

多変数解析関数について.

VI 擬凸状域.

岡潔

1941年10月25日受理

序文. 1906年, F. Hartogs は, 正則域が或る非常に奇妙な制約の下にあることを発見した¹. 私は, 多変数関数論の現代の発展は正にこの発見に始まると考える.

同様の制約は, この理論の他の分野の深奥で, E. E. Levi, G. Julia, W. Saxer, および著者によって次々と発見された². この種の制約の下にある領域を擬凸状と呼ぶことにしよう³.

この種の凸性は局所的な方法で判定される. ところで, 1932年, H. Cartan と P. Thullen は, 正則域がまた或る意味で大域的に凸状であることを見いだした⁴. この性質のお蔭で, 我々は正則域に関する幾つかの大域的な定理を確立してきた⁵.

このように我々は何種類かの擬凸状領域を持っているのであるが, しかしそれらについては, 正則域について以外, 我々はほとんどなにも知らないのである⁶. そこで我々はもう一度 F. Hartogs に立ち戻り, 逆にすべての擬凸状領域は正則域なのかどうかを問い直そう. もしこの二つのタイプの領域が一致するなら, 我々は正則域であるための局所的な判定条件を持つことになる. とところで, 種々の擬凸状領域の中で G. Julia のそれは有限の場合正則域であることが H. Cartan, P. Thullen, H. Behnke および K. Stein によって明らかに

¹F. Hartogs, Einige Forgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen, 1906. (Münch. Berichte.)

²E. E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle analitiche di due o più variabili complesse, 1910. (Annali di Matematica.)

G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, 1926. (Acta Mathematica.)

W. Saxer, Sur les familles de fonctions méromorphes de plusieurs variables, 1931. (Comptes Rendus, Paris.)

K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc., 1934. (Journal of Science of the Hiroshima University.)

³有限単葉な領域に対しては, 第 IV 論文でそれを定義した. この論文の 10 節を見よ.

⁴およびその逆.

H. Cartan-P. Thullen, Regularitäts- und Konvergenzbereiche, 1932. (Mathematische Annalen.) を見よ. そのアイデアについては

H. Cartan, Sur les domaines d'existence de fonctions de plusieurs variables complexes, 1931. (Bull. Société Mathématique de France.) を見よ.

⁵この研究に関する既出の論文は次の通りである. I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936; II. Domaine d'holomorphie, 1937; III. Deuxième problème de Cousin, 1939; IV. Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941; V. L'intégrale de Cauchy, 1941.

⁶なお, 例えば, 複素 2 変数の空間における有限単葉な領域において, もし Cousin の第 1 問題が常に解けるなら, それは正則域でなければならないことが知られている.

H. Cartan, Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables, 1934. (Comptes Rendus, Paris.) を見よ.

されている⁷。しかしそれ以外、この問題は現在までほとんど手がつけられていない⁸。

この論文ではこの問題を取り扱う。ここでは簡単のため複素 2 変数の空間に限るが、この結論は任意個数の複素変数空間に適用されると私は信じている。その結論として我々は、単葉有限な領域の場合、擬凸状領域は常に正則域である ことを見るだろう⁹。

今述べたこの問題は、現在の一連の研究の主題を成す問題の最後のものである¹⁰。

I. 主問題

1. 問題. この論文における領域は引き続き 有限単葉 であると考えている。

この研究では Cousin の第 1 問題 がほとんどすべての箇所で基本的な役割を演じる。その主要部分は次の問題である。

複素 2 変数 x, y の空間で原点を含む有界な領域 Δ を考え、その、超平面 $x_2 = 0$ より上の部分および下の部分をそれぞれ Δ_1 および Δ_2 と表す。ここで $x = x_1 + x_2$ であり、 i は虚数単位である。 Δ_1 と Δ_2 の共通の境界の“近傍”における正則函数 $f(x, y)$ が与えられたとき¹¹、それぞれ Δ_1 と Δ_2 において正則であり、さらに $x_2 = 0$ 上の Δ のすべての点でも正則であるような函数の組 $F_1(x, y), F_2(x, y)$ であって、そこで恒等的に

$$F_1(x, y) - F_2(x, y) = f(x, y)$$

となるものを求めること。

1895 年、P. Cousin はこの問題を筒状域に対して解いた¹²。1934 年、H. Cartan はこの問題が A. Weil の積分 を応用すれば、有理凸状域¹³に対しても

