擬凸状領域について

岡潔著

(藤原松三郎経由 1941 年 1 月 13 日受理)

多変数の解析函数論の最近の進展の始めに, F. Hartogs が, 全ての 正則域[1] は 擬凸状領域 であることを発見した. この二つの概念は理論の発展につれて, 特別に重要なものとなってきた. にも拘らず逆の問題は今日でも殆ど手付かずのまま残されている. 我々はこのノートでこの問題を取り扱う. ここでは簡単のため複素 2 変数の空間を設定する. しかしこの結論は任意個の変数に適用されるものであると信じる.

1. 複素 2 変数 x, y の空間において単葉有限な領域 D を考える. もし D の余集合 E が, 有限な任意の点 P の近傍において 連続定理 を満たし, 更にそれが, P の近傍における $1:1$ の擬等角写像を許すなら, それを 擬凸状 と呼ぶ. この第 1 の条件は次の通りである. P を中心とする十分小さい超球を描き, その超球内に点 (a, b) と $x = a$, $|y - b| = r$ なる形の円周を任意に取るとき, もし (a, b) が E に属し, 円周のどの点も E に属さないなら, 正の数 d があって, $|x - a| < d$ 内のすべての x' にたいし, (x', y') が E に属するような y' が $|y - b| < r$ 内に少なくとも一つ対応する. そうすると、

定理. 複素 2 変数の空間において, 全ての単葉有限な擬凸状領域は正則域である.

証明は後の論文で与える. 以下, 大急ぎでその本質的な部分だけを報告する.

2. 二つの正則域で, その一方が他方に浸食しているものから出発して, 少々込み入った条件を満たす擬凸状領域 Δ を構成しよう. 空間 (x, y) に 単葉有界 な領域 D と, それぞれ L, L_1, L_2 と表される $x_1 = a$, $x_1 = a_1$, $x_1 = a_2$ なる形の三つの超平面を考える, ただし, x_1 は x の実部であり, $a_2 < a < a_1$ である. 各超平面は D を分断していると仮定し, D の L_1 より左の部分, L_2 より右の部分および L_1 と L_2 の間の部分をそれぞれ D_1, D_2 および D_3 と表す. 先ず, D_1, D_2 のすべての連結成分は正則域である と仮定する. 次に, D_3 における正則函数 $X_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ にたいして :

1^o. $X_j(x, y) < 1$ ($j = 1, 2, \ldots, \nu$) を満たす D_3 の点の集合は D の境界と L の交わりの近傍の点を含まないと仮定する.

[1]或る領域は, もしそれが少なくとも一つの函数の正則域であれば, 正則域と呼ばれる.

2^o. 十分小さい正の数 ε と $1, 2, \ldots, \nu$ の任意の j にたいし, $|X_j(x,y)| > 1-\varepsilon$ を満たす D_3 の点の集合は L_1 の近傍の点も L_2 の近傍の点も含まないと仮定する.

3^o. 上の条件から, D_3 に含まれないか, $X_j(x,y) < 1$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ を満たすかする D の点は開集合をなす. その集合は L_2 の左, および L_1 の右にまで拡がっている連結成分 Δ を含むと仮定する.[2]

4^o. $(x,y) \in D_3$, $(x_0, y_0) \in D_3$ のとき, 恒等式

$$(X_j - X_j^0)R = (x - x_0)P_j + (y - y_0)Q \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

が成り立つと仮定する, ここで X_j^0 は $X_j(x_0, y_0)$ を表し, P_j, Q_j および R は変数 x, y, x_0, y_0 の正則函数であり, 特に R は $x = x_0$, $y = y_0$ のとき 1 となる. [3]

5^o. すべての X_j にたいし

$$\frac{\partial X_j}{\partial y} = 0, \qquad x_1 = a, \qquad |X_j(x,y)| = 1$$

を満たす点の数は D_3 内で高々有限であると仮定する.

