}$. $\gg$

Il suffit donc, de résoudre le problème, *localement*.

3°. Considérons dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un domaine univalent $\mathfrak{R}$ de la forme, $a_i < u_i < b_i,\ c_i < v_i < d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(a_i, b_i, c_i, d_i$ étant des nombres réels); nous appellerons *domaine rectangulaire* tout domaine de cette forme. Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle continue sur le domaine rectangulaire fermé $\overline{\mathfrak{R}}$, soit ε un nombre positif; alors, grâce à *Weierstrass*, on sait bien que :

$\ll$l'on peut trouver un polynôme $\Phi(u, v) = \Phi(x)$ de (u, v) ayant les coefficients réels, de façon que $|\varphi(x) - \Phi(x)| < \varepsilon$ sur $\overline{\mathfrak{R}}$. $\gg$

Pour appliquer ce théorème, nous allons faire quelques remarques.

Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle continue dans un domaine $\mathfrak{D}$ univalent dans l'espace (x); considérons $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}^{(r)}$,

$$\varphi_1(x) = A_r[\varphi(x)] = \frac{1}{V} \int_\gamma \varphi(x')\, d\sigma \qquad (V = (\pi r^2)^n)$$

(où γ représente le polycylindre de centre (x) et de rayon r, (x') exprime un point quelconque de γ, et $d\sigma$ signifie l'élément de volume de γ). Supposons que $|\varphi(x)| \leq M$ pour $\mathfrak{D}$ (M étant un nombre positif). Alors, on a d'abord,

$$|\varphi_1(X)| \leq M$$

pour $\mathfrak{D}_1$. Pour évaluer $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}$ traçons sur le plan x_1 deux cercles de rayon r, de façon que les centres soient situés sur une droite horizontale, et soient à distance h, suffisamment petite; on a alors, deux lunaires suffisamment étroites, dont la somme des aires est plus petite que $4rh$; on a donc, pour $\mathfrak{D}_1$.

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \right| \leq \frac{4}{\pi r} M.$$

Il en est de même pour u_j, v_i $(j = 2, 3, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, n)$. Evaluons $\varphi_2 = A_r(\varphi_1)$ pour $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}^{(2r)}$. Soient ξ, η deux quelconques de u_i, v_i $(i =$

$1, 2, \ldots, n)$; comme
$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta} A_r \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\right),$$
d'après l'inégalité ci-dessus, on a pour $\mathfrak{D}_2$,
$$\left|\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial\xi\partial\eta}\right| \leq \left(\frac{4}{\pi r}\right)^2 M.$$

Soit $\Phi(u, v) = \Phi(x)$ un polynôme de (u, v), de degré ν au plus, ayant les coefficients réels. Soit γ_0 un polycylindre de centre l'origine et de rayon r, soit (x') un point quelconque de γ_0; $\varphi_1(x)$ peut s'exprimer alors, de la forme
$$\varphi_1(x) = \frac{1}{V} \int_{\gamma_0} \varphi(x + x') d\sigma.$$
Comme cas particulier, $\Phi_1(x) (= A_r[\Phi(x)])$ jouit donc, des mêmes propriétés que $\Phi(x)$, et par suite, $\Phi_2(x)$ l'est aussi.

Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle continue admettant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport à (v, v); considérons
$$W(\varphi; \alpha, \beta) = \sum_i \sum_j \left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v_i \partial v_j}\right)(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial v_j} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j \partial v_i}\right)(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i)\right]$$
$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Traçons à l'espace (α, β) une hypersphère de centre l'origine et de rayon 1, soit (α', β') un point quelconque sur la frontière, considérons
$$w(\varphi(x)) = \min W(\varphi; \alpha', \beta').$$
Pour que $W(\varphi(x); \alpha, \beta) > 0$, il faut et il sufiit que $w(\varphi(x)) > 0$. Soit $\varphi(x)$ une fonction donnée ayant la propriété indiquée pour un domaine univalent $\mathfrak{D}$; pour que $W(\varphi; \alpha, \beta) > 0$ pour $\mathfrak{D}$, il est nécessaire et suffisant que la borne inférieure de $w(\varphi)$ soit positive pour tout domaine $\mathfrak{D}_0$ tel que $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$. Si $w(\varphi)$ possède la borne inférieure w_0 pour $\mathfrak{D}$, on a évidemment pour $\mathfrak{D}$,
$$w(\varphi_1) \geq w_0.$$

Soit maintenant, $\mathfrak{R}$ un domaine rectangulaire dans l'espace (x), et soit $\varphi(x)$ une fonction pseudoconvexe continue admettant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport à (u, v), telle que $W(\varphi; \alpha, \beta) > 0$, au voisinage du domaine fermé $\overline{\mathfrak{R}}$. Pour tout nombre positif ε, on peut trouver un polynôme $\Phi(x) = \Phi(u, v)$ par rapport à (u, v) à coefficients réels, de façon que l'on ait,
$$|\Phi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

au voisinage de $\overline{\mathfrak{R}}$. Considérons $\Phi_2(x) = A_r^{(2)}[\Phi(x)]$ et $\varphi_2(x) = A_r^{(2)}[\varphi(x)]$, et choisissons ε suffisamment petit et r convenable. D'après ce que nous venons de voir, en comparant Φ_2 et φ avec φ_2, nous trouvons facilement que le polynôme $\Phi_2(x)$ possède la même propriété que $\varphi(x)$.

Supposons donc, que, la fonction $\varphi(x)$ donnée ci-dessus soit un polynôme de (u, v) à coefficients réels. Il s'agit de la seule condition

$$\sum \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_i} \right)^2 \right] > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Or, dans ces circonstances, nous trouvons facilement que, étant donné un nombre positif ε, on peut trouver un polynôme $\psi(x)$ de (u, v) ayant les mêmes propriétés que $\varphi(x)$ et telle que $|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$ au voisinage de $\overline{\mathfrak{R}}$, et encore que, concernant la dernière condition indiquée ci-dessus, l'ensemble des points où toutes les dérivées du premier ordre de $\psi(x)$ s'annulent simultanément soit *isolé*[32].

4°. Comme nous l'avons remarqué plus haut, nous avons vu dans le Mémoire VI, que la circonstance en question ne fait aucun obstacle pour le cas $n = 2$. C'est ce fait que nous allons utiliser. Rappelons la forme précise du théorème :

≪Soit $\varphi(x_1, x_2)$ une fonction réelle continue admettant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport à u_i, v_i $(i = 1, 2)$, telle que $W(\varphi; \alpha, \beta) > 0$, au voisinage d'un point (x_1^0, x_2^0) dans l'espace (x_1, x_2). Si pour (x^0), on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} = 0,$$

on peut trouver un plan caractéristique passant par (x^0) et restant dans la portion $\varphi(x) > \varphi(x^0)$, excepté à (x^0), au voisinage de ce point.≫

Soit (x^0) un point déterminé dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, soit $\varphi(x)$ un polynôme de (u, v) à coefficients réels, tel que $W(\varphi; \alpha, \beta) > 0$ au voisinage de (x^0), et encore que l'une au moins des dérivées partielles du premier ordre ne soit pas nulle en tout point au voisinage de (x^0), excepté à ce point, où elles s'annulent à la fois. Supposons, pour simplifier l'écriture, que (x^0) soit l'origine. Posons

$$\Phi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2, 0, \ldots, 0).$$

On a $W(\Phi; \alpha, \beta) > 0$, puisque $w(\Phi) \geq w(\varphi) > 0$ dans un voisinage de l'origine. On peut donc, tracer un plan caractéristique de la forme $a x_1 = x_2$ dans

[32] Il suffit de considérer une modification de la forme $\psi = \varphi + L$, L étant un polynôme convenable de (u, v), linéaire homogène.

l'espace (x_1, x_2), restant dans la portion $\Phi(x_1, x_2) > \Phi(0, 0)$, au voisinage de l'origine, excepté à l'origine. Nous pouvons supposer, sans perdre la généralité, que $a = 0$.

Dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, traçons un polycylindre de centre à l'origine et de rayon r, suffisamment petit pour que toutes les circonstances subsistent dans le polycylindre de centre à l'origine et de rayon $2r$. Prenant un nombre positif ρ plus petit que r, posons

$$\varphi_1 = \varphi(x_1 + \rho, x_2, \ldots, x_n), \qquad \psi = \max(\varphi, \varphi_1).$$

Comme, pour $\varphi(x_1, 0, \ldots, 0) = \chi(x_1)$, on a $\chi(x_1) > \chi(0)$ pour $0 < |x_1| < 2r$, il est claire que ψ est une fonction pseudoconvexe ayant la propriété (P_1) dans le polycylindre γ. De plus $|\psi - \varphi|$ tend vers zéro avec ρ. *Le problème posé à* $(2°)$ *est ainsi résolu.*

C. Problème frontière.

19. Problème frontière. Le but du présent Chapitre est à résoudre le problème suivant :

Problème frontière. *Etant donné un domaine pseudoconvexe* $\mathfrak{D}$ *sur l'espace* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *trouver une fonction pseudoconvexe* $\Phi(P)$ *dans* $\mathfrak{D}$ *jouissant des propriétés suivantes* :

1° $\Phi(p)$ *possède la propriété* (P_1).

2° *Pour tout nombre réel* α, *l'ensemble* $\mathfrak{D}_\alpha$ *des points de* $\mathfrak{D}$ *tels que* $\Phi(P) < \alpha$ *remplie la condition* $\mathfrak{D}_\alpha \Subset \mathfrak{D}$.

La signification de ce problème sera bien comprise, si l'on rappelle ce qui a été exposé à ≪III. problème complémentaire≫ du Mémoire VI.

Or, dans le cas actuel, comme $\mathfrak{D}$ n'est plus univalent, *pour faire* $\mathfrak{D}_\alpha$ *toujours compact sur* $\mathfrak{D}$, hors des *rayons de Hartogs, il faut chercher une nouvelle espèce de fonctions pseudoconvenxes* par rapport à $\mathfrak{D}$. (De la même raison il s'ensuit que, *le théorème de Cartan–Thullen* n'est plus suffisant pour traiter des problèmes donnés dans les domaines d'holomorphie multivalents.) Précisément dit, il se présente à nouveau le problème suivant:

Problème auxiliaire. ≪Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace (x), soit $\mathfrak{D}_0$ un domaine dont la distance frontière polycylindrique par rapport à $\mathfrak{D}$ n'est pas nulle; trouver une fonction pseudoconvexe continue $\lambda_0(P)$ dans $\mathfrak{D}_0$ telle que, pour tout nombre réel α, l'ensemble Δ_α des points de $\mathfrak{D}_0$ tels que $\lambda_0(P) < \alpha$, satisfasse au condition $\Delta_\alpha \Subset \mathfrak{D}$. ≫

20. Familles normales de courbes continues. Nous appliquerons, à cette occasion, la notion de Montel[33] aux courbes continues[34]. Ceci n'est pas indispensable, mais utile, pour traiter le problème auxiliaire.

Etant donnée une famille $(\mathfrak{F})$ de *courbes continues* dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nous appellerons que $(\mathfrak{F})$ forme une *famille normale*, si de toute suite infinie de $(\mathfrak{F})$, C_j $(j = 1, 2, \ldots)$, on peut extraire une suite partielle infinie, C_{p_j} $(j = 1, 2, \ldots)$, de façon que, pour toute courbe C_{p_j}, on puisse choisir une équation de la forme

$$x_i = \varphi_i^{(j)}(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

($\varphi_i^{(j)}(t)$ étant des fonctions continues) représentant C_{p_j} et telle que les suites de fonctions $\varphi_i^{(j)}(t)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ soient convergentes uniformément sur $0 \leq t \leq 1$.

Cette fois-ci, nous nous contenterons de remarquer le *critère* suivant :

Etant donnée une famille $(\mathfrak{F})$ *de courbes continues réctifiables à l'espace* (x)*, si les longueurs totales des courbes de* $(\mathfrak{F})$ *sont bornées dans leur ensemble,* $(\mathfrak{F})$ *forme une famille normale*[35].

Soit en effect, C une courbe quelconque de $(\mathfrak{F})$, soit l la longueur totale de C, et soit s la longueur de l'arc de C du point initial au point quelconque (x) de C. En prenant $t = s/l$, posons

$$x_i = \varphi_i(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour deux points quelconques t, t' de l'intervalle fermé $[0, 1]$, on a toujours

$$|\varphi_i(t) - \varphi_i(t')| \leq l|t - t'|.$$

Comme l'ensemble $\{l\}$ est borné, pour tout i de $1, 2, \ldots, n$, la famille $\{\varphi_i(t)\}$ est également continue sur $[0, 1]$. Donc, comme on sait bien, elle forme une famille normale sur $[0, 1]$, $(\mathfrak{F})$ forme donc, une famille normale, d'après la définition.

21. Résolution du problème auxiliaire. Dans le problème auxiliaire, négligeons, pour le moment, la condition demandée d'être pseudoconvexe. Nous trouvons alors, diverses fonctions de la nature voulue à nos environs, dont nous allons choisir la suivante :

[33] Voir: P. Montel, Leçons sur les familles normales.
[34] Nous avons déjà appliqué cette notion aux surfaces caractéristiques. Voir No. 7.
[35] Adjoindre la condition que les distances de l'origine aux courbes de la famille soient bornées.

Soit O un point déterminé de $\mathfrak{D}_0$, soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}_0$, soit $d(P_1, P_2)$ la distance entre P_1 et P_2 sur le domaine $\mathfrak{D}_0$ (précisément-dit, la borne inférieure des longueurs des courbes sur $\mathfrak{D}_0$ reliant P_1 et P_2), posons

$$\lambda(P) = d(O, P),$$

$\lambda(P)$ est une fonction réelle continue dans $\mathfrak{D}_0$. Soit α un nombre réel quelconque, et soit Δ_α l'ensemble des points de $\mathfrak{D}_0$ tels que $\lambda(P) < \alpha$. Comme la distance frontière polycylindrique de $\mathfrak{D}_0$ par rapport à $\mathfrak{D}$ n'est pas nulle, d'après *le critère* que nous venons de voir, il est clair que $\Delta_\alpha \Subset \mathfrak{D}$. $\lambda(P)$ est ainsi une des fonctions demandées.

Comment peut-on faire alors, une fonction pseudoconvexe de $\lambda(P)$? Remarquons d'abord, que $\lambda(P)$ jouit de la propriété suivante,

$$(1) \qquad |\lambda(P_1) - \lambda(P_2)| \leq d(P_1, P_2).$$

Nous allons l'associer la méthode de prendre la valeur moyenne (expliquée à No. 17).

Considérons $\lambda_1(P) = A_r[\lambda(P)]$ pour $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_0^{(r)}$. Dénotons un quelconque de u_i, v_i $(i = 1, 2, \ldots)$ par ξ; d'après (1), nous avons

$$\left|\frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi}\right| \leq \frac{4}{\pi}$$

(Voir (3°), No. 18). Considérons ensuite $\lambda_2(P) = A_r[\lambda_1(P)]$ pour $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_0^{(2r)}$. Soit η un quelconque de u_i, v_i. Comme $\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\right| \leq \frac{4}{\pi r} M$ (M étant la borne supérieure de φ pour $\mathfrak{D}$, (3°), No. 18), d'après l'inégalité ci-dessus, on a

$$\left|\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \xi \partial \eta}\right| \leq \left[\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{1}{r}\right] = K.$$

D'après (1), on a encore $|\lambda_2(P) - \lambda(P)| \leq 2\sqrt{n}\, r$.

