多変数解析函数について
II–正則域

岡潔

1936 年 12 月 10 日受理

序文. 前論文[1]において，私は有理函数に関する凸状域の主問題を研究した．今度は正則函数に関する同じ問題を研究する．そしてそれは, 同じアイデア，すなわち, 上空へ移行することによってなされる．

複素多変数の空間に，単葉有界であって，有限個の正則函数に関して凸状な地域が与えられると，前論文でなされた方法で, 上空に曲面 (multiplicité) Σ が描かれる．我々がその凸性のあり方を詳しく考察しようとしているのはこの曲面 Σ についてである．

前論文で確立された定理を用いると, 結論として曲面 Σ は多項式に関するある種の凸性を持つことがわかる. (4 節の定理 1 を見よ）我々はこれを正則域に関する基本的な事実であると考える.

このことから，H. Cartan と P. Thullen[2] のよく知られた定理によって, 表題の理論の未解決の問題[3]にたいする肯定的な解決を与えることができる．すなわち与えられた極に関する P. Cousin の定理は有限単葉な正則域にたいしても成り立つ．

1．概論[4]　n 個の複素変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ によって生成される空間 $((x))$ を考え，先ずそこで幾つかの定義を与えよう．

或る地域が, r_i を正の定数とし, $P_j((x))$ を x_i の多項式として,

$$|x_i| < r_i, \quad |P_j((x))| < 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

を満たす点の集合として定義されるなら, その地域をクラス (P_0) に属すると言うことにする．

F を閉集合とするとき, クラス (P_0) の中に, 減少しながらそれに収束する地域の列を見つけることができるなら, その F をクラス (P_1) に属すると言う.

有界集合 E が与えられたとき，E を含むクラス (P_1) の閉集合全体の共通部分 $\mathfrak{E}$ を考え, それを E を含むクラス (P_1) の最小集合と言う. 実際, $\mathfrak{E}$ はまた (P_1) に属する.

---

[1] この雑誌, 6 (1936)

[2] 前に引用した論文

[3] H.Behnke と P.Thullen の前掲の著書 68 頁を見よ.

[4] 以下開集合を連結かそうでないかによって領域 (domaine) または地域 (région) と言うことにする．説明を簡単にするため地域 (領域) は, そうでないことが明示されていない限り, 有限で単葉であると考える.

証明. 先ず, $\mathfrak{E}$ は当然閉集合である. 次に, (C) を与えられた集合 E とその集積点をすべて含む多円筒とする. F を (C) に含まれ E を含むクラス (P_1) の任意の集合とすれば, $\mathfrak{E}$ はそのような F 全体の共通部分である. 任意の正の数 ρ にたいし, 多円筒 (C) およびその境界点を含み, $\mathfrak{E}$ 迄の距離が $\geq \rho$ であるような点全体の集合 A を作る. A は閉集合である.

M を A の任意の点とする. M は或る F の外点であるから, M を中心とする十分小さい多円筒 (γ) を描けば, (γ) で

$$|P((x))| > 1$$

であり, $\mathfrak{E}$ で

$$|P((x))| < 1$$

となるような多項式 $P((x))$ が見つかる. そうすると Borel-Lebesgue の補題により, A をそのような多円筒 (γ) の有限個で覆うことができる. $P_j((x))$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ をそれらの多円筒に対応する多項式とし,

$$((x)) \in (C), \qquad |P_j((x))| < 1, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

なる形の地域 D を考える. D は明らかにクラス (P_0) に属しているが, それは $\mathfrak{E}$ を含み, $\mathfrak{E}$ 迄の距離が $> \rho$ となる点を含まない. ここで ρ は任意である. 従って $\mathfrak{E}$ はクラス (P_1) に属する. C.Q.F.D.

空間 $((x))$ における任意の有界集合を E とし, E を含む (P_1) の最小集合を $\mathfrak{E}$ とする. そして (σ_t) を次の形の解析面の族とする.[5]

$$(\sigma_t) \qquad f((x), t) = 0, \qquad ((x)) \in U, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

U は空間 $((x))$ における或る有界な領域, $f((x), t)$ は $((x)) \in \overline{U}$, $0 \leq t \leq 1$ で定義された変数 x_i と t の一価連続な函数であって, この集合のすべての点で正則であり, この区間のすべての値 t にたいして $f((x), t)$ は恒等的に零とはならないようなものである. $\overline{U}$ は U の点とその集積点よりなる閉集合を意味する. [訳注 1]

このとき次のような状況には決してならない.

1. この族のすべての解析面は $\mathfrak{E}$ の或る一定の近傍 V の中に端を持たない.
2. どの解析面も E の点およびその集積点を通らない.
3. 解析面 (σ_0) は $\mathfrak{E}$ の点を通るが, (σ_1) は V の外にある. [訳注 2]

証明. 族 (σ_t) がそのような状況になったと仮定する. そうすると, 線分 $(0, 1)$ を含む t 平面のクラス (P_0) に属する領域 T を適当に取り, 地域 U と

[5] 固有面 (charakteristische Flächenstück) については, Behnke-Thullen の教科書, 24 を見よ. [訳注. 正則函数の零面を当時は固有面と言った. この訳文ではそれを解析面と訳すことにする]

V を少し小さくすれば, 線分 $(0,1)$ を T に置き換えても同様の状況になる. $\mathfrak{E}$ は空間 $((x))$ における (P_1) の集合であるから, 地域 V は空間 $((x))$ のクラス (P_0) に属していると考えることができる．そうして作られた地域 (V,T) は空間 $((x),t)$ におけるクラス (P_0) に属しているから, 前の論文の定理 I により，そこにおける変数 x_i と t の有理型函数 $G((x),t)$ で，極として $1/f((x),t)$ を持つものを見つけることができる.