⁷これを Julia の問題と言う。H. Cartan-P. Thullen の前掲の論文および次の論文を見よ。

H. Behnke-K. Stein, Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphie-konvexität, 1938. (Math. Annalen); Approximation analytischer Funktionen in vorgegebenen Bereichen des Raumes von n komplexen Veränderlichen, 1939, (Göttingen Nachrichten); Die konvexität in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, 1940. (Mittlung der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg).

⁸この問題については著書 H. Behnke-P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 頁 54-56 および前掲の論文 H. Behnke-K. Stein, 1940, を見よ。

⁹著者はこの結果を次のノートで公表した。Sur les domaines pseudoconvexes, 1941. (Proc. Imp. Acad. Tokyo).

¹⁰著者は、前掲の H. Behnke-P. Thullen の非常に興味ある著書によってこの研究を思い立った。

¹¹ある現象が、点集合 E を、その集積点と共に、含むある開集合で成り立つとき、その現象は集合 E の近傍で成り立つと言う。

ある現象が、開集合 Ω に、境界点と共に、含まれる有界な任意の開集合で成り立つとき、その現象は Ω の“完全内部” (“à l'intérieur de”) で成り立つと言う。

¹²Acta Mathematica.

¹³ほとんど任意。以下同様。[訳注。第 IV 論文参照.]

解けることを示した¹⁴. この同じ方法は第 V 論文で見たことから正則域にたいしても適用される. そしてその後, 我々は第 I および第 II 論文で, これらとは異なる方法でこの問題を解いた. [訳注 1]

我々はこの問題を, 一方が他方に浸食しているような二つの正則域 (連結または非連結) であって, 一方は Δ_1 を, 他方は Δ_2 を含んでいるようなものからなり, それ以外はほとんど任意の擬凸状領域にたいして解こう.

2. 仮定. この節では, この問題を, 以下に述べる条件を満たす Δ にたいして取り扱う. その条件の意味は次の章で論じる.

空間 (x, y) において原点を含む 有界 な領域 \mathfrak{D} とそれぞれ

$$x_2 = 0, \quad x_2 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad a_1 < 0 < a_2$$

と表される平行な三つの超平面 L, L_1, L_2 を考える. これらの超平面の各々は領域 \mathfrak{D} を分断していると仮定し, \mathfrak{D} の L_1 より上の部分, L_2 より下の部分, および L_1 と L_2 の間の部分をそれぞれ $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ および \mathfrak{D}_3 と表す. 開集合 $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ の各連結成分は正則域であると仮定する. そうすると必然的に開集合 \mathfrak{D}_3 にたいしてもそうなる.

\mathfrak{D}_3 において ν 個の正則函数

$$X_j(x, y) \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

を考える. そして,

1° 不等式

$$|X_j(x, y)| \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

を満たす \mathfrak{D}_3 の点集合は \mathfrak{D} の境界と L の交わりの近傍の点を含まず, さらに十分小さい正の数 ε とすべての j ($j = 1, 2, \dots, \nu$) にたいし, 不等式

$$|X_j(x, y)| > 1 - \varepsilon$$

を満たす \mathfrak{D}_3 の点集合は超平面 L_1, L_2 の或る近傍の点を含まないと仮定する. \mathfrak{D} の点で \mathfrak{D}_3 に含まれないもの, および不等式

$$|X_j(x, y)| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

を満たすものの全体は開集合になる. この開集合は原点を含み, L_1 と L_2 を超えて拡がっているような連結成分を持っていると仮定する. 我々が Δ と呼ぶのはこの領域である. [訳注 2]

後に見るようにこの仮定は, すべての正則域 (有限) はその領域で正則な函数に関して凸状であるという $H. Cartan-P. Thullen$ の定理に依存している¹⁵.