Soit (α', β') un point quelconque sur la frontière de la hypersphère de centre l'origine et de rayon 1 dans l'espace (α, β); on a donc,

$$w(\lambda_2) = \min W(\lambda_2, \alpha', \beta') > \left[-8n^2 K = -\left(\frac{8n}{\pi}\right)^2 \frac{2}{r}\right] = -K_1.$$

Comme pour $\mu(x) = \sum(u_i^2 + v_i^2)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, nous avons

$$W(\mu; \alpha', \beta') = 4,$$

en prenant un nombre positif M, tel que $4M > K_1$, construisons

$$\lambda_0(P) = \lambda_2(P) + M\mu(x).$$

$\lambda_0(P)$ est alors, définie pour $\mathfrak{D}_2$ et satisfait à la condition $W(\lambda_0; \alpha, \beta) > 0$. Il est évident que $\lambda_0(P)$ conserve la propriété en question.

La fonction $\lambda_0(P)$ ainsi acquise n'existe que dans $\mathfrak{D}_2$. Mais, pour obtenir une fonction de cette nature pour $\mathfrak{D}_0$, il suffit de partir d'un domaine plus grand que $\mathfrak{D}_0$. *Le problème auxiliaire est ainsi résolu.*

22. Résolution du problème frontière, deuxième lemme. En complétant *le problème de* No. 18, considérons le suivant :

Problème $\ll$Soit $\mathfrak{D}$ un domaine pseudoconvexe[36] sur l'espace (x), soit $\varphi(P)$ une fonction pseudoconvexe continue dans $\mathfrak{D}$, jouissant de *la propriété* (α) (pour $\mathfrak{D}$) que pour tout nombre réel α, l'ensemble de points de $\mathfrak{D}$ donné par $\varphi(P) < \alpha$ soit contenu à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$; modifier la fonction $\varphi(P)$ de manière qu'elle jouit de la propriété (P_1), en conservant les propriétés pour $\mathfrak{D}$.$\gg$

Pour résoudre ce problème, soit a_p $(p = 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres positifs telle que $a_p < a_{p+1}$ ayant la limite $+\infty$; désignons l'ensemble de points de $\mathfrak{D}$ défini par $\varphi(P) < a_p$, par $\mathfrak{D}_p$; alors $\mathfrak{D}_p \Subset \mathfrak{D}$. Comme le problème de No. 18 est résoluble, étant donné un nombre positif ε, on peut trouver une fonction $\Phi_p(P)$ pseudoconvexe ayant la propriété (P_1) et telle que

$$|\varphi(P) - \Phi_p(P)| < \varepsilon,$$

dans $\mathfrak{D}_p$. Choisissons ε suffisamment petit pour que, soit $\mathfrak{D}'_{p,q}$ l'ensemble de points de $\mathfrak{D}_p$ défini par $\Phi_p(P) < a_q$, on ait, pout $q = 2, 3, \ldots, p-1$,

$$\mathfrak{D}_{q-1} \Subset \mathfrak{D}'_{p,q} \Subset \mathfrak{D}_{q+1}.$$

De la suite de fonctions $\Phi_p(P)$ $(p = 1, 2, \ldots)$, construisons une suite de fonctions $\Phi'_p(P)$, successivement, comme ce qui suit : Posons d'abord,

$$\Phi'_1 = \Phi_6.$$

La fonction Φ'_1 existe dans $\mathfrak{D}_6$, elle est pseudoconvexe et possède la propriété (P_1), et

$$\Phi'_1 > a_4 \qquad \text{pour} \quad (\mathfrak{D}_6 - \mathfrak{D}_5).$$

Pour construire Φ'_2, construisons d'abord Ψ_2 comme suivante :

$$\Psi_2 = c_2(\Phi_7 - a_3)$$

[36]Puisque tout domaine D possédant une fonction comme $\varphi(P)$ est nécessairement pseudoconvexe.

c_2 étant une constante positive. Comme $\mathfrak{D}_2 \Subset \mathfrak{D}'_{7,3} \Subset \mathfrak{D}_4$, on peut prendre c_2 suffisamment grande pour que

$$\begin{aligned} &\Psi_2 < \Phi'_1 && \text{pour} \quad \mathfrak{D}_1, \\ &\Psi_2 > \Phi'_1 && \text{pour} \quad (\mathfrak{D}_6 - \mathfrak{D}_5), \\ &\Psi_2 > a_5 && \text{pour} \quad (\mathfrak{D}_7 - \mathfrak{D}_6). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \Phi'_2 &= \max(\Phi'_1, \Psi_2) && \text{pour} \quad \mathfrak{D}_6, \\ &= \Psi_2 && \text{pour} \quad (\mathfrak{D}_7 - \mathfrak{D}_6). \end{aligned}$$

Et ainsi de suite, et nous avons une suite de fonctions Φ'_p $(p=1, 2, \ldots)$, telle que toute fonction Φ'_p jouisse de la propriété suivante : $\Phi'_p(P)$ est une fonction pseudoconvexe ayant la propriété (P_1) dans $\mathfrak{D}_{p+5}$ et satisfaisant aux conditions, $\Phi'_p = \Phi'_{p-1}$ pour $\mathfrak{D}_{p-1}$ (si $p>1$), $\Phi'_p > a_{p+3}$ pour $(\mathfrak{D}_{p+5} - \mathfrak{D}_{p+4})$. Cette suite converge dans $\mathfrak{D}$. Soit $\Phi(P)$ la limite. Φ est une fonction pseudoconvexe ayant la propriété (P_1) dans $\mathfrak{D}$. Elle jouit de la propriété (α) pour $\mathfrak{D}$, puisque $\Phi > a_{p+3}$ pour $(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_{p+4})$ $(p=1, 2, \ldots)$.

Le problème-ci étant ainsi résolu, pour résondre le problème frontière, il suffit de résoudre :

Problème. ≪Etant donné un domaine pseudoconvexe $\mathfrak{D}$ sur l'espace (x), trouver une fonction pseudoconvexe continue dans $\mathfrak{D}$, jouissant de la propriété (α).≫

C'est la forme complète du problème auxiliaire. Nous allons le résoudre, d'après le problème-ci et la fonction $d(P)$, formée en rayons de Hartogs.

Nous ometterons le cas où $\mathfrak{D}$ coïncide à l'espace (x), puisqu'alors, $\mu(x) = \sum |x_i|^2$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ donne la solution. Considérons la distance frontière euclidienne $d(P)$ de $\mathfrak{D}$; $-\log d(P)$ est une fonction pseudoconvexe continue; nous désignerons cette fonction par $\delta(P)$, pour simplifier l'écriture. Soit a_p $(p=1, 2, \ldots)$ une suite de nombres positifs telle que $a_p < a_{p+1}$, tendant vers $+\infty$; considérons l'ensemble $\mathfrak{D}_p$ de points de $\mathfrak{D}$ donné par $\delta(P) < a_p$. Problème auxiliaire étant résoluble, construisons dans $\mathfrak{D}_p$, une fonction pseudoconvexe continue $\varphi_p(P)$ telle que l'ensemble de points de $\mathfrak{D}_p$ donné par $\varphi_p < \alpha$ soit contenu dans l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$, α étant un nombre réel quelconque. Choisissons a_1 suffisamment grand pour que $\mathfrak{D}_1 \supset O$.

Soit O un point déterminé de $\mathfrak{D}_1$, soit $d(P_1, P_2)$ la distance entre les points P_1, P_2 sur $\mathfrak{D}$; posons $\lambda(P) = d(O, P)$. Soit l_p $(p = 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres positifs croissante au sens strict et tendant vers $+\infty$, que nous déterminerons successivement dans la suivante. Désignons par Δ_p, l'ensemble de points de $\mathfrak{D}_p$ défini par $\lambda(P)<l_p$; alors $\Delta_p \Subset \Delta_{p+1}$, et limite de Δ_p $(p=1,2,\ldots)$ est $\mathfrak{D}$.

Formons de la suite φ_p $(p = 1,2,\ldots)$, une suite de fonctions $\Phi_p(P)$ successivement, de la manière suivante : D'abord, $\Phi_1 = \varphi_2$; alors, Φ_1 est une fonction pseudoconvexe continue qui existe dans $\mathfrak{D}_2$.

Pour construire Φ_2, considérons l'ensemble Δ_1' de points de $\mathfrak{D}$ défini par

$$\delta < \frac{a_1 + a_2}{2}, \qquad \varphi_3 < \alpha_1,$$

α_1 étant un nombre réel, que nous allons déterminer. D'après avoir choisi l_1 au hasard, choisissons α_1 suffisamment grand pour que $\Delta_1' \Supset \Delta_1$. Comme $\Delta_1' \Subset \mathfrak{D}_2$, choisissons puis l_2 suffisamment grand pour que $\Delta_2 \Supset \Delta_1'$. Dans cette configuration, considérons une fonction de la forme,

$$\Psi_2(P) = c_2 \max\left[\delta(P) - \frac{a_1 + a_2}{2},\ \varphi_3(P) - \alpha_1\right],$$

et choisissons le nombre positif c_2 suffisamment grand, $\Psi_2(P)$ jouira alors, des propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} \Psi_2 < \Phi_1 & \text{pour} \quad \Delta_1, \\ \Psi_2 > a_2 & \text{pour} \quad (\mathfrak{D}_3 - \Delta_2), \\ \Psi_2 > \Phi_1 & \end{array}$$

au voisinage de la frontière de Δ_2, *dans* Δ_2. Posons,

$$\begin{array}{lll} \Phi_2(P) & = \max(\Phi_1, \Psi_2) & \text{pour} \quad \Delta_2, \\ & = \Psi_2 & \text{pour} \quad (\mathfrak{D}_3 - \Delta_2). \end{array}$$

Alors, $\Phi_2(P)$ est une fonction pseudoconvexe continue définie dans $\mathfrak{D}_3$, telle que $\Phi_2=\Phi_1$ pour Δ_1, et que $\Phi_2>a_2$ pour $(\mathfrak{D}_3-\Delta_2)$. Et ainsi de suite.

Nous aurons alors, une suite de fonctions pseudoconvexes continues $\Phi_p(P)$ $(p=1,2,\ldots)$, telle que Φ_p soit définie dans $\mathfrak{D}_{p+1}$ et satisfasse aux conditions $\Phi_p=\Phi_{p-1}$ pour Δ_{p-1}, $\Phi_p>a_p$ pour $(\mathfrak{D}_{p+1}-\Delta_p)$ dont $p \geq q > 1$, pourvu que $p>1$. Cette suite converge dans $\mathfrak{D}$, soit $\Phi(P)$ la limite. $\Phi(P)$ est pseudoconvexe et continue dans $\mathfrak{D}$, et jouit de la propriété (α) pour $\mathfrak{D}$, puisque $\Phi(P)>a_p$ pour $\mathfrak{D}-\Delta_p$ $(p=2,3,\ldots)$.

Nous avons ainsi le résultat voulu :

Lemme I. *Étant donné un domaine pseudoconvexe* $\mathfrak{D}$ *fini sans point critique intérieur sur l'espace* (x), *on peut toujours trouver une fonction pseudoconvexe* $\Phi(P)$ *dans* $\mathfrak{D}$, *jouissant des propriétés suivantes :*

1° $\Phi(p)$ *possède la propriété* (P_1)[37].

2° *Pour tout nombre réel* α, *l'ensemble de points de* $\mathfrak{D}$ *donné par* $\Phi(P) < \alpha$ *reste à l'iniérieur complet de* $\mathfrak{D}$.

23. Problèmes ultérieurs. Nous allons inspecter tout rapidement le caractère ultérieur du problème frontière, quand on admet, ou bien des points à l'infini (dans un sens convenable), ou bien des points critiques non-transcendants, pour points intérieurs d'un domaine.

Pour le premier cas, la fonction auxiliaire $\mu(x) = \sum |x_i|^2$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ perd le caractère; ce qui donne naissance à un problème étrange.

Pour le deuxième cas, les rayons de *Hartogs* cessent de jouir du rôle; ceci présente une difficulté qui m'apparait vraiment grande.

Quant aux détails de la figure de ce difficultés, nous nous contentons de dessiner dans les Mémoires ultérieurs.

Chapitre III. Problèmes principaux.

24. Notions générales. Considérons sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un domaine $\mathfrak{D}$ (fini sans point critique intérieur); soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}$, soit (x) ses coordonnées. Une fonction $f(P)$ de P est appelée *holomorphe* pour $\mathfrak{D}$, si elle est univoque dans $\mathfrak{D}$ et encore si elle est une fonction holomorphe de (x) en tout point de $\mathfrak{D}$. Soit $f(P)$ une fonction holomorphe (de P) dans $\mathfrak{D}$; on dit que $\mathfrak{D}$ est un domaine d'holomorphie de $f(P)$, si cette fonction possède toujours des éléments de Taylor différents pour deux points différents de $\mathfrak{D}$, et encore si l'on ne peut la prolonger analytiquement passant par aucun point frontière de $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}$ est appelé *domaine d'holomorphie*, s'il existe au moins une fonction pour laquelle $\mathfrak{D}$ est ainsi.

Le domaine d'holomorphie est pseudoconvexe, grâce à Hartogs (1906); dont la notion d'être pseudoconvexe est une espèce de *convexité locale* (on peut la définir localement). Or, en 1926, Julia a proposé un problème global, que voici : Tout domaine de normalité est-il un domaine d'holomorphie ? Et en 1931, pour traiter le problème de Julia[38], H. Cartan a introduit, pour la première fois une espèce de *convexité globale* (qui ne peut s'exprimer d'une manière locale, à priori)[39], dont l'idée essentielle est comme suivante :

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine (connexe ou non), sur l'espace (x), soit $(\mathfrak{F})$ une famille de fonctions *holomorphes* dans $\mathfrak{D}$; nous appellerons que $\mathfrak{D}$ est *convexe par*

[37] Pour la propriété (P_1), voir : No. 18, ainsi que No. 16

[38] Le problème de Julia est résolu, comme nous l'avons dit à l'Introduction de Mémoire VI, pour les domaines univalents et finis, dont la dernière étape est due à Behnke et à Stein. Voir: H. Behnke-K. Stein, Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität, 1938 (Math. Annalen).

[39] H. Cartan, Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes, 1931 (Bull, de la Soc. Math. de France).

rapport à $(\mathfrak{F})$, ou simplement, $(\mathfrak{F})$*–convexe*, s'il satisfait aux conditions suivantes :

1°. La famille $(\mathfrak{F})$ possède au moins une fonction $f_0(P)$ ayant les éléments de Taylor différents pour toute paire de points différents dans $\mathfrak{D}$.

2°. Pour tout domaine (connexe ou non) Δ tel que $\Delta \Subset \mathfrak{D}$, il existe deux domaines (connexes ou non) Δ', Δ'' tels que $\Delta \subseteq \Delta' \Subset \Delta'' \subseteq \mathfrak{D}$, et qu'à tout point P_0 de $\Delta'' - \Delta'$ corresponde une fonction $f(P)$ de $(\mathfrak{F})$ pour laquelle, $|f(P_0)| > \max |f(\Delta)|$ (où le deuxième membre signifie la borne supérieure de $|f(P)|$ pour Δ).

Comme cas particulier, si $\mathfrak{D}$ est convexe par rapport aux fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$, nous appellerons avec Behnke, que $\mathfrak{D}$ est *holomorphe-convexe* (regulär-konvex). Pour cette notion, nous verrons plus tard que la première condition n'est qu'une conséquence nécessaire de la deuxième.