t を 0 から 1 へ動かすとき，最後に $\mathfrak{E}$ の点を通る解析面を (σ_a) とし，M をその解析面上の $\mathfrak{E}$ の点とする．函数 $G((z),t)$ は点 (M,a) で極を持っているから, 今度は t を線分 $(a,1)$ に沿って a に近づけると，値 $G(M,t)$ は無限に大きくなる．他方, 函数 $G((x),t)$ は, $[E,(0,1)]$ のすべての点およびその集積点で正則であるから，そこで有界である．このことから線分 $(a,1)$ 上で a の近くに点 β を適当に取れば

$$\max|G(E,\beta)| < |G(M,\beta)|$$

となる. この左辺は $|G((x),\beta)|$ の E における上限を意味する.

さて, 函数 $G((x),t)$ は空間 $((x),t)$ のクラス (P_1) に属する集合 $\mathfrak{E}$ の各点で正則である. したがって, 前の論文[6]で得たことから, その函数を $\mathfrak{E}$ の近傍で多項式の級数に展開することができる．そうすると x_i の多項式 $\Phi((x))$ で

$$\max|\Phi(E)| < |\Phi(M)|$$

となるものが存在することになる. これは $\mathfrak{E}$ が最小であることと矛盾する．したがってこのような解析面の族は存在しない. C.Q.F.D.

注 意　上の過程で, 多項式を有理函数に置き換えて，クラス (R_0) と (R_1) およびクラス (R_1) の最小集合を定義することができる．そして全く同じ議論でこのクラスに対しても上と同じ命題が得られる.

2. クラス $(\mathbf{H_0})$. 函数 $\mathbf{R_j(x_1)}$.　空間 $((x))$ の地域 $\mathfrak{G}$ (単葉有界) において, 変数 x_i に関する ν 個の正則函数 $f_i((x))$ を考え, これによって次のような点集合 Δ を考える.

$$(\Delta) \qquad |x_i| \le r_i, \quad |f_j((x))| \le 1, \quad (i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,\nu)$$

$$((x)) \in \mathfrak{G},$$

r_i は正の定数である．さらに, いかなる Δ の集積点も $\mathfrak{G}$ の境界上には存在しない，言い換えると Δ は閉集合であるとする．このような閉集合 Δ は前論文の地域 Δ に対応するものであるが, それを クラス $(\mathbf{H_0})$ に属する と言うことにする. [訳注 現在これを解析多面体と呼んでいる.]

[6] 4 節を見よ．そこでは領域における命題が書かれているが，証明に際して連結であるという仮定は使われていない．だからこの命題は地域にたいしても成り立つ.

前の場合と同様に, ν 個の新しい複素変数 y_j を導入し，空間 $((x,y))$ の中に次の閉集合 Σ を描く.

$$(\Sigma) \qquad y_j = f((x)), \quad ((x)) \in \Delta, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

そうするとこの場合も Σ の端はすべて多円筒

$$|x_i| \leq r_i, \qquad |y_j| \leq 1$$

の境界にくる．この新しい空間 $((x,y))$ で Σ を含むクラス (P_1) の最小集合 $\mathfrak{A}$ を考え，これに今確立したばかりの一般的な命題を適用しよう．先ず明らかなことに, $\mathfrak{A}$ は多円筒 $|x_i| \leq r_i$, $|y_j| \leq 1$ に含まれている.

$\mathfrak{A}$ を空間 $((x))$ へ射影した像を $\mathfrak{B}$ とし,[7] $\mathfrak{B}$ を x_1 平面へ射影した像を $\mathfrak{C}$ とする. $\mathfrak{A}$ は閉集合であるから $\mathfrak{B}$ と $\mathfrak{C}$ もそうである．解析面 $\mathbf{x_1} = \mathbf{x_1'}$ (定数) による $\mathfrak{B}$ の切り口を作り，それを空間 $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ の点集合と考えて, Bx_1' と書く.[8] Bx_1' は閉集合である．さらに Gx_1' を $\mathfrak{G}$ の $\mathbf{x_1} = \mathbf{x_1'}$ による切り口とする．Gx_1' は開集合である．次に x_1 平面の点 x_1' で，Bx_1' が Gx_1' の外に空間 $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ の点を少なくとも一つ含むようなものの集合 (Ω) を考える. [訳注 3.] $\mathfrak{B}$ は閉集合であり $\mathfrak{G}$ は開集合であるから, (Ω) は, もし存在するとすれば, 閉集合でなければならない．(ω) を x_1 平面の地域で (Ω) の点と無限遠点を外点または境界点に持ち, 他の全ての点を含む集合とする. [訳注. すなわち x_1 平面における (Ω) の余集合.]

そのような地域 (ω) で，変数 x_1 の実函数 $R_j(x_1)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ を次のように定義する．もし x_1 が $\mathfrak{C}$ の点でないなら

$$R_j(x_1) = 0$$

と置く．次に x_1^0 を (ω) 内の $\mathfrak{C}$ の点とする．$\mathfrak{A}$ の点で, $x_1 = x_1^0$ となるような任意のものを $(x_1^0, \xi_2, \ldots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu)$ とする．x_1^0 は (ω) の点であるから, 定義により $(x_1^0, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ は $\mathfrak{G}$ の中にある．したがって函数 $f_j((x))$ はその点で確かに定義されている．そこで

$$R_j(x_1^0) = \max |\eta_j - f_j(x_1^0, \xi_2, \ldots, \xi_n)|,$$
$$(x_1^0, \xi_1 \ldots, \xi_n; \eta_1, \ldots, \eta_\nu) \in \mathfrak{A}$$

と定義する．$R_j(x_1)$ は次の性質を持つことを示そう.