6^o. D_3 内で $x_1 = a$, $|X_j(x,y)| = 1$ で定義される実解析的な曲面を Σ_j と表す. 上の仮定から, 全ての Σ_j は高々2 次元である. 曲面 Σ_j と Σ_k $(j \neq k)$ の交わりはすべて高々1 次元であると仮定する.

このように構成された領域 Δ は擬凸状である. Δ の部分で, L より左, L より右および L_1 と L_2 の間をそれぞれ Δ_1, Δ_2 および Δ_3 と表す. 集合 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ の各連結成分は正則域である.

3. Δ 内の L の部分とその集積点よりなる集合を S とする. 仮定 1 により, S は D_3 に含まれる. σ を S の境界 (S を L 上の集合と考えて) と

[2] この 3 条件は, 全ての有限な正則域はその領域における正則函数に関して凸状であるという H.Cartan–P.Thullen の定理に支えられている. H.Cartan–P.Thullen, Math. Ann.,1932 を見よ.

[3] この仮定にたいしては次の命題がある. D を空間 (x,y) の単葉有限な正則域とする. 正の数 ε と境界共 D 内に含まれる単葉で有界な領域 D_0 が与えられたとき, $(x,y) \in D_0$, $(x_0, y_0) \in D_0$ における, 変数 x, y, x_0, y_0 の正則函数であって, $x = x_0$, $y = y_0$ にたいして 1 になるような R が存在し, D における任意の正則函数 $f(x,y)$ にたいして, 正則函数 $\varphi(x,y)$ で D においてつねに

$$|f - \varphi| < \varepsilon, \qquad (\varphi - \varphi_0)R = (x - x_0)P + (y - y_0)Q$$

を満たすものが対応する. ここで φ_0 は $\varphi(x_0, y_0)$ を表し, P と Q は変数 x, y, x_0, y_0 の正則函数である. これは H.Cartan–P.Thullen の前の定理, A. Weil の定理, および著者の定理によって証明することができる. 最後の二つの定理にたいしては K.Oka, J.Sci.Hiroshima Univ., 1936,No. 4; と 1937, 定理 I を見よ.

する．σ は Σ_j $(j=1,2,\ldots,n)$ の和集合上にある．σ の Σ_j 上の部分を σ_j と表す．σ_j は高々2次元である．仮定6により，曲面 σ_j と σ_k $(j\neq k)$ の交わりは高々1次元である．

この状況の下で，S を含む或る開集合における任意の正則函数を $\varphi(x,y)$ として，σ の2次元の部分での重積分

$$I(x_0,y_0)=\frac{-1}{4\pi^2}\sum_j\int_{\sigma_j}\psi_j(x,y;x_0,y_0)\varphi(x,y)dxdy \quad (j=1,2,\ldots,\nu),$$

$$\psi_j(x,y;x_0,y_0)=\frac{Q_j}{(x-x_0)(X_j-X_j^0)}\ ^{4}$$

を考える．$(x,y)\in\sigma_j$ のとき ψ_j は，$(x_0,y_0)\in\Delta_3$ において，L を除いて正則であるから，$I(x_0,y_0)$ にたいしても同様である．$I(x_0,y_0)$ の L より左側を $I_1(x_0,y_0)$ とし，右側を $I_2(x_0,y_0)$ とする．仮定6により，I_1 と I_2 は Δ_3 内で L を越えて少しは解析接続され，$I_1-I_2=\varphi$ となる．

ψ_j を変形しょう．Σ_j' を $|X_p(x,y)|=1$ $(p=1,2,\ldots,\nu;p\neq j)$ 上の Σ_j の部分とする．Σ_j' は σ_j を含む．Σ_j' の十分近くに，Σ_j' を含み，その全ての連結成分が正則

域であるような開集合 V_j を作る．仮定1により，Σ_j' は D_3 に含まれているから，V_j は確かに存在する．

Cousin の第1問題は単葉有限な正則域では常に解けるから，仮定2により $(x,y)\in V_j,(x_0,y_0)\in D_1$ における有理型函数 $\Phi_j(x,y;x_0,y_0)$ で，(x_0,y_0) $\in D_3$ では ψ_j と同じ極を持ち，$(x_0,y_0)\notin D_3$ では正則であるようなものが存在する．