Plus généralement, si $\mathfrak{D}$ est convexe par rapport à la famille consistant de toutes les fonctions holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}'$ tel que $\mathfrak{D}' \supseteq \mathfrak{D}$, nous appellerons que $\mathfrak{D}$ est *holomorphe-convexe par rapport à* $\mathfrak{D}'$.

En 1932, H. Cartan et Thullen ont trouvé que tout domaine d'holomorphie, univalent et fini est holomorphe-convexe[40]. (Il en reste de même pour le cas d'un nombre borné de feuilles.) C'est un fait vraiment fondamental pour le cas de domaines univalents, qui donne la raison de distinguer le domaine d'holomorphie des autres sortes de domaines pseudoconvexes, domaines de méromorphie, domaines de normalité, ... Nous avons en effet, résolu les problèmes de Cousin et le problème de développement pour les domaines d'holomorphie univalents et finis, à l'aide de ce théorème.

Mais, pour le cas actuel le mode de raisonnement de Cartan–Thullen (vraiment simple) ne subsiste plus, comme nous l'avons déjà remarqué; par suite, il faut prendre les domaines holomorphe-convexes mêmes pour notion fondamentale, à savoir, d'abord :

≪Tout domaine pseudoconvexe (fini sans point critique intérieur) sur l'espace (x) , est-il holomorphe-convexe ?≫

Désormais, nous l'appellerons *problème inverse de Hartogs*.

Les autres problèmes principaux (depuis le Mémoire I, à nous), *les problèmes de Cousin* et *le problème de développement* restaient libres pendant longtemps, sauf pour les domaines cylindriques univalents[41], comme nous l'avons dit plus haut. Quant aux *théorème de Cauchy*, à propos, H. Poincaré eut généralisé le premier théorème, mais, le deuxième restait sans progrès.

[40] H. Cartan–P. Thullen, Regularitäts- und Konvergenzbereiche (Math. Annalen).
[41] P. Cousin, 1895, (Acta Mathematica).

Or, en 1935, Weil a généralisé le deuxième théorème de Cauchy[42] d'après le résultat de Poincaré, ce qui fait les problèmes principaux résolubles, comme conséquence immédiate, pour les domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, comme dit (et cité) plus haut. Et, nous avons aussi appliqué l'intégrale-ci de Weil au problème inverse de Hartogs, dans le Mémoire VI.

Dans les travaux de Weil, et déjà dans la notion d'être $(\mathfrak{F})$–convexe, on trouve les ensembles fermés de la forme suivante :

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine (connexe ou non) fini sans point critique transcendant intérieur sur l'espace (x), soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}$, et soit Δ un ensemble fermé de points sur $\mathfrak{D}$ tel que $\mathfrak{D} \Supset \Delta$; nous appellerons Δ *polyèdre analytique*, s'il existe une fonction $f_0(P)$ holomorphe sur Δ possédant les éléments de Taylor différents à toute paire de points rguliers différents de Δ, et encore si Δ peut s'exprimer de la forme suivante,

$$f_j(P) \in A_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

dont $f_j(P)$ représentent des fonctions holomorphes sur $\mathfrak{D}$, et A_j expriment des domaines (connexes) fermés univalents et bornés (ou parfois, plus généralement, des ensembles fermés et bornés) sur le plan[43].

C'est sur ces polyèdres analytiques, que nous avons établi le théorème II au Mémoire I, le théorème I au Mémoire II et le lemme fondamental au Mémoire VIII. Envisageons la configuration de ces principes pour le cas actuel.

Supposons, dans la définition ci-dessus, que $\mathfrak{D}$ ne contienne aucun point critique intérieur. Comme $f_0(P)$ possède toujours les éléments de Taylor différents aux différents points de $\mathfrak{D}$, on peut trouver un système fini de fonctions $\varphi_k(P)$ $(k=1, 2, \ldots, p)$, $(p \leq n+1$, si l'on veut), tel que les systèmes ordonnés de valeurs $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ soient différents pour toute paire de points différents ayant les mêmes coordonnées dans $\mathfrak{D}$. On peut représenter le polyèdre Δ à nouveau, de la forme suivante,

$$(1) \qquad x_i \in A_i, \quad f_j(P) \in B_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\, j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

dont A_i, B_j expriment des domaines (connexes) fermés univalents et bornés sur le plan, et $f_j(P)$ représentent des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$, qui contiennent dans leur ensemble les fonctions $\varphi_k(P)$ $(k=1, 2, \ldots, p)$.

---

[42] Sur ce sujet, nous sommes à consulter aussi les travaux de S. Bergmann, nous aurons probablement l'occasion ultérieure d'en parler.

[43] Au Mémoire VIII, nous avons posé à A_j, selon H. Cartan, la condition d'être simplement connexe, mais, désormais, nous l'ometterons, puisqu'elle ne me semble pas naturelle.

Soit (x) les coordonnées de P. Considérons, en tout point P_0 de $\mathfrak{D}$, l'élément de variété caractéristique

$$y_j = f_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

à l'espace $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\nu)$, dont $f_j(x)$ signifient les déterminations au voisinage de P_0. Lorsque P_0 décrit $\mathfrak{D}$, l'élément de la variété-ci trace une variété caractéristique, que nous dénotons par Σ', et représentons par l'équation $y_j = f_j(P)$ ($P \in \mathfrak{D}$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$). D'après la propriété du système (f), entre les points P de $\mathfrak{D}$ et les points M de coordonnées $[x, f(P)]$ de Σ' il y a une correspondance *biunivoque*.

Considérons dans l'espace (x, y) le domaine cylindrique fermé (A, B), et dénotons la partie de Σ' sur (A, B) par Σ. Le point P de Δ et le point $M\,[x, f(P)]$ de Σ se correspondent biunivoquement, et spécialement *les points frontières se correspondent.* Soit P un point quelconque de Δ ayant les coordonnées (x), et soit Q un point de Δ, différent de P, ayant les mêmes coordonnées (x), mais d'ailleurs quelconque. Soit

$$\alpha(P) = \max |f_j(P) - f_j(Q)| \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

et soit α_0 la borne inférieure de $\alpha(P)$ (lorsque P parcourt Δ); on a $\alpha_0 > 0$. Prenant un nombre positif ρ tel que $3\rho < \alpha_0$, considérons dans l'espace (x, y) l'ensemble de points V tel qu'à tout point (x', y') de V corresponde au moins un point P' de Δ ayant les coordonnées (x') et satisfaisant à $|f_j(P') - y'_j| < \rho$ ($j = 1, 2, \ldots, \nu$). Faisons correspondre au point (x', y') de V la valeur $\varphi(P')$; la fonction ainsi définie est univoque, puisqu'à (x') correspond un seul P'; elle est holomorphe. Désormais, nous dénoterons la fonction-ci par la même lettre φ, comme $\varphi(x, y)$.

Pour le cas actuel le lemme fondamental se réduit donc, à la forme suivante :

Lemme II. *Dans cette configuration géométrique, soient A_i^0, B_j^0 ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, \nu$) des ensembles fermés, tels que $A_i^0 \Subset$ le domaine ouvert A_i, $B_j^0 \Subset$ le domaine ouvert B_j; il correspond alors, une constante positive K jouissant du rôle suivant : Etant donnée une fonction holomorphe $\varphi(P)$ sur $\mathfrak{D}$, au voisinage du polyèdre analytique Δ, dont la borne supérieure de $|\varphi|$ pour Δ est N, on peut toujours trouver une fonction holomorphe $\Phi(x, y)$ au voisinage de (A^0, B^0), telle que $\Phi = \varphi$, sur Σ, et que $|\Phi| < KN$ sur (A^0, B^0).*

Le présent Chapitre consiste en parties A, B, C. Dans la partie A, nous traiterons le premier problème de Cousin et le problème de développement pour les domaines holomorphe-convexes puisqu'ils sont nécessaires pour traiter le problème inverse de Hartogs. Et dans B, nous résoudrons ce problème.

Comme nous avons expliqué au Mémoire VII, nous avons rencontré sur la voie des présentes recherches, quelques problèmes du caractére arithmétique, à savoir : le problème (C_2) au Théorème II du Mémoire I, le problème (E) au Théorème I du Mémoire II, et le problème (C_1) à *l'hypothèse de Weil* expliquée au Mémoire V. Nous les avons résolus pour les polycylindres fermés dans le Mémoire VII, à l'aide de la notion, *idéaux holomorphes de domaines indéterminés*[44], *et d'un théorème de H. Cartan*[45].

Dans la partie C, nous traiterons le deuxième problème de Cousin et ces trois problèmes. Pour le problème (E) on trouvera un exemple contraire. Pour les autres, on verra qu'ils sont résolubles (affirmativement) pour les domaines pseudoconvexes (finis et sans point critique intérieur).

A. Développement de fonctions holomorphes, premier problème de Cousin.

25. Développement de fonctions holomorphes. Grâce à l'idée du Mémoire I et au lemme II de No. 24, nous aurons le théorème suivant.

Théorème I. *Soient $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ deux domaines finis sans point critique intérieur sur l'espace (x) tels que $\mathfrak{D} \Subset \mathfrak{D}'$, dont $\mathfrak{D}$ n'est pas nécessairement connexe. Si $\mathfrak{D}$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}'$, toute fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$ est développable en série de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}'$ convergente uniformément à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$.*

Soit en effet, $f(P)$ une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$. Comme le domaine (connexe ou non) $\mathfrak{D}$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}'$, il peut s'exprimer comme la limite d'une suite croissante de polyèdres analytiques Δ_p de la forme,

$$|x_i| \leq r_i, \quad |\varphi_j(P)| \leq 1, \quad P \in \mathfrak{R} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

dont $\mathfrak{R}$ signifie un domaine (connexe ou non) tel que $\Delta_p \Subset \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{D}$, r_i sont des constantes positives, et $\varphi_j(P)$ sont des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}'$, telles que les systèmes ordonnées de valeurs $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ soient différentes pour toute paire de points différents ayant les mêmes coordonnées, au voisinage de Δ_p.

[44] On a déjà considéré à la théorie du prolongement analytique à une seule variable complexe, un élément de la forme (f, δ).

[45] H. Cartan, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, 1940 (Journal de Mathématiques).

Considérons dans l'espace $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\nu)$ le polycylindre fermé:

$$C \ : \ |x_i| \leq r_i, \quad |y_j| \leq 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

et la variété caractéristique Σ donnée par

$$y_j = \varphi_j(P) \ \ (j = 1, 2, \ldots, \nu), \quad P \in \mathfrak{R}$$

(les coordonnées de P étant (x)). D'après *le lemme* II, on peut trouver une fonction holomorphe $F(x, y)$ au voisinage de C, telle que $F = f$ sur Σ. En développant $F(x, y)$ en série de Taylor, autour de l'origine et en substituant $y_j = \varphi_j(P)\,(j = 1, 2, \ldots, \nu)$, on obtient un développement de $f(P)$ au voisinage de Δ_p consistant en termes holomorphes dans $\mathfrak{D}'$, et convergente uniformément au voisinge de Δ_p. D'où, il s'ensuit immédiatement le théorème.

26. Premier problème de Cousin. Il en est de même, pour le premier problème de Cousin, que nous allons constater. Commençons par vérifier le lemme suivant :

Considérons sur l'espace (x) le polyèdre analytique Δ du lemme II et un hyperplan L passant par Δ; L partage Δ en deux parties fermées Δ_1, Δ_2, soit Δ_0 la partie de Δ sur L. Dans cette configuration géométrique, étant donnée une fonction holomorphe $\varphi(P)$ au voisinage de Δ_0, on peut trouver deux fonctions holomorphes $\varphi_1(P)$, $\varphi_2(P)$ au voisinage de Δ_1 et au voisinage de Δ_2, respectivement, telles que l'on ait identiquement $\varphi_1(P) - \varphi_2(P) = \varphi(P)$.

Supposons pour l'effet, que L soit défini par $u = 0$, u étant la partie réelle de x_1, pour simplifier l'écriture, et encore que Δ_1 soit la partie de Δ sur $u \leq 0$; Δ_2 est alors, celle de $u \geq 0$. Δ est donné de la forme

$$x_i \in A_i, \quad f_j(P) \in B_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

(avec leurs significations indiquées dans le lemme II) . Traçons sur le plan x_1 un cercle de la forme $|x_1| < R$ contenant A_1. Soit L le diamètre vertical. D'après *le lemme* II, nous avons alors, une fonction holomorphe $\Phi(x, y)$ au voisinage de l'intersection $(x_1 \in L) \cap (A, B)$ telle que $\Phi = \varphi$ sur Σ' $(y_j = f_j(P),\ j = 1, 2, \ldots, \nu)$. Considérons *l'intégrale de Cousin*,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi(t, x_2, \ldots, x_n, (y))}{t - x_1} dt,$$

dont i signifie l'unité imaginaire, et l'intégrale est prise de bas en haut. Grâce à Cousin, nous savons bien la propriété (ainsi que le rôle) de cette intégrale. En y substituant $y_j = f_j(P)$ $(j = 1, 2, \dots, \nu)$, nous obtenons évidemment la paire de fonctions, demandée.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace (x), fini et sans point critique intérieur. On peut donner un problème de Cousin dans $\mathfrak{D}$, tout comme aux cas précédents, que nous ne repéterons pas.

Supposons que $\mathfrak{D}$ soit *holomorphe-convexe.* $\mathfrak{D}$ est alors, la limite d'une suite croissante de polyèdres analytiques Δ_p de la forme,

$$|x_i| \leq r_i, \quad |f_j(P)| \leq 1, \quad P \in \mathfrak{R} \quad (i = 1, 2, \dots, n;\, j = 1, 2, \dots, \nu)$$

où $(\Delta \Subset \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{D}$, r_i sont des constantes positives et$)$ $f_j(P)$ représentent des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$ jouissant de la propriété indiquée au lemme II. Soit $(\mathfrak{p})$ les pôles donnés dans $\mathfrak{D}$. D'après *le lemme* que nous venons d'établir, nous pouvons trouver une fonction méromorphe $G_p(P)$ au voisinage de Δ_p admettant $(\mathfrak{p})$.

Soit $H_p(P) = G_{p+1} - G_p$, H_p est une fonction holomorphe au voisinage de Δ_p. Soit ε_p un nombre positif quelconque. D'après *le théorème* I, nous obtenons une fonction holomorphe $K_p(P)$ dans $\mathfrak{D}$, telle que $|K_p - H_p| < \varepsilon_p$ sur Δ_p. D'où, d'après le raisonnement habituel, il en résulte que :

Théorème II. *Le premier problème de Cousin est toujours résoluble pour un domaine holomorphe-convexe, fini et sans point critique intérieur, sur l'espace* (x).

B. Problème inverse de Hartogs. – Point de départ.

27. Problème auxiliaire. Nous allons traiter le problème inverse de Hartogs, avec les lemmes I. II, ainsi que les théorème I, II. Suivant l'idée du Mémoire VI, commençons par demander ce qui jouit du rôle de l'intégrale de Cousin.

