多変数解析函数について
III–Cousin の第 2 問題

岡潔

1938 年 1 月 20 日受理

序文.[1]　与えられた極と不定点を持つ有理型函数および与えられた零を持つ正則函数を求める問題を初めて研究したのは P. Cousin である．これらの問題を H. Cartan[2]にしたがってそれぞれ Cousin の第 1 および第 2 問題と呼ぼう．この二つの問題は密接な関係にあるが，その性格は初めに思われたよりも著しく異なっている．Cousin 第 1 問題は先の論文で見たように，無限遠点を含まない単葉な正則域では常に解ける．しかし第 2 問題に対して同じ結果は期待できない．実際にそれが解けない領域が存在するのである.[3] この論文で我々は，第 2 問題の本性を抽出しようと思う．

著者の出発点となったのは次の例である．3 つの実変数 x, y と z の空間で，円筒 D と線分 L,

$$
\begin{array}{lll}
(D) & x^2+y^2<1, & |z|<2, \\
(L) & x=y=0, & |z|\leq 1;
\end{array}
$$

を考える．D で定義され, L だけで零を取る 連続函数 $F(x,y,z)$ は無限に存在する．しかし Cousin の第 2 問題において零を定義する様式はこのような純幾何学的なものではない．それで次の条件を付け加えよう：

$$F(x,y,0)=(x+iy)\lambda(x,y) \qquad x^2+y^2<\rho \quad \text{において},$$

i は複素単位，$\lambda(x,y)$ は零を取らない連続函数，ρ は或る正の数であって, いくら小さくてもかまわない．そうするともはやそのような F は存在しない．

この例は, 上に述べた Cousin 第 2 問題の性格と結びつけて考えると, 非常に興味深いものであるが, さらにこの例は, この問題を連続函数の分野にまで拡張することを強く示唆している．この拡張は連続函数の同値を正則函数のときと全く同様に定義しさえすれば困難なく実現される．そのように一般化さ

[1] この問題の参考文献としては次の文献だけを挙げておく．

H.Behnke et P.Thullen. Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. 1934.

H.Behnke et K.Stein. Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen. Jbr. Deutsch. Math.-Vereinig., 1937.

[2] H.Cartan. Les problème de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes. C. R. Acad. Paris, 1934.

この論文に関しては，著者は論文 I の定理 I が彼に帰されなければならないことを認める．

[3] 具体的な例は次の論文に見られる．

T.H.Gronwall. On expressibilitiy of uniform function of several complexe variables as quotient of two functions of entire character. Amer. Math. Soc. Trans., 1917.

後に新しいもっと簡単な例を挙げる．

れた問題が与えられた領域で解けるための条件は明らかに位相的である．実際, 複素多変数の有限空間の単葉な筒状域でこの問題を考えるなら, 与えられた零が空間の部分を占めるときは除外して，それが解けるための必要十分条件は, 与えられた領域の各変数平面への射影が高々一つを除いてすべて単連結であることが分かる.

複素多変数の有限空間における単葉な領域 D に通常の方法で零が定義されたとき，それは Cousin 問題とその一般化が同時に与えられたことになる．それらの間には次のような関係がある．すなち D が正則域の場合，もし非解析解が存在するなら解析解も存在する．これが我々の求めていた結果である．

上の事から，正則域 D が上に述べたような筒状域に位相的に写像されるなら, D における Cousin 第 2 問題は必ず解ける．

非解析解

1．定義　Cousin の第 2 問題を非解析函数の分野にまで拡張しよう．

実多変数の空間で領域 D を考え，そこで二つの連続函数 f_1 と f_2 を考える.[4]　もしこれらの函数が, λ を零を取らない連続函数として, D で関係式 $f_1 = \lambda f_2$ を満たすなら, これらの函数はこの領域で <u>同値</u> であると言うことにする.[5] 有限空間の点 P の近傍における二つの連続函数は，もし P の周りのある超球で同値なとき P で同値であると言う．

領域 D において次のようなメカニズムを考える．すなわち, 領域の各点 P にたいして, P を中心とする超球 (γ) と (γ) における連続函数 f が対応しており，重なり合った超球の各組では, その共通部分で, それぞれに対応する函数が同値になっている．この f を P に付与された函数と言う．この情勢のもとで，領域 D の各点 P で P に付与された函数と同値な, D における連続函数 F を見つける問題を提起しよう. もしこのような函数が存在すれば，その函数を与えられた <u>零</u> を持つと言うことにする.