¹⁴H. Cartan, 前掲の論文.

¹⁵Math. Ann., 1932

2° x_0, y_0 を新しい変数とし, 恒等的に

$$(X_j - X_j^0)R = (x - x_0)P_j + (y - y_0)Q_j \quad (j = 1, \dots, \nu)$$

が成り立つと仮定する. ここで X_j^0 は $X_j(x_0, y_0)$ を表し, P_j, Q_j および R は $(x, y) \in \mathfrak{D}_3, (x_0, y_0) \in \mathfrak{D}_3$ のとき, 変数 x, y, x_0, y_0 に関して正則な函数で, 特に R は $x = x_0, y = y_0$ のとき 1 となる.

この仮定に関して, 我々は第 V 論文の補題を持っている.

3° すべての j にたいして, $\partial X_j / \partial y$ は恒等的に零ではないと仮定する.
 Σ_j を \mathfrak{D}_3 において

$$x_2 = 0, \quad |X_j| = 1$$

で定義された解析的曲面 (variété analytique) とする. 上記の仮定から, もしそれが存在するなら 2 次元である. 曲面 Σ_j, Σ_k ($j, k = 1, \dots, \nu$) の交わりは, もし存在すれば, 1 次元であると仮定する. [訳注 3]

Δ の部分で L より上, L より下, および L_1 と L_2 の間の部分をそれぞれ Δ_1, Δ_2 および Δ_3 と表す. Δ_3 は明らかに 正則域 よりなる¹⁶. Δ_1 と Δ_2 についてもそうであることを後に見るだろう.

超平面 L の Δ 内の部分に注目しよう. S を L のその部分の点とそれの集積点からなる集合とする. 仮定 1 によって S は \mathfrak{D} に含まれている. σ を (超平面上の点集合と考えて) S の境界とする. σ は曲面 Σ_j ($j = 1, \dots, \nu$) の和集合上にある. それで σ の Σ_j 上の部分を σ_j と表す. σ_j は高々 2 次元である. 曲面 σ_j と σ_k ($j \neq k, j, k = 1, \dots, \nu$) の交わりは, 前の仮定によって高々 1 次元である. 後の議論を簡単にするため, すべての j にたいし, $\partial X_j / \partial y$ は σ_j 上で高々有限個の点を除いて零にはならないと仮定する. [訳注. 次章ではもっと強い条件が満たされることを証明している.]

後に見るように, このような Δ は, 与えられた \mathfrak{D} にたいしていつでも取ることができ, しかも \mathfrak{D} のいくら近くにでも取ることができる.

3. 正則域の場合. 先ず, 問題を, *A. Weil* と *H. Cartan* に負う方法 で, Δ_3 にたいして解こう.

$\varphi(x, y)$ を S の近傍で与えられた正則函数とする. そして

$$\psi_j(x, y; x_0, y_0) = \frac{Q_j}{(x - x_0)(X_j - X_j^0)}, \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

と置いて, σ の 2 次元の部分での重積分

$$(1) \quad I(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\sigma_j} \psi_j(x, y; x_0, y_0) \varphi(x, y) dx dy$$

¹⁶ 正確には, 正則域であるような連結成分からなる.

