多変数解析函数について
I–有理函数に関する凸状域

岡潔

1936 年 5 月 1 日受理

序文． 複素多変数解析函数論の近年の進展にもかかわらず，いくつかの重要な事柄が大なり小なり解明されないまま残されている．特に，Runge の定理や P. Cousin の定理が成り立つ領域のタイプ，F. Hartogs の凸性と H. Cartan と P. Thullen の凸性の関係;[1] しかもそれらの間には深い関係がある．この論文およびこれに続く論文で予定されているのはこれらの問題の研究である．

ところで, 私に次の考えが浮かんだ. すなわち, 考えている空間の次元を適当に上げることによって，これらの問題の困難さがときとして緩和されるのではないか. この論文では，この一般的なアイデアを特別な場合に実現するために，表題の領域をより高い次元の筒状域に帰着させるという一つの原理を示そうと思う. (具体的な形は 1 節の問題 I を見よ.)

ひとたびこの原理が確立されれば，それによって, 与えられた極に関する P. Cousin の定理が, 表題の領域においても成り立つことが示される. (正確な形は 5 節の定理 I を見よ.) この逆もまた正しい．実際にはこの二つの命題は帰納法によって同時に証明される．さらにこの原理によって，A. Weil が示した,[2] 表題の領域における Runge の定理も直ちに証明される.

この論文では，多項式に関して凸状な領域の内部でのみ考えるが, これは同時に, 我々にとって不可欠な補題の，もっと一般な研究を提起するためのものでもある.[3] [訳注 2]

1．定義　n 個の複素変数 $x_1, x_2, \ldots x_n$ の空間 $((x))$ において

$$(\Delta) \qquad x_i \in X_i, \quad P_j((x)) \in Y_j, \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

で定義される地域[4] Δ を考えよう．ここで X_i，Y_j は平面上の有界で単葉な領域であり，$P_j((x))$ は多項式である．これと同じ形で表すことのできる地域を簡単のために <u>(Ω_0) に属する</u> と言うことにする．空間 $((x))$ において (Ω_0)

---

[1] H. Behnke と P. Thullen の著書 *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen,* 特に 54, 68, 79 ページを見よ. [訳注 1]

[2] Sur les série de polynômes de deux variables complexes. C. R. Acad. Sci. Paris, 1932.
L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. Math. Annalen, 1935.

[3] P. Cousin の定理の一般化については，A. Weil の積分から出発しても，同じ結果に到達することができると思う. [訳注 3]

[4] 以下, 開集合を連結かそうでないかによって領域 (domaine) または地域 (region) と言うことにする. この論文では地域 (領域) は例外なく単葉であると考える.

に属する地域が与えられたとき，この地域を定義することのできる n 変数 x_i の多項式の個数の最小をこの 地域の順位 と呼ぶ．ただし函数 x_i は数えない．上記の地域 Δ の順位は $\leq \nu$ である．(Ω_0) に属する順位が零の地域は筒状域である．ここで問題の具体的な形を与えよう．

問題 I.　新たな複素変数 $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ を導入して空間 $((x, y))$ を考え，そこで

$$(\Sigma) \qquad y_j = P_j((x)), \quad ((x)) \in \Delta, \quad (j = 1, \ldots, \nu)$$

によって定義される曲面 (multiplicité) Σ を考える．曲面 Σ の端はすべて筒状域

$$(C) \qquad x_i \in X_i, \quad y_j \in Y_j, \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

の境界上にある．$f((x))$ を Δ における n 変数 x_i の正則函数とする.[5] これを新たに $n+\nu$ 変数 x_i, y_j の正則函数とみなそう．そうすると, Σ 上のすべての点 M, $((x^0, y^0))$ にたいして, 点 (x^0) は必ず Δ の点なのだから, それは M で正則である．

この条件のもとで，(C') を (C) の完全内部に与えられた領域とし，(C') における正則函数であって, (C') 内の Σ 上の点 M で与えられた値 $f(M)$ を持つものを作ること. [訳注 4]