ところで, このように一般化された問題は球の内部ですら解を持つとは限らない.[6] これを排除するため <u>与えられた零が空間の部分を占める場合をすべて除外する.</u>

---

[4] この論文では，そうでないことが明示されない限り，領域は単葉で有限空間内にあり，函数は一価であると考えている.

[5] 有限空間の任意の点集合における二つの連続函数にたいしても同じ定義を適用する.

[6] 実際, 実 3 変数 x，y，z の空間で点 $(0,0,1)$ と $(0,0,-1)$ を中心とし半径 1 の球を考える．そうすると全空間の実数値連続函数で, この二つの球でのみ零を取る函数は無限に存在する．その一つを $\psi(x,y,z)$ とする．有限空間のすべての点 (x,y,z) にその点を中心とする半径 ρ の球 (γ) と函数 $f(x,y,z)$ を次のように付与する.

$$f(x,y,z) = \psi(x,y,z) \qquad |z| \geq 1 \quad \text{にたいして}$$
$$f(x,y,z) = (x+iy)\psi(x,y,z) \qquad |z| < 1 \quad \text{にたいして}$$

i は虚数単位である．半径 ρ を十分小さく取れば確かに同値の条件は満たされている．しかし原点を中心とした半径 3 の球の中で与えられた零を取る連続函数は存在しない.

この仮定に関して一つの注意を与える．F_1, F_2 を領域 D の各点で同値な二つの連続函数とする．これらの函数は一般にはこの領域で同値ではない.[7] しかし，もしそれらが零になる点集合が内点を持たないなら，領域で同値である．実際, F_1 と F_2 は D の点 P で同値なのだから, λ を P の近傍で零を取らない連続函数として, 関係式 $F_1 = \lambda F_2$ を満たす. ところで仮定により, λ は P の近傍で一意的に定まる．それは D のすべての点 P にたいしてそうである．このことから大域的な同値性が導かれる．

領域 D において零 $(\mathfrak{z})$ を考え，D を同じ空間の領域 D' に $1:1$ 両連続に写像する．$(\mathfrak{z})$ を定義するメカニズムは D' に写され，D' 内に新たに零が生成される．それを $(\mathfrak{z}')$ とする．この情勢でもし D における $(\mathfrak{z})$ に対して我々の問題が解けるなら，明らかに D' における $(\mathfrak{z}')$ に対しても解ける．逆も成り立つ．このように 一般化された問題は位相変換を許す.

2. 例. 複素 2 変数 x, y の空間を考え，そこで次のような筒状域 (Γ, Γ') を考える．

$$r < |x| < 1, \qquad r' < |y| < 1,$$

ここで半径の和 $r + r'$ は 1 より大とする．解析面 $y = x - 1$ は (Γ, Γ') 内では二つの部分に分かれ, 一つは実軸より上にあり，他方は実軸より下にある．その前者を (σ) とする．[訳注 1]

(Γ, Γ') 内の 連続函数 $F(x, y)$ を, (σ) の近傍では $f(x, y) = y - x + 1$ と同値であり，(σ) 以外では 1 と同値であると仮定する．円環 Γ 内に正の実軸上の点 ξ_1 と 負の実軸上の点 ξ_2 を考え, さらに 円環 Γ' 内に原点を中心とする円周 C' を描く. $F(\xi_1, y)$ は C' 上では零にならないから，y が C' 上を正の方向に一周したときの F の偏角の変化量は曖昧さなく計算できる．それを $V(F, \xi_1)$ と表す.[8] この記号は一般の場合にも用いる. 同様に $V(F, \xi_2)$ を計算する．ところで x' を実軸より下にある任意の点とすると, $F(x', y)$ は Γ' で決して零にならない．このことから,

$$V(F, \xi_1) = V(F, \xi_2)$$

が得られる．

他方 A を Γ の点で, 実軸上または実軸より上にある点の集合とする．$F(x, y)$ と $f(x, y)$ は (A, Γ') のすべての点で同値であるから，それらが恒等的に $F = f\lambda$ と表されるような零を取らない連続函数 $\lambda(x, y)$ が存在する. この λ にたいしては

$$V(\lambda, \xi_1) = V(\lambda, \xi_2)$$

である．他方, f に関しては, これが $y - x + 1$ であることから

$$V(f, \xi_1) = 2\pi, \qquad V(f, \xi_2) = 0,$$

[7] 二つの函数 $\psi(x, y, 1)$ と $(x + iy)\psi(x, y, 1)$ は円 $x^2 + y^2 < 2$ の各点で同値であるが, その円内ではそうではない.