を考える。これを正確に定義しよう。 j を任意とすると、 $\partial X_j/\partial y$ は曲面 σ_j 上では、せいぜい有限個の点を除いて、零にはならないのだから、その除外された点以外の σ_j の点 P を任意に取る。 P の近傍で解析的曲面 Σ_j は実パラメータ u, v を使って

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

と表すことができる。この右辺は u と v の整級数であって、 (x, y) と (u, v) は 1:1 対応である。パラメータとしては、例えば (x_1, θ_j) を取ることができる。 θ_j は X_j の偏角である。 [訳注. σ_j 上では $|X_j| = 1$ である.] (u, v) を直交座標の取られたカーテシアン平面の点とみなそう。そうすると σ_j の境界には (u, v) 平面上の有限個の実解析的な曲線が対応する。 (u, v) は

$$\frac{\partial(x_1, \theta_j)}{\partial(u, v)} > 0$$

となるように選ぶ。そうすると定義により、 P の近傍で

$$\int_{\sigma_j} \psi_j \varphi dx dy = \iint \psi_j \varphi \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$$

である。この右辺は 2 次元の曲面 σ に対応する (u, v) 平面の部分における重積分である。 [訳注. 左辺内の σ_j はその或る部分である.]

(x_0, y_0) を、すべての j にたいして、 $\psi_j(x, y; x_0, y_0)$ が、 σ_j の近傍で x, y の正則函数になるような点とする。そうすると $I(x_0, y_0)$ は確定した有限の値を持つ¹⁷。

$(x, y) \in \sigma_j$ のとき $|X_j| = 1$ であるから、 $\psi(x, y; x_0, y_0)$ は L 以外の Δ_3 内で (x_0, y_0) に関して正則である。したがって函数 $I(x_0, y_0)$ は L を除いて Δ_3 で正則である¹⁸。

L の近傍における $I(x_0, y_0)$ の振る舞いを調べよう¹⁹。 (ξ, η) を L の、 Δ 内の部分の、任意の点とする。 x 平面に ξ を中心とした十分小さい半径の円 (γ) を描く。 σ および σ_j の (γ) 内の部分 [訳注. $x \in (\gamma)$, $(x, y) \in \mathfrak{D}_3$ の部分] をそれぞれ σ' および σ'_j と表す。そして積分

$$I_1(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\sigma'_j} \psi_j(x, y; x_0, y_0) \varphi(x, y) dx dy$$

¹⁷ $f(x, y)$ を σ_j の近傍で正則な函数とすると、重積分 $\int_{\sigma_j} f(x, y) dx dy$ は確定して有限の値を持つことを示そう。 P を $\partial X_j/\partial y = 0$ となるような σ_j 上の点とする。 σ_j 上のそのような点は高々有限個である。 P を中心とした半径 ρ の超球を描き、 σ' を σ のその超球内の部分とする。このとき $\int_{\sigma'} |dx dy|$ は ρ と共に零に収束する。したがって $\int_{\sigma'} f dx dy$ についても同様である。この事からただちに上の命題が得られる。

¹⁸ 実際積分 $I(x_0, y_0)$ は積分の定義自身から、開集合 $(x_0, y_0) \in \Delta_3$, $(x_0, y_0) \notin L$ のすべての点で正則な函数の一様収束列の極限である。

¹⁹ ここではこれを直接調べる。 ψ_j の代わりに $\psi_j R$ を考え、第 V 論文で証明された A. Weil の定理を用いることもできる。 [訳注. [訳注 1] を参照]

を考える. このとき, 差 $I - I_1$ は明らかに開集合 $x_0 \in (\gamma)$, $(x_0, y_0) \in \Delta_3$ で正則である. したがって I の代わりに I_1 を調べればよい.

ここで

$$\Phi_j(x, y; x_0, y_0) = \frac{Q_j}{X_j - X_j^0} \varphi(x, y)$$

と置く. そして σ の $x = \xi$ による切り口の y 平面への射影を Γ と表す. $(x, y) \in \sigma_j$ のとき $|X_j| = 1$ であるから, $Q_j / (X_j - X_j^0)$ は Δ_3 内で x_0, y_0 に関して正則であり, さらに, $\varphi(x, y)$ は S の近傍で正則である. したがって $\Phi_j(x, y; x_0, y_0)$ は集合

$$x = \xi, \quad y \in \Gamma; \quad x_0 = \xi, \quad y_0 = \eta$$

のすべての点で正則である. y 平面上に η を中心とする円 (γ') および Γ を含む開集合 E を描く. そして $\Phi_j(x, y; x_0, y_0)$ は開集合

$$(2) \quad x \in (\gamma), \quad y \in E, \quad x_0 \in (\gamma), \quad y_0 \in (\gamma')$$

で正則であり, $[(\gamma), E]$ は σ' を含むようにする. そのためには, 先ず, (γ') および E をそれぞれ η および Γ の十分近くに取り, 次いで (γ) を十分小さく取ればよい.