Décrivons sur l'espace (x) un domaine *borné* (sans point critique intérieur) $\mathfrak{D}$. Soit u la partie réelle de x_1, soient a_1, a_2 des nombres réels tels que $a_1 < 0 < a_2$. Désignons la partie de $\mathfrak{D}$ sur $u < a_2$ par $\mathfrak{D}_1$, celle de $a_1 < u$ par $\mathfrak{D}_2$, et celle de $a_1 < u < a_2$ par $\mathfrak{D}_3$. Supposons *que* $\mathfrak{D}_1$ *et* $\mathfrak{D}_2$ existent effectivement et *soient holomorphe-convexes.* Il en est alors de même pour $\mathfrak{D}_3$.

Soient $f_j(P)$ $(j = 1, 2, \dots, \nu)$ des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}_3$; considérons l'ensemble partiel E de $\mathfrak{D}$ comme ce qui suit : Tout point qui n'appartient pas à $\mathfrak{D}_3$, appartient à E. Quant à un point P de $\mathfrak{D}_3$, il appartient à E, si et seulement s'il satisfait simultanément aux conditions,

$$|f_j(P)| < 1 \qquad (j = 1, 2, \dots, \nu).$$

Supposons que E ait des composantes connexes s'etendant sur les parties $u < a_1$ et $a_2 < u$, à la fois; dont une quelconque sera désignée par Δ. Supposons, relativement à Δ-ci, *que le système de fonctions* (f) *satisfasse aux conditions* (C) *suivante* :

≪ 1° Il existe un nombre positif δ_1 tel que, soit $\mathfrak{A}$ la partie de Δ sur $|u| < \delta_1$, on ait

$$\mathfrak{A} \Subset \mathfrak{D}.$$

2° Il existe un nombre positif δ_2 et un nombre positif ε_0 plus petit que 1, tels que, soit p un quelconque de $1, 2, \ldots, \nu$, les points de $\mathfrak{D}_3$ satisfaisant à

$$|f_p(P)| \geq 1 - \varepsilon_0$$

restent en dehors de $|u - a_1| < \delta_2$ et de $|u - a_2| < \delta_2$.

3° Les systèmes ordonnés de valeurs $(f_1, f_2, \ldots, f_\nu)$ ne coïncident pour aucune paire de points différents de $\mathfrak{A}$ ayant les mêmes coordonnées.≫

D'après la deuxième condition, Δ est un domaine. Prenant un nombre réel ρ_0 tel que $1-\varepsilon_0<\rho_0<1$, considérons l'ensemble partiel Δ_0 de Δ comme suivant : Tout point de Δ qui n'appartient pas à $\mathfrak{D}_3$ appartient à Δ_0. Pour tout point P de Δ qui fait partie de $\mathfrak{D}_3$, il appartient à Δ_0, si et seulement s'il satisfait simultanément aux conditions $|f_j(P)|<\rho_0$ $(j=1, 2, \ldots, \nu)$. D'après la deuxième condition, Δ_0 est un ensemble ouvert sur $\mathfrak{D}$. Désignons la partie de Δ_0 sur $u<0$ par Δ_0' et celle de $u > 0$ par Δ_0''. Dans ces circonstances. nous nous proposons *le problème auxiliaire* suivant:

≪Étant donnée une fonction $\varphi(P)$ holomorphe dans $\mathfrak{A}$, trouver une fonction holomorphe $\varphi_1(P)$ dans Δ_0' et une fonction holomorphe $\varphi_2(P)$ dans Δ_0'', de façon qu'elles restent holomorphes sur la partie de Δ_0 sur $u=0$, et que l'on ait identiquement $\varphi_1(P)-\varphi_2(P)=\varphi(P)$.≫

28. Cas de domaine holomorphe-convexe. Nous considérons le problème, d'abord pour $\mathfrak{D}_3$, au lieu de $\mathfrak{D}$; nous obtiendrons, d'après la méthode exposée à No. 26, une solution (φ_1, φ_2); dont c'est l'expression qui est en question.

Considérons dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$ la variété caractéristique Σ donnée par $y_j = f_j(P)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$, P étant un point quelconque de $\mathfrak{A}$ ayant les coordonnées (x). Comme $\mathfrak{D}$ est borné, prenons un nombre positif r_0 suffisamment grand pour que $\underline{\mathfrak{D}}$ soit contenu dans le polycylindre de centre à l'origine et de rayon r_0 dans l'espace (x); et considérons dans l'espace (x, y) un polycylindre :

$$C \ : \ |x_j| < r, \quad |y_k| < \rho \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

dont $r > r_0$, $\rho_0 < \rho < 1$. Considérons sur $\mathfrak{A}$ l'ensemble partiel $\mathfrak{A}'$ donné par

$$|u| < \delta, \quad |f_k(P)| < \rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

dont δ est un nombre réel $< \delta_1$ (on a nécessairement $\delta_1 < -a_1, a_2$). Comme $\mathfrak{A} \Subset \mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}'$ est un ensemble ouvert tel que $\mathfrak{A}' \Subset \mathfrak{A}$.

Comme $\varphi(P)$ est une fonction holomorphe dans $\mathfrak{A}$, d'après le lemme II, on peut construire une fonction $\Phi(x, y)$ holomorphe dans l'intersection de C et de $|u| < \delta$, de façon que $\Phi = \varphi$ sur Σ. Soit l un segment de l'axe imaginaire du plan x_1 contenant l'origine et ayant les extrémités dans la couronne $r_0 < |x_1| < r$; considérons l'intégrale de Cousin,

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\Phi(x_1', x_2, \ldots, x_n, (y))}{x_1' - x_1} \, dx_1',$$

dont i signifie l'unité imaginaire, et l'intégrale est prise de bas en haut. Substituant $y_k = f_k(P)$ dans l'expression de $\Psi(x, y)$ on a

$$\psi(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\Phi(x_1', x_2, \ldots, x_n, f_1(P), \ldots, f_\nu(P))}{x_1' - x_1} \, dx_1'.$$

La partie de $\psi(P)$ dans l'intersection $\Delta_0' \cap \mathfrak{D}_3$ représente une fonction holomorphe, que nous désignerons par $\psi_1(P)$, soit $\psi_2(P)$ celle de Δ_0''. Ces fonctions $\psi_1(P)$, $\psi_2(P)$ restent holomorphe sur la partie de Δ_0 sur $u = 0$, et satisfond à la relation demandée, $\psi_1(P) - \psi_2(P) = \varphi(P)$.

Nous allons modifier cette expression de la solution (ψ_1, ψ_2). Traçons sur le plan y_k : $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$ le cercle Γ_k de centre à l'origine et de rayon ρ_0; grâce à Cauchy, nous avons,

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^\nu} \int_{\Gamma_1} \frac{dy_1'}{y_1' - y_1} \int_{\Gamma_2} \frac{dy_2'}{y_2' - y_2} \cdots \int_{\Gamma_\nu} \frac{\Phi(x, y')}{y_\nu' - y_\nu} dy_\nu',$$

(les intégrations étant faites au sens direct de Γ_k), pour $|x_i| < r$, $|y_k| < \rho_0$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \nu)$; que nous dénoterons pour le moment par abrégé de la forme suivante,

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^\nu} \int_{(\Gamma)} \frac{\Phi(x, y')}{\prod (y_k' - y_k)} (dy') \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

En substituant cette expression de $\Phi(x, y)$ dans l'expression ci-dessus de $\psi(P)$, nous avons, par abrégé

$$(1) \qquad \psi(P) = \int_{(l, \Gamma)} \chi(x_1', y', P) \, \Phi(x_1', x_2, \ldots, x_n, y')(dx_1', dy'),$$

dont

$$\chi(x_1', y', P) = [(2\pi i)^{\nu+1} (x_1' - x_1)(y_1' - f_1(P)) \cdots (y_\nu' - f_\nu(P))]^{-1}.$$

C'est l'expression voulue de la solution du problème pour $\mathfrak{D}_3$.

29. Cas général. Dans l'expression (1), l'ensemble cylindrique de points $(l, (\overline{\Gamma}))$[46] dans l'espace (x_1', y') est la limite d'une suite décroissante de domaines holomorphe-convexes le contenant; soit V un domaine de la suite. Construisons une fonction méromorphe $\chi_1(x_1', y', P)$ dans $(V, \mathfrak{D}_1)$ qui possède les mêmes pôles que $\chi(x_1', y', P)$ dans $(V, \mathfrak{D}_3)$ et est ailleurs holomorphe, ce qui est possible pourvu que V soit choisi suffisamment voisin de $(l, \overline{\Gamma})$, puisque ceci est un premier problème de Cousin, d'après la deuxième des conditions (C), et que $(V, \mathfrak{D}_1)$ est holomorphe-convexe (théorème II).

Comme la fonction $(\chi - \chi_1)$ est holomorphe dans $(V, \mathfrak{D}_3)$ et que $(V, \mathfrak{D}_3)$ est holomorphe-convexe par rapport à $(V, \mathfrak{D}_1)$, on peut la développer en série de fonctions holomorphes dans $(V, \mathfrak{D}_1)$, convergente uniformément dans l'intérieur complet de $(V, \mathfrak{D}_3)$ (théorème I). Pour un nombre positif donné ε, on peut donc, construire une fonction $F_1(x_1', y', P)$ holomorphe dans $(V, \mathfrak{D}_1)$ telle que $|(\chi - \chi_1) - F_1| < \varepsilon$ pour $(V, \mathfrak{A})$, dont V signifie un nouveau voisinage de $(l, (\overline{\Gamma}))$ à l'intérieur complet de l'ancien. Posons

$$K_1(x_1', y', P) = \chi - \chi_1 - F_1;$$

K_1 est une fonction holomorphe dans $(V, \mathfrak{D}_3)$ telle que $|K_1| < \varepsilon$ pour $(V, \mathfrak{A})$.

Construisons tout pareillement $K_2(x_1', y', P)$ pour $\mathfrak{D}_2$. Modifions, par ces fonctions, l'intégrale (1) comme suivante :

$$(2) \quad I_1(P) = \int_{(l,\Gamma)} [\chi(x_1', y', P) - K_1(x_1', y', P)] \Phi(x_1', x_2, \ldots, x_n, y')(dx_1', dy'),$$

$$I_2(P) = \int_{(l,\Gamma)} [\chi(x_1', y', P) - K_2(x_1', y', P)] \Phi(x_1', x_2, \ldots, x_n, y')(dx_1', dy').$$

Voyons $I_1(P)$; comme $\chi - K_1 = \chi_1 + F_1$, pour tout point déterminé (x_1', y') sur (l, Γ), la fonction $(\chi - K_1)$ est méromorphe dans $\mathfrak{D}_1$, elle est holomorphe pour $P \in \Delta_0'$; $I_1(P)$ représente donc, une fonction holomorphe pour Δ_0'. Pareillement, $I_2(P)$ est holomorphe pour Δ_0''.

Les fonctions analytiques $I_1(P), I_2(P)$ restent holomorphes en tout points de Δ_0 sur $u = 0$, puisque la fonction $\psi(P)$ donnée par (1) possède la même propriété et que K_1, K_2 sont holomorphes. De la propriété de $\psi(P)$, il s'ensuit que

$$(3) \quad I_1(P) - I_2(P) =$$
$$\varphi(P) - \int_{(l,\Gamma)} [K_1(x_1', y', P) - K_2(x_1', y', P)] \Phi(x_1', x_2, \ldots, x_n, y')(dx_1' dy').$$

Posons

$$K(x_1', y', P) = K_1(x_1', y', P) - K_2(x_1', y', P),$$

[46] $(l, (\overline{\Gamma}))$ signifie l'ensemble de points $x_1 \in l, y_j \in (\overline{\Gamma}_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$, $(\overline{\Gamma})$ étant le cercle fermé dont la circonférence est Γ_j.

et envisageons l'identité (3) : $\varphi(P)$ est holomorphe pour $\mathfrak{A}$. K est holomorphe pour $(V, \mathfrak{D}_3)$ et $\Phi(x,y)$ est holomorphe pour $C \cap (|u| < \delta)$; le deuxième membre repésente donc, une fonction holomorphe pour $\mathfrak{A}$, il en est donc, de même pour le premier membre. Posons

$$\varphi_0 = I_1(P) - I_2(P)\,;$$

c'est la première approximation de $\varphi(P)$. Nous avons ainsi vu que *la fonction donnée $\varphi(P)$ et sa première approximation $\varphi_0(P)$ sont holomorphe dans un seul et le même domaine (connexe ou non) $\mathfrak{A}$.* C'est l'idée fondamental.

Evaluons la différence $\varphi' = \varphi - \varphi_0$. On a

$$\varphi' = \int_{(l,\Gamma)} K \cdot \Phi\,(dx_1', dy').$$

Supposons que φ soit bornée dans $\mathfrak{A}$, ceci ne perd pas de généralité; soit M la borne supérieure de $|\varphi|$ pour $\mathfrak{A}$. D'après le *lemme* II, on peut trouver une fonction holomorphe $\Phi(x,y)$ dans $C \cap (|u| < \delta)$ telle que $|\Phi| < NM$, N étant une constante indépendante de φ. Quant à K, on a $K = K_1 - K_2$, dont $|K_1| < \varepsilon$, $|K_2| < \varepsilon$ pour $(l, (\overline{\Gamma}), \mathfrak{A})$. On a donc,

$$|\varphi'(P)| < 2\varepsilon N N_1 M, \quad N_1 = 2r(2\pi\rho_0)^\nu$$

pour $\mathfrak{A}$. Choisissons donc, ε tel que $2\varepsilon N N_1 < \lambda$, λ étant un nombre positif plus petit que 1; nous avons alors, $|\varphi'(P)| < \lambda M$.

Si l'on repart de $\varphi'(P)$ au lieu de $\varphi(P)$, on atteindra tout pareillement à la première approximation de $\varphi'(P)$, soit $\varphi_0'(P)$, holomorphe dans $\mathfrak{A}$ et telle que, soit $\varphi'' = \varphi' - \varphi_0'$, $|\varphi''| < \lambda^2 M$ pour $\mathfrak{A}$. $\varphi_0'(P)$ est donnée par la différence, $I_1'(P) - I_2'(P)$, dont

$$I_1'(P) = \int_{(l,\Gamma)} [\chi(x_1', y', P) - K_1(x_1', y', P)]\Phi'(x_1', x_2, \ldots, x_n, y')(dx_1', dy'),$$

$$I_2'(P) = \int_{(l,\Gamma)} [\chi(x_1', y', P) - K_2(x_1', y', P)]\Phi'(x_1', x_2, \ldots, x_n, y')(dx_1', dy'),$$

dont Φ' représente une fonction holomorphe dans $C \cap (|u| < \delta)$ telle que $|\Phi'| < \lambda N M$. En répétant ce procédé une infinité de fois, on obtient une solution démandée. Ainsi :

Le problème auxiliaire (de No. 27) est toujours résoluble.

Résolution du problème.

30. L'idée du Mémoire II et Lemme I. Rappelons l'idée du Mémoire II. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace (x), soit E un ensemble de points de $\mathfrak{D}$.