空間 $((x, y))$ の次元と曲面 Σ の次元の差の半分 [訳注 5] を ν とするとき, これを 順位 ν の問題 I と名付ける．この場合順位は 1 から始まる．

問題 II.　地域 Δ に通常の方法で極 $(\wp)$ を与える．すなわち，Δ の各点 P にたいし，P を中心とする多円筒 (γ) とそこで有理型な函数 $g(x, y)$ を付与し，二つの (γ) の共通部分で, 付与された函数 $g(x, y)$ は差に関して互いに同値 [訳注 差が正則函数] であるようにする．これらの函数 $g(x, y)$ の極によって局所的に極 $(\wp)$ を定義するのである．このとき問題は次の通りである．

予め Δ の完全内部に与えられた地域 Δ' において，与えられた極 $(\wp)$ を持つ有理型函数[6]を求めること.

Δ の順位を μ とするとき, これを 順位 μ の問題 II と名付ける．P. Cousin[7] によって，順位 0 の問題 II は解けることが知られている．

2. 問題 I の還元　先ず次のことを示そう．

もし問題 I と問題 II が順位 $< \nu$ の場合にすべて解けるなら, 問題 I は順位 ν の場合にも解ける.

[5] 地域 Δ が複数の連結成分よりなるとき，$f((x))$ は当然連結線分ごとに異なる解析函数で構成することができる．

[7] Acta, 1895

証明. 問題 I と II は順位 $<\nu$ の場合にすべて解けると仮定する．順位 ν の場合の問題 I の正確な形は前節で与えたものとする．空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1)$ において地域

$$(D) \qquad x_i \in X_i, \qquad y_\nu \in Y_\nu, \qquad P_k((x)) \in Y_k,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$$

および曲面

$$(S) \qquad y_\nu = P_\nu((x)), \qquad ((x)) \in \Delta$$

を考える．曲面 S の端はすべて D の境界に来ている．

地域 D の各点に $n+1$ 変数 x_i, y_ν の函数 $g((x), y_\nu)$ を次のように付与する．

1^o　曲面 S 以外の各点 P にたいしては

$$g((x), y_\nu) \equiv 0.$$

2^o　S の各点 M にたいしては

$$g((x), y_\nu) = \frac{f((x))}{y_\nu - P_\nu((x))}.$$

D の各点にその点を中心とする多円筒 (γ) を付与し, その点に付与された函数 g をその (γ) 内に制限しよう．(γ) としては，S に含まれない点 P にたいしては, S の点を含まなものを付与すればよい．他方, S 上の点 M にたいしては, そこで f が正則である様に選ばなければならない．しかし f は地域 Δ で正則であり, M の座標を $((x^0), y_\nu^0)$ とするとき，点 $((x^0))$ は Δ に含まれているのだから, それは常に可能である.

このように定義された函数 $g((x), y_\nu)$ は, その定められた多円筒 γ 内で有理型であり，互いに同値の条件を満たしている．したがってそれらの全体で D における極 $(\wp)$ を定義している．しかも極 $(\wp)$ はすべて S 上にある. さて, 空間 $((x), y_\nu)$ における地域 D は明らかに (Ω_0) に属しており，その順位は $\nu - 1$ を超えない．したがって, D' を D の完全内部に含まれる地域とするとき, 仮定 [訳注 帰納法の] によって D' で有理型で, 極 $(\wp)$ を持つ函数 $G((x), y_\nu)$ が存在する．D' の正確な形は後に述べる. ここで,

$$\varphi((x), y_\nu) = G((x), y_\nu)[y_\nu - P_\nu((x))]$$

と置く．このようにして得られた函数 φ にたいして，それが D' で正則であり，さらに D' 内の S 上のすべての点にたいして

$$\varphi[(x), P_\nu((x))] = f((x))$$

であることは容易に確かめられる.[8] [訳注 6]

