多変数解析函数について
V–Cauchy 積分

岡潔

1940 年 3 月 27 日受理

この論文では, 単葉な正則域において正則函数を表現する問題を取り扱う. すでに見たように有理函数の級数による表現は一般には不可能である. それで Cauchy 積分, 詳しくは A. Weil の積分に移る.

1. Weil の積分. Weil の積分を, 彼の論文[1]の一部を逐語的に引用しながら説明することから始めよう.

≪ 複素 2 変数 x, y の空間における領域 D (単葉で有界) において N 個の正則函数 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ (定数ではない) を考える. そして X_i の 平面で有限個の解析的な曲線からなる境界 C_i を持つ閉有界 (単葉) 領域 Δ_i 考え, Δ を D 内で条件

$$X_i(x, y) \in \Delta_i$$

で定義された集合の一つの連結成分または有限個の連結成分の和集合とする. Δ は D の完全内部に含まれていると仮定する. そして Δ の境界点 で $X_i \in C_i$ となるものを S_i と書き, S_i はどの二つも互いに 2 より大きい次元の要素を共有しないと仮定する. (この条件を満たすためには, 境界 C_i を適当にごくわずかずらすだけで十分である.) σ_{ij} を S_i と S_j の交わりである 2 次元の要素の和とする. 方向付けは列 S_i, $S_i \times S_j$ から適当に定義される.≫

この Δ を (α) 型と言うことにしよう. D は Δ を完全内部に含む有界な開集合と考えられており, それ以外は任意である.

≪ 他方 $X_i(x, y)$ の各々にたいし, $(x, y) \in D$, $(x_0, y_0) \in D$ で正則な二つの函数 $P_i(x, y; x_0, y_0)$ と $Q_i(x, y; x_0, y_0)$ で, 恒等的に

$$X_i(x, y) - X_i(x_0, y_0) = (x - x_0)P_i + (y - y_0)Q_i$$

となるものを対応さすことができると仮定する.≫

これを条件 (β) と呼ぶことにする.

≪ この条件のもとで, $f(x, y)$ を Δ の各点で一価正則な函数とし, 積分の和

$$I = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_{(i,j)} \int_{\sigma_{ij}} \frac{(P_iQ_j - P_jQ_i)f(x, y)}{[X_i(x, y) - X_i(x_0, y_0)][X_j(x, y) - X_j(x_0, y_0)]} dxdy$$

[1] L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, 1935. (Math.Annalen.)

を考える．和は二つの添え数 (i,j) の全ての組み合わせに渡って取る．このとき，(x_0,y_0) が Δ の内点であるか Δ の外点であるかにしたがって

$$I=f(x_0,y_0) \qquad \text{または} \qquad =0$$

となる.≫

これが Weil の結果である．簡単に言えば，もし ≪ 多面体 ≫ が (α) 型で条件 (β) を満たすなら，Δ は Cauchy 積分 I を持つというのである．ここで積分は ≪ 表面 ≫ S_i と S_j の交わり σ_{ij} に沿って取られている．

2. 新しい条件 (γ)**.** 新たに次のような条件 (γ) を提起しよう．

各 $X_i(x,y)$ に $(x,y)\in D$, $(x_0,y_0)\in D$ で正則な二つの函数 $P_i(x,y;x_0,y_0)$ と $Q_i(x,y;x_0,y_0)$ で，恒等的に

$$(X_i-X_i^0)R=(x-x_0)P_i+(y-y_0)Q_i$$

となるものを対応さすことができると仮定する．ここで X_i^0 は $X_i(x_0,y_0)$ を表し，R は $(x,y)\in D$, $(x_0.y_0)\in D$ で正則な新しい函数であって，X_i にはよらず，さらに

$$R(x_0,y_0;x_0,y_0)=1$$

となるようなものである．

この新しい仮定のもとで，(α) 型の ≪ 多面体 ≫ Δ に関する Cauchy 積分を作ることが問題である．新しい函数 P_i, Q_i によって I と同じ型の積分，

$$J=\frac{-1}{4\pi^2}\sum_{(i,j)}\int_{\sigma_{ij}}\frac{(P_iQ_j-P_jQ_i)f(x,y)}{(X_i-X_i^0)(X_j-X_j^0)}dxdy$$