Nous appellerons que E est *extérieurement holomorphe-convexe par rapport à* $\mathfrak{D}$, si $E \Subset \mathfrak{D}$, et encore si la fermeture[47] de E sur $\mathfrak{D}$ est la limite d'une suite décroissante des domaines partiels (connexe ou non) de $\mathfrak{D}$, holomorphes-convexes par rapport à $\mathfrak{D}$. Si Δ_1, Δ_2 sont deux domaines partiels (connexe ou non) de $\mathfrak{D}$, holomorphe-convexes par rapport à $\mathfrak{D}$, l'intersection $\Delta_1 \cap \Delta_2$ possède la même propriété. Soit E un ensemble de points tel que $E \Subset \mathfrak{D}$, soient F_1, F_2 deux ensembles de points de $\mathfrak{D}$ contenant E, fermés compacts et extérieurement holomorphe-convexes par rapport à $\mathfrak{D}$; alors, d'après ce qui précède, il en est de même pour $F_1 \cap F_2$. Soit F_p $(p = 1, 2, \ldots)$ une suite décroissante des ensembles de points de $\mathfrak{D}$ jouissant de la même propriété, il en est alors, de même pour la limite.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine *holomorphe-convexe* sur l'espace (x), soit E un ensemble de point *tel que* $E \Subset \mathfrak{D}$. Il existe alors, un ensemble F de points de $\mathfrak{D}$ contenant E, fermé compact et extérieurement holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}$. Soit H l'intersection de tous les F; H est évidemment un ensemble de points de $\mathfrak{D}$ contenant E, fermé et compact sur $\mathfrak{D}$; nous appellerons H, *(H)–fermeture de E par rapport à $\mathfrak{D}$*. $\ll$ H est l'intersection d'un nombre dénonbrable des ensembles F convenables.$\gg$

Rappelons pour l'effet, le mode de raisonnement du théorème I, et nous trouvons immédiatement que : Soit $\mathfrak{D}_0$ un domaine (connexe ou non) tel que $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$, toute fonction holomorphe $f(P)$ dans $\mathfrak{D}_0$ peut s'exprimer d'une série de polynômes par rapport à un nombre fini de fonctions déterminées, holomorphes dans $\mathfrak{D}$, convergente uniformément dans $\mathfrak{D}_0$; dont on peut limiter les parties réelles et imaginaires des coefficients des polynômes dans les nombres rationnels. De là, il s'ensuit immédiatement le résultat cidessus.

Grâce à ce résultat et à ce qui précède, on trouve facilement que :

La (H)–fermeture de E par rapport à $\mathfrak{D}$ est extérieurement holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}$.

Concernant les surfaces caractéristiques, les (H)–fermetures jouissent de la propriété suivante :

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine holomorphe-convexe sur l'espace (x), soit E un ensemble de points tel que $E \Subset \mathfrak{D}$, et soit H la (H)–fermeture de E par rapport à $\mathfrak{D}$. Soit σ_t un morceau de surface caractéristique dépendant du paramètre t sur l'intervalle $0 \leq t \leq 1$, donné de la forme $f(P, t) = 0$, $P \in V$, dont V est un domaine tel que $V \Subset \mathfrak{D}$, et $f(P, t)$ est une fonction holomorphe de (P, t) au voisinage de $(V, [0, 1])$, qui ne s'annule pas identiquement[48]*. Alors, H et*

[47] Le plus petit ensemble fermé sur D contenant E.

[48] Par rapport à P, pour tout t déterminé.

la famille $\{\sigma_t\}$ ne peuvent pas s'associer de la manière suivante:

1° *La distance sur $\mathfrak{D}$ entre H et la frontière de tout σ_t surpasse une constante positive.*

2° *La distance entre E et tout σ_t surpasse une constante positive.*

3° *σ_0 passe par un point de H, et σ_1 se situe à une distance positive de H.*

Supposons par absurde, que la famille $\{\sigma_t\}$ existe effectivement. Nous voulons construire une fonction méromorphe $G(P,t)$ au voisinage de $(H, [0,1])$, admettant les pôles $[f(P,t)]^{-1}$. D'après la première condition, c'est un premier problème de Cousin; H est extérieurement holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}$; par suite, d'après le théorème II, ceci est possible.

Soit α la dernière des valeurs de t telles que σ_t passe par H, quand on fait à t tracer l'intervalle fermé $[0,1]$ de 0 à 1; d'après la troisième condition, α existe certainement. Soit M un des points de H par lesquels σ_α passe. Comme (M,α) est un pôle (n'est pas point d'indétermination) de $G(P,t)$, lorsque t tend vers α sur l'intervalle ouvert $(\alpha,1)$, le module de $G(M,t)$ augmente indéfiniment, tandis que, d'après la deuxième condition, $G(P,t)$ reste holomorphe, quand P se situe au voisinage de E, par suite, si l'on choisit β suffisamment voisin de α sur $(\alpha,1)$, on a $\max|G(E,\beta)| < |G(M,\beta)|$, dont le premier membre signifie la borne supérieure de $|G(P,\beta)|$ sur E.

Comme $G(P,\beta)$ est holomorphe au voisinage de H, d'après le théorème I, on peut développer $G(P,\beta)$ en série de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$, convergente uniformément sur H. On peut donc, trouver une fonction $\Phi(P)$ holomorphe dans $\mathfrak{D}$ et satisfaisant à $\max|\Phi(E)| < |\Phi(M)|$; ce qui contredit que H est le minimum. Donc, la famille $\{\sigma_t\}$ ne peut pas exister.

En appliquant ce principe à la configuration du lemme I, nous aurons :

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine pseudoconvexe sur l'espace (x) , soit $\varphi(P)$ une fonction pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}$ jouissant des propriétés suivantes :

1° *$\varphi(P)$ possède la propriété (P_1).*

2° *Soit $\mathfrak{D}_\alpha$ l'ensemble de points de $\mathfrak{D}$ donné par $\varphi(P) < \alpha$ (α étant un nombre réel quelconque), alors $\mathfrak{D}_\alpha \Subset \mathfrak{D}$.*

Dans cette configuration, si, pour un nombre réel déterminé β, $\mathfrak{D}_\beta$ est holomorphe-convexe, tout $\mathfrak{D}_\alpha$ tel que $\alpha < \beta$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}_\beta$. De plus, si $\mathfrak{D}$ même est holomorphe-convexe, tout $\mathfrak{D}_\alpha$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}$[49].

[49]La première condition de $\varphi(P)$ n'est pas nécessaire (dont la démonstration est immédiate).

Il suffit, pour l'effet, de vérifier la deuxième partie. Supposons que $\mathfrak{D}$ soit holomorphe-convexe. Soit Δ_α l'ensemble de points de $\mathfrak{D}$ donné par $\varphi(P) \leq \alpha$. Comme $\Delta_\alpha \Subset \mathfrak{D}$, il existe alors, la (H)–fermeture de Δ_α par rapport à $\mathfrak{D}$, que nous désignerons par H. Supposons, par absurde, que $H \neq \Delta_\alpha$. Soit $\max \varphi(H) = \beta$, alors, $\beta > \alpha$. Soit P_0 un point de H où $\varphi = \beta$. Rappelons le mode de raisonnnement du théorème que les fonctions pseudoconvexes ayant la propriété (P_0) jouissent de la propriété principale (No. 16); et nous pouvons facilement réaliser dans un voisinage de P_0, la configuration que nous venons d'affirmer d'être absurde. Il faut donc, que $H = \Delta_\alpha$. Comme ceci subsiste pour tout α, $\mathfrak{D}_\alpha$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}$[50].

31. Résolution du problème. Revenons au problème auxiliaire. Remarquons que : ≪Pour Δ–là, le premier problème de Cousin donné dans Δ est toujours résoluble.≫

En effet, comme $\mathfrak{D}_3$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}_1$ et que $f_j(P)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ sont des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}_3$; grâce au théorème I, on peut développer chaque $f_j(P)$ en série de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}_1$ convergente uniformément à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}_3$; la partie de Δ sur $u < a_2$ est donc, holomorphe-convexe, de même pour celle de $a_1 < u$. Supposons qu'un premier problème de Cousin soit donné pour Δ. D'après le théorème II, ce problème est résoluble pour la partie de Δ sur $u < a_2$ ou sur $a_1 < u$. Comme tout problème auxiliaire est résoluble, le premier problème de Cousin donné est résoluble pour Δ.

Considérons comment on peut faire un Δ_0. Supposons sur l'espace (x) un domaine $\mathfrak{D}$ *tel que les parties* $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ *soient holomorphe-convexes.* Comme tout domaine holomorphe-convexe, étant la limite d'une suite croissante de domaines pseudoconvexes, est pseudocovexe, $\mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}_2$, par suite, $\mathfrak{D}$ est pseudoconvexe. On peut donc, appliquer le lemme I à $\mathfrak{D}$, à savoir : Il existe une fonction pseudoconvexe $\varphi(P)$ dans $\mathfrak{D}$ ayant la propriété (P_1) et telle que, pour tout nombre réel α, l'ensemble $\mathfrak{D}_\alpha$ de points de $\mathfrak{D}$ donné par $\varphi(P) < \alpha$ satisfasse à $\mathfrak{D}_\alpha \Subset \mathfrak{D}$. Dénotons la partie de $\mathfrak{D}_\alpha$ sur $u < a_2$ par $\mathfrak{D}'_\alpha$, et celle de $a_1 < u$ par $\mathfrak{D}''_\alpha$; alors :

≪ $\mathfrak{D}'_\alpha$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}_1$ et pareillement pour $\mathfrak{D}''_\alpha$. ≫

En effet, en prenant des nombres réels α', a'_2 tels que $\alpha' < \alpha$, $a'_2 < a_2$, considérons l'ensemble F de points de $\mathfrak{D}_1$ donné par $\varphi(P) \leq \alpha'$, $u \leq a'_2$

[50] Par le même ordre d'idée, on peut vérifier simplement le théorème I du Mémoire II pour le présent cas, sans appeler au Mémoire VIII.

(supposons que $F \supset O$). Comme $F \Subset \mathfrak{D}_1$ et que $\mathfrak{D}_1$ est holomorphe-convexe, on peut considérer la (H)-fermeture H de F par rapport à $\mathfrak{D}_1$. D'après le mode de raisonnement exposé au numéro précédent, nous reconnaissons immédiatement que $F = H$. Donc, $\mathfrak{D}'_\alpha$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}_1$. Tout pareillement, $\mathfrak{D}''_\alpha$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}_2$.

Comme il en est ainsi pour $\mathfrak{D}_\alpha$ et que $\mathfrak{D}_\alpha$ est borné, nous allons construire Δ_0 dans $\mathfrak{D}_\alpha$. Pour cela, il s'agit de trouver le système de fonctions holomorphes $f_j(P)\,(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ dans l'intersection $\mathfrak{D}'_\alpha \cap \mathfrak{D}''_\alpha$ satisfaisant aux conditions (C) (No. 27). Envisageons ces conditions. Soient $(S_1), (S_2)$ deux systèmes finis de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}'_\alpha \cap \mathfrak{D}''_\alpha$; supposons que (S_1) satisfasse aux première et deuxième conditions et que (S_2) satisfasse aux troisième et deuxième conditions, nous trouvons alors, que la somme $(S_1) \cup (S_2)$ remplie ces trois conditions. Il suffit donc, de les construire séparément.

Commençons par construire le système (S_2). Comme $\mathfrak{D}_1$ est holomorphe-convexe, on peut trouver un système fini (S) de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}_1$ satisfaisant à la troisième condition pour $\mathfrak{D}_\alpha$. Pour faire à (S) satisfaire à la deuxième condition, pour $\mathfrak{D}_\alpha$, il suffit de multiplier toutes les fonctions de (S) par un nombre suffisamment petit.

Quant à (S_1), soit P_0 un point quelconque de l'ensemble, $\varphi(P) = \alpha,\ u = 0$. On peut tracer une surface caractéristique σ_0 passant par P_0 et restant dans la partie $\varphi(P) > \alpha$, excepté à P_0, au voisinage de P_0. Soit $f(P) = 0$ l'équation de σ_0, $f(P)$ étant une fonction holomorphe. Soit β un nombre réel plus grand que α; nous voulons construire une fonction méromorphe $G(P)$ dans la partie de $\mathfrak{D}_\beta$ sur $u < a_2$ admettant les pôles $[f(P)]^{-1}$. Comme cette partie de $\mathfrak{D}_\beta$ est holomorphe-convexe, si l'on choisit β suffisamment voisin de α, ceci est possible d'après le théorème II. Nous prenons, à nouveau, comme a_2, un nombre réel un peu plus petit que l'ancien; alors, la fonction $G(P)$ est holomorphe pour $\mathfrak{D}'_\alpha$, méromorphe au voisinage de $\mathfrak{D}'_\alpha$; sur la frontière de l'ensemble de points $\mathfrak{D}'_\alpha$, elle admet un seul pôle à P_0. Comme P_0 est un point quelconque sur l'ensemble, en vertu du lemme de Borel, on peut facilement trouver un système (S_1). En rappelant le mode de raisonnement que nous venons de faire, nous trouvons que :

≪Soient α, α' deux nombres réels tels que $\alpha' < \alpha$, mais d'ailleurs quelconques. On peut faire un Δ_0 de $\mathfrak{D}_\alpha$, de façon que $\Delta_0 \Supset \mathfrak{D}_{\alpha'}$.≫

Ceci subsiste sous l'hypothèse que $\mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}_2$ soient holomorphe-convexes. Dans la même condition, nous allons montrer que :

≪ $\mathfrak{D}_\alpha$ est holomorphe-convexe.≫

Vérifions d'abord la premiére condition qu'il existe une fonction $f_0(P)$ dans $\mathfrak{D}_\alpha$ admettant les éléments de Taylor différents à toute paire de points différents de $\mathfrak{D}_\alpha$. Soint P_1, P_2 une paire de points différents de $\mathfrak{D}_\alpha$ ayant les mêmes coordonnées, mais d'ailleurs quelconques. Nous voulons de construire une fonction holomorphe $f(P)$ dans $\mathfrak{D}_\alpha$, telle que $f(P_1) \neq f(P_2)$. Nous allons y appliquer *la méthode de H. Cartan*[51]. Soient (x^0) les coordonnées communes de P_1 et de P_2; le point (x_0) se situe dans une au moins des portions $u < a_2$, $a_1 < u$, soit dans $u < a_2$, pour fixer l'idée. Comme $\mathfrak{D}_1$ est holomorphe-convexe, on peut trouver une fonction holomorphe $\psi(P)$ dans $\mathfrak{D}_1$ telle que $\psi(P_1) \neq \psi(P_2)$. D'après ce que nous venons de voir, on peut trouver une fonction méromorphe $G(P)$ dans $\mathfrak{D}_\alpha$ admettant les pôles $\psi(P)(x_1 - x_1^0)^{-1}$. Posons $f(P) = (x_1 - x_1^0)G(P)$; la fonction $f(P)$ est alors, holomorphe dans $\mathfrak{D}_\alpha$, et elle prend la valeur $\psi(P)$ sur $x_1 - x_1^0 = 0$; elle est donc, une des fonctions voulues. Par là, on peut facilement construire la fonction $f_0(P)$ demandée.

Passons à la deuxième condition, que l'on puisse trouver, pour tout domaine (connexe ou non) Δ tel que $\Delta \Subset \mathfrak{D}_\alpha$, deux domaines (connexes ou non) Δ', Δ'' satisfaisant à $\Delta \subseteq \Delta' \Subset \Delta'' \subseteq \mathfrak{D}_\alpha$, de façon qu'à tout point P_0 de $\Delta'' - \Delta'$ corresponde une fonction holomorphe $f(P)$ dans $\mathfrak{D}_\alpha$ satisfaisant à $|f(P_0)| > \max |f(\Delta)|$. Or, pour tout point P_0 de $\mathfrak{D}$ tel que $\varphi(P_0) = \alpha$, on peut trouver une fonction $G(P)$ holomorphe dans $\mathfrak{D}_\alpha$, méromorphe au voisinage de $\mathfrak{D}_\alpha$, et sur $\varphi(P) = \alpha$, elle admet un seul pôle (différent de point d'indétermination) au point P_0. D'où il s'ensuit immédiatement que $\mathfrak{D}_\alpha$ satisfait à la deuxième condition (où on peut prendre toujours $\Delta'' = \mathfrak{D}_\alpha$).

