

多変数解析関数について.

X 擬凸状領域を生成する新たな様式.

岡潔

(1962年9月20日 受理)

序文. 一連の論文¹において, 我々はここまで H. Behnke-P. Thullen の立派な著書の中に明確に提起されていた問題群を研究してきた. しかし, 前論文に指摘しておいたように, 未だ未解決の問題が幾つか残されており, それらのあるものは非常に難しいと思える. 我々は引き続きそれらの研究をめざしている.

この序文では, 内容の技術的な詳細には立ち入らず, この論文を書き終えて私が感じていることを述べるために, 古くから日本人には固有の, 季節感にふれようと思う.

現在の数学の進展には抽象化の傾向がある. 我々の研究分野においてさえも, 定理はどんどんと一般化され, そのあるものは複素変数の空間を出はざれている. 私には, それは冬であると感じられる. 私は長い間, 春の巡りを待ちかねており, 何か春を感じさせるような研究をしたいものだと思ってきた. この論文はそのようなものの最初の一つである. (No. 6 の定理を見よ.) [訳注. 1]

1. 簡単のため, 複素 2 変数 x, y の空間に限る. 有限単葉領域 D を考え, D 内に解析面 (une surface caractérisique) Σ を考える. M_0 を Σ の点とする. M_0 の近傍において, Σ の点 $M(x, y)$ は

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

によって表すことができると仮定する. この $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ は $|t| < 1$ における t の正則関数である. M の近傍における Σ の面積が問題である.

x, y, t の実部と虚部を

$$x = u_1 + iu_2, \quad y = u_3 + iu_4, \quad t = t_1 + it_2$$

と表す. i は虚数単位である. 実 4 次元の空間 (l'espace cartésien) (u_1, u_2, u_3, u_4) において, 曲面 Σ の面積要素は

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dt_1 dt_2,$$

¹Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Iwanami, Tokyo, 1961 を見よ.

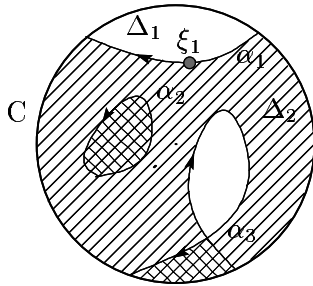
$$E = \sum \left(\frac{\partial u_j}{\partial t_1} \right)^2, \quad G = \sum \left(\frac{\partial u_j}{\partial t_2} \right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial u_j}{\partial t_1} \frac{\partial u_j}{\partial t_2}$$

$j = 1, 2, 3, 4$, によって与えられる. これは Cauchy-Riemann の条件によって,

$$d\sigma = \left| \frac{dx}{dt} \right|^2 dt_1 dt_2 + \left| \frac{dy}{dt} \right|^2 dt_1 dt_2$$

に帰着する. したがって, 解析面 Σ の面積は, その各座標平面への射影の面積の和で表されることが分かる.

2. もう一度上記のように表される解析面 Σ を取り上げて, 領域 D の内部に双円筒 $[(C), (C')]$ を考え (すなわち $D \ni [(C), (C')]$), Cousin



に従ってこの双円筒内で Σ を表現しよう. Σ のこの双円筒内の部分の x 平面への射影は, 図のように, 幾つかの Riemann 面よりなる. それを \mathfrak{R}_x と表す. 簡単のため, 解析面 Σ は $x = \text{const.}$ や $y = \text{const.}$ の形の平面を含まないとし, 円 (C) , (C') はそれぞれ

$$|x| < R, \quad |y| < R'$$

なる形であるとする.

Riemann 面 \mathfrak{R}_x (連結または非連結) をよく見よう. x', x'' を \mathfrak{R}_x の境界上の

$$|x'| < R, \quad |x''| < R$$

なる 2 点とし, 記述を簡単にするため, それらは, 有限個の点以外, 同じ座標を持つことはないかと仮定する. [訳注. \mathfrak{R}_x の異なる境界の x 平面への射影が, (C) 内では曲線として一致することはない.]

図を見て頂きたい. これだけで容易に一般的な場合を理解することができる. 円 (C) は \mathfrak{R}_x の境界の x 平面への射影よりなる三つの曲線 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ と円周 C によって五つの部分 $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ に分割されている.

\mathfrak{R}_x の葉数は, Δ_1 では 0, Δ_2 では 1 であり, このことは曲線 α_1 の方向から分かる.

曲線 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を幾つかの弧 $\delta_i (i = 1, 2, \dots)$ に分割しよう. α_j^* ($j = 1, 2, 3$) を Σ の上にある α_j の元の曲線 (すなわち, α_j は α_j^* の x 平面への射影である) とし, β_j を α_j^* の y 平面への射影とする. この β_j は Riemann 面 (\mathfrak{R}_y の延長) 上にあると考える. [訳注. \mathfrak{R}_y は Σ の双円筒内の部分の y 平面への射影.] そうすると, それは円周 C' 上にある. α_1 の始点を ξ_0 とし, それに対応する β_1 の点を η_0 として, その座標を η_0 (一般的

な記号で) とする. β_j の正の方向は, その射影 C' のそれとし, α_j の方向はそれに対応する方向とする. $q+1$ を Riemann 面 \mathfrak{R}_y の, 点 η_0 上の葉数とする. y が η_0 から出発して曲線 β_1 を描くとき, y は順次その q 個の点を通る. [訳注. η_0 上にある \mathfrak{R}_y の点.] それを $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q$ と表し, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q$ をそれに対応する点とする. そうすると弧 α_1 は $q+1$ 個の弧 $(\xi_0, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), \dots, (\xi_{q-1}, \xi_q)$ およびその残りに分割される. それらを $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{q+1}$ と表す. α_2 に関しては, それが閉曲線であるため, 先ず点 R' の上の任意の点 η_0 を取ることが前の場合と異なるだけである. そうすると, 前と同様に α_2 上の分点 $\xi_{q+1}, \xi_{q+2}, \dots, \xi_{q+r}$ が得られる.² α_3 に対しては α_1 のときと同様に分点 $\xi_{q+r+1}, \xi_{q+r+2}, \dots, \xi_{q+r+s}$ を取る. そのようにして弧 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t$ が得られる. ここで $t=q+r+s+2$ である.