を作る．全く同様にして，(x_0,y_0) が Δ の内点であるか Δ の外点であるかにしたがって，

$$J=f(x_0,y_0) \qquad \text{または} \qquad =0$$

となることが分かる．

積分 J は集合として積分 I を含む．この積分を新たに Weil の J 積分と呼ぶことにする．

条件 (γ) を調べよう．

3. 先ず第 II 論文の定理 I に関する注意を与える．

複素 2 変数 x,y の空間で，クラス (H_0) に属する次のような閉集合 Δ を考える．

$$(\Delta) \qquad |x|\le r, \qquad |y|\le r', \qquad |f_j(x,y)|\le 1,$$

$$(x, y) \in G, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

ここで G は空間 (x, y) の有界な開集合, f_j は G における正則函数, r と r' は正の数であって, Δ は G の完全内部に含まれていると考えている. したがって Δ は閉集合である. 新たな ν 個の複素変数 $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ を導入して空間の次元を上げ, 空間 $[x, y, (z)]$ における次のような解析集合上の 4 次元の閉集合 Σ を考える.

$$(\Sigma) \qquad z_j = f_j(x, y), \qquad (x, y) \in \Delta, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

このとき Σ はクラス (P_1) に属する. すなわち x, y と z_j の多項式に関する凸状な開集合の列で, 外から (訳注 減少しながら) Σ に収束するものを見つけることができる. これは第 II 論文の定理 I である.

Σ が乗っている解析集合を, 十分小さい変形によって, 代数的なものにしよう.[訳注 1] Σ はクラス (P_1) に属しているのだから, Σ を含む開集合 V を適当に選んで, 正則函数

$$z_j - f_j(x, y), \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

を, V で一様収束する x, y, z_j の多項式の級数に展開することができる. したがって, もとの函数に十分近い多項式 $F_j[x, y, (z)]$ を見つけることができる. x と y を独立変数として, 連立方程式

$$(1) \qquad F_j(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_\nu) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

の根の一系を観察しよう.

もう一度

$$F_j[x, y, (z)] \longrightarrow z_j - f_j(x, y)$$

から始める. (x, y) を Δ の任意の点とする. 先ず, 十分小さい数 ρ を選んで, 空間 $((z))$ に多円筒

$$(\gamma) \qquad |z_j - f_j(x, y)| < \rho, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

を描き, 点集合 $[\Delta, (\gamma)]$ は開集合 V の完全内部に含まれるように する. 次に F_j をそれぞれ十分 $(z_j - f_j)$ の近くに取って, 開集合 V の中で次の3 条件が満たされるようにする.

1^o δ を $\delta < \rho$ であるように予め与えられた正の数とし, p を $1, 2, \ldots, \nu$ のどれかとするとき

$$\text{もし} \quad z_p = f_p(x, y) \quad \text{なら,} \quad |F_p[x, y, (z)]| < \delta.$$

2^o さらに ρ' を $\rho' < \delta$ であるように予め与えられた正の数として,

$$\begin{array}{llll} \text{もし} & |F_p| \leq \delta & \text{なら,} & |z_p - f_p(x, y)| < \rho; \\ \text{もし} & |F_p| = \delta & \text{なら,} & |z_p - f_p(x, y)| > \rho'. \end{array}$$

3^o

$$J = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_\nu)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, \nu)} \neq 0.$$

これがその 3 条件である. 初めの 2 条件にたいしてはそれは確かに可能である. 第 3 の条件については $J \to 1$ を注意しさえすればよい.