$R_j(x_1)$ は対数的劣調和函数である.[9] [訳注 4]

[7] B のすべての点 $((x'))$ にたいして少なくとも一つ A の点 $((x,y))$ で $((x)) = ((x'))$ となるものが存在し，逆も成り立つようなもののことである.

[8] これは，もし $(x_2', x_3', \ldots, x_n')$ が Bx_1' の点であるなら，点 $((x'))$ は B に属し, そうでないとき点 $((x'))$ は B に属さないというようなもののことである.

[9] すなわち $\log R_j(x_1)$ が劣調和函数である．定義域の完全内部で上に有界な実数値上半連続函数 $\varphi(z)$ であって，存在域の完全内部に円を描いたとき，その周上での Lebesgue の意味で取った算術平均が中心の値に等しいかそれより大きいとき，変数 z の劣調和函数と言う．この種の函数の中に定数 $-\infty$ を含めるべきである．劣調和函数については，G. Julia の教科書 Princips géométriques d'analyses t. II を見よ.

証明．視点を定めるため, 函数 $R_1(x_1)$ を考える．先ず $\log R_1(x_1)$ が上半連続であることを示そう．そのためには $R_1(x_1)$ 自身について確かめればよい. さらに地域 (ω) に含まれている $\mathfrak{C}$ の部分を $\mathfrak{C}'$ とするとき $\mathfrak{C}'$ で見さえすれば十分である．それで x_1^0 を $\mathfrak{C}'$ の任意の点とし,

$$x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(p)}, \ldots$$

を $\mathfrak{C}'$ の点の列で x_1^0 に収束して

$$\lim R_1(x_1^{(p)}) = \alpha$$

となるものとする．α はある定数であって, なんでもよい．このとき

$$\alpha \leq R_1(x_1^0)$$

であることを示せば十分であろう.

さて, 点列の各 $x_1^{(p)}$ には少なくとも一つ

$$R_1(x_1^{(p)}) = |y_1^{(p)} - f_1((x^{(p)})|$$

となるような $\mathfrak{A}$ の点 M_p, $((x^{(p)}, y^{(p)}))$ が対応している. それで新しい点列

$$M_1, M_2, \ldots, M_p, \ldots$$

が得られる．M_0, $((\xi, \eta))$ をその点列の極限の一つとする．そうすると $\xi_1 = x_1^0$ である．他方 $\mathfrak{A}$ は閉集合であるから M_0 は $\mathfrak{A}$ に含まれている．このことから $x_1^{(p)}$ が x_1^0 に収束するとき

$$\alpha = |\eta_1 - f_1(x_1^0, \xi_2, \ldots, \xi_n)| \leq R_1(x_1^0),$$

となる．したがって $R_1(x_1)$ は上半連続である.

次は函数 $\log R_1(x_1)$ にたいする調和優函数の問題である．存在域の内部[10]に或る円 (γ)

$$|x_1 - x_1^0| < \rho,$$

を描いたとき, 函数 $\log R_1(x_1)$ にたいして, (γ) の周で取った Lebesgue の意味の算術平均のほうが中心での値より小さくなったと仮定する．この条件のもとで矛盾に導けばよい．さて, この状況で Poisson の積分を使かえば, その円内の, x_1 に関する正則函数 $\Psi(x_1)$ であって，$|x_1 - x_1^0| \leq \rho$ でその絶対値が一様連続であり, 零を取らず，しかも, 周上のすべての x_1 にたいして

$$R_1(x_1)|\Psi(x_1)| < 1$$

[10] もしある地域の中に含まれるすべての閉集合にたいしてある条件が満たされるとき，その条件はその地域の内部で満たされると言うことにする.

となるにも拘らずち，中心では

$$R_1(x_1^0)|\Psi(x_1^0)| = 1$$

となるものが容易に作れる. [訳注 5] この函数 $\Psi(x_1)$ を使って解析面の族

$$(\sigma_t) \qquad [y_1 - f_1((x))]\cdot\Psi(x_1) = e^{i\theta}(1+t),$$

$$|x_1 - x_1^0| < \rho, \quad ((x)) \in \mathfrak{G}, \quad 0 \le t < +\infty,$$

を作る．θ は後に定める偏角であり，$i = \sqrt{-1}$ である．この式の両辺は上記の各点で $n+1$ 個の変数 x_i, t の正則函数である．この族 (σ_t) にたいして 1 節で設定した条件を順次調べよう.

1^o. 解析面の端を見よう．それには 2 種類があり, 一つは $\mathfrak{G}$ の境界上に，もう一つは $|x_1-x_1^0| = \rho$ 上にある．第 1 のものから見よう．閉円 $|x_1-x_1^0| \le \rho$ は地域 (ω) の中に描かれている．閉円内の $\mathfrak{B}$ の部分は $\mathfrak{G}$ に含まれている．$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ を空間 $((x))$ へ射影した像であるから, もし $\mathfrak{A}$ を含む地域 V を $\mathfrak{A}$ の十分近くに取るならば $\mathfrak{G}$ の境界は完全に V の外にある．したがって考えている族 (σ_t) についても同様である. 第 2 のものについては, $|x_1 - x_1^0| = \rho$ 上の $\mathfrak{A}$ のすべての点にたいして

$$|\eta_1 - f_1((\xi))||\Psi(\xi_1)| < 1$$

であるから，V を $\mathfrak{A}$ の十分近くに取ると問題の境界点はすべて V の外にある.