Δ_j 内のすべての x には, 点 $(x, y_{j,\nu})$ が Σ 上にあるような (C') 内の j' 個の点

$$y_{j,1}, y_{j,2}, \dots, y_{j,\nu}, \dots, y_{j,j'}$$

が対応する. [訳注. j' は Δ_j 上の \mathfrak{R}_x の葉数である.] x をその位置の近傍における変数と考えると, これらの $y_{j,\nu}$ は Riemann 面上で正則な x の函数を表す. 領域 Δ_j に次のような正則函数 $\varphi_j(x)$ を対応させる:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x, y) &= (y - y_{j,1})(y - y_{j,2}) \cdots (y - y_{j,j'}) & j' \neq 0 \text{ なら} \\ \varphi_j(x, y) &= 1 & j' = 0 \text{ なら} \end{aligned}$$

x を, Riemann 面 (\mathfrak{R}_x の延長) 上に考えられた曲線 α_j 上の任意の点とする. そうすると, それには β_j 上のただ一つの点 y_j が対応する. これは α_j に付随する函数 $y_j(x)$ を定める. 図では

$$(1) \quad \varphi_2 = (y - y_1)\varphi_1$$

である. 隣接する領域のすべての一対に対して同様である.

δ_j を弧 ($j = 1, \dots, t$) の一つとし, α_μ を δ_j がその部分であるような曲線とする. a_j をその始点とし, b_j をその終点とする. そして次の Cousin 積分:

$$(2) \quad I_j(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_j} \frac{\text{Log}[y - y_j(t)]}{t - x} dt$$

を考える. i は虚数単位であり, 積分は δ_j の正の方向に取る. $\text{Log}[y - y_j(t)]$ の分枝の取り方が問題である. そのためには $\text{Log}[-y_j(a_j)]$ の分枝を次のように取ればよい:

$$\text{Log}[-y_j(a_j)] = \log R' + i\theta_0, \quad -2\pi < \theta_0 \leq 0,$$

²この r は $y = R'$ 上の点の個数である.

$\log R'$ は実数である.

一般な場合の Cousin 積分の性質はよく知られている. しかしこれは特別な場合なので, 分点をよく見よう. α_μ は明かに開曲線にも閉曲線にもなり得る. それで α_1 の点 ξ_1 を見よう. $I_1(x, y) + I_2(x, y)$ が問題である. さて,

$$\text{Log}[y - y_2(x)] - \text{Log}[y - y_1(x)] = -2\pi i$$

なのだから

$$(3) \quad I_1(x, y) + I_2(x, y) - \text{Log}(\xi_1 - x)$$

は $x \in \xi_1$ の近傍で正則函数である.

次に, $[\Delta_n, (C')]$, $n = 1, 2, \dots$ の形のすべての領域に対して, 函数

$$(4) \quad F(x, y) = \varphi_n \cdot e^{-\sum I_j} \prod (\xi_k - x)$$

を考える. ここで和 \sum は弧 δ_j のすべてにわたり, 積 \prod は分点 ξ_k のすべてにわたる. 上で見たことから, $F(x, y)$ は双円筒 $[(C), (C')]$ の近傍で正則であり, $F(x, y)/\varphi_n(x, y)$ は Δ_n の近傍で正則で零を取らないという性質を満たしている. [訳注. すなわち $F = 0$ が求めている Σ の表現である.]

一般な場合を考えよう. 本質的な困難は無く, 同じ方法で同様の性質を持つ函数 $F(x, y)$ を作ることができる.

ここで注意しておくが, 我々は双筒状領域の中では特別な双円筒 (A, A') を選んできた. しかしこれは簡単のためだけであって, 本質的な条件は A' が単連結であることである. [訳注. 2]

3. 次のことを言おう: $\ll x$ 平面に円 (C) と (Γ) を考え, (Γ) は (C) の内部にあるとする. y 平面に同心円 $(C'), (C'')$ を考え, (C'') が中にあるとする. Σ を双円筒 $[(C), (C')]$ の近傍に定義された解析面とする. この状態の下で Σ の面積が次のように制限されているとする.

1° (C'', C') は y 平面上の円環を意味するとし, 双筒状集合 $[(C), (C'', C')]$ の中で, 面積は Ω より小さい.

2° 双円筒 $[(\Gamma), (C')]$ に対しても同様である.

C'_1 を C' および C'' と同心で, それらの中間にある円周とすると, 解析面 Σ は $[(C), (C'_1)]$ に対して, 次のように両側からの制限を持つ正則随伴函数 $F(x, y)$ を持つ.

1) (C_1) を (C) と同心の (C) より小さい与えられた円とするとき, $[(C_1), (C'_1)]$ に対して

$$(1) \quad \log |F(x, y)| < A\Omega$$

である.

2) $G = [(\Gamma), (C'_1)] \cup [(C), (C'', C'_1)]$ の内部に描がかれた半径 (ρ, ρ') のすべての双円筒 $[(\gamma), (\gamma')]$ に対して

$$(2) \quad m(\log |F(x, y)|) > -B\Omega$$

である. m は $[(\gamma), (\gamma')]$ に関する算術平均を意味し, A と B は正の定数である. >>

これを示すため, 円 $(C), (C')$ はそれぞれ $|x| < R, |y| < R'$ で与えられており, $R \leq 1/2, R' \leq 1/2$ と仮定する. これは許される. さらに Σ は $x = cont.$ および $y = cont.$ の形の解析面を含んでいないと仮定する. これも許される.

$\mathfrak{R}'_x, \mathfrak{R}'_y$ をそれぞれ Σ の $[(C), (C'', C')]$ 内の部分に対応する x 平面および y 平面上の Riemann 面 とする. それらの面積を A_x, A_y と表すと,

$$(3) \quad A_y = \int_{\mathfrak{R}'_y} d\sigma, \quad A_x = \int_{\mathfrak{R}'_y} \left| \frac{dx}{dy} \right|^2 d\sigma$$

が得られる. ここで $d\sigma$ は Riemann 面 \mathfrak{R}'_y の面積要素であり, $x(y)$ は Σ によって定義された函数を表す. [訳注. 点 $(x(y), y)$ が Σ の点であるような函数である.] ところで

$$A_x + A_y < \Omega, \quad 1 + X^2 \geq 2X,$$

ただし X は任意の正の数, であるから,

$$(4) \quad \int_{\mathfrak{R}'_y} \left(1 + \left| \frac{dx}{dy} \right| \right) d\sigma < \frac{3}{2} \Omega$$

が得られる.