この条件のもとで, 連立方程式 (1) の根の一系

$$z_j = \varphi_j(x, y) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

にたいして, それは (γ) 内に一つ, しかもただ一つ存在し, しかも $\varphi_j(x, y)$ は $(x, y) \in \Delta$ のとき正則である ことを証明しよう.

u_j を複素独立変数として, 予備的な連立方程式

$$(2) \qquad F_j[x, y, (z)] = u_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

を考える. Δ の点 (x_0, y_0) を任意に取り, それを固定して考える. そうすると変数は z_j と u_j だけである. (x_0, y_0) に対応する (γ) を (γ_0) と表し, $f_j(x_0, y_0)$ を z_j^0 と表す.

第 1 条件により, (γ_0) の中心 $((z^0))$ に $|u_j| < \delta$ の点が対応する. それを $((u^0))$ と表す. $J \neq 0$ なのだから, $((u^0))$ の近傍の全ての点 $((u))$ にたいし, 連立方程式 (2) は $((z^0))$ の近傍にただ一つの根の一系

$$z_j = \Phi_j((u)), \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

を持ち, 函数 $\Phi_j((u))$ は正則である.

函数の一系 $\Phi_j((u))$ を多円筒 $|u_j| < \delta$ の中で解析接続する. 第 2 の条件により点 $\Phi_j((u))$ は常に (γ_0) 内に留まる. さらに, 第 3 の条件により, J は決して零にならないから, これらの一系の函数は決して特異点にぶつからない. したがって $\Phi_j((u))$ は $|u_j| < \delta$ で正則である. すなわち解析写像 $z_j = \Phi_j((u))$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ は多円筒 $|u_j| < \delta$ を, 或る (γ_0) に含まれる単葉な領域に写す. これを Z と表す. 第 2 の条件により, Z は多円筒 $|z_j - z_j^0| < \rho$ を含む.

(2) の根の他の一系

$$z_j = \Psi_j((u)), \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

であって, $((u))$ が多円筒 $|u_j| < \delta$ を描くとき, 点 $\Psi_j((u))$ が (γ_0) 内に入り込むようなものが存在すると仮定する. この仮定のもとで前と同様に $z_j = \Psi((u))$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ は $|u_j| < \delta$ を, $|z_j - z_j^0| < \rho'$ を含む或る単葉領域 Z' に写す. 領域 Z と Z' は多円筒 $|z_j - z_j^0| < \rho'$ を共有する. したがってもし点 $((z))$ をその多円筒内に取るなら $|u_j| < \delta$ 内に少なくとも 2 点

が対応し, 各々は連立方程式 (2) を満たす. これは矛盾である. このように $z_j=\Phi_j((u))$ は $((u))$ が $|u_j|<\delta$ を描くとき (γ_0) 内に入り込む唯一の根の一系である. そしてさらに, 今見たように, この一系は常に (γ_0) 内に留まる.

$u_j=0$ $(j=1,2,\dots,\nu)$ と置いて, 連立方程式 (1) は $(x,y)=(x_0,y_0)$ に対し, (γ_0) 内に根の一系を持つ. それを

$$\Phi_j[x,y,(0)]=\varphi_j(x_0,y_0), \qquad (j=1,2,\dots,\nu)$$

と表す. それは唯一つで, (x_0,y_0) が Δ の任意の点のとき, 函数 $\varphi_j(x,y)$ は明らかに一価函数であり, $J\neq 0$ であるから Δ のすべての点で正則である. 上記のことを纏めると,

<u>第 II 論文の定理 I の補足.</u> $\ll \rho_0$ を或る上限とし, $0<\rho<\rho_0$ なる ρ を与えたとき, 連立 <u>代数</u> 方程式

$$F_j(x,y,z_1,z_2,\dots,z_\nu)=0, \qquad (j=1,2,\dots,\nu)$$

で次のようなものが見つかる. F_j は多項式であって,

$$|z_j-f_j(x,y)|<\rho, \qquad (j=1,2,\dots,\nu)$$

内にその根の一系

$$z_j=\varphi_j(x,y), \qquad (j=1,2,\dots,\nu)$$

をただ一つ持ち, $(x,y)\in\Delta$ のとき, $\varphi_j(x,y)$ は正則函数である.$\gg$

証明の過程で, $(x,y)\in\Delta,\ |z_j-f_j(x,y)|<\rho$ $(j=1,2,\dots,\nu)$ なるすべての点で

$$J=\frac{\partial(F_1,F_2,\dots,F_\nu)}{\partial(z_1,z_2,\dots,z_\nu)}\neq 0$$

と仮定できることを見た.