[8] 明らかに有限である.

であり, したがって

$$V(f,\xi_1) = V(f,\xi_2) + 2\pi$$

となる. これは上記の等式に反する. したがって F は存在しない. 一般化された問題は領域 (Γ, Γ') で解けるとは限らない.

注意. 我々は同時に次のことを再発見した. すなわち, Cousin の第 2 問題は正則域においても解けるとは限らない.

3. 筒状域における一般化された問題. 複雑なことが生じることを避けるため, ここでは初めから筒状域で考える.

n 個の複素変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の空間において, X_i を x_i 平面の領域として筒状域 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を考え, それを簡単に $((X))$ と書く. 前の例から直ちに分かるように, もし少なくとも二つの X_i が多重連結なら, 一般化された問題は解けるとは限らない. したがって以下常に X_i は高々一つを除いてすべて単連結である と仮定し, そのような $((X))$ にたいして問題が解けるかどうかを考える.

1^o. x_1 平面上に矩形 R を描き, それを R の辺に平行な二組の線分によって同じ形の小さな矩形 (ω_i) に分割する. A_1 を一つまたは幾つかの (ω_i) とその周よりなる閉領域とし, A_2 を A_1 に隣接する (ω_i) の一つとその周よりなる閉領域とする. A_1 と A_2 の共通の境界を L と書き, A_1 と A_2 よりなる閉領域を A と書く. [訳注 A は A_1 と A_2 の和集合である.] 空間 $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ の中に領域 B を描く.

以下, 点 $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ は常に領域 B の中にあると考えておく. f_1, f_2 を n 変数 x_i の二つの 連続函数とし, それらはそれぞれ A_1 の近傍[9]と A_2 の近傍で定義されており, L の近傍では大域的に同値であるとする. この情勢のもとで, もし L が A_2 の周全体ではなく, B が線的単連結ならば, A の近傍で定義された n 変数 x_i の連続函数であって, A の各点で, 与えられた函数のどちらか一つと同値なものを見つけることができる.

証明. 与えられた函数 f_1, f_2 は L の近傍で大域的に同値なのであるから, λ を L の近傍における n 変数 x_i の零を取らない連続函数として, 関係式 $f_1 = f_2\lambda$ を満たす. そこで矩形 A_2 の近傍における n 変数の零を取らない連続函数 μ で, L の近傍では λ と一致するものを求めよう.

これは L が周全体のとき, または B が線的単連結でないときは, 一般には不可能である.[10] しかし今の場合, $\log\lambda$ の各分枝が L の近傍で一価であることから, これは可能である. [訳注 2] A_1 の近傍で

$$F((x)) = f_1((x))$$

と置き, A_2 の近傍で

$$F((x)) = f_2((x))\mu((x))$$

[9]すなわち A_1 を含むある領域

[10]第一の場合は明らかである. 第二の場合は前節で見たことから直ちに例を作ることができる.

とおく．この函数 F は明らかに求めている性質を持っている． C.Q.F.D.

4. 2^o． 筒状域 $((X))$ に零 $(\mathfrak{z})$ が与えられたとき，$((X))$ の完全内部にある任意の領域[11] Δ にたいして Δ 内で零 $(\mathfrak{z})$ を持つ連続函数が対応する．

各 X_i は一つを除いて単連結であると仮定されており，与えられた零は空間の部分を占めていないと仮定されているのだから, これは前の命題から直接導かれる.

3^o． 筒状域 $((X))$ で与えられた零を持つ連続函数が常に見つけられる．

この命題の証明のために問題となるのは, 次のような形の, 零を取らない函数の延長である．$\lambda(z)$ を複素変数 z の平面の $1 \leq |z| \leq 2$ における零を取らない連続函数とするとき，λ を零を取らない連続関数のままで，$0 < |z| < \infty$ まで延長すること．これは例えば原点から出る半直線に沿って元の値を変えないように函数を延長することで達せられる．(訳注 無限大に向かう半直線では $|z| = 2$ 上の値を, 原点に向かう線分上では $|z| = 1$ 上の値を.)