Σ 上に

$$|x| \leq R, \quad |y| = R'_2, \quad R'_1 < R'_2 < R'$$

なる一つまたは幾つかの曲線を描く. R'_1 は C'_1 の半径である. これらの曲線の x, y 平面への射影をそれぞれ α_j, β_j によって表し, それらの長さを s_j, s'_j とする. そうすると, 上記の不等式により, 区間 (R'_1, R') 内に

$$(5) \quad \sum (s_j + s'_j) < \frac{3\Omega}{2(R' - R'_1)} = K_1\Omega$$

を満たすような半径 R'_2 が存在することが分かる. [訳注. 3] (C'_2) を円 $|y| < R'_2$ とする.

そのようにしてして得られた双円筒 $[(C), (C'_2)]$ で, Σ に随伴する函数 $F(x, y)$ を得るために, 前節の方法を適用し, そこと同じ記号を使う.

まず, 上限を問題にする.

$$\log |F| = u = u_1 + u_2 + u_3$$

と置く. ここで

$$u_1 = \log |\varphi|, \quad u_2 = \sum \log |\xi_k - x|, \quad u_3 = \Re \left[- \sum I_j \right]$$

であり, 対数は実, 演算子 \Re は実部を取ることを意味する. $R \leq 1/2, R' \leq 1/2$ だから, まず

$$u_1 \leq 0, \quad u_2 \leq 0$$

である.

R_1 を (C_1) の半径とする. $R - R_1 = \delta, R' - R'_2 = \delta'$ と置く. (ξ, η) を双円筒 $[(C_1), (C'_2)]$ の任意の点とする. (C) 内に円 $(\delta), |x - \xi| < \delta$ を描く. $u(x, \eta)$ は劣調和であるから, このことから,

$$u(\xi, \eta) \leq m_{(\delta)} u(x, \eta) \leq m_{(\delta)} u_3(x, \eta)$$

が得られる. $m_{(\delta)}$ は (δ) に関する算術平均を意味する.

積分 I の形を思い出そう. (No. 2 の式 (2) を見よ.) ここで $\text{Log}[y - y_j(t)]$ の虚部 θ が問題である.

1° 初期値 θ_0 [訳注. $y=0, t=a_j$ のときの値.] は定義によって $-2\pi < \theta_0 \leq 0$ である.

2° 点 y が原点から今考えている y まで移り, t は初期値 t_0 [訳注. ここでは $t_0 = a_j$] に留まっているなら, 対応する θ の変化量は絶対値で $\pi/2$ を越えない.

3° y を固定し, t が δ_j 上を正の方向に動くと, 偏角 θ は常に増大し, 変化量は高々 2π である. したがって

$$|\theta| < \frac{5}{2} \pi$$

が得られる.

したがって,

$$L^2 = (-\log \delta')^2 + \left(\frac{5\pi}{2} \right)^2, \quad L > 0, \quad \delta = \delta_j$$

と置いて, 函数

$$v(x) = \frac{L}{2\pi} \sum \int_{\delta} \frac{1}{|t - x|} ds$$

を考えると

$$|u_3(x, y)| \leq v(x)$$

が得られる.

さて, 明かに

$$m_{(\delta)} \frac{1}{|x-t|} \leq m_{(\delta)} \frac{1}{|x-\xi|} = \frac{2}{\delta}$$

だから

$$\begin{aligned} m_{(\delta)} v(x) &= \frac{L}{2\pi} \left\{ \sum \int_{\delta_j} \left[m_{(\delta)} \frac{1}{|t-x|} \right] ds \right\} \\ &\leq \frac{L}{\pi\delta} \left[\sum s_j \right] \\ \therefore m_{(\delta)} v(x) &< \frac{LK_1}{\pi\delta} \Omega = A\Omega \end{aligned}$$

したがって

$$|\xi| < R_1, \quad |\eta| < R'_2$$

に対して

$$\log |F(\xi, \eta)| < A\Omega$$

が得られる.

次は下限が問題である. G 内に双円筒 $[(\gamma), (\gamma')]$ を考える. ここで (γ) と (γ') はそれぞれ $|x-\xi| < \rho$ と $|y-\eta| < \rho'$ で与えられているとする. 式 $u = u_1 + u_2 + u_3$ の右辺の各項に円周上の対数ポテンシャルの平均に関するよく知られた定理 [訳注. 4] を応用しよう.

1° (x, y) が $[\Delta_n, (C'_1)]$ [訳注. Δ_n は \mathfrak{R}_x の葉数が一定である部分で, n' はその葉数である.] の点のときには,

$$u_1(x, y) = \sum_{\nu=1}^{n'} \log |y - y_{n,\nu}(x)|$$

で与えられる函数 $u_1(x, y)$ に対し, まず

$$\pi \rho^2 m_{(\gamma)} n' < \Omega$$

であることを注意しよう. [訳注. ここでは5節の結果が使われている. したがってこの式の右辺は Ω の或る倍数である.] さて $m_{(\gamma')}$ を (γ') に関する平均とすると

$$m_{(\gamma')} u_1(x, y) \geq \frac{2n'}{\rho^2} \int_0^{\rho'} \log r r dr = n' \left(\log \rho' - \frac{1}{2} \right),$$

$$\therefore mu_1(x, y) \geq \frac{\Omega}{\pi\rho^2} \left(\log \rho' - \frac{1}{2} \right) = -B_1\Omega$$

が得られる.

2° 函数 $u_2 = \sum \log |\xi_k - x|$ は y によらない. 分点の個数 λ を計算すると,

$$2\pi R_1 \lambda < \sum s' < K_1 \Omega,$$

$$\therefore mu_2 > \frac{K_1 \Omega}{2\pi R_1} \left(\log \rho - \frac{1}{2} \right) = -B_2 \Omega$$

である.

3° $u_3 = \Re [-\sum I]$ に関しては

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum \int_{\delta_j} \frac{\log |y - y_j(t)| - 5\pi/2}{|t - x|} ds$$

と置くと,

$$u_3(x, y) > w(x, y)$$

が得られる. さてこの場合, すべての質量は (γ') の外にある円周 C'_2 上にあるから,

$$m_{(\gamma')} w(x, y) \geq \frac{1}{2\pi} \sum \int_{\delta} \frac{\log d - 5\pi/2}{|t - x|} ds$$

が得られる. ここで $d = R'_2 - |\eta|$ である. このことから

$$mw(x, y) > \frac{K_1 \Omega}{\pi\rho} \left(\log d - \frac{5\pi}{2} \right) = -B_3 \Omega$$

が導かれる.

