# 多変数解析函数について
## IV–正則域と有理凸状域

岡潔

1940 年 3 月 27 日受理

前の論文で述べたように，この一連の研究の主題は次の諸問題である．すなわち Cousin の問題，正則函数の表現の問題および領域の分類の問題.[1] この論文ではその第 3 の問題を取り扱う.[2]

**1.** 複素変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ によって描かれる空間 $((x))$ において領域を考える．この一連の研究では, 複雑なことが起こるのを避けるため, 最初から領域は無限遠点を含まない単葉なものと仮定している．F. Hartogs によって発見されたタイプ を持つ領域を H. Cartan の方法 で分類し, さらにその分類を簡略化すると, 次のようなタイプが得られる.

( I ) 筒状域.
( II ) 有理凸状域.
(III) 正則域.
(IV) 擬凸状領域.

$D$ を領域とするとき, もしそれが $D$ で正則な有理函数に関して凸状であるか，またはそのような領域で内部から近似されるなら, それを 有理凸状域 と言うことにする．[訳注 1]

有界領域 $D$ を考え, $E$ を $D$ に属さない有限空間 $((x))$ の点全体の集合 (訳注 全空間における $D$ の余集合.) とする．もし $D$ の境界上の任意の点 $P$ の近傍において $E$ が連続定理[3]を満たし，その性質が $P$ の近傍の $1:1$ 解析的な写像を許すなら，それを 擬凸状 と言う．より一般に, そのような領域で内部から近似されるようなものもすべて擬凸状と言うことにしよう．[訳注 2]

領域の 4 つの基本的なタイプは次の関係にある.

$$\text{(I)} < \text{(II)} \leq \text{(III)} \leq \text{(IV)}$$

[1] これらの問題については何よりも先ず
G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, 1926. (Acta mathematica.)
を見よ.

[2] 前 3 論文は次の通りである.
I – 有理函数に関して凸状な領域. 1936.
II –正則域. 1937.
III–Cousin の第 2 問題. 1939. (Journal of Science of the Hirosima University.)

[3] これは次のような性質を持つ $P$ を中心とした超球 $S$ が存在することである．すなわち $S$ 内に任意の点 $((a))$ を考え, $r$ を任意の半径として円周 $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}, |x_n - a_n| = r$, を考える．このときもしこの円周が $E$ の外部にあり, 点 $((a))$ がそうでないなら，或る正の数 $d$ にたいし, $|x_k - a_k| < d$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ 内のすべての点 $(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ にたいして少なくとも一つ $|x_n - a_n| < r$ 内の点 $x_n^0$ で $((x^0))$ が $E$ に属するものが存在する.

すなわちこれらのタイプの領域は1つが他に含まれる．後の2つの包含関係は暫定的である.[4] 実際, 前2つの形(I)と(II)しか存在しないということにもなりかねないのである．(訳注 1変数の場合はそうである.) したがって2つの問題, (II) $\leq$ (III)? (訳注 有理凸状域でない正則域は存在するか?), (III) $\leq$ (IV)? (訳注 擬凸状領域は正則域か?) が提起される．後者は後に研究する．この論文ではその前者を取り扱う．

**2.** 複素2変数 $x, y$ の空間において双円環

$$(\Gamma, \Gamma') \qquad r < |x| < 1, \qquad r' < |y| < 1,$$

および解析平面

$$y = x - 1$$

を考える．この解析平面の双円環内の部分は，半径が不等式

$$r + r' > 1$$

を満たすなら，2つの成分 (連結) に分かれる．それでその場合を考える．その成分の一つは $x'$ も $y'$ も上半平面にあるような点 $(x', y')$ よりなる．それを $(\sigma)$ と書く.[5]

$(\Gamma, \Gamma')$ において

$$\frac{1}{y - x + 1}$$

を $(\sigma)$ 上の極として持ち，$(\sigma)$ 以外では正則な有理型函数 $G(x, y)$ を作る．Cousin の定理により，$G(x, y)$ は確かに存在する．この函数 $G$ によって

$$(A) \qquad r < |x| < 1, \qquad r' < |y| < 1,$$

$$|G(x, y)| < M$$

なる形の集合を作る．ここで $M$ は後に定める正の数である．集合 $A$ は開集合であり正則域よりなる．

正の数 $d$ を

$$6d < 1 - r'$$

となるように選ぶ. $x$ 平面に原点を中心として半径が $1 + r$ の半分の円 $C$ を描く．さらに $y$ 平面に円環

$$(\Gamma'_0) \qquad r' + d < |y| < 1 - d$$

[4] 第I論文では (II)→(I) という方法 (訳注有理凸状域における問題を筒状域における問題に帰着さす方法.) を研究し，第II論文では (III)→(II) という方法 (訳注 正則域における問題を有理凸状域における問題に帰着さす方法.) を研究した.

[5] これは Cousin の第2問題において一度使った形である.

