多価解析函数等の族についてのノート.

岡 潔

(1934 年 1 月 20 日 受理)

1. 以下に輪郭と主な結果をごく簡単に予報するこの研究[1]の目的は, 複素 1 変数の一価な解析函数の収束に関する古典的な理論における, Weierstrass, Stieltjes, Vitali および Montel による注目すべき結果の流れを, まず多価解析函数に, 続いてそれ以上のものに拡張することである. しかし第二の一般化は M. Stieltjes の定理までしか可能でない[2].

I. 固有面の正規族.

2. 複素 1 変数 x の解析函数 $f(x)$ を, 多価性において, 十分一般に取り扱うためには, 次のように 4 次元の空間でそれを考察するのがより好都合で, より一般的である：

y を第 2 の変数として, $x=x_1+ix_2$, $y=y_1+iy_2$, $i=\sqrt{-1}$ とする. この x, y によって常に直交座標系 (x_1, x_2, y_1, y_2) の空間を考え, それを簡単に (x, y) によって表す.

空間 (x, y) に与えられた領域 Δ において, 方程式 $y=f(x)$ を満たす点の集合は, それが存在するかぎり, 一つまたはいくつかの連続な曲面からなる.

S をこれらの曲面の任意の一つとするとき, やはりその空間で考えられたその解析要素の任意の二つが, 一方から他方へ Δ 内の或る道 (それは曲面 S 上になければならない) に沿って解析的に延長し得るとき, それは<u>解析的に一続き</u>であると言われる.

そういうことなので, "<u>Δ における固有面</u>" (surface caractéristique) という言葉を上記のような解析的に一続きの曲面 S のことと理解する. ただし $x=\mathrm{constante}$ という形の固有平面はそれに含める. [訳注. この定義は多少曖昧である.]

改めて S を領域 Δ における固有面とする. Δ に含まれる領域 (δ) において, もしそれが (δ) における 2 変数 x, y の正則函数 $F(x, y)$ によって $F(x, y)=0$ なる形の方程式によって表されるなら, 函数 $F(x, y)$ を簡単に, 領域 (δ) に対する固有面 S の正則随伴函数 (fonction adjointe holomorphe) と呼ぶ.

[1] 詳細は程なく発表されるであろう.

[2] 同様の目的に捧げられた論文としては, G. Julia, *Sur les famulles de fonctions analytiques de plusieurs variables* (Nos. 72–80), Acta, 1926 しか私は知らない.

固有面 S 上の点を 2 種に分類する : もしその点を中心とする十分小さい超球を, それに対する S の正則随伴函数が存在するように描けるなら, その点は 第 1 種 の点であるとする. そうでなければその点は 第 2 種 の点であるとする.

3. 正規族の定義. (F) を空間 (x, y) の領域 Δ における第 2 種の点を含まない固有面 [訳注. 通常の解析面と考えればよい.] の族とする.

領域の点にたいし, その点を中心とする超球 (w) を十分小さく取れば, 族の固有面の (w) に対する随伴函数 $F(x, y)$ を, 函数 $F(x, y)$ の族が (w) で正規[3]であり, しかも極限函数に定数零を含まないように作れるとき, 族 (F) はその点で正規であるとする.

Δ の点が面の族の極限点の集合に属していないなら, 定義により, 族はその点で正規であることをここで注意しなければならない.

族 (F) はもしそれがその領域のすべての点で正規であれば, 領域 Δ で正規であると言われる.

領域の点はもしその族がその点で正規でないなら, その族の (J) 点に属すると言われる.

4. S を空間の領域 Δ における第 2 種の点を含まない固有面とする. M. Cousin の方法のお陰で, Δ の内部にあるすべての双円筒に対し, 函数の絶対値のそこでの平均値が, 唯一つの量, すなわち曲面 S の, その双円筒内の面積によって, 両側から評価できるような, 正則随伴函数を作ることができる. このことから次の定理が得られる.

定理 1. (F) を空間 (x, y) の領域 Δ における第 2 種の点を持たない固有面の族とする. 族 (F) が Δ で正規であるためには, 族の曲面の, Δ の完全内部にある任意の領域 (δ) における面積が, (F) と (δ) のみに依存する上限によって制限されていることが必要かつ十分である.