各 X_i の完全内部に一つまたは幾つかの互いに共通点を持たない単純なジョルダン閉曲線で囲まれた領域 X_i' を考える．ただしその曲線の一つが他の曲線に囲まれているなら，その曲線で囲まれた部分は少なくとも一つ X_i に属さない点を含んでいるとする．このような $((X'))$ は予め $((X))$ の完全内部に与えられた領域を含むように作ることができる．したがって上のような性質を持つ筒状域の列 $((X^p))$ $(p = 1, 2, \ldots)$ で $((X))$ に収束するものが得られる. その各々は次のものの完全内部に含まれていると仮定しておく.

$(\mathfrak{z})$ を $((X))$ に与えられた零とする．上記の命題によって, 各 p に対して閉領域 $((X^p))$ の近傍で零 $(\mathfrak{z})$ を持つ連続関数 $F_p((x))$ が対応する. それで領域 $((X))$ において零 $(\mathfrak{z})$ を持つ連続関数 $F((x))$ を作ることが問題になる．それは次のように逐次的になされる. 閉領域 $((X^1))$ にたいしては

$$F((x)) = F_1((x))$$

と置く．$((X^2))$ に移る．二つの函数 F_1 と F_2 は閉集合 $((X^1))$ で同値であるから，関係式 $F_1 = F_2\lambda$ を満たす．ここで λ は $((X^1))$ で零を取らない連続函数である．この函数 λ は明らかに $((X^2))$ まで, その性質を失うことなく延長される．[訳注 3] μ をその延長として,

$$F((x)) = F_2((x))\mu((x))$$

と置く．新しい F は古い F の延長であり，閉領域 $((X^2))$ の近傍で与えられた零を持つ．同じ過程を $((X^3))$, $((X^4)), \ldots$ に繰り返して, 求める函数が得られる． C.Q.F.D.

補題 I <u>$((X))$ を有限空間 $((x))$ の単葉な筒状域とする．$((X))$ において零が空間 $((x))$ の部分を占めないような一般化された問題が解けるための必要十分な条件は，高々一つを除いてすべての X_i が単連結なことである.</u>

[11] これは Δ が境界を込めて $((X))$ に含まれているという意味である.

解 析 解

5．定義　以下, 正則域における Cousin 第 2 問題を前節の結果を用いて研究しょう．

複素 n 変数 x_i の空間で領域 D を考える．D に零 $(\mathfrak{z})$ が与えられたとき，もし D の各点 p に対し, その点の近傍における零 $(\mathfrak{z})$ を持つ函数として (変数 x_i の) 正則函数を取れるとき，それを 解析的 と言うことにする．Cousin の第 2 問題は D に与えられた解析的な零を持つ正則函数を求めることである．その解を, 一般化された問題の解と区別するため, 解析的と言うことがある．

次の予備的な概念を導入する．D に零 $(\mathfrak{z})$ が与えられたとき，もし D の各点 p にたいし p を中心とした超球 (γ) と, 次の条件を満たす $[(\gamma),\ 0 \le t \le 1]$ における連続函数 $f((x),t)$ が対応するとき，それを 掃散可能 と言うことにする．

1. $f((x),0)$ は零として $(\mathfrak{z})$ を持ち，$f((x),1)$ は零を取らない．
2. $f((x),t)$ は $2n+1$ 次元の部分で 0 になることはない．
3. 隣接した超球の組 (γ_1), (γ_2) にたいし，(δ) を (γ_1) と (γ_2) の共通部分とすれば, それぞれに対応する函数 $f_1((x),t)$, $f_2((x),t)$ は $[(\delta), 0 \le t \le 1]$ で同値である．

この 第 2 の条件は除くことが出来ない．何故ならもしこれがなければすべての零が掃散可能になる.[12] Δ を D 内の任意の領域とし, $F_1((x),t)$, $F_2((x),t)$ を $[\Delta,\ 0 \le t \le 1]$ における連続函数とする．そして点 $((x))$ が Δ の任意の点の近傍にあり, t がこの閉区間にあるとき, それらは共にどれかの $f((x),t)$ と同値であるとする．そうするとこの同じ条件から F_1 と F_2 は $[\Delta,\ 0 \le t \le 1]$ で大域的に同値になる．