を描く．$(x',y')$ を $(\sigma)$ の任意の点とし, 解析平面 $x=x'$ 上に $y'$ を中心とし, 半径 $d$ の円板 $(\gamma_{x'})$ を描く．$(\gamma_x)$ は, もし存在すれば, $x$ によって一意的に定まる．$E$ をすべての円板 $(\gamma_x)$ から成る点集合とする．(訳注 E=$\cup_{(x,y)\in\sigma}\gamma_x$) 新たに $(x',y')$ を集合

$$|x|=\frac{1+r}{2}, \qquad r'+d\le|y|\le 1-w,$$

に属し, $E$ には属さない点とし, そのような $(x',y')$ の全体よりなる点集合を $F$ と表す．$F$ は連続体である．$F$ は $(\Gamma,\Gamma')$ に含まれている．$F$ の任意の点で $G(x,y)$ は正則である．$M$ を十分大きく取れば $A$ は $F$ を含む．それで $A$ に属し $F$ を含む領域の一つを $A_0$ と表す．正則域 $A_0$ は有理凸状域ではないことを証明しよう．[訳注 3]

$A_0$ を有理凸状域と仮定する．そうすると第 1 論文の 4 節に述べた Weil の定理により, 函数 $G(x,y)$ は $F$ の近傍では正則な有理函数の一様収束する列

$$(S) \qquad f_1(x,y),\ f_2(x,y),\ \ldots,\ f_n(x,y),\ \ldots$$

の極限として表せる.[6]

$\xi$ を 円周 $C$ 上の点で, $(\gamma_\xi)$ が 円環 $\Gamma'_0$ に含まれるようなものとする．$\Gamma'_0$ の二つの境界成分の間の距離は $4d$ を超えているのに反し $(\gamma_\xi)$ の半径は $d$ なのだから, そのような $\xi$ は必ず存在する．$\eta$ をこの円の中心とする．このとき, 列

$$(S') \qquad f_1(\xi,y),\ f_2(\xi,y),\ \ldots,\ f_n(\xi,y),\ \ldots$$

の中で $y$ 平面の $(\gamma_\xi)$ 内に極を持つものが少なくとも一つ存在する．実際, もしそうでないなら, $(S')$ のすべての函数が $(\gamma_\xi)$ の内部で正則になる．ところでその円周は空間で考えて $F$ に含まれているのだからその函数はその円周の近傍で初めから正則である．さらに同じ理由で列 $(S')$ はその周では一様に $G(x,y)$ に収束する．そうすると $G(x,y)$ はその円板の内部で正則になる．これは円板の中で極 $1/(y-x+1)$ を持つことに反する．それで $f_m(\xi,y)$ を $(\gamma_\xi)$ 内に極を持つ $(S')$ の函数の一つとする．

$$f_m(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}$$

と置く．$\varphi$ と $\psi$ は共通因子を持たない多項式である．

$(x',y')$ を $(\xi,\eta)$ と同じ性質を持つ任意の点とする．そして $x$ を独立変数と考えて, 方程式

$$\psi(x,y)=0$$

[6] ある現象がある点集合 $E$ をその集積点と共に含む開集合で成り立つとき, その現象は $E$ の近傍で成り立つと言うことにする．

を考える．$\psi(x,y)$ は $F$ 上では $0$ を取らないから，$x$ を $\xi$ から $x'$ 迄の $C$ の部分弧を描くとき，この方程式の根は $(\gamma_\xi)$ を出ることは決してない．したがって任意の $x'$ にたいし，方程式 $\psi(x',y)$ は $y$ 平面の円板 $(\gamma_{x'})$ の中に少なくとも一つの根を持つ．根の個数は $x'$ によらない．それを $\lambda$ と表す．

$y$ 平面で原点を中心とし半径を $(1+r')$ の半分の円 $C'$ を描く．$x'$ が円周 $C$ を正の方向に一周すると，$y$ 平面の円板 $(\gamma_{x'})$ は $(C')$ の内から外へ $C'$ を一度通過する．所で $(\gamma_{x'})$ の半径は $d$ であるが，円周 $C'$ から $\Gamma'_0$ の境界迄の距離は $2d$ を超えている．したがって円板 $(\gamma_{x'})$ は $C'$ を通過している間中 $\Gamma'_0$ に含まれている．

これは奇妙なことである．何故なら $x$ が $C$ を正の方向に一回りするたびに，代数方程式 $\psi=0$ の $\lambda$ 個の根が $(C')$ の中から出ていく．これは矛盾である．したがって $(A_0)$ は有理凸状域ではない．

**定理**　正則域は，例えそれが有限単葉であっても，必ずしも有理凸状域ではない．

これは第II論文で確立した定理Iの基礎である．同時にH. Cartan の凸状[7]とH. Cartan–P. Thullen の定理[8] (同時解析接続に関する主定理) は単葉領域に対してすでに不可欠であることを確かめた．この定理はさらに無限遠点を含まない単葉な正則域における正則函数を (その領域で正則なまたはそうではない) 有理函数の列に展開することが一般には不可能であることを示している．言い換えると Runge の定理は単葉な正則域でも成り立たないのである．

