多変数解析函数についてのノート.

岡　潔

(Communicated by Y. Komatsu)

序文. 1.　任意個の変数の解析函数の分野は, 整数論と代数学, 解析学, 幾何学および理論物理学 (sciences exactes) [訳注. “高木先生への手紙” には理論物理学と書かれている.] 等の分野に拡がっています. それは非常に単純なことですが, 全く基本的なことです. 人はこれらの分野に群生している新しい問題群を夢見るでしょう. それが私達がこの研究を始めた幾つかの理由の一つです.

私達の第 I 論文 (Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, 1934)[5] の序文に立ち戻りましょう. そこには深く結び合った非常に基本的な問題群があります.

本質的に言いますと, これらの問題を, その存在理由, その一つは歴史的であることですが, と共に提起したのは H. Behnke と P. Thullen [2] でした. そしてそれは全く実際的な (concrète) 方法, もっと正確に言いますと, 適度な分量の著書を著すことによってなされました. (Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 1934, 特に 54, 68, 79 の各頁を見よ.)

私達は, 第 I-VI 論文 [5] によって, 進路 (voie) を知るための瀬踏みを致しました.

それ以来, 私達は先ず, そこから, 結果と方法とどこから始めるかを予想することに専心努力してきました. その一部分をこのノートで, 残りの部分を次のノートで述べることにします. そのことについて, その理由を簡単に述べましょう.

2.　かつて H. Poincaré は文化, それには例えば教育が含まれます,[訳注. 1] にとって本質的に重要な問題に回答しました. 問題は古くからのものですが, それについて明白に述べた最初の人は彼です. しかしその深い理由は述べられておらず, その具体的な方法も述べられていないと思います. それは次の問題です：

問題 (a) — 数学上の発見は如何にして起こるか？

ところで, 私達が真剣 (dévotement) に進めつつあるこの研究に, 先ず, 適切な表現方法を提供したのは R. Descartes ではないかと思います. [訳注. 2]

これと並んで次の問題があります.

問題 (A) — 数学 (sciences mathématiques) の或る同じ一つの分野における研究は, 本来の意味におけるただ一人の同じ人によって, どのように次々と推し進められるか ?

勿論, 一連の問題があります. 私達にはいまそれは算術的 (arithmétique) な集まり, すなわち (a, A) の間およびその両側に拡がる可算個の問題の集まりとして見えています. 私達は, 文化の母体を 多少なりとも 明らかにするため, 可能な限り精力的にそれらを研究しようと決心しているのです. [訳注. 3]

3. 特に, 考えを固定するために問題 (A), (a) を取り上げますと, それは一つの同じ本質的部分を持っているように思えます. 言い換えますと, 動物学の有名な例 [訳注. 4] に見られるように, これらの問題は本質的な部分では互いに似ていると思えます.

そして, このノートを書くのは, 私達の上記の考えを目に見える形で明らかにするための困難な (critique) 実験のためです.

4. このノートと次のノートは合わせて二つの部分からなっています. その第 I 部と第 II 部の始めの半分 A は我々に取って数学的に正確です. しかし残りはそうではありません. その理由を述べますと, 我々はその証明法を調べはしましたが, 紙を使わずにです. そこではともかく数学的論理の世界を一通り目を通しましたが, 疑いもなく, その世界はもはや純粋直観の効かないところです.

5. したがって, 勿論このノートについて, この分野を研究しその結果を公表する事について, 読者に 何の制限も課するものではありません. 私はそう思っています.

6. 一言申しますと, $\cdots$ は決心され始め, 決心され, $\cdots$ は忘我の中を進行し, 次第に形成され, 定式化されて止まる. 私達にはそのように見えます. (私はここで, 擬凸状領域のノートの時代からから現在までの期間の援助に対して, 風樹会に深甚の謝意を申し述べます.)

I. 有限不分岐領域.

既に述べましたように, 私達は, 私達の第 I-VI 論文に書かれた結果を表題の領域に拡張することを試みまして, それは 1943 年の末に終えました.

Behnke–Stein [1] がすでに示していますように, 正則函数の展開 (又は近似) の定理は表題の領域で成り立ちます. P. Cousin の問題に関する定理については, 正則域の葉数を有界である場合に限るかぎり, 同様です. そ

してこの前者 [訳注. 展開の定理] は一般な場合の後者 [訳注. P. Cousin の定理] の極限移行に対する十分な補題を提供します.