このようにして G 内のすべての $[(\gamma), (\gamma')]$ に対して求めている不等式

$$m(\log |F(x, y)|) > -B\Omega, \quad B > 0$$

に到達する. [訳注. 5]

C. Q. F. D.

4. 上記の命題の或る逆命題が問題である. 次のことを証明しよう.

≪ $F(x, y)$ を双円筒 $[(C), (C')]$ における正則函数で, $[(C), (C')]$ に対して

1° $\log |F| \leq M,$

2° $m(\log |F|) \geq -K_1 M$

なる不等式を満たすものとする. K, M は正の定数である. そうすると, $[(C), (C')]$ の完全内部に与えられた双円筒 $[(C_1), (C'_1)]$ に対して $F(x, y) = 0$ で与えられる解析面 Σ の [訳注. $[(C_1), (C'_1)]$ 内の] 面積 Ω_1 は

$$\Omega_1 \leq K_2 M$$

のように制限される. K_2 は M と F にはよらない正の数である.≫

1° これを証明するために次の予備的な命題を準備する. (それは Jensen の公式に帰着させることができる.)

≪ $(C), (C')$ をそれぞれ $|z| < R, |z| < R_1$ なる円とし, $R_1 < R$ とする. $f(z)$ を (C) における正則函数で, $|f(z)| \leq M$ なる制限のもとにあり, 閉円 (\bar{C}_1) 上に少なくとも n 個の零を持つようなものとする. そうすると (\bar{C}_1) で

$$|f| \leq M \lambda^n$$

でなければならない. λ は M および f には独立な, $0 < \lambda < 1$ なる正の数である.≫ [訳注. 6]

これを確かめるためには $R=1$ としてもかまわない. それで $R_1 = \theta$ と置く.

まず $f(z)$ は (\bar{C}_1) 上の点 a に対して零とする. もし $a=0$ なら Schwarz の補題によって (\bar{C}_1) において

$$|f(z)| \leq M \theta$$

である. それで $a \neq 0$ と仮定する. a は正の実数と仮定してもよい. よく知られた, 円 (C) をそれ自身に写す変換

$$z' = \frac{1}{a} \frac{z - a}{b - z}, \quad ab = 1$$

を考える.

$$\lambda = \max |z'|, \quad |z| \leq \theta \text{ に対して}$$

と置く. [訳注. λ は a に依存することに注意.]

$$0 < \lambda < 1, \quad \theta < \lambda$$

である. Schwarz の補題によって, (\bar{C}_1) に対して

$$|f| \leq M \lambda$$

が得られる.

次に f は a, b に対して零であると仮定する. $a \neq 0$ であって, a は実
で正と仮定してもよい. 函数

$$\varphi = \frac{1}{z'} f$$

を考える. そうすると上記のことから, (\overline{C}_1) に対して

$$|\varphi| \leq M\lambda$$

である. したがって

$$|f| = |\varphi| \cdot |z'| \leq M\lambda^2$$

が得られる. これを続けて所期の結果に到達する.

2° この節の初めに述べた状態の下で, Σ は $x = \text{const. } y = \text{const.}$
の形の解析面片を含まないと仮定する. $(C), (C_1), (C'), (C'_1)$ をそれぞれ
 $|x| < R, |x| < R_1 (< R), |y| < R', |y| < R'_1 (< R')$ で与えられているとし,
 $R \leq 1/2, R' \leq 1/2$ とする. $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y$ をそれぞれ Σ の x 平面および y 平面へ
の射影とし, $\Omega'_1, \Omega''_1, \Omega_1$ をそれぞれ $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y$ および Σ の双円筒 $[(C_1), (C'_1)]$
内の面積とする. [訳注. 正確に言うと, Ω_1 は $\Sigma_1 = \Sigma \cap [(C_1), (C'_1)]$ の面積
であり, Ω'_1, Ω''_1 は, それぞれ Σ_1 の x 平面および y 平面への射影 $\mathfrak{R}'_x, \mathfrak{R}'_y$
の面積である.] そうすると

$$\Omega_1 = \Omega'_1 + \Omega''_1$$

が得られる. それで, 面積 Ω'_1 を評価しよう. [訳注. Ω''_1 も同様に評価され
る.]

No. 2 と同じ記号を使い, $[(C), (C')]$ だけは $[(C_1), (C'_1)]$ 置き換える.
そうすると

$$\sum \int_{\Delta_p} p' d\sigma = \Omega'_1$$

である. [訳注. Δ_p は \mathfrak{R}_x の葉数が一定である部分であり, p' はその葉数
である.] x_0 を Δ_p の点とすると (C'_1) 内に $F(x_0, y) = 0$ の p' 個の点を得る.
前の命題により, $x_0 \in \Delta_p, |y| \leq R'_1$ に対し,

$$|F(x_0, y)| \leq e^M \lambda^{p'}$$

が得られる. したがって

$$\log |F(x_0, y)| \leq M - p' \log \frac{1}{\lambda}$$

$$\int_{(C_1)} \log |F(x, y)| d\sigma \leq M\pi R_1^2 - \log \frac{1}{\lambda} \Omega'_1$$

$$m(\log |F(x, y)|) \leq M - \frac{1}{\pi R_1^2} \log \frac{1}{\lambda} \Omega'_1$$

である。他方,

$$m(\log |F(x, y)|) \geq -K_1 M$$

$$\therefore \Omega'_1 \leq \frac{\pi R_1^2 (K_1 + 1)}{\log \frac{1}{\lambda}} M = K'_2 M$$

である。

3° Σ が

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$$

の形で与えられる一般な場合を考える。この Σ_2 は $x = \text{const.}$ の形の解析面片, Σ_3 は y のそれで, Σ_1 はそれ以外である。