定理 2. 族 (F) の (J) 点の集合は次に定義するクラス (H) に属している.

II クラス (H) の集合

5. 定義と例 空間 (x, y) の点集合 E が次の性質を持つとき, 発見者 M. F. Hartogs[4] の名に因んで, それは空間領域 Δ におけるクラス (H) に属する[5]と言う.

[3] M. Julia の意味で, 前注. [訳注. この論文の人名の前にはよく M. と付けられている. 男性に対する敬称であるが, それについて「なになに君というような雰囲気で書いていた」と言われたことかあったので, そのままにした.]

[4] Math. Annalen **62**, Acta. **32**, 等

[5] またはもっと単純に "(H) 集合

1° E は Δ の内部で閉集合である.

2° O を空間の有限な部分にある任意に与えられた定点とする. O から E の任意の点迄の距離は, 領域 Δ 内の E の有限部分で, 広い意味の相対的最大値を取らない.

3° E の上記の性質は, 空間 (x, y) の 1 対 1 解析的な変換を許す.

もっと正確に言うと, もし Δ 内の領域 (ω) が, (ω) 内の E の部分と共に 1 対 1 解析的に変換されたとすると, 変換された集合もまた新しい領域で性質 $(1°, 2°)$ を満たすというのである.

上記の性質の大切さは最初 M. Hartogs により, 複素 2 変数の解析函数の特異点の集合を研究しているなかで指摘された. それらの集合は少し修正することでクラス (H) に対する一つの例を与える. 他の例は E. E. Levi[6] と G. Julia[7] の論文に見いだせる. そして第 2 種の点を持たない固有面はその最も単純な例である.

クラス (H) の集合の理論はこれらの数学者及び他の数学者達によって発展させられた. それらの結果は勿論抽象的に証明されているわけではない. しかし, 例えば M. Julia の論文 の No. 25 から No. 44 までのように, その殆どは上記の定義で与えた三つの性質だけで確立されている.

6. 空間 (x, y) に任意の点集合 E が与えられたとき, x 平面の点 x_0 に対し, E 上の点 $(x_0, y_0), (x_0, y_1), \ldots$ が対応する. これらは, 集合として空のこともあり, 可算または非可算であることもある. そしてそれから y 平面の点 $y_0, y_1, \ldots$ の集合が対応する. それを $\mathfrak{E}(x_0)$ と表す. これは固有平面 $x = x_0$ による集合 E の切り口である.

逆に, もし 対応 $\mathfrak{E}(x)$, すなわち x に依存する可変な集合, が与えられたとすると, 元の集合 E を定めることができる. これを解析面のときと全く同様に $y = \mathfrak{E}(x)$ と表す.

特別な場合として E は筒状域 $(x \in D,\ y \in D')$ におけるクラス (H) の集合とする. 対応する切り口 $\mathfrak{H}(x)$ は, もし考察を D' 内に限るなら, 領域 D で解析函数とよく似た振る舞いをする. このような切り口 $\mathfrak{H}(x)$ に対して, 一般な形で Stieltjes の定理を再構成しよう. 先ず極限移行の二つの様式を述べる.

7. 1°. 空間 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ における極限移行. (F) を空間領域 Δ における (H) 集合の或る族とし, その極限を E_0 とする. その意味は, 集合 E_0 の任意の点のすべての近傍に対し[8], その近傍内に少なくとも一つの点を持つような, この族の無限個の集合が存在する, ということである.

[6] Annali di Matematica **17**, **18**, série III.

[7] 前掲

[8] これは無限遠点でもかまわない.

定理 3. 族 (F) の空間における極限 E_0 はまたクラス (H) に属する.