2^o. Σ は解析面 $y_1 - f_1((x)) = 0$ 上にあるのだから, 区間 $0 \le t < \infty$ のすべての t にたいして，解析面 (σ_t) は Σ を通らない.

3^o 仮定により $R_1(x_1^0)$ は正でなければならないから，中心 x_1^0 は $\mathfrak{C}$ 上になければならない．したがって $\mathfrak{A}$ の点 $((x^0, y^0))$ を

$$|y_1^0 - f_1((x^0))| = R_1(x_1^0)$$

となるように取ることができる．このとき

$$|y_1^0 - f_1((x^0))||\Psi(x_1^0)| = 1$$

である．だから偏角 θ を適当に選べは, 解析面 (σ_0) は $\mathfrak{A}$ の点 $((x^0, y^0))$ を通る．他方，もし必要なら地域 $\mathfrak{G}$ を少し小さく取って, 方程式 (σ_t) の中の函数 $f_1((x))$ は考えている地域で有界であると見なすことができる．そうするとパラメータの或る値より先の解析面 (σ_t) はどれも V を通らない.

このようにして設定された条件をすべて満たす解析面の族が作れる．これは一般的な命題に反する．したがって $R_1(x_1)$ は対数的劣調和函数である．他の函数についても同じである. C.Q.F.D.

地域 (ω) を連結成分に分けて

$$(\omega_1), (\omega_2), \ldots, (\omega_i), \ldots$$

とする．この各々の中で函数 $R_j(x_1)$ は対数的劣調和函数である．これらの領域の一つ，例えば $(\boldsymbol{\omega_1})$ が $\mathfrak{C}$ の外点を含んだと仮定する. そうすると, 定義により, その点の近傍で 各函数 $R_j(x_1)$ は零である. 従ってそれらの函数は, 対数的劣調和函数なのであるから, (ω_1) で恒等的に零である.

さらに次のことを注意する．もし (ω) に含まれる $\mathfrak{C}$ の点 $\mathbf{x_1^0}$ にたいして ν 個の函数 R_j が全て 0 ならば

$$Ex_1^0 = Ax_1^0$$

である．ここで Ex_1^0 および Ax_1^0 はそれぞれ Σ および $\mathfrak{A}$ の $x_1 = x_1^0$ による切り口を表す. 実際, もしそうでないなら，Ax_1^0 は少なくとも一つ Ex_1^0 外の点 $(x_2^0, x_3^0, \ldots, y_1^0, \ldots, y_\nu^0)$ を含む持. ところで x_1^0 は (ω) の点であるから $((x^0))$ は $\mathfrak{G}$ に属する．他方 R_j はすべて x_1^0 で 0 であるから, もし $((x^0))$ が Δ の点なら，点 $(x_2^0, \ldots, y_\nu^0)$ は Ex_1^0 に属することになるので, $((x^0))$ は Δ の外になければならない. そうすると, Δ の定義により, 少なくとも一つの函数，例えば $f_1((x))$ の絶対値が，$((x^0))$ で 1 より大きい. しかも $R_1((x_1^0)) = 0$ だから $y_1^0 = f_1((x^0))$ であり, したがって $|y_1^0| > 1$ である. ところが先に注意したように，$\mathfrak{A}$ は $|x_i| \le r_i$，$|y_j| \le 1$ に含まれているので, これは矛盾である. したがって $Ex_1^0 = Ax_1^0$ である. [訳注 6]

3．予備定理　以下, 地域 (ω) の境界を見よう．そのために先ず次の命題を証明する．

$\varphi(x)$ を複素変数 x の劣調和函数とする．その存在域の内部に点 ξ を取り, ξ に達する単純 Jordan 曲線 L を描く. このとき点 x を L に沿って ξ に近づけると, その極限として

$$\overline{\lim}\, \varphi(x) = \varphi(\xi), \qquad (x \ne \xi)^{11}$$

が得られる. [訳注 7]

証明. $\varphi(x)$ の存在域の中で ξ を中心に二つの同心円 (γ) と (C) を描き, (γ) を中とする．x が ξ から出発して L 上を動くとき，円周 γ と最後に交わる点を b とし，C と最初に交わる点を B とする．b から B に至るこの曲線の弧を l とし，l と C を境界とする領域を D とする．この領域は単連結である．これを y 平面の $|y| < 1$ へ, ξ を原点に写すように等角写像し, その写像を

$$x = F(y)$$

[11] ここでは単純 Jordan 曲線と仮定したが，これは単純にするためだけであって，命題は ξ に一意的に収束する任意の連続曲線で成り立つ．その証明も Fatou-Lebesgue のよく知られた定理によって同じようになされる.

と表す．[訳注 8] 簡単のため, (C) を単位円とし (γ) の半径を ρ とする．函数 $F(y)/y$ は単位円で正則であり，0 を取らない．原点での値は $F'(0)$ である．しかもその絶対値は境界を込めて一価連続であり，けっして零を取らない．したがって実函数 $\log|F(y)|$ の $|y|=1$ 上の算術平均は $\log|F'(0)|$ に等しい．このことから $|y|=1$ 上の円弧で x 平面の l に対応するものの長さを $2\pi\alpha$ と書くと,

$$\rho^{\alpha} < |F'(0)|$$

となる．

他方，Köbe の定理により

$$\rho \geq k|F'(0)|$$

となる．ここで k はある正の数である．[訳注 $k=1/4$ である] したがって

$$\rho^{1-\alpha} \geq k$$

となり, ρ が 0 に収束すれば α は必ず 1 に収束する.