Σ_2 の, 双円筒 $[(C_1), (C'_1)]$ 内の部分の面積 Ω_2 を評価しよう。 m' を $x = \text{const.}$ なる形の平面の重複度を込めて数えた個数とすると, 面積 Ω_2 は

$$\Omega_2 = m' \pi R_1'^2$$

である。他方, 前の命題により, $[(\bar{C}_1), (\bar{C}'_1)]$ に対して

$$|F| \leq e^M \lambda^{m'}$$

である。したがって

$$-K_1 M \leq M - m' \log \frac{1}{\lambda}.$$

$$\therefore m' \leq \frac{(K_1 + 1)}{\log \frac{1}{\lambda}} M$$

である。したがって, 面積 Ω_2 は所期のように制限される。 Ω_3 に対しても同様である。

面積 Ω_1 に対しては, 函数

$$\Phi(x, y) = F(x, y) / \prod (x - a_j) \prod (y - b_k)$$

を考える。ここで $x = a_j$ ($j = 1, \dots, m'$) と $y = b_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) は方程式 $F(x, y) = 0$ の重複度を込めて数えた根を表す。そうすると最大値の原理により,

$$\log |\Phi| < M + m' \log \frac{1}{R - R_1} + n \log \frac{1}{R' - R'_1} = K' M$$

が得られる。 K' は正の定数である。

さらに

$$m \log |\Phi| > -K_1 M$$

が得られる. 前の場合から Ω_1 はまた所期のように制限され, したがって

$$\Omega \leq K_2 M$$

が得られる.

C.Q.F.D.

5. x 平面上に $|x| < R, |x| < R_0, R > R_0$ なる形の二つの円 (C) と (Γ_0) を描き, y 平面上に $|y| < R', |y| < R'', R' > R''$ なる形の二つの円 (C') と (C'') を描く. $[(C), (C')]$ の近傍で解析面 (一続きであってもなくてもよい) Σ を考える. Σ が $x = \text{const.}$ の形の解析平面も $y = \text{const.}$ の形のそれも含まない場合を考える. Σ の $[(C), (C'', C')]$ 内の部分の面積は Ω より少なく, $[(\Gamma), (C')]$ に対しても同様であると仮定する.

C'_1 を $|y| = R'_1, R'' < R'_1 < R'$ なる形の与えられた円周とする. No. 3 で見たように, $|y| = R'_2, R'_1 < R'_2 < R'$ なる形の他の円周 C'_2 で, 次の性質を満たすものが存在する: \mathfrak{R}_x を $[(C), (C'_2)]$ 内の Σ の部分の x 平面への射影とし, \mathfrak{R}_y を y のそれとする. $\beta_i (i=1, 2, \dots, p)$ を \mathfrak{R}_y の境界の一部をなす曲線で, $|y| = R'_2$ なる部分とし, α_i をそれらに対応する x 平面の曲線とする. (重複度も考慮している.) L を曲線 α_i 長さの総和とし, L' を β_i のそれとする. そうすると

$$L + L' \leq K_1 \Omega, \quad K_1 = \frac{3}{2(R' - R'_1)}$$

が得られる.

円 (C) は曲線 α_i によって幾つかの部分 Δ_n に分割され, Δ_n では \mathfrak{R}_x は n' 葉である. x_0 を Δ_n の点とすると,

$$n' = \psi(x_0)$$

と表す. $|x| < R_1 (R_0 > R_1)$ なる形の円 (Γ_1) を描き, 円環 (Γ_1, Γ_0) に注目する. \mathfrak{R}_x のこの円環内の部分の面積は

$$\int_{(\Gamma_1, \Gamma_0)} \psi(x) d\sigma$$

で与えられ, それは

$$\int_{R_1}^{R_0} dr \int_0^{2\pi} \psi(x) r d\theta \quad (x = r e^{i\theta})$$

と表される. この面積は Ω より小さいので, $R_1 < R_2 < R_0$ なる半径 R_2 を

$$\int_0^{2\pi} \psi(x) R_2 d\theta \frac{\Omega}{R_0 - R} = K_2 \Omega$$

となるように見つけることができる. その円周 $|x|=R_2$ を Γ_2 と表す.

曲線 α_i は解析的であり, その要素は有限個の点を除いて正則である. 次の問題を考える.

問題. $\ll x_0$ を円環 (Γ_2, C) の任意の点とし, 函数 $\varphi(x_0)$ を次のように定義する. 原点より出て x_0 を通る半径を考え, ξ_0 をこの半径と円周 Γ_2 との交点とする. x をこの半径に沿って ξ_0 から x_0 まで動かせば, x は曲線 α_i と何回か交わるであろう. この交わりで, もし x が曲線を右から左に横切れば正とし, 逆なら負とする. [訳注. α_i の正の方向に向かって.] q を正の交わりの回数, q' を負の交わりの回数とする. このとき ξ_0 においては, もし交われば, それは数え, x_0 のそれは数えない. そして

$$\varphi(x_0) = \psi(\xi_0) + q - q'$$

と定義する.

$$A = \int_{(\Gamma_2, C)} \varphi(x) d\sigma$$

を考える. ($d\sigma$ は円環の面積要素である.) 曲線 α_i が条件

- 1° 曲線は解析的で, 有限個であり, その要素は有限個の点を除いて正則である.
- 2° 長さの総和は L である.
- 3° 端点は C または Γ_2 上にある.

のみを満たしている勝手なものとするとき, A の最大値は何か. \gg

答えは明らかである. A の最大はすべての曲線が Γ_2 の上にあり, それらが Γ_2 に関して負の方向を取るときに起こり, 最大値 A_0 は

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{(\Gamma_2, C)} [\psi(\xi_0) + q] r dr d\theta \quad (\xi_0 = r e^{i\theta}) \\ &< (R^2 - R_2^2) \left(\frac{K_2}{2R_0} + \frac{K_1}{2R_2} \right) \Omega = K_3 \Omega \end{aligned}$$

で与えられる. [訳注. 7] したがって Σ の $[(C), (C')]$ 内の部分の x 平面への射影の面積は $(K_3 + 1)\Omega$ より小さい.

容易に分かるように, 特別な円 (Γ_0) を (C) 内の任意に与えられた円 (Γ) に写すような上記の一次変換 [訳注. 円を 1 対 1 等角に写す写像.] を施しても結果は変わらない. このことから No. 3 の義論を繰り返して, $F(x, y)$ を双円筒 $[(C_1), (C'_1)]$ に対して No. 3 で作った函数とするとき, 同様に

$$m \log |F(x, y)| > -B\Omega$$

が得られる. B は Σ によらない正の数である.