もし D 内に与えられた零を持つ連続函数が存在すれば，それは掃散可能でなければならない. 実際，$F((x))$ をその解として

$$f((x),t) = (1-t)F((x),t) + t$$

と置けば，これは上記の 3 条件を満たすことが分かる．

以下に見るのはその逆である．

6．予備命題.　序文で示した例から，以下でしばしば用いられる命題を抽出しよう．

D を空間 $((x))$ の領域とし，$\lambda((x))$ を D における零を取らない連続函数とする．もし $(D,\ 0 \le t \le 1)$ における零を取らない連続関数 $\lambda((x),t)$ で

$$\lambda((x),0) = \lambda((x)), \qquad \lambda((x),1) = 1$$

[12] 実際，零を与える函数を $f((x))$ とし，$0 \le 3t \le 1$, $1 \le 3t \le 2$, $2 \le 3t \le 3$ の各々で，$f((x),t) = (1-3t)f((x))$, $= 0$, $= 3t-2$ と置くと，これらの函数 $f((x),t)$ は第 1 と第 3 の条件を満たす．

となるものが存在するなら $\lambda((x))$ は条件 (α) を満たすと言う.

もし $\log\lambda((x))$ が D で一価なら, [訳注 $\log\lambda((x))$ の各分枝が一価なら,] 条件 (α) は満たされる. それを確かめるには

$$\lambda((x),t) = e^{(1-t)\log\lambda((x))}$$

と置けばよい.

逆に, D における函数 $\lambda((x))$ にたいして条件 (α) が満たされたと仮定し, それを実現する函数を $\lambda((x),t)$ とする. D 内に閉曲線 C を描く. $\lambda((x),t)$ は零を取らないから, t を $0 \le t \le 1$ に固定して, $((x))$ が C を一定の方向に一周したときの $\lambda((x),t)$ の偏角の変化量は曖昧さなく計算される. その変化量を $V(t)$ と表す. これは $0 \le t \le 1$ における t の連続函数である. しかもその取る値は飛び飛びである. したがってこれは定数であり, 特に $V(0) = V(1)$ である.

ところで $t = 1$ にたいしては恒等的に $\lambda = 1$ である. したがって $V(1)$ は 0 に等しい. $V(0)$ も同じ. これはどんな C に対してもそうなのだから $\log\lambda((x))$ のすべての分枝は一価である.

それで次の命題が得られた. $\log\lambda((x))$ のすべての分枝が D で一価であるための必要十分な条件は $\lambda((x))$ が D で条件 (α) を満たすことである.

7. 掃散可能な零. 1°. x_1 平面でもう一度 3 節の図を描こう. 矩形 R, (ω_i), 閉領域 A, A_1, A_2, および A_1 と A_2 の共通の境界 L である. 有限空間 $((x))$ における閉領域 Δ を考える.

以下, 常に $((x))$ は Δ の近傍の点であり, t は閉区間 $(0,1)$ の点であると考えておく. f_1 を A_1 における x_i, t $(i = 1,2,\dots,n)$ の連続函数とし, $t=0$ では解析的であり, $t=1$ では 1 であるとする. f_2 は A_2 の近傍における同じ性格の函数とする. さらに f_1 と f_2 は L の近傍で $n+1$ 変数の函数として大域的に同値であると仮定しよう. 次のことを示す. [訳注 4]

もし L が矩形 A_2 の周の全体ではなく, Δ がクラス (P_1) に属しているなら, A の近傍で, 上記の性質を持ち, すべての点 $((x))$ において, t は $(0,1)$ 上の点として, 与えられた函数の少なくとも一つと同値であるものを見つけることができる.