$\varphi(x)$ は $|x| \leq 1$ で上半連続であるから，そこで上に有界である．その上限を M とし，曲線 L の, B から原点迄の, 原点は除いた弧におけるその上限を N とする. 函数

$$\varphi[F(y)]$$

を考えと, これは $|y|<1$ で劣調和で $|y| \leq 1$ で一価上半連続である．それでこれの中心の値と円周上の平均を比較して

$$\alpha N + (1-\alpha)M \geq \varphi(0)$$

が得られる．このことから γ を中心へ収束さして

$$N \geq \varphi(0)$$

が得られ, これより

$$\overline{\lim}\, \varphi(x) \geq \varphi(0),$$

となる. この極限は L $(x \neq 0)$ に沿ってのものである．$\varphi(x)$ は上半連続であるから, この関係式の中で等式だけが実際に現れる. C.Q.F.D.

さらに すべての対数的劣調和函数はそれ自身劣調和函数である ことを注意しよう.[12] 従って上の命題は 2 種類の函数に適用される.

4. 定理 I. 空間 $((x))$ においてクラス (H_0) の集合 Δ が与えられれば, それから 2 節の方法で上空 $((x, y))$ に曲面 Σ が描ける．これは新しい空間におけるクラス (P_1) に属する.

[12] これは優函数と比較することで容易に証明される．この場合の要点は次の事である．即ち，$u(x)$ を x に関する調和函数とすれば，$e^{u(x)}$ は劣調和函数である.

言い換えると，

$$\Sigma = \mathfrak{A}$$

を示そうというのである．証明は元の空間 $((x))$ の次元の数の半分 λ [訳注 $((x))$ の複素次元] に関する帰納法によってなされる．それで $\lambda < n$ $(n \geq 2)$ のときこの命題は正しいと仮定して，$\lambda = n$ のときも正しいことを示す．

2 節で見たように，これを示すには地域 (ω) が x_1 平面のすべての点を含むことを示せば十分である．それでそうではないと仮定する．この地域の各連結成分 (ω_i) は有限の所にそれ自身の境界点を持っている．それらの中に少なくとも一つ $\mathfrak{C}$ の外点を含むものがある．そのようなものの一つを (ω_1) とし，ξ をその有限の境界点とする．[訳注 9]

E_ξ は実際に存在するすることを言おう．(E_ξ は Σ の $x_1 = \xi$ による切り口である)．実際, ξ は $\mathfrak{C}$ の内点であるか $\mathfrak{C}$ の境界点であるかのどちらかである．前者の場合，この点は $\mathfrak{C}$ と (ω_1) とに同時に含まれる点の列の極限である．そのような点列の全ての点 x_1 に対して $E_{x_1} = A_{x_1}$ であり, Ax_1 ($\mathfrak{A}$ の $x_1 =$ 定数 x_1 による切り口) は実際に点を持っているから E_{x_1} もそうである．さらに Σ は閉集合であるから，E_ξ は実際に存在する．また後者の場合，Σ は閉集合なので, もし E_ξ が空集合なら, ξ の或る近傍の全ての点 x_1 にたいして切り口 E_{x_1} が空集合となる．このときは既に見たように，$\mathfrak{A}$ が最小であることに反する x_i, y_j の多項式を作ることが出来る．したがって E_ξ は常に存在する．[訳注 10]

ξ は Ω の点であるから, 定義により点集合 (ξ, A_ξ) は地域 $[\mathfrak{G}, |y_j| < \infty]$, $(j = 1, \ldots, n)$ に含まれない点を少なくとも一つ含む．他方, その地域は Σ を含む．したがって E_ξ には含まれないような A_ξ の点 M が存在する．ところで容易に分かるように, 空間 $(x_2, x_3, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$ における点集合 E_ξ は今問題になっている Σ と同じ性格のものである．したがって仮定 [訳注 帰納法の] により, これはこの空間のクラス (P_1) に属している．すなわち, x_i, y_j $(x_2, x_3, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$ の多項式 P_i と正の数 α を適当に取って,

$$(D_\alpha) \qquad\qquad |P_j| < \alpha, \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

なる形の地域 D_α が E_ξ を含み，M を含まないようにすることができる．

地域 D_α は上の不等式を満たす点の全体であるから，パラメータ α と共に連続的に変化する．それで

$$\beta < \alpha$$

となるようなパラメータの別の値 β と ξ を中心とする x_1 平面の円 (γ) を考える．このとき D_α と D_β を E_ξ の十分近くに取り, (γ) を十分小さく取れ

ば, それらは条件

$$[\,(\gamma), D_\alpha\,] < [\mathfrak{G}, |y_j| < \infty], \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$
$$[(\gamma), E_{x_1}] < [(\gamma), D_\beta]$$

が満たす．この第一式は右辺が実際に存在している (ξ, E_ξ) を含んでいることから来る．[訳注 11] この情勢のもとで，(γ) における函数 $\varphi(x_1)$ を, $\mathfrak{C}$ では

$$\varphi(x_1) = \max[\beta, \max|P_i(A_{x_1})|], \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

であり，$\mathfrak{C}$ の外では

$$\varphi(x_1) = \beta$$

と定義する．

<u>$\varphi(x_1)$ は対数的に劣調和である</u> ことを示そう．

証明. 先ず $\varphi(x_1)$ は上半連続である．実際何, この函数の定義において, A_{x_1} は閉集合の切り口であり，操作は上限を取っているだけである．