Soit ensuite, $\mathfrak{D}$ un domaine *pseudoconvexe* sur l'espace (x). Dans la configuration du lemme II, nous allons montrer que :

(α) $\ll$ Si tout $\mathfrak{D}_\alpha$ est holomorphe-convexe, $\mathfrak{D}$ est aussi holomorphe-convexe.$\gg$

En effet, alors, d'après *ce que nous avons vu à la fin du numéro précédent*, si $\alpha < \beta$, $\mathfrak{D}_\alpha$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}_\beta$. Par suite, d'après le théorème I, toute fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}_\alpha$ est développable en série de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}_\beta$, convergente uniformément à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}_\alpha$. Soit α_p $(p = 1, 2, \dots)$ une suite de nombres positifs tels que $\alpha_p < a_{p+1}$, s'augmentent indéfiniment (dont nous choisissons α_1 suffisamment grand pour que $\mathfrak{D}_{\alpha_1} \supset O$). Soit $f(P)$ une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}_{\alpha_2}$, soit ε un nombre positif donné; nous voulons construire $\ll$une fonction holomophe $F(P)$ dans $\mathfrak{D}$, de façon que l'on ait $|f(P) - F(P)| < \varepsilon$

[51]Un mode d'application du premier problème de Cousin. Voir la Note à la page 249 du Mémoire I.

pour $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$. ≫ Soit ε_p $(p=1,2,\ldots)$ une suite de nombres positifs tel que $\Sigma\varepsilon_p$ converge vers un nombre $<\varepsilon$. D'après ce qui précède, on peut trouver une fonction holomorphe $f_1(P)$ dans $\mathfrak{D}_{\alpha_3}$ telle que $|f(P)-f_1(P)|<\varepsilon_1$ pour $\mathfrak{D}_{\alpha_2}$. Nous construisons ensuite, une fonction holomorphe $f_2(P)$ pour $\mathfrak{D}_{\alpha_4}$ telle que $|f_1(P)-f_2(P)|<\varepsilon_2$ pour $\mathfrak{D}_{\alpha_2}$ et ainsi de suite. Nous aurons alors, la suite $f_2(P), f_3(P), \ldots, f_p(P), \ldots$ qui converge uniformément à l'intérieur de $\mathfrak{D}$; par suite, la limite $F(P)$ est une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$; et pour $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$, on a $|f(P)-F(P)|<\varepsilon$.

Cela étant, examinons la première condition pour que $\mathfrak{D}$ soit holomorphe-convexe. Soit P_1, P_2 une paire de points différents de $\mathfrak{D}$ ayant les mêmes coordonnées, mais d'ailleurs quelconques. Si l'on prend α_1 suffisamment grand, $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ contient ces points. Comme $\mathfrak{D}_{\alpha_2}$ est holomorphe-convexe, on peut trouver une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}_{\alpha_2}$ telle que $f(P_1) \neq f(P_2)$. Choisissons ε tel que $|f(P_1)-f(P_2)|>2\varepsilon$. Soit $F(P)$ la fonction indiquée ci-dessus, correspondant à ces f, ε. $F(P)$ est holomorphe dans $\mathfrak{D}$ et $F(P_1) \neq F(P_2)$. On peut donc, construire une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$, admettant les éléments de Taylor différents pour toute paires de points différents de $\mathfrak{D}$.

Examinons la deuxième condition. Soit Δ un domaine tel que $\Delta \Subset \mathfrak{D}$, mais d'ailleurs quelconque. Pour α_1 suffisamment grand, on a $\Delta \Subset \mathfrak{D}_{\alpha_1}$. Comme $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}_{\alpha_2}$, il existe deux domaines (connexes ou non) Δ', Δ'', tels que $\Delta \subseteq \Delta' \Subset \Delta'' \subseteq \mathfrak{D}_{\alpha_1}$, et qu'à tout point P_0 de $\Delta''-\Delta'$, corresponde une fonction holomorphe $f(P)$ dans $\mathfrak{D}_{\alpha_2}$ satisfaisant à $|(P_0)| > \max|f(\Delta)|$. En choisissant ε tel que $|f(P_0)|-\max|f(\Delta)|>2\varepsilon$, construisons la fonction $F(P)$; $F(P)$ est alors, holomorphe dans $\mathfrak{D}$ et telle que $|F(P_0)| > \max|F(\Delta)|$. Les deux conditions étant ainsi remplies, $\mathfrak{D}$ est holomorphe-convexe.

En combinant ces deux résultats intermédiaires, nous avons :

(β) ≪Soit $\mathfrak{D}$ un domaine tel que $\mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}_2$ soient holomorphe-convexes; $\mathfrak{D}$ l'est aussi.≫

Soit maintenant, $\mathfrak{D}$ un domaine pseudoconvexe sur l'espace (x) . Soit P_0 un point quelconque sur la frontière de l'ensemble $\mathfrak{D}_\alpha$. D'après le raisonnement du théorème à No. 16, que toute fonction ayant la propriété (P_0) jouit de la propriété principale, on trouve immédiatement que l'intersection de $\mathfrak{D}_\alpha$ et d'un voisinage polycylindrique suffisamment petit de centre P_0 est holomorphe-convexe. Par suite, d'après (β), $\mathfrak{D}_\alpha$ est holomorphe-convexe; donc, d'après (α), $\mathfrak{D}$ l'est aussi; que nous formulons :

Théorème III. *Tout domaine pseudoconvexe sans point critique inté-*

rieur sur l'espace (x) est holomorphe-convexe.

D'où il s'ensuit immédiatement que, dans la définition de *domaines holomorphe-convexes*, ou de *polyèdre analytiques, la première condition n'est que la conséquence de la deuxième.*

32. Domaines pseudoconvexes et domaines d'holomorphie.

Corollaire. *Tout domaine pseudoconvexe fini sans point critique intérieur sur l'espace (x) est un domaine d'holomorphie.*

Soit en effet, $\mathfrak{D}$ un domaine pseudoconvexe sur l'espace (x) . D'après le théorème III, $\mathfrak{D}$ est holomorphe-convexe; il existe donc, une fonction holomorphe $F_1(x)$ dans $\mathfrak{D}$ ayant les éléments de Taylor différents à tout paire de points différents de $\mathfrak{D}$. Supposons qu'il y ait une fonction holomorphe $F_2(x)$ dans $\mathfrak{D}$ telle que l'on ne puisse la prolonger analytiquement en passant par aucun point frontière de $\mathfrak{D}$; et considérons $F(P) = F_1(P) + cF_2(P)$, c étant une constante. On trouve que, si l'on choisit c convenablement, F conserve le caractère de F_1 et celui de F_2 (pour cela, il suffit d'éviter un nombre dénombrable de valeurs au plus). Il nous suffit donc, de construire une fonction $F_2(P)$.

Comme le domaine $\mathfrak{D}$ est holomorphe-convexe, il est la limite d'une suite de polyèdre analytiques Δ_p $(p = 1, 2, \ldots)$ tel que $\Delta_p \Subset \Delta_{p+1}$. Chaque Δ_p sera donné de la forme,

$$|f_j(P)| \leq 1, \quad P \in \mathfrak{R}_p \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où $f_j(P)$ sont des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$ (dépendant de p), $\mathfrak{R}_p$ est un domaine partiel (connexe ou non) de $\mathfrak{D}$ tel que $\mathfrak{R}_p \Supset \Delta_p$, (et ν dépend de p).

Concernant les points frontières du domaine $\mathfrak{D}$, nous pouvons choisir une suite de points Q_p $(p = 1, 2, \ldots)$ de $\mathfrak{D}$ comme ce quit suit :

1° $Q_p \in (\mathfrak{R}_p - \Delta_p)$.

2° Tout point frontière de $\mathfrak{D}$ s'exprime d'une suite partielle convenable de Q_p $(p = 1, 2, \ldots)$.

Soit ε_p $(p = 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres positifs telle que la somme $\sum \varepsilon_p$ soit convergente. A tout Q_p correspond une des fonctions $f_j(P)$ telle que, si nous la dénotons à nouveau par $\varphi_p(P)$, soit $\varphi_p(Q_p) = a_p$, on ait $|a_p| > 1$, $|\varphi_p(P)| \leq 1$ pour Δ_p. Posons $\psi_p(P) = [\varphi_p(P) - a_p]^p$. Soit σ_p la surface caractéristique sur $\mathfrak{D}$ donnée par $\varphi_p(P) = a_p$; (σ_p passe par Q_p. ψ_p est alors, une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$ admettant les zéros d'ordre p sur σ_p; elle ne s'annule pas sur Δ_p.

En vertu du *théorème* I, on peut trouver une fonction holomorphe $\chi_p(P)$ dans $\mathfrak{D}$, telle que l'on ait pour Δ_p,

$$\left|\frac{1}{\psi_p(P)} - \chi_p(P)\right| < \frac{\varepsilon_p}{|\psi_p(P)|}.$$

Posons

$$F_2(P) = \prod [\psi_p(P) \cdot \chi_p(P) - 1] \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Ce produit infini converge absolument et uniformément à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$, puisque

$$|\psi_p(P) \cdot \chi_p(P) - 1| < \varepsilon_p$$

pour Δ_p. La limite $F_2(P)$ est donc, une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$, dont les zéros sont donnés par la somme des zéros de facteur $(\psi_p \cdot \chi_p)$. Par suite, $F_2(P)$ admet les zéros d'ordre p au moins sur la surface caractéristique σ_p, qui passe par Q_p, p étant quelconque. Donc, nous ne pouvons prolonger $F_2(P)$ en passant par aucun point frontière de $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}$ est donc, un domaine d'holomorphie.

C. Autres problèmes.

33. Deuxième problème de Cousin. Pour le deuxième problème de Cousin, le cas du Mémoire actuel est le dernier où il subsiste conservant la forme originale et la généralité, en effet; si l'on introduit les points à l'infini, il est à priori évident que la solution holomorphe n'existe plus, en général; si l'on admet les points critiques non-transcendants intérieurs, des zéros distribués sur une surface caractéristique sur un domaine n'est pas, même localement, l'ensemble de zéros d'une seule fonction holomorphe, en général, comme nous l'avons déjà remarqué dans le Mémoire précédent. Le problème inverse de Hartogs étant résolu, il nous suffit de traiter ce problème pour les domaines holomorphe-convexes.

Nous avons traité ce problème au Mémoire III, pour les domaines d'holomorphie univalents et finis; où en un mot, nous avons étendu le problème même au champs de fonctions continues pour acquérir une notion auxiliaire, avec laquelle, nous avons exprimé la conclusion, à savoir; s'il existe une solution non-analytique, les solutions analytiques existent aussi. C'est ce résultat-ci que nous allons étendre.

Répétons brièvement les notions générales pour le cas actuel. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine (fini sans point critique intérieur) sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}$. Soient $f_1(P), f_2(P)$ deux fonctions continues[52] sur $\mathfrak{D}$; nous appellerons que f_1 et f_2 sont *équivalentes* $(f_1 \sim f_2)$ pour

[52] Sous le mot, fonction continue, nous sous-entendrons toujours d'être univoque.

$\mathfrak{D}$, s'il existe une fonction continue non-nulle $\lambda(P)$ telle que l'on ait identiquement $f_1(P)=f_2(P)\cdot\lambda(P)$ dans $\mathfrak{D}$. Quand $f_1 \sim f_2$ pour $\mathfrak{D}$, si l'ensemble de zéros n'admet pas de point intérieur, $\lambda(P)$ est *unique*; mais, si non, $\lambda(P)$ n'est pas déterminée, d'où il s'ensuit des phénomènes étranges. *Nous ometterons donc, ce cas-ci* (où une fonction continue s'annule identiquement au voisinage d'un point), toujours dans la suivante.

Etant donnés, pour un point quelconque P_0 de $\mathfrak{D}$, un voisinage polycylindrique γ autour de P_0 et une fonction continue $f(P)$ définie dans γ, de façon que, pour toute paire de γ contigus, les fonctions correspondantes soient équivalentes dans l'intersection (condition d'équivalence), trouver une fonction continue, $F(P)$ dans $\mathfrak{D}$ telle que l'on ait toujours, $F(P) \sim f(P)$ dans γ. C'est *le deuxième problème de Cousin généralisé.* Si la fonction $F(P)$ existe, nous appelons que $F(P)$ prend les zéros $(\mathfrak{z})$ donnés dans $\mathfrak{D}$, dont $(\mathfrak{z})$ s'exprime du système $\{(f, \delta)\}$ (remplissant la condition d'équivalence).

Pour distinguer le problème propre de Cousin du problème généralisé, nous employons les termes, *zéros analytiques, solutions analytiques*, et par fois, pour le but contraire, les termes contraires, *zéros continus, solutions non-analytiques*,$\cdots$. Lorsque des zéros analytiques $(\mathfrak{z})$ sont donnés dans un domaine $\mathfrak{D}$, il se présente les deux problèmes, à la fois.

Etant donnés des $(\mathfrak{z})$ dans un domaine $\mathfrak{D}$, nous appelons que $(\mathfrak{z})$ sont *balayables*, s'il correspond, à tout point P_0 de $\mathfrak{D}$, un voisinage polycylindrique γ de centre P_0 et une fonction continue $f(P,t)$ définie pour $P \in \gamma$, $0 \le t \le 1$, satisfaisant aux trois conditions suivantes :

1° $f(P,0)$ possède les zéros $(\mathfrak{z})$, $f(P,1)$ ne s'annule pas.

2° $f(P,t)$ ne s'annule identiquement à aucune portion à $(2n+1)$ dimensions réelles.

3° Soient (f_1, γ_1), (f_2, γ_2) deux quelconques de $\{(f, \gamma)\}$, soit $\delta = \gamma_1 \cap \gamma_2$; si $\delta \supset O$, $f_1(P,t) \sim f_2(P,t)$ pour $(P \in \delta,\ 0 \le t \le 1)$.

Etant donnés des zéros $(\mathfrak{z})$ dans un domaine $\mathfrak{D}$, *s'il existe une fonction continue $F(P)$ dans $\mathfrak{D}$ admettant les zéros $(\mathfrak{z})$, $(\mathfrak{z})$ sont nécessairement balayable pour $\mathfrak{D}$.* Pour l'affirmer, il suffit de considérer,

$$f(P,t) = (1-t)F(P) + t.$$

Si des zéros $(\mathfrak{z})$ donnés dans $\mathfrak{D}$ sont balayables, nous pouvons choisir un système $\{(f(P,t), \gamma)\}$ tel que l'on ait toujours $f(P,1) = 1$ identiquement; encore si $(\mathfrak{z})$ sont analytiques, nous pouvons le choisir encore que $f(P,0)$ soit toujours holomorphe.

Relativement à cette notion, soit $\lambda(P)$ une fonction continue *non-nulle* dans un domaine $\mathfrak{D}$, nous appelons que $\lambda(P)$ satisfait à *la condition* (α)

pour $\mathfrak{D}$, s'il existe une fonction continue non-nulle $\lambda(P,t)$ pour $(\mathfrak{D},[0,1])$ telle que $\lambda(P,0)=\lambda(P)$, $\lambda(P,1)=1$ pour tout P de $\mathfrak{D}$. Nous aurons le lemme suivant :

Pour que toute détermination de $\log\lambda(P)$ *soit uniforme dans* $\mathfrak{D}$*, il faut et il suffit que* $\lambda(P)$ *satisfasse à la condition* (α) *pour* $\mathfrak{D}$.
Quant à la démonstration puisqu'il n'y a rien à modifier, nous la répéterons pas.