この条件下で,

$$\Psi_j(y; x_0, y_0) = \Phi_j(x_0, y; x_0, y_0)$$

と置く. この函数はまた集合 (2) で正則であり, 恒等的に

$$\Phi_j - \Psi_j = (x - x_0)\chi(x, y; x_0, y_0)$$

を満たす. χ は集合 (2) における或る正則函数である. ここでまた積分

$$I_2(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\sigma'_j} \frac{\Psi_j}{x - x_0} dx dy$$

を考える. そうすると, 上の等式により, $I_1 - I_2$ は双円筒 $[(\gamma), (\gamma')]$ で正則になる. したがって I_1 の代わりに I_2 を考えればよい.

さて, 関係式

$$(X_j - X_j^0)R = (x - x_0)P_j + (y - y_0)Q_j$$

において $x = x_0$ と置けば,

$$(X_j - X_j^0)R = (y - y_0)Q_j$$

が得られる. したがって

$$I_2(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\sigma'_j} \frac{R(x_0, y; x_0, y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)} \varphi(x_0, y) dx dy$$

である.

ここで積分曲面 σ' に注目しよう. l を円 (γ) の実軸上の直径とし, x' を l の任意の点とする. σ' および任意の j にたいする σ_j の $x = x'$ による切り口の y 平面への射影を考え, それらをそれぞれ $\Gamma_{x'}$ および $\Gamma_{x'}^{(j)}$ と表す. 図 (figure) $\Gamma_{x'}^{(j)}$ は, もしそれが存在するなら,

$$|X_j(x', y)| = 1$$

上にある. このとき二つの場合が可能である. その一つはこの関係式が恒等的に満たされる場合で, この場合は $\partial X_j(x', y)/\partial y$ が $\Gamma_{x'}^{(j)}$ のすべての点で零になるから, $\Gamma_{x'}^{(j)}$ は有限個の点よりなる. [訳注 4] もう一つはそれが方程式の場合で, この場合, 上式は y 平面上の有限個の解析的な曲線を表す. したがってこの一般的な場合, 図 $\Gamma_{x'}^{(j)}$ は有限個の解析的な弧 (および点) からなる.

解析的曲面 Σ_j, Σ_k ($j \neq k; j, k = 1, 2, \dots, \nu$) の交わりは, もし存在すれば, 実 1 次元である. したがって,

$$|X_j(x', y)| = 1, \quad |X_k(x', y)| = 1$$

与えられる解析的集合は, せいぜい有限個の l の点を除いて, 空間における S の近傍の有限個の点しか含まない. [訳注 5] 以後, x' はそのような除外点 (もしあれば) ではないと仮定する. そうすると 図 $\Gamma_{x'}^{(j)}, \Gamma_{x'}^{(k)}$ は決して共通の弧を持たない. $\Gamma_{x'}$ はそのような性質を持つ ν 個の点集合 $\Gamma_{x'}^{(j)}$ の和である.

s を $\Gamma_{x'}$ の任意の弧の一つとし, s' を s の適当な弧とする. 弧 s' はただ一つの図 $\Gamma_{x'}^{(j)}$ に, 視点を定めるため, 例えば $\Gamma_{x'}^{(1)}$ に含まれ, 更に $\partial X_1(x', y)/\partial y$ は s' 上で零にならないと仮定する. s' は適当に取ったのであるから, そのような条件は常に満たされる. そうすると s' の一方側だけで $|X_1(x', y)| < 1$ となる. 他の X_j にたいしては σ の定義自身から $|X_j(x', y)| \leq 1$ である. この等号は, 上に見たことから, 高々有限個の点でしか起こらない. したがって s' 上では $|X_j(x', y)| < 1$ ($j = 2, \dots, \nu$) と仮定する. そうすると弧 s' は開集合

$$(3) \quad |X_j(x', y)| < 1, \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