D' としては，地域

$$(D') \qquad x_i \in X'_i, \qquad y_\nu \in Y'_\nu, \qquad P_k((x)) \in Y'_k,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, \nu - 1),$$

を考える．ここで X'_i, Y'_j はそれぞれ X_i, Y_j の完全内部にある $(n + \nu)$ 個の領域であって，筒状域

$$x_i \in X'_i, \quad y_\nu \in Y'_\nu, \qquad (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, \nu)$$

は問題 I で与えられた領域 (C') を境界まで込めて含むようなものである．

次に，(C') における $n + \nu$ 変数 x_i, y_j の正則函数 F を，曲面 $y_k = P_k((x))$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$ の (C') に含まれる部分で

$$F[x_1, x_2, \ldots, x_n, P_1((x)), \ldots, P_{\nu-1}((x)), y_\nu] = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_\nu)$$

となるように作ろう．それは順位 $\nu - 1$ の場合の問題 I だから，仮定により，このような函数 $F((x, y))$ はたしかに存在する．

ところで (C') 内の，曲面 Σ 上のすべての点 M, $((x, P))$ にたいして

$$F[x_1, x_2, \ldots, x_n, P_1((x)), \ldots, P_\nu((x))] = \varphi[x_1, x_2, \ldots, x_n, P_\nu((x))]$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

となる．したがって $F((x, y))$ は求めている解である． C.Q.F.D.

さらに 順位 1 の問題 I は解ける ことを注意しておく.

3. 問題 II の還元．結論. 今度は問題 II である．P. Cousin の古典的な方法を今の場合に応用するために克服しなければならないことがある．与えられた落差を持つ函数を我々の地域にたいして作ることが問題なのであるが，正確に言うと:

問題 A. 改めて 1 節の地域 Δ を考え，x_1 平面の領域 X_1 内に長さを持つ単純ジョルダン曲線 L を描き，その端点を a, b とする．そして条件 $x_1 \in L$, $((x)) \in \Delta$ を満たす点集合を T とする．さらに Δ' を Δ の完全内部にある地域とし，T' を T の Δ' に含まれる部分とする.

この条件のもとで, T の任意の点の近傍で定義されていて正則な n 変数 x_i の函数 $f((x))$ が与えられたとき, $\mathbf{T}'$ 以外の Δ' で定義された，n 変数 x_i の正則函数 $\varphi((x))$ で, 次のような不連続性を持つものを見つけること:

[8] P. Cousin の定理をこのように使うアイデアを私は H. Cartan に負っている．
Sur les fonctions de deux variables complexes. Bull. Sci. math.1930
を見よ．

1^o　$x_1 = a,\ b$ は除いて，$\varphi((x))$ は T' を超えて解析接続され，新しい函数 [訳注 解析接続された] を $\psi((x))$ とするとき

$$\varphi((x)) - \psi((x)) = \pm f((x))$$

となる．符号 $+$ は T' の左側の $((x))$, すなわち, 点 x_1 は a から b へ向かう曲線 L の左側にあると考えている場合である．

2^o　Δ' 内の $x_1 = b$ となる点の近傍では，函数

$$\varphi((x)) - \frac{f((x))}{2\pi i}\log(b - x_1)$$

の解析接続が正則になる．$x_1 = a$ にたいしては式中の対数を $-\log(a - x_1)$ に置き換えたものがそうなる．

Δ の順位を μ とするとき, これを 順位 μ の問題 A と名付ける．次の事を見よう：

もし順位 $\leq \nu$ の場合の問題 I がすべて解けるなら, 順位 $\leq \nu$ の場合の問題 A もすべて解ける．

これを確かめるために，順位 $\leq \nu$ の問題 I が解けるという仮定のもとで上に設定した問題 A が解を持つことを証明しよう．順位が ν より小さい場合の問題はすべて順位が丁度 ν の問題に帰着さすことができるから, それで十分である．分かりやすくするため, 与えられた地域 Δ' を

$$(\Delta') \qquad x_i \in X'_i, \quad P_j((x)) \in Y'_j, \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