証明. f_1 と f_2 は大域的に同値なのだから, 関係式

$$f_1((x),t) = f_2((x),t)\lambda((x),t)$$

が得られる. この $\lambda((x),t)$ は L の近傍で零を取らない連続函数である. このことから $\lambda((x),0)$ は解析的で $\lambda((x),1) = 1$ である. 前の命題により, $\log\lambda((x),0)$ は一価である. 分枝はどれでもよい. このように $\log\lambda((x),0)$ は L の近傍における正則函数であり, Δ はクラス (P_1) の集合である. したがって第 1 論文の 3 節で見たように, それぞれ A_1 と A_2 の近傍における二つの

正則函数 $\varphi_1((x))$ と $\varphi_2((x))$ で, L の近傍で

$$\varphi_1((x)) - \varphi_2((x)) = \log \lambda((x), 0)$$

となるものを見つけることができる.

$$f_1((x), t)e^{(t-1)(\varphi_1 + 2k\pi i)} = \mu((x), t) f_2((x), t) e^{(t-1)\varphi_2}$$

と置く．k は領域によって定まる或る整数である. [訳注 5] 函数 μ は L の近傍で零を取らない 連続函数でり, $t = 0$ と $t = 1$ で 1 となる．それで閉矩形 A_2 の近傍で同じ性質を持ち，L の近傍では μ と一致するような函数 $\nu((x), t)$ を求めることが問題となる．予備命題から $\log \mu((x), t)$ の分枝はすべて一価である．したがって ν はたしかに存在する．x_1 が A_1 の近傍にあるとき

$$F((x), t) = f_1((x), t) e^{(t-1)\varphi_1}$$

と置き, A_2 の近傍にあるとき

$$F((x), t) = \nu((x), t) f_2((x), t) e^{(t-1)\varphi_2}$$

と置く．函数 F は与えられた条件を満たす. C.Q.F.D.

8. 2°. 空間 $((x))$ における 正則域 D を考える．閉集合の列

$$(S) \qquad \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p, \ldots$$

で内部から D に収束するものを作る．ここで各 Δ_p は

$$|x_i| \leq r_{pi}, \quad |g_{pj}((x))| \leq 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, p')$$

と言う形とする．ただし r_{pi} は正の定数であり，$g_{pj}((x))$ は D における正則函数である．Cartan と Thullen により (S) は常に存在する．分かりやすくするため，Δ_p は Δ_{p+1} の内点よりなると仮定する．

領域 D に 解析的で掃散可能 な零 (σ) を考える．そうすると領域の各点 P にたいし, P を中心とする超球 (γ) と (γ) 内で零 (σ) を持つ正則函数 $\varphi((x))$, および 5 節で述べた三つの条件を満たす $[(\gamma), (0, 1)]$ における函数 $f((x), t)$ が存在する．さて f は常に $t = 0$ で解析的であり，$t = 1$ では 1 になると仮定することができる．実際，$\varphi((x))$ と $f((x), 0)$ は (γ) で同値であり，$f((x), 1)$ は零を取らないから,

$$\varphi((x)) = \frac{f((x), 0)}{f((x), 1)} \lambda((x))$$

と置けば $\lambda((x))$ は (γ) で零を取らない連続函数となる．(γ) は単連結であるから, それは (γ) で条件 (α) を満たす．それを実現する函数を $\lambda((x), t)$ とする．そして

$$\varphi((x), t) = \frac{f((x), t)}{f((x), 1)} \lambda((x), t)$$

と置くと，函数 $\varphi((x),t)$ は求める性質を持っている．これを改めて $f((x),t)$ と表す.

次のことを示そう. 列 (S) の各 Δ_p にたいして (Δ_p) の近傍における 連続函数 $F_p((x),t)$ であって，Δ_p の各点で少なくとも一つの函数 $f((x),t)$ と同値であり，$t=0$ で正則であって $t=1$ で 1 になるものが対応する．

これらの Δ_p が (P_1) に属するなら，これは前の命題から直接導かれる.

一般な場合を考えよう．第 II 論文に述べられた定理 I により，閉集合 Σ

$$y_j = g_{pj}((x)), \qquad ((x)) \in \Delta_p,\ (j=1,\dots,p')$$

は常にクラス (P_1) に属する．$f((x),t)$ を Σ の近傍で与えられた函数であるとみなして，現在の問題を空間 $((x,y))$ で見る．これは前の場合であるから Σ の近傍で上に述べた性質を持つ連続関数 $\Phi((x,y),t)$ が存在する．Φ に $y_j = g_{pj}((x))$ を代入して求める函数が得られる.