次に $\varphi(x_1)$ は対数的に劣調和ではないと仮定する．そうすると (γ) 内の他の円

$$|x_1 - x_1^0| \leq \rho$$

を適当に取れば，その円周上の $\log\varphi(x_1)$ の平均が $\log\varphi(x_1^0)$ より小さくなる．そうすると Poisson の積分により，円 $|x_1 - x_1^0| < \rho$ 内における変数 x_1 の正則函数 $\Psi(x_1)$ であって，境界まで込めて絶対値が一価連続で零を取らず,

$$\varphi(x_1)|\Psi(x_1)|$$

が境界では 1 より小さく, 中心 x_1^0 では 1 となるものが作れる．[訳注 訳注 10 を参照.] $\varphi(x_1)$ は常に少なくとも β であるから，円周上で

$$|\Psi(x_1)| < \frac{1}{\beta}$$

となり，したがって円の中でもそうである．中心 x_1^0 では仮定により $\varphi(x_1^0) > \beta$ だから，$\varphi(x_1^0)$ は β とは異なる値である．それで 視点を定めるため

$$\varphi(x_1^0) = \max|P_1(Ax_1)|$$

であるとする．[訳注 その値はどれかの P_i が取っているはずである.]

この条件のもとで，解析面の族

$$(\sigma_t) \qquad\qquad P_1\Psi(x_1) = e^{i\theta}(1+t),$$

$$|x_1 - x_1^0| < \rho, \qquad 0 \leq t < +\infty, \qquad \text{にたいして}$$

を作る．θ は後に定める偏角であり，$i=\sqrt{-1}$ である．この区間のすべての t たいして, 解析面 (σ_t) は点集合 $|x_1-x_1^0|=\rho$ 以外には, 有限な位置に境界点を持たない．[訳注 P_1 は多項式である.] 他方, その点集合では $\varphi(x_1)|\Psi(x_1)|$ は 1 より大きいのであるから, $\mathfrak{A}$ では

$$|P_1\Psi|<1$$

である．このことはこの族のどの解析面も $\mathfrak{A}$ の近傍に境界点を持たないことを示している．さらにこの閉円の中では

$$\max|P_1(E_{x_1})|<\beta, \qquad |\Psi(x_1)<\frac{1}{\beta}$$

が同時に成り立っているから，この族のどの解析面も Σ を通らない．他方 $x_1=x_1^0$ に対しては

$$\max|P_1(A_{x_1^0})||\Psi(x_1^0)|=1$$

なのだから，偏角 θ を適当に選ぶなら，解析面 (σ_0) は $\mathfrak{A}$ を通る．さらに十分大きいパラメータの値に対して (σ_t) は完全に $\mathfrak{A}$ の或る近傍の外にある．これらのことは１節で見た命題に反する．したがって $\varphi(x_1)$ は円 (γ) において対数的に劣調和である．

さて，円 (γ) 内で

$$\varphi(x_1)\geq\alpha$$

を満たす点の集合 (e) を考える．$\varphi(x_1)$ は上半連続であるから，円内の (e) の点の集積点もまた (e) に属する．領域 (ω_1) の点 a を (γ) 内に取り，点 a と円周 γ を含む Poncelet の円族を描く．この円を a から始めて γ まで大きくしていくと 始めて (e) の点を通る円 C が見つかる．実際, $\varphi(a)=\beta$ だから a は (e) の外にあり，ξ は (e) の点であって，(e) は (γ) 内で閉集合である．[訳注 12]

$\varphi(x_1)$ が定義されている状況を思い出してみよう．円板 (C) の点 x_1 では定義により

$$\varphi(x_1)<\alpha$$

である．それは Ax_1 が D_α に含まれていることを意味する．したがって $[G_{x_1},((y))]$ に含まれる．ここで G_{x_1} は $\mathfrak{G}$ の $x_1=$ 定数 による切り口を表す. すなわち x_1 は (ω) に属しており, したがって (ω_1) に属している．そうすると $A_{x_1}=E_{x_1}$ であり, A_{x_1} は D_β に含まれている．言い換えると

$$\varphi(x_1)=\beta$$

である. これは円 (C) 内で恒等的にそうなのである.

さて $\varphi(x_1)$ は対数的に劣調和であるから，前節の補題により，上の等式は円周 C まで成り立つ．これは矛盾である．したがって初めに置いた仮定は成り立たない．すなわち $\Sigma = \mathfrak{A}$ でなければならない．

定理の証明は $\lambda = 1$ のときだけが残っている．この場合，新たに ν 個の函数 $R_j(x_1)$ を 2 節のように作るなら, (そこでは暗黙のうちに $\lambda \geq 2$ と考えている.) これは有限の x_1 のすべてで定義されていることは明らかである．このことからこれらの函数は恒等的に零になる．したがって $\Sigma = \mathfrak{A}$ である．[訳注 13] C.Q.F.D.

5. この定理を，与えられた極を持つ有理型函数を求める問題に適用しよう．あらためて空間 $((x))$ にクラス (H_0) の閉集合 Δ

$$|x_i| \leq r_i,\ |f_j((x))| \leq 1,\ ((x)) \in \mathfrak{G},\quad (i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, \nu)$$

を考える．これにたいし空間 $((x, y))$ の曲面 Σ,

$$y_j = f_j((x)), \qquad ((x)) \in \Delta$$

が対応する．これは新しい空間におけるクラス (P_1) に属している．

1^o. $F((x))$ を Δ の近傍における n 変数 x_i の正則函数とする．これを $n + \nu$ 変数 x_i と y_j の函数と見なすと，それは Σ の近傍で正則である．したがって前の論文の 4 節で見たことから Σ の近傍でこの函数を多項式の級数に展開することができる．それでその展開式に ν 個の函数 $y_j = f_j((x))$ を代入して, $F((x))$ は Δ の近傍で一般項が x_i と $f_j((x))$ の多項式であるような，一様収束する級数に展開することができる．