No. 4 で見たことから、次の結論が得られる。

補題. (C) を x 平面上の円、 (Γ) を (C) の内部にある円とし、 $(C'), (C'')$ を y 平面上の同心円で (C'') が中にあるとする。 Σ を双円筒 $[(C), (C')]$ 内の解析面 (一続きであってもなくてもよい) で、 $[(C), (C''), (C')]$ 内の部分の面積は Ω より小であり、 $[(\Gamma), (C')]$ に対しても同様であるとする。そうすると Σ の面積は $[(C), (C')]$ 内で $\leq K\Omega$ と制限される。 K は Σ によらない正の定数である。

6. 空間 (x, y) に単葉領域 D を考える。記述を簡単にするため、 D は有限と仮定する。 D 内に解析面の列

$$(S) \quad \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \dots$$

と正の数の列

$$(T) \quad \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \dots$$

を考える。列 (T) は任意であるが、一般に有界ではないと考える。

これらの列 $(S), (T)$ によって D の点を 2 種に分かつ

1° 点 P_0 に対し、 P_0 を中心とする双円筒 (γ) で、 Σ_n の (γ) 内の面積を ω_n とするとき、列

$$(1) \quad \frac{\omega_1}{\nu_1}, \frac{\omega_2}{\nu_2}, \dots, \frac{\omega_n}{\nu_n}, \dots$$

が有界になるようなものが存在するなら P_0 を第 1 種であると言い

2° そのような性質を持つ双円筒は決して存在しないなら P_0 を第 2 種と言う。

次のことを示そう。

定理. 第 1 種の点の集合は D において擬凸状である。

これを証明するためには (C) 型連続性定理を確かめればよい。 E を D 内の第 2 種の点の集合とする。 E は明かに D 内で閉集合である。 D 内に双円筒 $[(C), (C')]$ を考える。 (Γ) を (C) の内部の円とし、 (C'') を (C') と同心の (C') より小さい円とする。 $[(\Gamma), (C')]$ 内にも $[(C), (C''), (C')]$ 内にも E の点は存在しないと仮定する。 E の点は $[(C), (C')]$ 内にも存在しないことを言えばよい。

矛盾に導くため、 $[(C), (C')]$ 内に E の点 (ξ, η) が存在したと仮定する。 $[(C), (C')]$ と同心の双円筒 $[(C_1), (C'_1)]$ を、 (ξ, η) を含み、 (C_1) は (Γ) を含み、そして円周 C'_1 は $(C''), (C')$ に含まれるように、 $[(C), (C')]$

の中に描く. (Γ_0) を (Γ) と同心で (Γ) より小さい円とする. 閉集合 $[(\bar{\Gamma}_0), (\bar{C}'_1)] \cup [(\bar{C}_1), (\bar{C}'_1)]$ のすべての点 P は列 (1) が有界であるような双円筒 (γ) の中心であるから Borel の補題によりこの閉集合を有限個の双円筒 (γ) で覆うことができる.

Ω_n を Σ_n の $[(\Gamma_0), (C'_1)]$ 内の面積とすると, 列 Ω_n/ν_n ($n=1, 2, \dots$) は有界である. $[(C'_3), (C'_2)]$ を C'_1 と同心で, C'_1 を含む十分細かい円環とする. Ω'_n を Σ_n の $[(C_1), (C'_3, C'_2)]$ 内の面積とすると, 列 Ω'_n/ν_n もまた有界である. $[(C_2), (C'_4)]$ を $[(C_1), (C'_1)]$ と同心の双円筒で $[(C_1), (C'_1)]$ より小さく, (ξ, η) を含むものとする. 補題により, Ω''_n を Σ_n の $[(C_2), (C'_4)]$ 内の面積とすると

$$\Omega''_n \leq K \max(\Omega_n, \Omega'_n)$$

が得られる. K は n によらない正の定数である. したがって列 Ω''_n/ν_n は有界である. これは (ξ, η) が第 2 種の点であることに矛盾する.

(1962. 9. 10)

訳 注

[訳注. 1] この論文は 1934 年に発表された論文

Note sur les fonctions analytiques multiformes etc.

に書かれている“解析面の正規族”を前提にして書かれている。それを紹介しておく。

複素 2 変数 x, y の空間における領域 D に解析面の族 $\mathfrak{F} = \{\Sigma\}$ が与えられているとする。 \mathfrak{F} に属する解析面 Σ と D に含まれる領域 δ に対し、 $\delta \cap \Sigma$ が $\varphi(x, y) = 0$ と表されるような δ における正則関数 $\varphi(x, y)$ を δ に対する Σ の正則随伴関数と言ひ、 \mathfrak{F} に属するすべての解析面の δ に対する正則随伴関数の族 $\mathfrak{H} = \{\varphi\}$ を δ に対する \mathfrak{F} の正則随伴関数族と言うことにする。

D の点 P に対し、 P の近傍 δ に対する \mathfrak{F} の正則随伴関数族 \mathfrak{H} を二つの条件

- 1° \mathfrak{H} は δ で正規である。
- 2° \mathfrak{H} に属する函数の収束列の極限函数が恒等的零になることはない。

を満たすように取れるとき、 \mathfrak{F} は P で正規であると言ひ、 \mathfrak{F} が D のすべての点で正規であるとき、それは D で正規であると言ひ。

このとき、次の二つのことが言える。

1°. \mathfrak{F} が D で正規であるためには、 D' を D の完全内部に含まれる任意の領域とすると、 \mathfrak{F} に属する解析面の D' における面積が有界であることが必要十分条件である。

2°. \mathfrak{F} が正規でない点の集合は D における擬凹状集合である。

この論文ではもう一步踏み込んだ形で、新たな擬凹状集合の生成法が提起されている。その鍵になるのは、本文の記号で $[(C), (C')]$ の近傍に与えられた解析面 Σ のそこにおける面積は $G = [(C), (C'', C')] \cup [(\Gamma), (C')]$ 内の面積の一定倍で抑えられるという事実である。この事実は大凡次の順序で証明される。

- 1°. Σ の $[(C), (C')]$ に対する随伴関数 $F(x, y)$ を作る。
- 2°. Σ の曲線 $|x| < R, |y| = R'$ の x および y 平面への射影の長さを評価する。このとき R' は適当に選ばれる。
- 3°. Σ の x 平面への射影の面積を評価する。
- 4°. $\log |F(x, y)|$ を上下から評価する。下からの評価は各点の近傍における平均値でなされる。
- 5°. Σ の面積を評価する。