の境界にある. さらに $\partial X_1(x', y)/\partial y \neq 0$ かつ $|X_j| < 1$ ($j = 2, \dots, \nu$) だから, $x = x', y \in s'$ で与えられる空間の弧は超曲面 $|X_1| = 1$ の通常部分にあり, しかもその部分は開集合

$$|X_j(x, y)| < 1, \quad (x, y) \in \mathcal{D}_3 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

のただ一つの連結成分の境界にある. 上記の弧は Δ の境界に含まれているから, その連結成分も Δ に含まれていなければならない. したがって, (3) の連結成分の境界で, 弧 s' を含むものは完全に $\Gamma_{x'}$ に含まれている. ここで s' は $\Gamma_{x'}$ の任

意の弧の一部分である。したがって 図 $\Gamma_{x'}$ は閉曲線 (または点) から成っている。 [訳注 6]

($\Gamma_{x'}$) を y 平面の $\Gamma_{x'}$ で囲われた部分とする。今我々の見たことは Δ の $x = x'$ による切り口の y 平面への射影は ($\Gamma_{x'}$) で与えられる ということである。そしてそれは l のすべての x' で (例外点であろうとなかろうと) そうでなければならない。

さて, (ξ, η) は S の内点であったから, $[(\gamma), (\gamma')]$ を十分 (ξ, η) の近くに取り, すべての ($\Gamma_{x'}$) ($x' \in (\gamma)$) が (γ') を含み, 函数 $\varphi(x, y)$, $R(x_0, y; x_0, y_0)$ が集合

$$y \in (\Gamma_{x'}), \quad x_0 \in (\gamma), \quad y_0 \in (\Gamma_{x'})$$

の近傍で正則であるようにする。そして (x_0, y_0) を L 以外の $[(\gamma), (\gamma')]$ の任意の点とし, x' を l の (高々有限個の) 除外点以外の任意の点とする。そうすると $x = x_0$, $y = y_0$ では $R = 1$ なので, Cauchy の定理により,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{x'}} \frac{R(x_0, y; x_0, y_0)}{(x' - x_0)(y - y_0)} \varphi(x_0, y) dy = \frac{\varphi(x_0, y_0)}{x' - x_0}$$

となる。積分は正の方向に取る。このことから, $\partial(x_1, \theta_j)/\partial(u, v) > 0$ なので,

$$I_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(x_0, y_0)}{x - x_0} dx^{20}$$

となる。積分は正の方向に取る。したがって積分 $I(x_0, y_0)$ は Δ_3 に対する当初の問題の解である。

4. 擬凸状領域の場合。3節の積分(1)を修正することが問題である。積分曲面 σ_j を見よう。各 σ_j は解析的曲面 (連結または非連結) Σ'_j

$$x_2 = 0, \quad |X_j(x, y)| = 1, \\ |X_p(x, y)| \leq 1 \quad (p = 1, 2, \dots, \nu)$$

上にある。明らかに, Σ'_j は正則域より成る開集合の減少列の極限である。 V_j をその列の一つの集合とする。 V_j は σ_j を完全内部に含んでいる。

j を $(j = 1, 2, \dots, \nu)$ の任意の一つとして, $(x, y) \in V_j, (x_0, y_0) \in \mathcal{D}_1$ における有理型函数 $\Phi_j(x, y; x_0, y_0)$ であって, $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_3$ のときは ψ_j と同じ極を持ち, $(x_0, y_0) \notin \mathcal{D}_3$ のときは正則となるものを求めよう。 開集合 (V_j, \mathcal{D}_1) (すなわち $(x, y) \in V_j, (x_0, y_0) \in \mathcal{D}_1$) は正則域よりなる。函数 $\psi_j(x, y; x_0, y_0)$ の極については, (x, y) が Σ'_j に十分近い V_j にある限り, 仮定 1 によって, 集合 $(x_0, y_0) \in L_1, (x_0, y_0) \in L_2$ の近傍に極を持たない。したがって V_j を Σ'_j の十分近くを取れば, 望みの函数は得られる。(第 II 論文の定理 II) [訳注.]