2^o. 通常の仕方で Δ の近傍に極 $(\wp)$ が与えられたとき，$(\wp)$ を Σ のある近傍に分布する極と考える．これは常に可能である．[訳注 局所的に $(\wp)$ を定義する函数を Σ の近傍で $n + \nu$ 変数 x_i と y_j の函数と見なせばよい.] そうすると, 前論文の定理 I により，その極 $(\wp)$ を持つ変数 x_i と y_j の有理型函数 $\Phi((x, y))$ が求まる．さて, その函数の極 (または不定点) $((x^0, y^0))$ において，それは

$$\Phi((x, y)) = g((x)) + h((x, y))$$

という形に表される．ここで $g((x))$ は x_i だけに関する有理型函数であり, $h((x, y))$ は正則函数である．それで函数 $\Phi((x, y))$ に $y_j = f_j((x))$, $(j = 1, 2, \dots, n)$ を代入して， Δ の近傍で極 $(\wp)$ を持つ変数 x_i の有理型函数が求まる．

3^o. D を空間 $((x))$ の (有界またはそうではない) 単葉な正則域とする．Cartan-Thullen によって D は, D で正則な函数全体を含むクラス $\mathfrak{K}$ に関して凸状であることが知られている．このことから前の論文で示した議論を繰り返すことで，D の完全内部に，与えられた任意の領域 D' にたいして D'

を含むクラス (H_0) の閉集合 Δ を D に作ることができる．その Δ は $\mathfrak{K}$ に属する函数によって定義されている．

以上のことから筒状域の場合と全く同様にして次の定理が得られる．

定理 II. 有限な点しか含んでいない単葉な正則域にたいし，与えられた極 (または不定点) を持つ有理型函数が常に求まる.

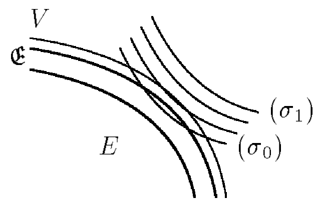
訳　　注

[訳注 1]　第 IV 論文の末尾に, この部分に関して, 次の訂正がなされている.

この命題にたいして次の条件を付け加える. 函数 $f((x),t)$ は $((x)) \in \overline{U}$, $0 \leq t \leq 1$ で定義された一価連続な函数であり, ここで $\overline{U}$ は U とその境界よりなる閉集合を意味する. 従って U は有界と仮定されている.

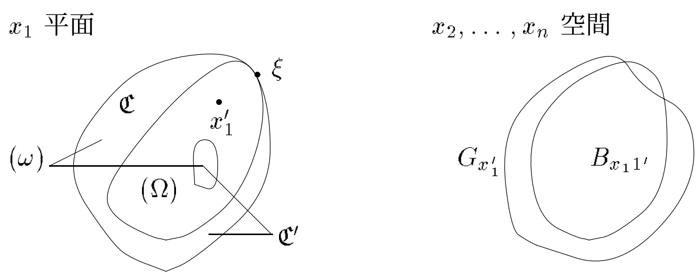
この訳文は, その訂正に従って書き直されている.

[訳注 2]　E, $\mathfrak{E}$, V と (σ_t) の関係は下の模型図がやや表している.



解析的な凸状は解析面を直線と見なしたときの幾何学的な凸状である. それで (σ_0) が E とは交わらず $\mathfrak{E}$ と交わるとなれば, $\mathfrak{E}$ はもっと削れるというのである.

[訳注 3]　$\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$, (Ω), (ω) および, $x_1' \in (\Omega)$ の場合の $B_{x_1'}$, $G_{x_1'}$ の関係は下図のようである.



なお, (Ω) は $\mathfrak{C}$ に含まれており, その補集合 (ω) は必ず有界ではない連結成分をただ一つ含む..

[訳注 4]　この論文では劣調和函数が主要な役割を果たしている. その概念は 4 頁の脚注に定義されている. この定義は一応参考に挙げられている G. Julia の教科書に従っているが, その末尾に, "この種の函数の中に定数 $-\infty$ を含めるべきである." と書かれている. それは定義により明らかなように, 劣調和函数はその定義域内の或る部分 (内点を含む) で $-\infty$ なら恒等的に $-\infty$ に

なるという著しい性質を持つからであって, この論文で用いられているのも実はその性質である. なお劣調和函数はその定義域内の対数容量正の集合で $-\infty$ なら恒等的に $-\infty$ になる. ただしこれは定義から直ちに導かれるものではなく, 劣調和函数が正の質量分布による対数的ポテンシャルであることから来る性質である.

[訳注 5] $\log R_1(x_1)$ は上半連続な函数であるから, 連続函数の減少列の極限とみなせる. しかも, 仮定により

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log R_1(x_1^0+\rho e^{i\theta})d\theta<\log R_1(x_1^0)$$

である. したがって, 円周 $|x_1-x_1^0|=\rho$ 上の連続函数 $u(x_1^0+\rho e^{i\theta})$ を, 2 つの条件

1. $\log R_1(x_1^0+\rho e^{i\theta})<u(x_1^0+\rho e^{i\theta})$
2. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_1^0+\rho e^{i\theta})d\theta=\log R_1(x_1^0)$

を満たすように取って, Poisson 積分

$$U(x_1^0+re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi)+r^2}u(x_1^0+\rho e^{i\theta})d\theta$$

を考え, さらに $U(x_1)$ を実部とする (γ) における正則函数 $\psi(x_1)$ を作れば,

$$\Psi(x_1)=e^{-\psi(x_1)}$$

が求める函数である.