したがって残されている唯一の問題は, H. Behnke が導入し, P. Thullen と共に彼らの著書 [2] の 72 頁に定式化した概念, すなわち正則凸状に関するものだけです. その中でこの場合に重要な部分は 第三の領域 B_0' ($B_0 \subset B_0' \Subset B$) が定義によって有界葉であることです. さて

問題 — $\ll$ すべての擬凸状領域 (有限不分岐) は正則凸状か ?$\gg$

この F. Hartogs の概念, すなわち第 VI 論文で与えられた擬凸状領域の概念は (不分岐であるため) 直ちに一般化されます. この問題に対しては, H. Carta と P. Thullen の定理は, 葉数有界の場合を除いて, 正則域に対してすら, 答えてはくれません. [訳注. 無限葉の場合, H. Cartan と P. Thullen の定理からは, 正則域が正則凸状とは言えない.] さて, <u>この問題の答えは肯定的です</u>.

<u>II</u>. <u>正則イデアル</u>.

今度は第二の一般化について述べましょう. この場合先ず, どちらかに決めなければならない二つの道が有ることを述べなければなりません. その一つは, 無限遠点を許す場合の一般化です. ここには幾つかの問題がありますが, しかし私にはこれは本質的なものとは思えません. もう一つはクリティカルな点, すなわち分岐点を許す一般化で, この場合は最終的に考察すべき全く新しい幾つかの困難を発見するに到りました. $\cdots$ そして次の事に気づきました.

1° 変数 z の平面上で領域 $\mathfrak{D}$ と正則函数 $f(z)$ を扱うとき, 本質的な意味で, 領域を (元の領域から内部へ) 連続的に変形することができる.
2° これに反して, もし領域が分岐点 z_0 を持つなら, そのような連続的変形は許されない.

これは実に基本的な事実です. 我々は密かにこの第二のような場合を算術的 (arithmétique) であると言い, 第一のような場合を非算術的 (non–arithmétique) であると言うことにしています. [訳注. 5]
このようにして, 先ず, タイトルのイデアルを研究することが不可欠であることを再認識することになりました.

<u>A</u>. <u>イデアルの要素と始まりの問題</u>.

考えを固定するため, 領域は, そうでないことが明示される場合を除いて, 常に n 複素変数の空間の有限単葉なものに限ります.

C. Weierstrass の解析要素の概念に更なる自由度を与え, 同時に B. Riemann のそれを, もはや物理的な直観 [訳注. 閉曲面上で電流を考える F.

Klein のアイデアのことか?] の効かない一般な分野に延長 (prolonger) するため, 順序の付いた対 (f, δ) を 考えます (concevoyons). ここで δ は連結又は非連結な領域であり, f は δ における正則函数です. そして $f = 0$ または $\delta = 0$ のとき $(f, \delta) = 0$ と考えることにします. 要素 (f, δ) の集合 (I) を考えます. $(f, \delta) \in (I)$ のことを δ に対して $f \in (I)$ であるというようにも 書く こととします.

集合 (I) が次の条件を満たすとき, E. E. Kummer にしたがって, それを正則イデアル, または場合によって単にイデアルと言う事にします :

$1°$　もし $(f, \delta) \in (I)$ であり, (α, δ') が任意の要素であるとき, $\delta \cap \delta'$ に対して $\alpha f \in (I)$ である.

$2°$　もし $(f, \delta) \in (I)$, $(f', \delta') \in (I)$ ならば $\delta \cap \delta'$ に対して $f + f' \in (I)$ である.

定義から次の事が言えます.

$\ll$ もし $(f, \delta) \in (I)$, $\delta \supset \delta_0$ ならば $(f, \delta_0) \in (I)$ である.$\gg$

— したがって, 或る点で $f \in (I)$ であるとか, そうでないとかという言い方ができます. — イデアル (I) と領域 $\mathfrak{D}$ が与えられたとき, 順序を考えない組 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ が有限個の正則函数, すなわち $\mathfrak{D}$ で一価であり, $\mathfrak{D}$ のすべての点 P で (I) に属する函数からなり, さらに P の近傍のすべての点で (I) に属する函数 f に対し, α_i を正則函数として, P で常に恒等的に

$$f = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p$$

となるなら, それを (I) の $\mathfrak{D}$ に対する擬底と言うことにします. そうしますとす次の問題が得られます.

問題 I. — $\ll$ 与えられたイデアル (I) の $\mathfrak{D}$ に対する擬底を求めること.$\gg$

この問題の本質的な部分は, 後に述べる (問題 (E) を見よ) ように, 次の問題です.