²⁰このためにはパラメータとして (x_1, θ_j) を取り, 重積分 I_2 を逐次積分と考えればよい。これが可能なことは明らかである。 [訳注 7]

Cousin 分布として, $(x_0, y_0) \in \mathfrak{D}_3$ では ψ_j , 他では 1 を与えて Cousin 第 1 問題を解けばよい.]

函数 $\Phi_j - \Psi_j$ は (V_j, \mathfrak{D}_3) で正則であり, この \mathfrak{D}_3 は, \mathfrak{D}_1 における正則函数に関して凸状である. このことは \mathfrak{D}_3 の形を考慮すれば 2 節で示された Cartan-Thullen の定理により分かる. それで, 正の数 ε と, それぞれ V_j および \mathfrak{D}_1 の完全内部にある開集合 V'_j および \mathfrak{D}'_1 を与え, (V_j, \mathfrak{D}_1) における正則函数 $\Psi_j(x, y; x_0, y_0)$ を, (V'_j, \mathfrak{D}'_1) で

$$|\Phi_j - \psi_j - \Psi_j| < \varepsilon$$

となるように求める. (第 II 論文の 5 節) (V'_j, \mathfrak{D}'_1) は閉集合 (σ_j, S) を含むように取る.

このように, \mathfrak{D}_1 に関して函数 Φ_j, Ψ_j が得られる. それで

$$A_j = \Phi_j - \Psi_j - \psi_j$$

と置く. 同様に \mathfrak{D}_2 に関する函数 B_j ($j = 1, 2, \dots, \nu$) を求め, 積分

$$(1) \quad J_1(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\sigma_j} (\psi_j + A_j) \varphi(x, y) dx dy$$

$$(2) \quad J_2(x_0, y_0) = \frac{-1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\sigma_j} (\psi_j + B_j) \varphi(x, y) dx dy$$

を考える. ここで $\varphi(x, y)$ は S の近傍における任意の正則函数を表す.

$(x, y) \in \sigma_j$ のとき, $\psi_j + A_j$ は, $\Phi_j - \Psi_j$ に等しので, Δ_1 では x_0, y_0 に関して正則である. したがって, $J_1(x_0, y_0)$ は Δ_1 で正則である. 同様に $J_2(x_0, y_0)$ は Δ_2 で正則である.

函数 $J_1(x_0, y_0) - J_2(x_0, y_0)$ は Δ 内の L のすべての点で正則に留まる. 何故なら 3 節 (5 頁) の積分 (1) で与えられた函数はそうであり, 函数 A_j, B_j は (V_j, \mathfrak{D}_3) で正則なのである. 3 節の積分の性質から, 恒等的

$$J_1(x_0, y_0) - J_2(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\sigma_j} (A_j - B_j) \varphi(x, y) dx dy$$

となる. さらにこの関係式自体から, 函数 $J_1 - J_2$ は S の近傍でも正則である. それで

$$f(x_0, y_0) = J_1(x_0, y_0) - J_2(x_0, y_0)$$

と置く.