[訳注 6] (ω) は x_1 平面における (Ω) の余集合であるが, (Ω) は有界な集合であるため, それは有界ではない連結成分を含む. それを ω_1 とすると, ω_1 は必ず $\mathfrak{C}$ の外点を含む. 他方, $R_j(x_1)$ はその点の或る近傍で零と定義されているので, 訳注 2 で述べたことから $R_j(x_1)$ は全て (ω_1) で恒等的に零になる. もし (Ω) が空集合なら 4 節の定理 I はこれで証明されている.

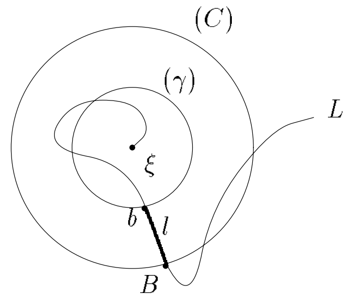
[訳注 7] この命題は, Behnke–Thullen の教科書が出版されたために中断された岡先生の論文に書かれている. (岡潔先生遺稿集 第七集収録) しかもそこでは脚注にあるような, より一般な命題で証明されている. なお, この種の命題は近年次のように一般化されている.

複素変数 z の平面において単位円 $C:|z|<1$ を考え, e を C 内の原点を含まない点集合とする. そして, 任意の正の数 r $(0<r<1)$ にたいし, 原点を中心とする半径 r の円 $\xi_r:|z|=r$ を考えたとき, 常に $e\cap\xi_r\neq\emptyset$ であるとする. このとき, C における任意の劣調和函数 $\varphi(z)$ にたいして, 等式

$$\varlimsup_{\substack{z\in e\\ z\to 0}}\varphi(z)=\varphi(0)$$

が成り立つ. A. Cornea, An identity theorem for logarithmic potentials, Osaka J. Math. 28 (1991), 829-836 参照.

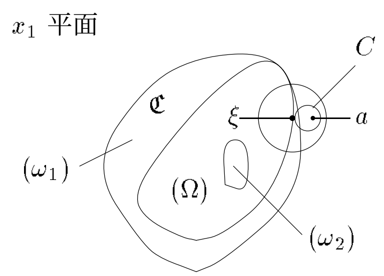
[訳注 8] この証明における幾何学的情勢は下図のようである.



[訳注 9] この後の議論では, 全ての $R_j(x_1)$ が (ω_1) で恒等的に零になっていること, したがって (ω_1) の全ての点 x_1 で $E_{x_1} = A_{x_1}$ となっているいることを思い出しておかなければならない. そうなっているにもかかわらず, (ω_1) の境界点 ξ で突然 $E_\xi \neq A_\xi$ となっていると仮定したのである.

(ω_1) としては, (ω) の連結成分で有界でないものを取っておけばよい.

[訳注 10] $\mathfrak{C}$ は閉集合なので, ξ を $\mathfrak{C}$ の境界点とすると, $\mathfrak{C}$ の外点で, いくらでも ξ に近いものが取れる. 他方, 仮定は ξ の或る近傍の全ての点 x_1 にたいして E_{x_1} は空集合であるというのであるから, $\mathfrak{C}$ の外点 a を ξ に十分近く取れば, Σ の点 $((x, y))$ における $1/|x_1 - a|$ の値の最大は $x_1 = \xi$ におけるそれよりも小になる. 他方, $\mathfrak{A}$ はクラス (P_1) に属し, 有理函数 $1/(x_1 - a)$ は $\mathfrak{A}$ で正則であるから, 変数 x_i, y_j の多項式 $P((x, y))$ で, $\mathfrak{A}$ において $1/(x_1 - a)$ にいくらでも近いものが存在する. これは $\mathfrak{A}$ の最小性に反する.



[訳注 11] E_ξ は空集合ではなく, $\mathfrak{G}$ の $x_1 = \xi$ による切り口を $\mathfrak{G}_\xi$ とするとき, それは $[\mathfrak{G}_\xi, |y_j| < \infty]$ に含まれている. したがって $E_\xi \subset D_\alpha \subset [\mathfrak{G}_\xi, |y_j| < \infty]$ となるように α を取ることができる.

[訳注 12] Poncelet の円の族とは, この場合 a^* を γ に関する a の鏡像としたとき, a からの距離と a^* からの距離の比が一定になるような点の描く円

の族のことである．ここでこのような円の族を考えるのは一つの優雅な遊びであって, 3 節の命題を使うのであれば, a と ξ を結ぶ線分上を a から辿るとき, 最初に (e) にぶつかる点を考えれば, 矛盾はその点で起こる.

[訳注 13]　空間 $((x))$ が一変数 x_1 の平面の場合, (Ω) は $\mathfrak{C}$ に含まれ $\mathfrak{G}$ に含まれない点の全体である．ところで (ω_1) と ξ を本文通りに考えるとき, E_ξ が実在することは一般次元のときと同様に証明できる．そうすると ξ は $\mathfrak{G}$ の点でなければならないことになって矛盾が生じる.

なお, $f_j((x))$ が有理函数の場合, $P_j((x))$ と $Q_j((x))$ を互いに素な多項式として $f_j((x)) = P_j((x))/Q_j((x))$ とするとき, Σ は

$$P_j((x)) - y_j Q_j((x)) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, \nu)$$

と表され, Σ に含まれない点では, 或る j にたいして $P_j((x)) - y_j Q_j((x)) \neq 0$ となるので, この場合, 定理 I は自明である.

さらに, $n = 1$ の場合, 各正則函数 $f_j(x)$ は Δ の近傍で有理函数によっていくらでも近似されるので, 上記のような証明も可能である.