## 訂　正

第I論文．　2節で与えた開集合 $D'$ は $D$ の完全内部に含まれるとは限らない．それは不定点の存在からくる現象である．それで次のように処理する．

$1^\circ$ 第I論文の記述は多項式に対しては正確である．
$2^\circ$ 4節の定理と定理Iを第II論文の5節のように改める．
$3^\circ$ それにつれて定理IIも改める．このとき，5節で与えた証明は変えることはない．

第II論文．　117頁．命題に次の条件を付加する．すなわち，$f((x),t)$ は $((x)\in \overline{U},\ 0\leq t\leq 1$ における一価連続な函数である．ここで $\overline{U}$ は $U$ とその境界よりなる閉領域であり，したがって $U$ は有界と仮定されている．

第III論文．　16頁．第3式を

$$f_1((x),t)e^{(1-t)(\varphi_1+2k\pi i)} = \cdots$$

と置き換える．$k$ は領域によって定まる適当な整数である．
19頁．3行目の『極限』を『すべての極限』と置き換える．

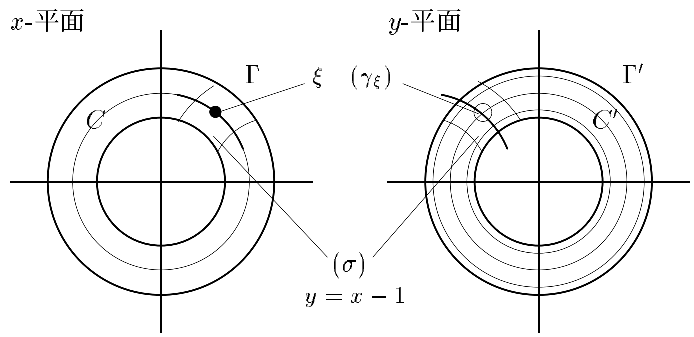
[7]H.Cartan, Sur les domaines d'existance des fonctions de plusieurs variables complexes, 1931 (Bull.Soc.Math.France.)
[8]H.Cartan und P.Thullen, Regularitäts- und Konvergenzbreiche, 1932. (Math. Annalen)

# 訳　注

**[訳注 1]**　この二つは別である. 例えば全空間から超越的な解析面を除いた領域 $D$ は有理凸状ではあるが, $D$ で正則な有理函数に関して凸状ではない. H. Cartan のアイデアに従って, 或る領域で正則函数の或るクラス $\mathfrak{K}$ を考え, $\mathfrak{K}$–凸状を定義する仕方だけでは有理凸状を定義することができない. それでそれをここで補われたのである. なお有理凸状域における正則函数を, その領域の任意の完全内部で一様収束するような有理函数の級数に展開すれば, その項はその領域内に極を持つことがある.

**[訳注 2]**　擬凸状と言う言葉はこの論文以前にも使われているが, それは滑らかな超曲面の片側についてである. 境界が滑らかな超曲面ではないような, 一般な領域にたいして “擬凸状領域” という概念を定義したのはこれが最初である. 第 VI 論文は擬凸状領域が主題であるため, そこでもう一度擬凸状領域の定義が書かれているが, それの方が定義の完成度が高い.

**[訳注 3]**　この例の幾何学的な状況は下図のようである.




多項式 $\psi(x, y)$ の $y$ に関する次数を $\nu$ とする. $\psi(x, y) = 0$ を $y$ に付いて解けば各 $x$ にたいして, 重複度を込めて数えれば, 常に $\nu$ の根が得られる. いま $x$ が $C$ 上のある点から出発し, $C$ を一周して元へ戻るとすると, それらの根はそれぞれ連続的に動いて, 全体としては元へ戻る筈である. そうならないことが矛盾なのである.

# 解　題

第 III 論文の解題で述べたように，この論文はほとんど第 III 論文と一体のものである．それで第 III 論文の解題も参照して頂きたい.

この論文の一節は序文であるが，その最後に『後者は後に研究する.』と書かれている．これは第 VI 論文の予告である．それについて岡先生は『この論文の校正が来たときには Hartogs の逆問題が解けていたので, その時にこの文章を挿入した. もしそれが解けていなければ, こんな大胆を文章は書けない.』と言っておられた. Hartogs の逆問題は岡先生にとっても, 解ける直前まで, 解けるかどうか分からなかったほど難解だったのである.

ところで, 私は第 II 論文の解題で『岡先生が定理 1 に気付かれたのは, おそらく上空移行に気付かれたその日であろうと想像される.』と書いた. それにはそれなりの理由があってのことではあるが, 論理的な順序からすると,『正則域は有理凸状とは限らない』ことが分かってから, 第 II 論文の研究が始まることになる. 実際の研究もそうだとすると, 上のように想像した根拠は間違っていることになる. それなら『有理函数に関する上空移行ができるならその先ができないはずはな』いという確信があったのだろうか.

もう一つこの論文に関する岡先生の言葉を紹介しておく.
『 Cousin の第二問題が必ずしも解けないことの理由が分かれば, 有理凸状ではない正則域の例はすぐに作れる. だから, 第 III 論文を第 IV 論文と分離して発表したとき, 第 IV 論文に相当する論文は誰かが書くだろうと思っていた. しかしいつまで経っても誰もそれを書かないから, 第 IV 論文を書いたのである.』