2°. y 平面における極限移行. (Σ) : $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ を双円筒領域 (D, D') における (H) 集合の列とし, その空間における極限を E_0 とする. $\mathfrak{H}_\nu(x)$ を E_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ に対応する切り口とする. 他方, 対応 $\mathfrak{K}_0(x)$ として, x' を D 内の任意の定点とするとき, $\mathfrak{K}_0(x')$ の任意の点のすべての近傍に対して, その近傍内に少なくとも一つの点を持つような, 列 $\mathfrak{H}_\nu(x')$ の無限個の集合が存在するようなものを考える.[9]

定理 4. D 内に任意に与えられた長さのある Jordan 曲線上の点 ξ で $\mathfrak{H}_0(\xi)$ の境界が (D' 内) 存在し, さらに $\mathfrak{K}_0(\xi)$ の境界には含まれないようなものよりなる集合は測度零である.

前の定理により, クラス (H) のただ一つの集合を考察しさえすればよい.

III. M. Hartogs の定理の一般化.

8. まず, 以下で基本的な役割を演ずる, 平面の点集合の対数的ポテンシャルに関する容量についていくつかの注意をしよう. M. H. Lebesgue によって導入された概念である容量の理論は次第に発展した.[10] しかしその殆どの研究は 3 次元に捧げられているので, 我々の場合に対する最初の概念を与えるためにいくつかの言葉を用意しなければならない. 先ず定義を与えよう.

1° 半径 1/2 より小さい円内に含まれる開集合 O の容量は, 対応する対数的ポテンシャルが 1 を越えない範囲で, O の内部に分布し得る正の質量の上限のことである.

2° 半径 1/2 より小さい円内に含まれる集合 E の外容量とは, E を含み, 同じ円に含まれる開集合の容量の下限のことである.

3° 有界集合 E は, もしすべての半径 1/2 以下の円に対して, E のその円内の部分の外容量が零のとき, 容量零である. もしそうでないなら E は容量正である.

有界閉集合に対しては, 容量零および容量正の範囲はそれぞれ次の如くである.

容量零の集合族は可算集合のすべてを含み, それより大きい.

容量正の集合族は non–ponctuel[11] な集合のすべてを含み, それより大きい.

[9] 集合 $\mathfrak{K}_0(x')$ はそのような点をすべて含むと考えている.
[10] De La Vallée Poussin, Note II, Annale de L'institut Henri Poincaré, 1932 を見よ.
[11] Painlevé の意味の.

9. 以下, 常に双円筒 $(x \in D, |y| < \infty)$ におけるクラス (H) の集合 E を考え, その対応する切り口を $\mathfrak{H}(x)$ と表す. $\mathfrak{H}(x)$ は領域 D の内部で有界であると仮定する.

補題. $\mathfrak{H}(x)$ の直径 $d(x)$ は D における対数的劣調和函数である.

すなわち函数 $\log d(x)$ は M. F. Riesz[12] の意味で劣調和であり, ただ, 今の場合これらの函数は "très infinies" [訳注. 恒等的 $-\infty$ のこと.] になってもかまわない.

この補題より出発して M. Hartogs のよく知られた定理の一般化とみなされる次の定理が得られる.

定理 5. 領域 D 内の容量正の集合上のすべての x に対して, 集合 $\mathfrak{H}(x)$ は y 平面の有限個の点しか含まないとする. その個数は x によって変わってもかまわない. そうすると, 領域 D のすべての点に対してそうである. そして $\mathfrak{H}(x)$ は有限個の代数形函数よりなる.

定理 6. もし D 内の容量正の集合上のすべての x に対して集合 $\mathfrak{H}(x)$ は y 平面の可算個の点しか含まないとする. その個数は x によって変わってもかまわない. そうすると, 領域 D のすべての点に対してそうである. 正確には次の通りである.

1° x には依存しない, 高々クラス II [訳注. 高々可算] の超限順序数 α があって, $\mathfrak{H}^{(\alpha)}(x) = \emptyset$ となる. ここで $\mathfrak{H}^{(\alpha)}(x)$ は $\mathfrak{H}(x)$ の α 階の導集合を表し, x は定点と仮定されている.

2° それぞれ超球 (ω) 内で定義され, (ω) 内に第 2 種の点を持たない固有面 S の可算個で E を完全に覆うことができる.

3° 上記の固有面の族は, その各解析面 S を 超球 (ω) を越えて双円筒 $(x \in D, |y| < \infty)$ 内で解析的に延長したとき, E の外に新たな点を生成しないように選ぶことができる.

[12] Acta **48**.