以下では必要ないが, もう一つの注意を与える. 一般性を失うことなく，代数函数 $\varphi_j(x,y)$ は空間 (x,y) の有限部分に極も不定点も持たないと仮定することができる. そのためには多項式として

$$F_j[x,y(z)]=\alpha_j z_j^{N_j}+\cdots$$

という形ものを取ればよい. ここで α_j は零ではない定数であり, $\cdots$ は z_j $(j=1,2,\dots,\nu)$ に関して N_j より低い次数の項を表す.

4. 空間 (x,y) において単葉で無限遠点を含まない正則域 D を考える. Cartan–Thullen の定理により, 内部から D に収束するクラス (H_0) の集合の列が存在する. Δ をその列の中の一つの集合とし, その形を

(Δ) $\qquad |x|\le r, \qquad |y|\le r', \qquad |f_j(x,y)|\le 1,$

$$(x, y) \in G, \qquad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

とする. 記号の意味は前節の初めのものと同じとする. 上記のことから一般性を失うことなく, $z_j = f_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \dots, \nu)$ は連立代数方程式 $F_j[x, y, (z)] = 0$ $(j = 1, 2, \dots, \nu)$ の根の一系であり, 更に F_j は, ρ を或る正の数として, (V) :

$$(x, y) \in G, \qquad |z_j - f_j(x, y)| < \rho, \qquad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

において

$$J = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_\nu)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_\nu)} \neq 0$$

であると仮定することができる.

$[x, y, (z)]$, $[x_0, y_0, (z^0)]$ を空間の有限部分における任意の 2 点とする. F_j は多項式だから,

$$F_j - F_j^0 = (x - x_0)A_j + (y - y_0)B_j + \sum (z_j - z_j^0)C_{jk}, \qquad (j, k = 1, 2, \dots, \nu) \tag{1}$$

と置くことができる. ここで F^0 は $F_j[x_0, y_0, (z^0)]$ を意味する. 以下このような短縮記号をしばしば使う. A_j, B_j と C_{jk} は $x, y, z_j; x_0, y_0, z_j^0$ の多項式である. $(z_k - z_k^0)$ を一つの独立変数とみなして一次連立方程式

$$\sum (z_k - z_k^0)C_{jk} + (x - x_0)A_j + (y - y_j)B_j = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \dots, \nu) \tag{2}$$

を解き,

$$(z_k - z_k^0)N = (x - x_0)a_k + (y - y_0)b_k$$

を得る. N, a_k, b_k は $x, y.z_j; x_0, y_0, z_j^0$ の多項式であり, 特に

$$N = |C_{jk}| \qquad (j, k = 1, 2, \dots, \nu)$$ [2]

である. 行列式 $|C_{jk}|$ を $x = x_0$, $y = y_0$, $z_j = z_j^0$ として考えると, 明らかに

$$C_{jk}^0 = \left(\frac{\partial F_j}{\partial z_k}\right)_0$$

であり, したがって

$$N_0 = J_0$$

が得られる. J_0 は x_0, y_0, z_j^0 の多項式であって, V で零を取らない.

[2] これは $C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{j\nu}$ $(j = 1, 2, \dots, \nu)$ で作られる行列式を表す.