問題 II. — $\ll$ 与えられた $\mathfrak{D}$ の点 P に対する, すなわち P の一定の近傍に対する (I) の擬底を求めること.$\gg$

上記のような底を局所底と呼びましょう. この問題 II は, 色々な例があって, 無条件では解けません. ところで問題 II の内, 最初に研究しなければならないのは次の問題です :

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p = 0 \tag{1}$$

を考え, $\mathfrak{D}$ に含まれる連結または非連結な領域 δ における正則函数の系 $(A_1, A_2, \cdots, A_p)$ で恒等的に式 (1) を満たすものを, 方程式 (1) の δ に対

する解と呼びます. δ に対する (1) の解からの順序の付いた対 (A_1, δ) の全体よりなる集合 (I) を考えます. (I) はイデアルであり, 上記の問題が考えられます. すなわち

問題 III. — $\ll$ 上に述べたイデアル $(I) = \{(A_1, \delta)\}$ に対し, $\mathfrak{D}$ の与えられた点に対する局所底を求めること.$\gg$

H. Cartan と共に, この問題の意味を述べましょう. ともかく考えを固定し, 印象を深め, 歴史の固有な成り行きを尊重して, ある種の問題群を集めましょう.

先ず, $F_1, F_2, \ldots, F_p$, f, φ を $\mathfrak{D}$ における正則函数とします. もし α_i を $\mathfrak{D}$ における正則函数として

$$f - \varphi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p$$

の形の解が存在するなら, P. G. L. Dirichlet にしたがって, 函数 f, φ は $\mathfrak{D}$ において (F) に関して合同であると言い, 彼にしたがって, それを $f \equiv \varphi \mod (F)$ と表すことにします. P を $\mathfrak{D}$ の点とするとき, もし P の近傍に対してそうなら二つの正則函数は P で合同であると言います. そして

A. Weil の問題 — $\ll$ n 複素変数の空間の単葉な有界閉領域 Δ, Δ の近傍における正則函数の組 (順序付けられてはいない) $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ および同じく Δ の近傍における正則函数 Φ が与えられたとし, それらは Δ のすべての点 P で $\Phi \equiv 0 \mod (F)$ とする. このとき Δ の近傍における正則函数の組 A_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ を, 恒等的に

$$\Phi = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p$$

となるように求めること.$\gg$

この問題には第 V 論文の中で, A. Weil (1932-1935) の条件として出会いました.

問題 (C) — $\ll$ 上記の意味で, Δ, $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ を考え, Δ のすべての点 P に, 基本多円筒 (γ) と (γ) における正則函数 φ が対応し, 隣接する (γ) のすべての対に対し, 対応する函数はその共通部分のすべての点で, (F) に関して合同であるとする. このとき Δ の近傍における正則函数 Φ を, Δ のすべての点 P で $\Phi \equiv \varphi \mod (F)$ となるように求めること.$\gg$

この問題にはすでに第 I 論文で出会いました.

次に, $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$, $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q)$ を $\mathfrak{D}$ における正則函数の二つの組とします. もし

$$\varphi_i = \alpha_{i1} f_1 + \alpha_{i2} f_2 + \cdots + \alpha_{ip} f_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

および

$$f_j = \beta_{j1}\varphi_1 + \beta_{j2}\varphi_2 \cdots + \beta_{jq}\varphi_q \qquad (j = 1, \ldots, p)$$

なる形の二つの関係が存在するなら, それらは $\mathfrak{D}$ で同等であると言い, それを $(f) \sim (\varphi)$ と表します. もし $\mathfrak{D}$ の点 P の近傍に対してそうであるなら, P で $(f) \sim (\varphi)$ であると言います.

問題 (E) — ≪ 問題 (C) と同様の幾何学的状勢の下で, 各 (γ) に正則函数の組が与えられており, 隣接する (γ) のすべての対に対し, 対応する函数の組はその共通部分のすべての点で同等であるとする. このとき Δ の近傍における正則函数の有限個の組 (F) を, Δ のすべての点 P で $(F) \sim (f)$ であるように求めること.≫

この問題は第 II 論文で出会い, それを他の道, すなわち定理 I を見つけることで回避しました. H. Behnke と K. Stein が I で述べた結果に到達したのはその道筋に依ってです.

この第 II 論文の定理 I は読者にとってもっと簡単に証明することが出来ます. しかし, 我々の場合, 証明のための元の道筋は, 1934 年に書かれたノートの一つの 話題 (1931) の発展したもの (la coulée) です. それは後の論文で, 適当な時期に説明します. そのノートは幾つかの話題からなっていますが, それらは, すぐにではありませんが, 適当な時期に詳細を公表します.

これが前に述べました問題群です. さて H. Cartan は最近の論文 (Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Ann. Ecole Norm. sup., (3), LXI — Fasc. 3) [3] で次のことを示しました.