この論文では、誤って 3° が後に回されている。

[訳注. 2] この節では $[(C), (C')]$ の近傍に与えられた解析面 Σ の $[(C), (C')]$ に対する特殊な正則随伴函数を Cousin の方法によって作っている。

Cousin 第 2 問題を解くための Cousin の方法の要点は次の通りであった。
 $x = x_1 + ix_2$ と置き、 a, b を正の数として、 x 平面に閉領域

$$A : |x_1| \leq a, \quad |x_2| \leq b$$

を考え、その $x_1 \leq 0$ なる部分および $x_1 \geq 0$ なる部分をそれぞれ A_1 および A_2 とする。さらに線分 $x_1 = 0, |x_2| \leq b$ を L とする。そして y 平面に単連結な閉領域 B を考え、筒状域 (A, B) の近傍に Cousin 第 2 分布が与えられたとし、その筒状域 (A_1, B) および (A_2, B) の近傍における解をそれぞれ $\varphi_1(x, y)$ および $\varphi_2(x, y)$ とする。そうすると、 $\psi(x, y) = \varphi_1(x, y)/\varphi_2(x, y)$ は筒状集合 (L, B) の近傍で零を取らない正則函数である。

ここで Cousin 積分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log \psi(\xi, y)}{\xi - x} d\xi$$

を考える。ここで \log の分枝は何でもよく、積分は下から上を取る。この積分の (A_1, B) および (A_2, B) の部分を $\psi_1(x, y)$ および $\psi_2(x, y)$ として、

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \varphi_1(x, y) e^{-\psi_1(x, y)} & x \in A_1 \\ \varphi_2(x, y) e^{-\psi_2(x, y)} & x \in A_2 \end{cases}$$

と置くと、 $\Phi(x, y)$ は (A, B) 内における解になる。

本文ではまず Σ の x 平面および y 平面への射影として得られる (C) および (C') 上の相対境界を持つ Riemann 面 \mathfrak{R}_x および \mathfrak{R}_y を考え、 Σ を \mathfrak{R}_x 上の正則函数 $f(P)$ によって

$$y = f(P), \quad (P \in \mathfrak{R}_x)$$

と表している。次に \mathfrak{R}_x の (C) に対する相対境界の (C) への射影達 α_j によって (C) を幾つかの部分 Δ_n に分割する。そうすると、各 Δ_n 上の \mathfrak{R}_x の葉数は分岐点を除いて一定になる。その葉数を n' とし、実際に n' 葉である点の近傍における $f(P)$ の分枝を $y_{n\nu}(x)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n'$) として $[\Delta_n, (C')]$ に対する Σ の正則随伴函数 $\varphi_n(x, y)$ を

$$\prod_{\nu} [y - y_{n\nu}(x)]$$

を $[\Delta_n, (C')]$ へ解析接続したものとする. これは一価正則函数である. このとき, \mathfrak{R}_x の異なる相境界の射影が曲線として一致することはないと仮定しておく, 一つの曲線 α_j で隣接する二つの部分を $\Delta_{n_1}, \Delta_{n_2}$ とし, α_j の正の方向に対して Δ_{n_1} が左側にあるとすれば, α_j の近傍では

$$\varphi_{n_1}(x, y) = [y - y_{n_1, l}(x)]\varphi_{n_2}(x, y)$$

となる. l は $1, 2, \dots, n'_{n_1}$ のどれかである. この事から, Cousin 積分は

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j} \frac{\log [y - y_{n_1, l}(t)]}{t - x} dt$$

なる形になる. なお, 本文では α_j を幾つかの弧 γ_i に分割しているが, それは $|\log [y - y_{n_1, l}(t)]|$ の大きさを一定に抑えるため以外に, α_j が閉曲線の場合を特別扱いしないためでもある.

[訳注. 3] 半径 R'_2 の存在を証明しておく. 求める R'_2 をしばらく変数と考えて r とし, 対応する α_j, β_j および s_j, s'_j を $\alpha_j(r), \beta_j(r)$ および $s_j(r), s'_j(r)$ と表す. そうすると

$$s_j(r) + s'_j(r) = \int_{\beta_j(r)} \left(1 + \left|\frac{dx}{dy}\right|\right) r d\theta$$

である. それで区間 $[R'_1, R']$ のすべての r に対して

$$\sum_j (s_j(r) + s'_j(r)) \geq \frac{3\Omega}{2(R' - R'_1)}$$

と仮定する. そうすると $d\sigma = r dr d\theta$ として,

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}_y} \left(1 + \left|\frac{dx}{dy}\right|\right) d\sigma &= \sum_j \int_{R'_1}^{R'} dr \int_{\beta_j(r)} \left(1 + \left|\frac{dx}{dy}\right|\right) r d\theta \\ &\geq (R' - R'_1) \frac{3\Omega}{2(R' - R'_1)} = \frac{3}{2} \Omega \end{aligned}$$

となり, (4) 式に反する.

[訳注. 4] “円周上の対数ポテンシャルの平均に関するよく知られた定理” とは $z = re^{i\theta}$ とするとき

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z - a| d\theta = \begin{cases} \log r & |a| \leq r \text{ の場合} \\ \log |a| & |a| > r \text{ の場合} \end{cases}$$

のこらししい。この定理は、後者は $\log |z - a|$ が円板 $|z| < r$ 内で調和函数であることから、前者は円周 $|z| = r$ 上で $r|z - a| = |r^2 - \bar{a}z|$ であることから容易に証明される。

なお、本文の計算で、すでに不等式

$$\int_{|z|<r} \frac{1}{|z-a|} d\sigma = \int_{|z+a|<r} \frac{1}{|z|} d\sigma \leq \int_{|z|<r} \frac{1}{|z|} d\sigma$$

を使っているのだから、以下の計算で、同様の不等式

$$\int_{|z|<r} \log |z-a| d\sigma = \int_{|z+a|<r} \log |z| d\sigma \geq \int_{|z|<r} \log |z| d\sigma$$