とする．

地域 Δ にたいして, 1 節の方法で空間 $((x, y))$ における筒状域 (C) と曲面 Σ を対応させる．(C') と Σ' は Δ' に対応するものとする．

函数 $f((x))$ は T' の任意の点の近傍で定義されていて正則であるから，Δ の完全内部に与えられた任意の地域にたいして, L を含む領域 G を, その地域と $x_1 \in G$ の共通部分で $f((x))$ が正則であるように取ることができる．簡単のために Δ' 自身にたいしてそうであると仮定する．Δ' は境界と共に Δ に含まれているのだからそう仮定しても一般性は失われない．さらに

$$L < G' < G < X'_1$$

と仮定する．ここで G' は G の完全内部に新しく与えられた領域である．これも一般性を失うことなく取れる．

この条件の元で，$n + \nu$ 変数 $x_i,\ y_j$ の函数 $F((x_i, y_j))$ で，(C') と $x_1 \in G'$ の共通部分で正則であり，Σ' 上のすべての点 $((x, y))$ において値 $f((x))$ を取る函数を求める．これは順位 ν の場合の問題 I であるから，仮定により $F((x, y))$ は存在する．[訳注 7]

ここで x_1 平面上で L に沿って a から b へ取る積分

$$\Phi((x,y)) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(t,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_\nu)}{t-x_1}\,dt$$

を考えよう．正則函数 $F((x,y))$ が定義されている地域は筒状域

$$x_1 \in G', \quad x_k \in X'_k, \quad y_j \in Y'_j, \quad (k=2,3,\dots,n; j=1,2,\dots,\nu)$$

であり，G' は L を含んでいる．したがって積分 $\Phi((x,y))$ の性質は P. Cousin によってよく知られている．それは次のとおりである．

U' を $x_1 \in L$, $((x)) \in (C')$ となるような点集合とする．積分 $\Phi((x,y))$ には意味があって，U' 以外の (C') のすべての点で正則な函数を表し，そこである性質を持っている．それを説明するためには，

$$\Delta', \quad T', \quad \varphi((x)), \quad \psi((x)), \quad f((x)),$$

をそれぞれ

$$(C'), \quad U', \quad \Phi((x,y)), \quad \Psi((x,y)), \quad F((x,y)),$$

に置き換え, 求めている函数 $\varphi((x))$ が満たさなければならない条件 $(1^o, 2^o)$ を, 置き換えられた函数 $\Phi((x,y))$ に移して考えればよい.

$((x))$ が Δ' を描くとき，座標が $x_i = x_i$, $y_j = P_j((x))$ となる空間 $((x,y))$ の点 M は曲面 Σ' を描く．それで

$$\varphi((x)) = \Phi(M)$$

と置く．この函数 $\varphi((x))$ は Δ' 内で T' を除いて定義されており，そこの各点の近傍で n 変数 x_i に関して正則な函数を表す．さらに U' の近傍で見ると, Σ' 上のすべての点 M にたいして

$$f((x)) = F(M)$$

なので，U' における $\Phi((x,y))$ の性質から, $\varphi((x))$ が T' にたいして求められている性質を持つことが直ちに分かる. したがって $\varphi((x))$ はこの問題の解である． C.Q.F.D.

ここではまだ，順位 $\leq \nu$ の場合の問題 A が解を持つという仮定のもとで，順位 $\leq \nu$ の場合の問題 II が解けるということの証明が残っている．しかしこの場合は古典的な方法がほとんど言葉どうりに適用されるから[9] 教科書[10]を

[9]必要な変更は次の形だけである．≪ 与えられた筒状域 (D) : $x_i \in A_i$ $(i=1,\dots,n)$ 内の筒状域 (d) : $x_i \in (a_p)$, $x_q \in A_q$ $(p=1,2,\dots,\lambda; q=\lambda+1,\lambda+2,\dots,n)$ を考える代わりに，今の場合 (d) と与えられた地域 Δ の共通部分を考えなければならない．(D) はこの場合 Δ を含む任意の筒状域である．

[10]Osgood 第 III 章, 23 節, 24 節.