さて (1) で $z_j = f_j(x, y)$, $z_j^0 = f_j(x_0, y_0)$ と置くと $F_j = F_j^0 = 0$ となる. 従って, もし N, a_k, b_k, J_0 にこの代入をしたものを N', a'_k, b'_k, J'_0 と置き,

$$\frac{N'}{J'_0} = R(x, y; x_0 y_0)$$

$$\frac{a'_k}{J'_0} = p_k, \qquad \frac{b'_k}{J'_0} = q_k$$

と置けば,

$$(3) \qquad (f_k - f_k^0)R = (x - x_0)p_k + (y - y_0)q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

が得られる. ここで R, p_k, q_k は $x, y; x_0, y_0$ の函数で, (G, G) 内で正則であり, 特に

$$R(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1$$

である.

いま $\varphi(x, y)$ を Δ の近傍における正則函数とする. 第 II 論文の定理 I と Weil の定理により, この函数を Δ の近傍で一様収束する x, y と $f_j(x, y)$ の多項式の級数に展開することができる. したがって任意の正の数 ε にたいして x, y と $f_j(x, y)$ の多項式 $\psi(x, y)$ で, Δ の近傍では

$$|\varphi(x, y) - \psi(x, y)| < \varepsilon$$

となるものを見つけることができる. $\psi - \psi_0$ は

$$\psi - \psi_0 = (x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta + \sum (f_j - f_j^0)\gamma_j$$

の形である. ここで α, β と γ_j は変数 $x, y; x_0, y_0$ の函数で, (Δ, Δ) の近傍で正則である. このことから (3) を代入して,

$$(\psi - \psi_0)R = (x - x_0)P + (y - y_0)Q$$

が得られる. ここで P と Q は (Δ, Δ) の近傍における同じ変数の正則函数である. このようにして次の補題が得られた.

補題 —D を空間 (x, y) の無限遠点を含まない単葉な正則域, D_0 を D の完全内部に含まれる単葉領域とする. このとき (D_0, D_0) における正則函数 $R(x, y; x_0, y_0)$ であって

$$R(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1$$

であり, さらに次のような役割を演ずるものが存在する. すなわち, 正の数 ε を任意に与えるとき, D における任意の正則函数 $f(x, y)$ にたいして D_0 における正則函数 $\varphi(x, y)$ で,

$$|f(x, y) - \varphi(x, y)| < \varepsilon$$

となり, さらに

$$(\varphi - \varphi_0)R = (x - x_0)P + (y - y_0)Q$$

となるものを見つけることができる. ただし φ_0 は $\varphi(x_0, y_0)$ を表し, P, Q は (D_0, D_0) における変数 $x, y; x_0, y_0$ の或る正則函数である.

この命題は任意個の複素変数の場合にも成り立つ. それは上記とまったく同じ議論で確かめることができる.

5. Weil の積分に戻る. 1 節で考えた (α) 型 の $\ll$ 多面体 $\gg$ を考え, Δ は

$$X_i(x, y) \in \Delta_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

なる形とする. Δ は 明らかに正則域より成る開集合によって外部から近似される. したがって, 上の補題から, X_i と Δ_i をごくわずか変形すれば, (α) 型で, 性質 (γ) を持つ $\ll$ 多面体 $\gg$ Δ' を作ることができ, Δ' では 2 節の Weil の積分が成り立つ. このことから, Cartan–Thullen によって次の結果を得る.

定理. — 2 複素変数の空間で, 無限遠点を含まない単葉な正則域 D が与えられたとき, D における正則函数は D の完全内部で Weil の積分によって表される. [3]

著者はこの定理も変数によらないと考える.

訳　注

[訳注 1]　Σ は $z_j = f_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ によって描かれる解析集合上の, Δ に対応する部分であるが, この函数 $f_j(x, y)$ を, それに十分近い, Δ の近傍では一価な代数函数の分枝 $\varphi_j(x, y)$ に置き換え, $z_j = \varphi_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ によって描かれる解析集合上で Δ に対応する部分を考えようというのである.

[3] 積分の形は D の内部の領域に依る.