Nous sommes en train d'étendre la conclusion du Mémoire III au cas actuel. Or, dans ces circonstances, il sera le plus favorable d'employer *la méhode du Mémoire* II. Etandrons pour cela *le théorème* I (du Mémoire II):

Considérons dans l'espace (x) *un polycylindre fermé* C : $|x_i|\leq r_i$ $(i=1, 2,\dots,n)$ *et une variété caractéristique* Σ *définie au voisinage de* C*; soit* Σ_0 *la partie de* Σ *sur* C*. Alors,* Σ_0 *est extérieurement holomorphe-convexe par rapport à l'espace* (x) *(autrement dit, par rapport aux polynômes).*

Considérons pour l'effet, l'idéal géométrique $(\mathfrak{I})$ de domaines indéterminés attaché à Σ, défini dans un certain voisinage de C. Grâce au théorème de *H. Cartan*, $(\mathfrak{I})$ possède les pseudobases locales (voir Mémoire VIII). Par suite, d'après *le théorème 3 du Mémoire* Vll, $(\mathfrak{I})$ possède les pseudobases au voisinage de C. D'où, il en résulte le lemme ci-dessus.

Théorème IV. *Etant donnés des zéros analytiques* $(\mathfrak{z})$ *dans un domaine pseudoconvexe* $\mathfrak{D}$ *fini sans point critique intérieur sur l'espacc* (x)*, s'il existe une solution non-analytique, les solutions analytiques le sont aussi.*

En effet, alors, $(\mathfrak{z})$ étant balayables, il existe un système $\{(f(P,t),\gamma)\}$ satisfaisant aux conditions indiquées relativement à $(\mathfrak{z})$; dont, nous supposerons que toute $f(P,0)$ soit holomorphe et que toute $f(P,1)$ soit la constante 1.

Le domaine $\mathfrak{D}$ peut s'exprime de la limite d'une suite de polyèdres analytiques Δ_p $(p=1,2,\dots)$ telle que $\Delta_p\Subset\Delta_{p+1}$. Chaque Δ_p est représenté au sens habituel, de la forme

$$|x_i|\leq r_i,\quad |g_j(P)|\leq 1,\quad P\in\mathfrak{R}\quad (i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,\nu)$$

$(g_j(P)$ étant holomorphes dans $\mathfrak{D})$. Considérons la configuration de lemme II relativement au polyèdre Δ_p-ci; nous avons C,Σ,V à l'espace $(x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_\nu)$ (No. 24.). Nous avons vu que, étant donnée une fonction holomorphe $\varphi(P)$ dans Δ_p, on peut la regarder comme être définie dans V. Par la même méthode, on peut regarder les zéros balayables $(\mathfrak{z})$ ainsi que le système correspondant $\{(f(P,t),\gamma)\}$ comme être donnés dans V; dont V est holomorphe-convexe par rapport à l'espace (x,y), d'après le lemme ci-dessus, pourvu que V soit suffisamment voisin de Σ. Par suite, d'après ce que nous avons vu dans le Mémoire III (No. 8), nous obtenons une solution spéciale, jouissant de la propriété indiquée. En substituant $y_j = g_j(P)\,(j=1,2,\ldots,\nu)$ dans cette solution, nous aurons une solution spéciale pour Δ_{p-1} $(p>1)$.

Nous avons ainsi, pour tout Δ_p, une fonction $F_p(P,t)$, elle est continue pour $[P\in\Delta_p,\ 0\le t\le 1]$ et telle que $F_p(P,0)$ soit une fonction holomorphe dans Δ_p et que $F_p(P,1)=1$ identiquement et encore que $F_p(P,t)\sim f(P,t)$ pour $[P\in\gamma,\ 0\le t\le 1]$. De là il en résulte le théorème, dont le mode de raisonnement étant littéralement même qu'au Mémoire III (No. 9), nous l'omettons.

En appliquant le même mode de raisonnement au problème généralisé, on peut obtenir plus facilement le critère suivant :

Pour que le deuxième problème de Cousin généralisé soit résoluble, il faut et il suffit que les zéros donnés soient balayables.

34. Problèmes $(\mathbf{C_1})$, $(\mathbf{C_2})$, $(\mathbf{E})$, solutions incomplètes. Suivant le plan du Mémoire VII, nous allons appliquer *la méhode de Mémoire* I aux problèmes $(\mathrm{C}_1),(\mathrm{C}_2)$ et (E).

Commençons par *le problème* (C_1) *généralisé* dans le Chapitre I.

(α) ≪Étant donné une équation fonctionnelle

$$(1)\qquad \Phi_i=\sum A_jF_{ij}\qquad (i=1,2,\ldots,p;j=1,2,\ldots,q)$$

au voisinage d'un polyèdre analytique Δ, dont Φ_i, F_{ij} représentent les fonctions holomorphes déterminées, et A_j signifient les fonctions inconnues. Si cette équation admet une solution locale partout au voisinage de Δ, elle admet une solution (globale) pour un voisinage de Δ.≫

Supposons pour l'effet, que Δ soit donné au sens habituel de la forme,

$$|x_i|\le r_i,\quad |g_j(P)|\le 1,\quad P\in\mathfrak{R}\quad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,\nu);$$

et considérons, dans l'espace (x,y), le polycylindre fermé :

$$C\ :\ |x_i|\le r_i,\qquad |y_j|\le 1$$

et la variété caractéristique Σ donnée par $y_j=f_j(P)$, $P\in\mathfrak{R}$. Dans cette configuration, d'après le lemme II, on peut trouver des fonctions holomorphes $G_{kl}(x,y)$, $\Psi_k(x,y)$ $(k=1,2,\ldots,p;\,l=1,2,\ldots,q)$ au voisinage de C telles que l'on ait sur Σ, $G_{kl}=F_{kl}$, $\Psi_k=\Phi_k$. Soit $(\mathfrak{J}_0)$ l'idéal géométrique (de domaine indéterminés) attaché à Σ et défini dans un voisinage de C, et soit $(H_1,H_2,\ldots,H_\lambda)$ une pseudobase de $(\mathfrak{J}_0)$ pour un voisinage de C.

Considérons l'équation fonctionnelle

$$(2) \qquad \Psi_i = \sum A_j G_{ij} + \sum B_{ik} H_k$$
$$(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q;\ k = 1, \ldots, \lambda)$$

au voisinage de C; A_j, B_{ik} étant des fonctions inconnues. Comme l'équation (1) admet une solution locale en tout point d'un voisinage de Δ, il en est de même pour l'équation (2) au voisinage de C. Par suite. d'après ce que nous avons vu à No. 4, on peut trouver des fonctions holomorphes A_j, B_{ik} au voisinage de C, satisfaisant à l'équation (2). D'où, en substituant $y_l = g_l(P)\,(l=1, 2, \ldots, \nu)$, il s'ensuit le résultat voulu.

Quant au *problème* (C_2) :

(β) ≪Soit Δ un polyèdre analytique sur l'espace (x), soit $F_1(P), F_2(P), \ldots, F_\mu(P)$ un système de fonctions holomorphes au voisinage de Δ. Etant donnés pour tout point P_0 au voisinage de Δ, un voisinage polycylindrique γ de centre P_0 et une fonction holomorphe $\varphi(P)$ définie dans γ, de façon que, pour toute paire (γ_1, γ_2) des voisinages polycylindriques, les fonctions correspondantes φ_1, φ_2 satisfassent à $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \mod (F)$ en tout point de l'intersection $\gamma_1 \cap \gamma_2$, on peut toujours trouver une fonction holomorphe $\Phi(P)$ telle que $\Phi(P) \equiv \varphi(P) \mod (F)$ en tout point de γ, γ étant quelconque.≫

En effet, dans la même configuration, soit $G_i(x, y)\,(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ des fonctions holomorphes au voisinage de C telles que $G_i = F_i$ sur Σ. Considérons un problème (C_2) au voisinage de C comme ce qui suit : Nous allons attacher une fonction $\psi(x, y)$ à tout point (x^0, y^0) au voisinage de C. Si (x^0, y^0) est un point de Σ, prenons pour ψ une fonction qui prend la valeur φ sur Σ. Si non, prenons ψ hasard. Dans ces circonstances, trouver une fonction holomorphe $\Psi(x, y)$ au voisinage de C telle que $\Psi \equiv \psi \mod (G, H)$ à tout point (x^0, y^0), (H) signifiant la même pseudobase. Ceci est évidemment un problème (C_2), donc, d'après le théorème 2 de VII, $\Psi(x, y)$ existe. Posons $\Phi(P) = \Psi(x, g(P))$; $\Phi(P)$ est alors, la fonction demandée.

Soit ensuite, $\mathfrak{D}$ un domaine sur l'espace (x). Considérons une couple ordonnée (f, δ), dont δ signifie un domaine partiel (connexe ou non) de $\mathfrak{D}$ et f exprime une fonction holomorphe définie dans δ. Sur ces (f, δ), nous pouvons définir tout pareillement qu'au Mémoire VII, *les idéaux (holomorphes de domaines indéterminés) sur* $\mathfrak{D}$, *les pseudobases* (finies) d'un idéal,$\cdots$; que nous ne répéterons pas. Pour le problème (E), nous verrons :

Théorème V. *Etant donné, sur un domaine pseudoconvexe $\mathfrak{D}$, fini et sans point critique intérieur sur l'espace (x), un idéal holomorphe $(\mathfrak{I})$ de domaines indéterminés admettant une pseudobase fini en tout point de $\mathfrak{D}$, on peut trouver une pseudobase finie de $(\mathfrak{I})$ pour tout domaine donné $\mathfrak{D}_0$ tel que $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$.*

Considérons pour l'effet, la configuration usuelle du lemme II, sous les mêmes notations qu'aux propositions (α), (β), en supposant que $\mathfrak{D}_0 = \Delta$ puisque $\mathfrak{D}$ est pseudoconvexe).

Soit V un voisinage suffisamment voisin de C. Soit (φ, δ') une couple ordonnée, dont δ' signifie un domaine (connexe ou non) univalent dans l'espace (x, y) et φ exprime une fonction holomorphe définie dans δ'. Considérons l'ensemble (J) de (φ, δ') tel que l'on ait $\delta' \subseteq V$ et que, soit $[x, g(P)]$ un point quelconque de Σ dans δ', la fonction $\varphi[x, g(P)] = f(P)$ appartienne localement à $(\mathfrak{I})$. (J) forme évidemment un idéal, sans point lacunaire dans V.

Soit P_0 un point quelconque au voisinage de Δ, soit $[f_1(P), f_2(P), \dots, f_\mu(P)]$ une pseudobase de $(\mathfrak{I})$ en P_0. Soit (x^0) les coordonnées de P_0, soit M_0 le point sur Σ ayant les coordonnées $[x^0, g(P_0)]$. Soient $\varphi_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \dots, \mu)$ une fonction holomorphe en M_0 telle que $\varphi_i = f_i$ sur Σ. Alors, $(\varphi_1, \dots, \varphi_\mu, H_1, \dots, H_\lambda)$ donne évidemment une pseudobase de (J) en M_0 ((H) signifie la pseudobase indiquée). En tout point de V, qui n'appartient pas à Σ, (J) possède (1) pour pseudobase. Donc, d'après le théorème 3 de VII, (J) possède une pseudobase (finie) pour un voisinage de C. D'où, en substituant $y_j = g_j(P)$ $(j = 1, 2, \dots, \nu)$, il s'ensuit le théorème.

35. Résolution complète des problèmes de congruence. Il s'agit de résoudre les problèmes pour les domaines pseudoconvexes mêmes. Pour *les problèmes* (C_1), (C_2), ceci est possible, comme nous allons exposer.

Théorème VI. *Etant donnée, dans un domaine pseudoconvexe $\mathfrak{D}$, fini et sans point critique intérieur sur l'espace (x) , une équation fonctionnelle*

$$(1) \qquad \Phi_i = \sum A_j F_{ij} \qquad (i = 1, 2, \dots, \mu;\ j = 1, 2, \dots, \mu')$$

dont Φ_i, F_{ij} représentent les fonctions holomorphes déterminées, et A_j signifient les fonctions inconnues. Si cette équation admet une solution locale partout dans $\mathfrak{D}$, elle admet une solution pour $\mathfrak{D}$.

En effet, $\mathfrak{D}$ peut s'exprimer de la limite d'une suite de polyèdres analytiques Δ_p $(p = 1, 2, \dots)$, telle que $\Delta_p \Subset \Delta_{p+1}$ dont chaque Δ_p est exprimé par des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$. D'après le résultat intermédiaire

(α), il existe une solution $(A_{p1}, A_{p2}, \dots, A_{p\mu'})$ pour un voisinage de Δ_p. De là, nous allons construire une autre solution (A'_p) comme ce qui suit :

Quant à (A'_1), posons $A'_{1i} = A_{1i}$ $(i = 1, 2, \dots, \mu')$.

Pour construire (A'_2), posons $B_i = A_{2i} - A'_{1i}$ $(i = 1, 2, \dots, \mu')$ le système (B) satisfait, au voisinage de Δ_1, à l'équation fonctionnelle linéaire suivante:

$$(2) \qquad B_1 F_{i1} + B_2 F_{i2} + \cdots + B_{\mu'} F_{i\mu'} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \mu')$$

Soit $(\mathfrak{I}_1)$ l'ensemble de (B_1, δ) tel qu'à tout (B_1, δ) corresponde une solution de l'équation (2) de la forme $(B_1, B_2, \dots, B_{\mu'})$ pour δ. $(\mathfrak{I}_1)$ est un idéal et, d'après le théorème 4 de VII, admet une pseudobase en tout point au voisinage de Δ_1. Par suite, d'après le théorème V, $(\mathfrak{I}_1)$ admet une pseudobase pour un voisinage de Δ_1. De là, comme l'équation (2) est quelconque, il s'ensuit immédiatement que l'équation (2) possède une solution formulaire pour un voisinage de Δ_1, que nous pouvons toujours mettre à la forme

$$B_i = \sum C_j \Pi_{ij} \quad (i = 1, \dots, \mu'; j = 1, \dots, \lambda).$$

Soient encore $B_i = A_{2i} - A'_{1i}$ $(i = 1, 2, \dots, \mu')$. D'après le résultat (α), correspondant à ce système de fonctions (B), on peut trouver un système de fonctions holomorphes (C) au voisinage de Δ_1 tel que l'on ait identiquement, $B_i = \sum C_j \Pi_{ij}$. Soit ε_p $(p = 1, 2, \dots)$ une suite de nombres positifs telle que la somme $\sum \varepsilon_p$ soit convergente. D'après le théorème I, on peut trouver des fonctions holomorphes $C'_j(P)$ dans $\mathfrak{D}$ telles que l'on ait sur Δ_1,

$$\left| B_i - \sum C'_j \Pi_{ij} \right| < \varepsilon_1.$$

Posons

$$A'_{2i} = A_{2i} - \left(\sum C'_j \Pi_{ij} \right);$$

A'_{2i} sont holomorphes au voisinage de Δ_2, le système (A'_2) satisfait à l'équation (1), et $|A'_{2i} - A'_{1i}| < \varepsilon_1$ sur Δ_1.