引用するだけで満足しよう．このようにして次の命題が得られた．もし順位 $\leq \nu$ の場合の問題 I が解けるなら，順位 $\leq \nu$ の場合の問題 II が解ける．

この二つの補助命題から次の結果が得られる．

<u>結論．1 節の問題 I, II は常に解ける．</u>

4. 展開についての注意　以下で上記の命題を完成させよう．そのために先ず函数の展開について幾つかのことを説明する．

1^o．先ず空間 $((x))$ において次の形の領域を考える．

$$(\Delta) \qquad |x_i| < r_0, \quad |P_j((x))| < 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

ここで $P_j((x))$ は x_i の多項式を表し，r_0 は正の数である．もしこの不等式で定義された点集合が幾つかの連結成分よりなるときは，Δ によってその内のどれか一つを表すことにする．このような領域においては，すべての正則函数は多項式の級数に展開できることが A. Weil[11]によって，知られている．ところで，このことはいま我々の確立したばかりの原理から直接導かれる．

実際，領域 Δ における正則な函数 $f((x))$ が与えられたとき，すべての $0 < r < r_0$, $0 < \rho < 1$ にたいして，多円筒

$$(C') \qquad |x_i| < r \quad |y_j| < \rho \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

における新しい正則函数 $F((x, y))$ を，(C') 内の座標 $x_i = x_i$, $y_j = P_j((x))$ なるすべての点 M で

$$F(M) = f((x))$$

となるように求めることができる．函数 $F((x, y))$ は，原点を中心として，少なくとも (C') で一様収束するようなテーラー級数に展開される．それでその級数に $y_j = P_j((x))$ を代入して，Δ'

$$|x_i| < r, \quad |P_j((x))| < \rho, \quad ((x)) \in \Delta, \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

の完全内部で $f((x))$ に一様収束する多項式の級数が得られる．このことから Δ 自身に対して $f((x))$ の展開が得られる．

2^o．次に空間 $((x))$ における有界な領域 D であって，n 変数 x_i の多項式のクラス $\mathfrak{K}$ に関して凸状なものを考える．[12] D は単葉でなければならない．D' を D の完全内部に含まれる任意の領域とし，δ を D' の D に関する最小距離とする．$\delta > 0$ である．D 内で D に関する境界距離が $\delta/2$ であるような点全体の集合 Σ を考える．Σ の各点 M にたいして常に少なくとも一つ $\mathfrak{K}$ の函数 f で

$$|f(M)| > 1$$

[11] 前掲の論文参照

[12] MM.H.Cartan et P.Thullen: Regularitäts und Konvergenzbereichen Math.Annalen, 1932.

となり，他方 D' において

$$|f|<1$$

となるものが対応する．(δ) を M のまわりの多円筒で，D に含まれ，そこで $|f|>1$ となるものとする．閉集合 Σ の各点 M はそのような (δ) の中心となる．したがって Borel·Lebesgue の補題により，Σ はそれらの (δ) の有限個で覆われる．

$f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ をそれらの (δ) に対応する $\mathfrak{K}$ の函数とする．D 内に

$$|f_j((x))|<1 \qquad (j=1,\ldots,n)$$

を満たす点の集合を考える．この集合の連結成分の中には D' を含むものが必ず存在する．それを Δ とする．Δ は Σ の外迄は伸びていないから，Δ の境界もまた D に含まれている．

このようにして，D の完全内部に含まれる任意の領域 D' にたいし，常にこのような領域 Δ を対応さすことができる．このことは有界でない領域にたいしても，無限遠点を含んでいない限り成り立つ．証明は自明である．従って前のことから次の命題が得られる．