9．3$^{\mathbf{o}}$　このようにして求められた函数の列

$$F_1((x),t), F_2((x),t), \dots, F_p((x),t), \dots$$

から出発して領域 D で零 (σ) を持つ正則函数を作ろう．

ε_p $(p=1,2,\dots)$ を正の数の列とし，級数 $\sum \varepsilon_p$ は収束するとする．先ず

$$\Phi_1((x)) = F_1((x),0)$$

と置く. Φ_1 は Δ_1 の近傍で零として (σ) を持つ正則函数である．

函数 $F_1((x),0)$ と $F_2((x),0)$ は同じ零を持ち, その零は空間 $((x),t)$ の部分を占めることはない. したがってそれらは Δ_1 の近傍で大域的に同値である．それで

$$F_1((x),t) = F_2((x),T)\lambda_1((x),t)$$

と置くと. λ_1 は Δ_2 の近傍で零を取らない連続函数である．t は $(0,1)$ 上である. しかもそれは $t=0$ で正則になり，$t=1$ では 1 になる．したがって $\log\lambda_1((x),0)$ は Δ_1 の近傍で正則である. 分枝は任意である．第 II 論文の 5 節に述べた事から D における正則函数 $\varphi((x))$ で Δ_1 の近傍で条件

$$|\varphi((x)) - \log\lambda_1((x),0)| < \varepsilon_1$$

を満たすものが求められる．

$$\Phi_2((x)) = F_2((x),0)\, e^{\varphi_1}$$

と置く．Φ_2 は Δ_2 の近傍で零 (σ) を持つ正則函数である．しかも Δ_1 の近傍では

$$e^{-\varepsilon_1} < \left|\frac{\Phi_2((x))}{\Phi_1((x))}\right| < e^{\varepsilon_1}$$

である．Φ_2/F_3 の対数は $t=0$ のとき Δ_2 の近傍で正則である．

Φ_2 のこの最後の性質から出発して Δ_3 の近傍における正則函数 $\Phi_3((x))$ であって, Δ_2 の近傍で条件

$$e^{-\varepsilon_2} < \left| \frac{\Phi_3((x))}{\Phi_2((x))} \right| < e^{\varepsilon_2}$$

を満たし，Φ_3/F_4 の対数が $t=0$ のとき Δ_3 の近傍で正則なものが求められる．以下同様にして得られた函数列の極限は求める函数を与える．

かくして次の命題が確立された．

補題 II. 無限遠点を含まない単葉な正則域に解析的で掃散可能な零が与えられたとすると，この領域でこの零を持つ正則函数が求められる．

注意. 一般化された問題に対する対応する命題を示そう．複素変数の有限空間の単葉な領域に掃散可能な零が与えられたとすると，その領域でその零を持つ 連続函数が見つけられる.[13] これは同様に, ただしもっと単純に証明される．

定理 I. 有限単葉な正則域に解析的な零が与えられたとき，もしこれが非解析解を持てば，解析解も存在する．

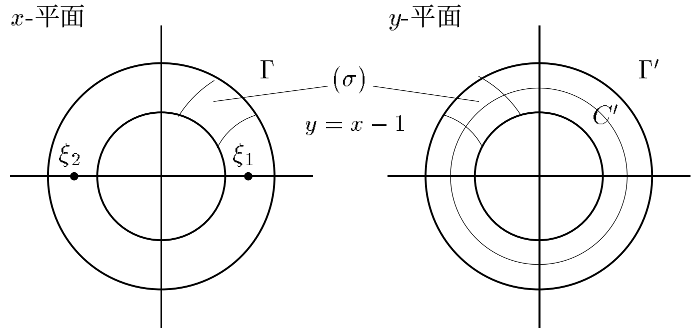
これは補題 II から直接導かれる. 何故なら連続解を持つような零は掃散可能だからである．

定理 II. Γ を多複素変数の有限空間の単葉な筒状域とする．そしてそれの各変数平面への射影は, 高々一つを除いてすべて単連結であるとする．このとき, 同じ空間の単葉な正則域で, Γ に位相的に写像されるようなものにたいし, Cousin 第 2 問題は常に解ける．

何故なら Γ に対する一般化された問題は補題 I によって常に解けるから，正則域に対しても同様である．

[13] 与えられた零が空間の部分を占めようが占めよまいが.

[訳注 1.]　この例の幾何学的な状況は下図のようである.