$(x,y)\in V_j$，$(x_0,y_0)\in D_1$ では $\Phi_j-\psi_j$ は正則である．D_3 は D_1 における正則函数に関して凸状であるから，与えられた正の数 ε にたいし，$(x,y)\in V_j$，$(x_0,y_0)\in D_1$ における正則函数 $\Psi_j(x,y;x_0,y_0)$ で，$(x,y)\in$ V_j'，$(x_0,y_0)\in D_1'$ では $|\Phi_j-\psi_j-\Psi_j|<\varepsilon$ となるもの が存在する．ここで V_j' は境界と共に V_j に含まれるような V_j に十分近い，予め与えられた開集合であり，D_3' は D_3 のそれである．

[4] ここで二三の説明をする．仮定により，各 σ_j の上で $\partial X_j/\partial y$ は高々有限個の点を除いて 0 にならない．その除外点以外の任意の点 P を取る．P の近傍では曲面 Σ_j は実パラメータ u,v によって $x=x(u,v),y=y(u,v)$ の形に表される．ここで右辺は変数 u,v のべき級数である．そして (x,y) と (u,v) の対応は $1:1$ である．(u,v) は通常の直交座標系の定められた平面の点と考えられる．σ_j の境界にはその平面の有限個の解析的な曲線が対応している．x_2 を x の虚部，θ_j を $X_j(x,y)$ の偏角とする．(u,v) は $\partial(x_2,\theta_j)/\partial(u,v)>0$ となるように選ぶ．そうすると定義として P の近傍では

$$\int_{\sigma_j}\psi_j\varphi dxdy=\int\int\psi_j\varphi\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$$

が得られる．右辺は σ_j の2次元の部分に対応する (u,v) 平面の部分における重積分である．

このようにして, D_1 に関する函数 Φ_j と Ψ_j が得られた. $A_j=\Phi_j-\Psi_j-\psi_j$ と置く. 同様にして D_2 に関する函数 B_j を作り, $I(x_0,y_0)$ の代わりに次の積分を考える:

$$J_1(x_0,y_0)=\frac{-1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{\nu}\int_{\sigma_j}(\psi_j+A_j)\varphi(x,y)dxdy,$$
$$J_2(x_0,y_0)=\frac{-1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{\nu}\int_{\sigma_j}(\psi_j+B_j)\varphi(x,y)dxdy.$$

$(x,y)\in\sigma_j$ のとき ψ_j+A_j は正則であるから $J_1(x_0,y_0)$ は Δ_1 で正則である. 同様に $J_2(x_0,y_0)$ は Δ_2 で正則である. これらの函数は L を越えて Δ 内で少しは解析接続され, 関係式

$$J_1(x_0,y_0)-J_2(x_0,y_0)=\varphi(x_0,y_0)-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{\nu}\int_{\sigma_j}(A_j-B_j)\varphi(x,y)dxdy$$

を満たす. $f=J_1-J_2$ と置く. この関係式により, f は S の全ての点で正則であることがわかる.

さてこの関係式で, f を与えられた函数と考え, φ を未知函数と考える. そうすると第2種の Fredholm の積分方程式が得られる. したがって ε を十分小さく選ぶと S の全ての点で正則な解 φ が得られる. このことから次の結果が得られる.

No.2 の条件のもとで, Δ_1 と Δ_2 の共通の境界 S の全ての点で正則な函数 $f(x,y)$ が与えられたとき, Δ_1 と Δ_2 における正則函数 $F_1(x,y)$ と $F_2(x,y)$ であって, Δ 内では L を越えて少し解析接続され, 恒等的に

$$F_1(x,y)-F_2(x,y)=f(x,y)$$

となるものが求められる. —これは我々に出発点を与える.