D を空間 $((x))$ の通常の意味の領域とし，それは変数 x_i の多項式のクラス $\mathfrak{K}$ に関して凸状とする．この領域の全ての正則函数は D の完全内部で一様収束する多項式の級数に展開される．

5.　定理 I.　**D** を上記のような領域とする．D に 1 節の方法で極 $(\wp)$ が与えられたとき，その領域で有理型な函数で $(\wp)$ を極に持つものが常に存在する．

証明. D 内に領域の列

$$\Delta_1,\ \Delta_1,\ \ldots,\ \Delta_n,\ \ldots$$

で D に収束するものを作る．Δ_n は前節の領域 Δ と同じ性格のものとする．D が有界であらうとなかろうと，それは常に可能である．簡単のため，Δ_n は Δ_{n+1} の完全内部に含まれていると仮定する．

次に函数の列

$$\Phi_1((x)),\ \Phi_2((x)),\ \ldots,\ \Phi_n((x)),\ \ldots$$

を考える．ここで $\Phi_n((x))$ は Δ_n における n 変数 x_i の有理型函数で，極 $(\wp)$ を持つものであり, Δ_n は上記の列の一つである．このような函数は確かに存在する．何故なら, これを求めるためには問題 II を解きさえすればよいであるが, 領域 Δ_{n+1} は明らかに (Ω_0) に属しているので, その問題はこの領域で解ける.

さて，すべての n に対して，差

$$\Omega_n((x)) = \Phi_{n+1}((x)) - \Phi_n((x))$$

は Δ_n で正則である．したがって上記の命題から $\Omega_n((x))$ は Δ_n において多項式の級数に展開される．

ここまでに述べたことで，筒状域の場合と全く同様に証明を完成することができる.[13] それは繰り返さない． C.Q.F.D.

定理 II. 1 節において提示した問題 I の条件のもとで，筒状域 (C) における $n+\nu$ 変数 x_i, y_j に関する正則函数であって，曲面 Σ 上のすべての点 M で値 $f(M)$ を取るものが存在する. [訳注 8]

1 節で与えられた問題 I または II が, もし $(C') = (C)$ または $\Delta' = \Delta$ で解けるなら, 完全に 解けると言うことにする.

問題 II を考える．地域 Δ のすべての連結成分は定理 I の領域 D の持つ条件を満たしていることはすぐに分かる．問題 II はすべての連結成分で完全に解け，従って定義により Δ それ自身で解ける．

問題 I については 2 節に示した議論は変更無く今の場合に使える．だから前のことから，次のことが言える．もし順位が ν より小さい場合の問題 I がすべて完全に解けるなら, すべての $\nu > 1$ にたいして，順位 ν の場合の問題 I も完全に解ける．特に $\nu = 1$ に対してそれは常に解ける．したがって問題 I は完全に解ける． C.Q.F.D.

[13] Osgood，第 III 章 第 24 節

訳 注

[訳注 1]　Behnke–Thullen の著書で引用されている箇所に提起されている問題等は次の通りである.

1. 54 頁. 第 4 章 特異点集合体. 第 3 節 自然境界.

≪Levi の条件 $L(\varphi)$ は 大域的 にも十分か. すなわち, 前の命題の条件のもとで, 超曲面 $\mathfrak{S}$ 全体を自然境界とする函数 $f(w,z)$ が存在するか? 特に, 2 階迄連続的微分可能な閉曲面 $\mathfrak{S}: \varphi(u,v,x,y)=0$ を境界とする領域は, $\mathfrak{S}$ 上のすべての点で $L(\varphi)>0$ なら正則域か?≫

Levi の条件については第 VI 論文を見よ. この問題は通常 Levi の問題と言われているが, この訳文では岡先生の言葉にしたがい, より根源に遡って, Hartogs の逆問題 と言うことにする.

2. 68 頁. 第 5 章 零と非真性特異点の分布. 第 4 節 与えられた極–零面に対する函数.