一般に $\varphi(x, y)$ を (Γ, Γ') における連続函数とし, a を Γ の点とするとき, y が C' を一周したときの $\varphi(a, y)$ の偏角の変化量を $V(\varphi, a)$ と表している. ところで, x が Γ の下半平面の部分にあれば, F は決して零にならず, $V(F, x)$ は x の連続函数であって, その値は 2π の整数倍である. したがって x を ξ_1 から ξ_2 まで Γ の下半平面の部分を通って動かすことで $V(F, \xi_1) = V(F, \xi_2)$ が得られる. λ についても同様で, 今度は x を ξ_1 から ξ_2 まで Γ の上半平面の部分を通って動かすことで $V(\lambda, \xi_1) = V(\lambda, \xi_2)$ が得られる.

他方, y の函数 $f(\xi_1, y)$ の零点 $1 - \xi_1$ は C' で囲まれた円板 (C') に含まれ, $f(\xi_2, y)$ の零点 $1 - \xi_2$ は (C') に含まれない. したがって $V(f, \xi_1) = 2\pi$, $V(f, \xi_2) = 0$ なのである.

[訳注 2.]　本文中,「以下, 点 $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ は常に領域 B の中にあると考えておく.」とあるのは x 平面の考えている集合と B の直積集合で考えるという意味である. したがって A_1, A_2, A は (A_1, B), (A_2, B), (A, B) を意味する. なお, B 閉集合と考える方が分かりやすく, そうしても以下の議論には差し支えがない.

そうすると x_1 平面に $L \Subset W_1 \Subset W_2$ となるような二つの地域 W_1, W_2 を (W_2, B) が λ の存在域に含まれるように取ることができる. そこで, $\omega(x_1)$ を W_1 内では 1, W_2 外では 0 となる x_1 の連続函数とし,

$$\mu((x)) = e^{\omega(x_1) \log \lambda((x))}$$

とおけば, これが求めている函数になる.

[訳注 3.]　複素変数 x の平面に有限個の単純な Jordan 閉曲線 C_k $(k = 0, 1, \ldots, \nu)$ で囲まれた閉領域 X があるとき, x 平面における X の余集合は一つの有界でない連結成分 Y_0 と ν 個の有界な連結成分 Y_k $(k = 1, \ldots, \nu)$ に分かれる. このとき Y_k $(k = 0, 1, \ldots, \nu)$ の境界がそれぞれ C_k であるとする. さらに Y_k $(k = 1, \ldots, \nu)$ の各々に 1 点 p_k を取り, x 平面からすべての p_k を除いた領域を Z とする. なお x 平面の無限遠点を p_0 と表す. このとき X に零を取らない連続函数 $\lambda(x)$ が与えられれば, それを零を取らない連続関数

のままで Y まで延長することができる. そのためには各 Y_k $(k=0,1,\ldots,\nu)$ でそのような函数を作ればよいが, 各 Y_k は x の平面の単位円へ, p_k が原点に移るように等角写像することができるから, それが可能なことは自明であろう.

[訳注 4.] 「以下, 常に $((x))$ は Δ の近傍の点であり,」と書かれているのは次のような意味である.

x_1 平面の或る点集合 E を考えているとき,「E で」と書かれていれば, それは $[E, |x_k| < \infty\ (k=2,\ldots,n)]$ と Δ との共通部分でということである. 例えば「f_1 を A_1 における x_i, t $(i=1,2,\ldots,n)$ の連続函数とし,」というのは f_1 が $[A_1, |x_k| < \infty\ (k=2,\ldots,n), 0 \le t \le 1]$ と $[\Delta, 0 \le t \le 1]$ の共通部分における連続函数であることを意味している.

[訳注 5.] 第 IV 論文の末尾に幾つかの訂正があり, それの第 III 論文に関する部分には次のように書かれている.

16 頁 第 3 式を

$$f_1((x),t)\, e^{(1-t)(\varphi_1+2k\pi i)} = \cdots$$

で置き換える. k は領域によって定まる整数である.

それでこの訳文は初めからそのように訂正されている. 元々は $k=0$ となっていたが, そうした場合, $((x))$ を固定して t を 0 から 1 までうごかしたとき $\mu((x),t)$ の偏角の変化量は一般に 0 にはならない. 他方 μ の定義域は連結とは限らないし, ν の定義域の一つの連結成分が μ の定義域の連結成分を二つ以上含むこともある. そのような場合, μ の偏角の変化量がその連結成分毎に異なれば, ν が作れなくなる. それで k を適当に取って, 全ての連結成分でその変化量が 0 になるようにするのである.