Pareillement, nous construisons (A'_3), et ainsi de suite. Les suites de fonctions A'_{pi} $(p = 1, 2, \dots)$ convergent uniformément à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$; soit A_i $(i = 1, 2, \dots, \mu')$ leurs limites; A_i sont holomorphes dans $\mathfrak{D}$ et satisfont à l'équation (1).

Théorème VII. *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine pseudoconvexe fini sans point critique intèrieur sur l'espace (x), soit $F_1(P), F_2(P), \dots, F_\mu(P)$ un système de fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$. Etant donnés, pour tout point P_0 de $\mathfrak{D}$, un voisinage polycylindrique γ de centre P_0 et une fonction holomorphe $\varphi(P)$ définie dans γ, de façon que, pour toute paire (γ_1, γ_2) des voisinages* *polycylindriques, les fonctions correspondantes* φ_1, φ_2 *satisfassent à* $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ $\mathrm{mod}\,(F)$ *en tout point de l'intersection* $\gamma_1 \cap \gamma_2$, *on peut toujours trouver une fonction holomorphe* $\Phi(P)$ *dans* $\mathfrak{D}$ *telle que l'on ait* $\Phi(P) \equiv \varphi(P) \mod (F)$ *dans tout* γ.

En effet, continuant de regarder $\mathfrak{D}$ comme limite de la suite Δ_p ($p = 1, 2, \ldots$), d'après le résultat intermédiaire (β), on a une solution $\Phi_p(P)$ pour un certain voisinage de Δ_p (puisque, d'après le théorème VI, les deux termes suivants signifient la même : $\Phi \equiv \varphi$ en tout point de γ, $\Phi \equiv \varphi$ dans γ). Soit ε_p ($p = 1, 2, \ldots$) une suite de nombres positifs telle que la somme soit convergente; nous allons construire une nouvelle suite de solutions Φ'_p ($p = 1, 2, \ldots$) successivement. D'abord, $\Phi'_1(P) = \Phi_1(P)$.

Pour $p = 2$, soit $\Psi_1(P) = \Phi_2(P) - \Phi'_1(P)$; Ψ_1 est une fonction holomorphe au voisinage de Δ_1, telle que

$$\Psi_1 = A_{11}F_1 + A_{12}F_2 + \cdots + A_{1\mu}F_\mu,$$

A_{1i} ($i = 1, 2, \ldots, \mu$) étant des fonctions holomorphes au voisinage de Δ_1, d'après le théorème VI. D'après le théorème I, on peut trouver des fonctions holomorphes $A'_{1i}(P)$ ($i = 1, 2, \ldots, \mu$) dans $\mathfrak{D}$ telles que l'on ait sur Δ_1,

$$\left| \sum A'_{1i}F_i - \sum A_{1i}F_i \right| < \varepsilon_1.$$

Posons

$$\Phi'_2(P) = \Phi_2 - \sum A'_{1i}F_i,$$

$\Phi'_2(P)$ est aussi une solution au voisinage de Δ_2, et $|\Phi'_2 - \Phi'_1| < \varepsilon$ sur Δ_1.

Pareillement, nous aurons une suite de fonctions Φ'_p ($p = 1, 2, \ldots$), telle que chaque $\Phi'_p(P)$ soit une solution au voisinage de Δ_p, et que $|\Phi'_{p+1} - \Phi'_p| < \varepsilon_p$ sur Δ_p. Cette suite converge uniformément à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$. La limite $\Phi(P)$ est donc, une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$, et elle satisfait identiquement à $\Phi(P) \equiv \varphi(P) \mod (F)$ dans tout γ.

36. Problème (E) **et exemple contraire.** Quant au problème (E), il n'est pas nécessairement résoluble pour les domaines pseudoconvexes (finis et sans point critique intérieur sur l'espace (x)), dont l'exemple effective est trouvé déjà pour *les idéaux géométriques de domaines indéterminés.*

Exemple. Dans l'espace (x_1, x_2, y_1, y_2), en prenant un entier positif ν tel que $\nu \geq 3$, considérons les quatre fonctions suivantes,

$$F_1 = y_1^\nu - x_1^{\nu-1},\ \ F_2 = y_2^\nu - x_2^\nu x_1,\ \ F_3 = y_1 y_2 - x_1 x_2,\ \ F_4 = x_1^{\nu-2} + x_2^\nu,$$

dénotons la variété caractéristique définie par $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0$ par Σ, et dénotons *l'idéal géométrique* de domaines indéterminés attaché à Σ

et défini dans l'espace (x_1, x_2, y_1, y_2) par $(\mathfrak{I}_0)$. Nous allons montrer que *le nombre d'éléments de toute pseudobase de l'idéal* $(\mathfrak{I}_0)$ *en origine est* $\geq \nu - 1$.

Supposons par absurde, que l'idéal $(\mathfrak{I}_0)$ ait une pseudobase

$$[\Phi_1(x,y),\ \Phi_2(x,y),\ \ldots,\ \Phi_\rho(x,y)]$$

en origine, dont $\rho = \nu - 2$. Considérons, sur l'espace (x_1, x_2), la surface de Riemann (à 2 dimensions complexes) de la fonction $t = x_1^{1/\nu}$, que nous dénotons par $\mathfrak{R}$. Soit P un point quelconque de $\mathfrak{R}$, soit (x_1, x_2) les coordonnées de P, et soit t la valeur de $x_1^{1/\nu}$ à P. Soit S la variété caractéristique donnée par $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, soit M un point quelconque de S; quelles sont les coordonnées de M ?

Comme $F_1 = 0$, on a d'abord, $y_1 = x_1^{(\nu-1)/\nu} = t^{\nu-1}$. De $F_2 = 0$, on a ensuite, $y_2 = x_2 x_1^{1/\nu} = \varepsilon x_2 t$, dont ε est un nombre tel que $\varepsilon^\nu = 1$, mais d'ailleurs quelconque. Or, comme $F_3 = 0$, il faut que $x_1 x_2 = y_1 y_2 = \varepsilon x_2 t^\nu = \varepsilon\, x_1 x_2$, c'est-à-dire que $\varepsilon = 1$. Donc, M est donné par $(x_1, x_2, t^{\nu-1}, x_2 t)$. Relions le point $P(x_1, x_2, t)$ de $\mathfrak{R}$ et le point M-ci de S; cette correspondance est biunivoque.

Soit (J_0) l'image sur $\mathfrak{R}$, de la trace de l'idéal $(\mathfrak{I}_0)$ sur S; précisément-dit, soit $(\mathfrak{I}_0) = \{(f, \delta)\}$, soit δ' l'image sur $\mathfrak{R}$, de la trace de δ sur S, soit $f(x_1, x_2, t^{\nu-1}, x_2 t) = \varphi(t, x_2) = \varphi(P)$, et soit $(J_0) = \{(\varphi, \delta')\}$; quel est le caractère de l'ensemble (J_0) ?

Soit δ' un domaine partiel (connexe ou non) quelconque de $\mathfrak{R}$, et soit $\varphi(P)$ une fonction holomorphe définie dans δ'; admettant la propriété (H) par rapport à S[53], mais d'ailleurs quelconque; considérons l'ensemble de couples ordonnées (φ, δ'), et le dénotons par $(\mathfrak{O}_S)$. Supposons qu'un ensemble partiel $(\mathfrak{I})$ de $(\mathfrak{O}_S)$ satisfasse aux deux conditions suivantes :

1° Si $(\varphi, \delta') \in (\mathfrak{I})$, $(\alpha, \delta'') \in (\mathfrak{O}_S)$, on a nécessairement $\alpha\varphi \in (\mathfrak{I})$ pour $\delta' \cap \delta''$.
2° Si $(\varphi_1, \delta_1) \in (\mathfrak{I})$, $(\varphi_2, \delta_2) \in (\mathfrak{I})$, on a nécessairement $\varphi_1 + \varphi_2 \in (\mathfrak{I})$ pour $\delta_1 \cap \delta_2$).

Nous appellerons alors, $(\mathfrak{I})$ *ideál sur* $\mathfrak{O}_S$).

(J_0) est alors, un idéal sur $(\mathfrak{O}_S)$. De plus, comme $F_4 = x_1^{\nu-2} + x_2^\nu = 0$ n'a pas de facteur multiple, (J_0) est un idéal géométrique attaché à $F_4 = 0$ et défini sur toute surface de Riemann $\mathfrak{R}$ (la définition étant la même).

Le point de $\mathfrak{R}$ sur l'origine est unique, que nous dénoterons par P_0. Une pseudobase de (J_0) en P_0 est donnée par

$$\Phi_i(x_1, x_2, t^{\nu-1}, x_2 t) = \varphi_i(t, x_2) = \varphi_i(P) \quad (i = 1, 2, \ldots, \rho).$$

[53] ≪ φ admet la propriété (H) par rapport à S ≫ veut dire que ≪ φ est localement l'image sur R de la trace sur S d'une fonction holomorphe dans l'espace (x_1, x_2, y_1, y_2). ≫

Considérons les fonctions holomorphes sur $\mathfrak{R}$ comme suivantes :

$$f_i(t, x_2) = F_4\, t^{i-1} = (x_1^{\nu-2} + x_2^{\nu})\, t^{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, \rho + 1).$$

Toute f_i jouit de la propriété (H) par rapport à S. En effet, sur S,

$$t^{\alpha}(x_1^{\nu-2} + x_2^{\nu}) = y_1^{\nu-\alpha} x_1^{\alpha-1} + y_2^{\alpha} x_2^{\nu-\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho).$$

De plus, ces fonctions $f_i(t, x_2)$ s'annule identiquement sur $F_4 = 0$; elles appartient donc, à (J_0) pour $\mathfrak{R}$; par suite, on a au voisinage de P_0,

$$f_i = c_{i1}\varphi_1 + c_{i2}\varphi_2 + \cdots + c_{i\rho}\varphi_\rho \quad (i = 1, 2, \ldots, \rho + 1),$$

où c_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, p)$ représentent des fonctions holomorphes de (t, x_2) au voisinage de $(0, 0)$ jouissant de la propriété (H) par rapport à S.

Considérons une fonction holomorphe $f(P)$ au voisinage de P_0 possédant la propriété (H) par rapport à S; soit $f(P) = f(t, x_2)$; il existe alors, une fonction holomorphe $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ au voisinage de l'origine de l'espace (x_1, x_2, y_1, y_2), telle que l'on ait identiquement $F(x_1, x_2, t^{\nu-1}, x_2 t) = f(t, x_2)$. Par suite, en développant $f(t, x_2)$ en série de Taylor autour de l'origine et en posant $x_2 = 0$, on a nécessairement

$$f(t, 0) = a_0 + a_{\nu-1}t^{\nu-1} + a_\nu t^\nu + \cdots$$

$(a_0, a_{\nu-1}, a_\nu, \ldots$ étant des constantes$)$.

Les fonctions $\varphi_i(t, x_2)$ doivent s'annuler sur $F_4 = 0$; comme $F_4 = 0$ n'a pas de facteur multiple, elles sont de la forme,

$$\varphi_i(t, x_2) = (x_1^{\nu-2} + x_2^{\nu})\, h_i(t, x_2),$$

$h_i(t, x_2)$ étant holomorphes. On a donc, au voisinage de $t = 0$,

$$\begin{aligned}\varphi_i(t,0) &= x_1^{\nu-2}(A_{i1} + A_{i2}t + A_{i3}t^2 + \cdots + A_{i\rho+1}t^\rho) + Bx_1^{\nu-2}t^{\rho+1} + \cdots \\ &= \psi_i(t) + Bx_1^{\nu-2}t^{\rho+1} + \cdots\end{aligned}$$

(où A_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, \rho+1)$ et B sont des constantes).

Posons

$$c_{ij}(t, 0) = \gamma_{ij} + \delta_{ij\nu-1}t^{\nu-1} + \delta_{ij\nu}t^\nu + \cdots$$
$$(i = 1, \ldots, \rho + 1;\ j = 1, \ldots, \rho)$$

Puisque $\nu - 1 = \rho + 1$, et que

$$f_i(t, 0) = x_1^{\nu-2}t^{i-1} = c_{i1}(t, 0)\varphi_1(t, 0) + \cdots + c_{i\rho}(t, 0)\varphi_\rho(t, 0)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \rho + 1),$$

on a nécessairement

$$x_1^{\nu-2}t^{i-1} = \gamma_{i1}\psi_1(t) + \gamma_{i2}\psi_2(t) + \cdots + \gamma_{i\rho}\psi_\rho(t).$$

En comparant les coefficients de $x_1^{\nu-2}t^{j-1}$, on a

$$\gamma_{i1}A_{1j} + \gamma_{i2}A_{2j} + \cdots + \gamma_{i\rho}A_{\rho j} = \varepsilon_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, \rho+1;\ j = 1, \ldots, \rho+1)$$

dont

$$\varepsilon_{ij} = 1 \quad \text{si} \quad i = j, \qquad \varepsilon_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

Avec les variables complexes indépendantes $z_1, z_2, \ldots, z_\rho$ considérons

$$L_k(z) = A_{k1}z_1 + A_{k2}z_2 + \cdots + A_{k\rho}z_\rho \quad (k = 1, 2, \ldots, \rho);$$

on a alors, $\gamma_{\rho+11}L_1 + \gamma_{\rho+12}L_2 + \cdots + \gamma_{\rho+1\rho}L_\rho = 0$ identiquement, dont un au moins de $\gamma_{\rho+1k}$ $(k=1,2,\ldots,\rho)$ n'est pas nul, puisque $\gamma_{\rho+11}A_{1\rho+1} + \cdots + \gamma_{\rho+1\rho}A_{\rho\rho+1} = 1$; $L_1, L_2, \ldots, L_\rho$ sont ainsi, linéairement dépendants. D'un autre côté, comme

$$\gamma_{i1}L_1 + \gamma_{i2}L_2 + \cdots + \gamma_{i\rho}L_\rho = z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

$L_1, L_2, \ldots, L_\rho$ sont nécessairement, linéairement indépendants. Ce sont contradictoires; donc, le nombre d'éléments de toute pseudobase de $(\mathfrak{I}_0)$ en origine doit être $\geq \nu - 1$.

Considérons maintenant, dans l'espace $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)$, la variété caractéristique T_ν donnée par

$$y_3 = b_\nu, \quad F_i(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où ν est un entier positif tel que $\nu \geq 3$, b_ν est une constante, et $F_i(x_1, x_2, y_1, y_2,)$ signifient les fonctions que nous venons d'envisager. Pour l'idéal géométrique attaché à T_ν et définie dans un domaine contenant le point $(0, \ldots, 0, b_\nu)$, le nombre d'éléments d'une pseudobase locale en ce point est toujours $\geq \nu - 1$.

Traçons dans l'espace $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)$ le polycylindre :

$$C \ : \ |x_i| < 1, \quad |y_j| < 1 \qquad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3),$$

prenons la suite $b_\nu = 1 - 2^{-\nu}$ $(\nu = 3, 4, \ldots)$, considérons dans C la variété caractéristique $T = T_3 + T_4 + \cdots$, et considérons *l'idéal géométrique* $(\mathfrak{I}_1)$ de domaines indéterminés attaché à T et défini dans C. D'après ce que nous venons de voir, il est clair que $(\mathfrak{I}_1)$ *ne possède aucune pseudobase finie pour* C.

(Le 12 octobre, 1953.)