この節は Cousin の論文の紹介であるが, この頁には特に問題が書かれている訳ではない.

3. 79 頁. 第 6 章 正則域と正則包の理論. 第 4 節 Runge の定理と単葉領域の非単葉正則包.

≪Runge 領域であるための必要十分条件は何か?≫

ここで Runge 領域と言われているのは多項式による展開が可能な領域のことである.

[訳注 2]　原論文の副題は ≪ 有理函数に関する凸状域 ≫ となっている. しかしこの論文について第 IV 論文に次のような訂正が書かれている.

2 節で与えた開集合 D' は D の完全内部に含まれるとは限らない. これは不定点の存在から生じる現象である. それで次のように処理する.

1^o 第 I 論文の記述は多項式に対しては正確である.
2^o 4 節の定理と定理 I を第 II 論文の 5 節のように改める.
3^o それにつれて定理 II も改める. このとき, 5 節で与えた証明は変えることはない.

言い換えると, 第 I 論文を "有理函数に関する凸状域" の研究ではなく, それよりは制限の強い "多項式に関する凸状域" の研究に限定しようと言うのである. それでこの訳文は最初からこの訂正に従っている. ただし副題は元のままとした.

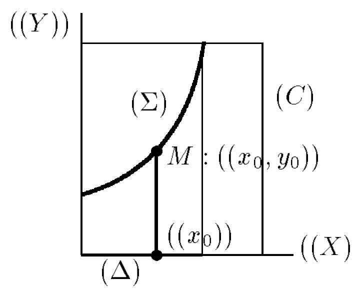
ところで, 第 II 論文の "正則域" に関する研究では第 I 論文の結果が使われている. しかしそこでは "多項式に関する凸状域" の結果しか使われてい

ない. さらに“有理函数に関する凸状域”は正則域でもあるので, 第 I 論文の, 訂正によって除かれた部分は第 II 論文に含まれる. その意味で第 I 論文はもともと“多項式に関する凸状域”で書かれるべきものであった.

そうではあるが, 第 I 論文を少し手直しすることで, 第 II 論文によらずに当初の目的を達することも不可能ではない. またそれを第 II 論文のアイデアを使って解決する場合でも, 第 II 論文の主定理である定理 I はこの場合自明であることを注意しておく.

[訳注 3] このことについては, 第 III 論文の脚注 2 でも言及されている. それらの詳しい解説は第 VI 論文の [訳注 1] を見よ.

[訳注 4] 下図は (Δ), (Σ), (C) の関係を表している.



これは模型図ではあるが, 問題 I を理解するための幾何学的な情勢を過不足なく表している.

[訳注 5] 変数 $((Y))$ の個数. もし (Δ) の順位が ν ならば問題の順位と (Δ) の順位は一致する.

[訳注 6] S の任意の点 M では $G((x), y_\nu)$ は

$$G((x), y_\nu) = \frac{f((x))}{y_\nu - P_\nu((x))} + h((x), y_\nu)$$

と表せる. ここで $h((x), y_\nu)$ は x_i, y_ν の正則函数である. したがって

$$\varphi((x)) = f((x)) + [y_\nu - P_\nu((x))]\, h((x), y_\nu)$$

となり, M では $\varphi((x)) = f((x))$ となる.

[訳注 7] $f((x))$ は T のすべての点で正則であり, T' は T の Δ' 内の部分であるから, G を L の十分近くに取れば, それは Δ' と $x_1 \in G$ の共通部分, すなわち

$$x_1 \in G, \quad x_i \in X_i, \quad P_j((x)) \in Y_j, \quad (i = 2, 3, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

で正則である. したがって C' と $x_1 \in G$ の共通部分, すなわち

$$x_1 \in G', \quad x_i \in X_i', \quad y_j \in Y_j', \quad (i = 2, 3, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

における $F((x, y))$ が求められる.

[訳注 8]　この定理 II を, 岡先生と共に, “上空移行原理” と呼ぶことにする.