≪ もし問題 III が常に解けるなら, A. Weil の問題, 問題 (C) および (E) は, 閉領域 Δ を外的正則凸状に制限する限り, 解ける.≫

これは証明無しですが, その準備はすべて成されています. したがって今後 問題 III は H. Cartan の名前によって呼ばれるでしょう. 何故ならこの問題の十分な存在理由を最初に与えたのは彼なのですから.

我々が出発点となすべく研究したのはこの H. Cartan の問題です. ところで, H. Cartan のこの問題は常に解けます.

次のノートでは, 正則イデアルの局所擬底が存在するための必要十分条件の便利な形および, 我々に取って非常に重要な exemple と sous–exemple について述べます.

(Fin de la première Note, le 1 Décembre 1949.)

(*) Received Dec. 19, 1949.

[1] H. Behnke–K. Stein, Approximation analytisher Funktionen in

vorgegebenen Bereichen der Raumes von n komplexen Veränderlichen. Göttingen Nachrichten, neue Folge 1 (1939) 195–202.

[2] H. Behnke–P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Erg. Math. III 3, (1934) Berlin.

[3] H. Cartan, Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes. Annals Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 61 (1944). 149–197. Jour. de Math. (9) 19 (1940) 1–26 も見よ.

[4] H. Cartan–P. Thullen, Regularitäts- und Konvergenz Bereiche. Math. Ann. 106 (1932) 617–647.

[5] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables,

(I) Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles. Jour. of Sci. Hiroshima Univ. 6 (1936) 244–255.

(II) Domaines d'holomorphie. ibid. 7 (1937), 115–130.

(III) Deuxième problème de Cousin. ibid. 9 (1939) 7–19.

(IV) Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles. Jap. Jour. of Math. 17 (1941) 517–521.

(V) L'intégrale de Cauchy. Jap. Jour. of Math. 17 (1941) 523–531.

(VI) Domaines pseudoconvexes. Tohoku Math. J. 49 (1942) 15–52; また : Proc. Imp. Acad. Tokyo. 17 (1941) 7–10 を見よ.

[6] A. Weil,

(1) Sur les séries de polynomes de deux variables complexes, C. R. Paris 194 (1932) 1304–1305.

(2) L' intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. Math. Ann. 111 (1935) 178–182.

訳　注

[訳注. 1]　「H. Poincaré の問題について 素材その一 (岡潔先生遺稿集第三集収録)」の序文 1 に「この数学上の発見が如何にして生まれるかと云う問題を, $\cdots$, 全く不問に付して置きながら, 敢えて人の撰擇指導評價等をするに至っては, 云々」と書かれている.

[訳注. 2]　「H. Poincaré の問題について 素材その一」にはその表現方法として, 横軸に時間, 縦軸に研究者に現われる情熱の度合いを取った曲線が書かれており,「curve はデカルトに教ったように書きましょう」と書かれている.

[訳注. 3]　同じ上記の論文の序文に「広く文化の母体を究明したいという限りない憧憬をお添へしたつもりであります.」と書かれている.

[訳注. 4]　Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VIII — Un problème d'existence intérieure の序文に「たとえば個体の発生は種屬のそれを簡潔な筆致で繰り返して見せてくれますように」と書かれている.

[訳注. 5]　少し分かりにくい言い方になっているが,「問題を解くとき, 局所的に近似が効くのが解析的で, 近似の効かないのが算術的である」と言われたことがある.

編　注

この論文は Kodai Math. Sem. Rep. Nos. 5–6, Dec., 1949 に掲載されたものであるが, 残念ながらそれには誤植が多い. 他方, この論文の岡先生による自筆の原稿が残されており, それは「岡潔先生遺稿集第三集」に収録されている. それで, ここに公開する仏文の論文は, 全体の体裁および文献目録を上記の掲載論文に従い, 本文を大凡自筆の原稿に従って編集した. 日本語訳はそれからの翻訳である.

この論文は, 序文に書かれているように, 通常の数学の論文とは性格が異なっているため, 執筆内容の把握し難い部分が何カ所もある. それで, 翻訳にあたっては, そのような箇所の幾つかに [訳注] として参考になりそうな事柄を付け加えた. その部分は全く訳者 (西野) の主観によるものであることを留意して頂きたい.

以上のような論文ではあるが, 私達は, このような内容の文献の存在は非常に貴重なものであると考え, 敢えて翻訳を公開することとした. 訳者の力量不足による誤訳の存在は覚悟の上である. この訳が岡先生の思想に到達するための第 1 近似としての役割を果たすことを願っている.