を使うのも自然である。

[訳注. 5] この節では、前節で作った Σ の $[(C), (C')]$ に対する特殊な正則随伴函数を Σ の面積によって評価している。その評価に直接使われる量は、上からの場合は u_3 のための α_j の長さの総和だけであり、下からの場合は u_3 のための α_j の長さの総和、 u_2 のための β_j の長さの総和および u_1 のための \mathfrak{R}_x の面積とである。このことは (ξ, η) が $G = [(\Gamma), (C')] \cup [(C), (C'', C')]$ に含まれているとしても同じである。ところで、 Σ の面積としては G 内の面積しか与えられていない。そのため α_j および β_j の長さの総和はそれで評価できるが、 \mathfrak{R}_x の面積は未知である。[訳注. 1] で述べたように、この問題は実は 5 節で解決されている。したがって 5 節は 3 節の $\log |F|$ の評価をする前に書く方が論理的であった。しかし 5 節はこの論文の最大の山場である。それを際立たせるにはこの論文の順序で書きたいとも思える。解決はそれが使われた場所に、5 節で証明することを注意しておくことであろう。その場合 3 節で、点 (ξ, η) を G 内に限る必要は無く、したがって 5 節での説明の重複もいらない。

[訳注. 6] この命題は Jensen の公式に帰着すると書かれているが、実際次のようにして証明される。 $R = 1$ とし、 $|z| \leq \theta$ 内にある $f(z)$ の零点を a_j ($j = 1, \dots, n$) とすると、

$$f(z) = f_0(z) \prod \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}$$

と表される。ここで $f_0(z)$ は、条件 $|f_0(z)| \leq M$ を満たす (C) における正則函数である。このとき $|z| \leq \theta$ なら、すべての j に対して

$$\left| \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z} \right| \leq \lambda$$

となるような, 1 より小さい正の数 λ が存在する. (λ は θ のみによって定まる.) したがって (C') において

$$|f(z)| \leq M\lambda^n$$

である.

[訳注. 7] この部分がこの論文の要点である. 本文の記号のもとで, “ (C) 上の相対境界を持つ Riemann 面 \mathfrak{R}_x は, その (Γ) 上だけの面積と相対境界の長さとは共に Ω の一定倍で抑えられているなら, 全体の面積もそうである” というのである. 実際それは (円周 Γ_2 を, その上にある \mathfrak{R}_x 上の曲線の長さがやはり Ω の一定倍で抑えられているように R_2 を取っておけば) 円環 (Γ_2, C) 上にある \mathfrak{R}_x の相対境界が Γ_2 上に時計回りに巻きついているときの面積を越えない.

解 題

この論文は 1962 年 9 月 20 日に受理されているが、その前後頃、奈良女子大学で開かれていたセミナーで、私達当時の門下生はこの論文の先生自身の紹介を聞くことができた。

第 IX 論文の解題で述べたように、このころ岡先生は研究の方向を大きく変えられた。その理由の一端をこの論文の序文では

『現在の数学の進展には抽象化の傾向がある。我々の研究分野においてさえも、定理はどんどんと一般化され、そのあるものは複素変数の空間を出ている。私には、それは冬であると感じられる。』

と書かれている。これは、決して複素多様体に対する無理解から来た言葉ではない。実際、第 IX 論文の解題で述べたように、これ以前に数年間にわたる複素多様体の研究があるのである。

序文にはそれに続いて

『私は長い間、春の巡りを待ちかねており、何か春を感じさせるような研究をしたいものだと思ってきた。』

と書かれている。この論文がそのような研究の一つであると言うのであるが、実際この研究に春の若草の芽生えを感じるのは私だけではないであろう。

先生の言葉による、数学の客観的形式としては、この論文は 1934 年に書かれた解析面の正規族の研究の続きである。しかし主観的内容としては、これは多変数の場合の整函数の値分布の研究を念頭にして書かれている。

岡先生は、1964 年 2 月に京大基礎物理学研究所で開催された数理解析学総合研究 第 1 班 シンポジウム で講演をされ、それが 1964 年 3 月にまとめられた「数理解析学総合研究報告集」に掲載されている。(このホームページに公開予定) その 6 節にこの論文の結果について言及されている。すこし長いが、その部分を紹介する。

『1 変数のばあいには Intergral function とか meromorphic function とかの理論が色々あります。これを多変数にしますと、 x_1, x_2, \dots, x_n を変数とする整函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ で、 x_2, \dots, x_n を決めますと、ここに $f(x_1, a_2, \dots, a_n)$ という 1 変数の整函数ができて、これについて色々 theory が成り立つ、即ち図が描ける。そこでこの parameter を動かしたらこの図が動く。だから moving picture が出来ます。そのうごきかたがどうかという一系の問題があります。それでそういう見方が可能だという気がするような論文を出しています。私のです。複素数空間に固有面の列 S_1, S_2, \dots と、そして別に positive number の列 ν_1, ν_2, \dots がある。そう

したとき ある点の近傍において、これらの固有面の area $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ とこの数との比 $\sigma_1/\nu_1, \sigma_2/\nu_2, \dots$ が bounded になる領域が考えられます。これもやはり擬凸状になる。そういう定理です。これ自身では moving picture になっていませんが、そういう事が色々あるという事を感じさせます。』

なおこの報告の 7 節には多変数の代数函数について、8 節では偏微分方程式について言及されている。本論文の序文の終わりには

『この論文はそのようなものの最初の一つである。』

と書かれており、色々な研究テーマを温めておられたことが想像されるが、上記の二つもそのようなテーマの一端なのであろう。しかし実際に書かれたのはこの論文唯一つであった。

最後に上記の岡先生の講演の締めくくりの言葉を紹介して、公表論文の日本語訳を終える。

『多変数解析函数の所は、理論が出来るのに非常に時間がかかりました。何しろ初めはだんだん発見されるほど困難がふえて行ったのですから。所がそれとは別に大体前世紀の 1890 年くらいから始めまして、やっている人は少なかったのですが、しかし長い間に色々な文献をためて色々な結果に達しています。がそれは理論が出来上がるよりも前から始めている事が多いのだからして、その一つ一つについて、始めからもっと色々な事を知っているとすれば、ないしは予想出来るとすれば、という風に一応見なおさなければなりません。整理するのはめんどろだけけれど、そうしていけば一つ、二つずつ問題は必ず出てきます。それで当分はその様に一応整理して、問題を出してそれを解く。そうしてからでないとい先へは進めない。そのかわり当分は後ろ向きの姿勢で研究する事が出来る。現在はそういう所と考えています。』