さて, この式で, f を与えられた函数とし φ を未知函数と考える. [訳注. この一行がこの論文の核心である.] そうすると

$$K_j = \frac{A_j - B_j}{4\pi^2}$$

と置いて,

$$(3) \quad \varphi(x_0, y_0) = \lambda \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\sigma_j} K_j(x, y; x_0, y_0) \varphi(x, y) dx dy + f(x_0, y_0)$$

なる形の積分方程式が得られる. 実際は $\lambda = 1$ である. 解としては S で正則なものを求めたい²¹. もしそのような解が求まれば, 当初の問題の解は積分 (1) と (2) によって与えられる. それは自明である. [訳注 8]

ε を十分小さく選んで通常の逐次近似法をこの方程式に応用しよう. 形式的に

$$\varphi(x_0, y_0) = \varphi_0(x_0, y_0) + \lambda \varphi_1(x_0, y_0) + \cdots + \lambda^p \varphi_p(x_0, y_0) + \cdots$$

と置く. ここで λ は複素パラメータと考える. この級数を方程式 (3) に代入し, 形式的な方法で λ の次数が等しい二つの項の係数を等しいと置いて, 関係式

$$\varphi_0 = f_0, \quad \varphi_1 = K(\varphi_0), \quad \dots, \quad \varphi_{p+1} = K(\varphi_p), \quad \dots$$

が得られる. ここで

$$K[\varphi_p(x_0, y_0)] = \sum_j \int_{\sigma_j} K_j(x, y; x_0, y_0) \varphi_p(x, y) dx dy$$

である. $f_0(x_0, y_0)$ は S の近傍で正則であり, さらに $(x, y) \in \sigma_j$ のとき $K_j(x, y; x_0, y_0)$ も S の近傍で正則なので, このようにして逐次求められる関数 $\varphi_p(x_0, y_0)$ は S の近傍で正則である. それで形式的な級数にこれらの正則関数 φ_p を代入して $(x_0, y_0) \in S$ の近傍における正則関数の級数が得られる. もしこの級数が ε' をある正の数として $|\lambda| < 1 + \varepsilon'$ にたいして, S の近傍で一様収束するなら, $\varphi(x_0, y_0)$ は $|\lambda| \leq 1$ にたいし, 方程式 (3) を満たす. これは明らかである. それで残された問題はこの収束を調べることだけである.

\mathfrak{D}'_3 の完全内部に含まれる開集合で, S を含み, そこで f が正則であるようなものを U とする. そのような U は確かに存在する. M_p を $|\varphi_p|$ の U における上限とし,

$$N = \sum_j \int_{\sigma_j} |dx dy|$$

とする. そうするとすべての j にたいし, (V_j, \mathfrak{D}'_3) で

$$|A_j| < \varepsilon, \quad |B_j| < \varepsilon$$

だから, U において

$$|K[\varphi_p(x_0, y_0)]| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi^2} N M_p$$

²¹実際には, σ 上の正則解が得られれば十分である. なぜなら, そうであれば F. Severi の定理により, 解は S で正則になる.

となる。したがって

$$M_p \leq \left(\frac{\varepsilon N}{2\pi^2} \right)^p M_0$$

である。ここで

$$\varepsilon < \frac{2\pi^2}{N}$$

と置く。そうすると、問題の級数は ε' を十分小さく取るとき、 $|\lambda| < 1 + \varepsilon'$ に対して U で一様収束する。かくして次の命題が得られた。

1 節の問題は 2 節の領域 Δ にたいして解ける。

II. 中間結果.

5. 予備命題. この章ではよく知られた H. Cartan-P. Thullen²²の仕事と, H. Behnke-K. Stein の最近の定理を使って得られた結果を整理する。それらの仕事に対する簡単な注意を与えることから始める。

H. Behnke-K. Stein の定理. 複素多変数の空間において, 正則域の増大列が与えられたとき, その列の極限もまた正則域である.²³

この定理は厳密には有界領域に対してしか証明されていないと思う。それでその極限 \mathcal{D} が有界でない場合を考える。中心として \mathcal{D} の点 M を取り, 半径 p の多円筒 (γ_p) を描く。 p は任意の正の数である。 \mathcal{D} の (γ_p) 内の部分の M を含む連結成分を \mathcal{D}_p と表す。領域 \mathcal{D}_p の列は \mathcal{D} に収束する。さて, 各 \mathcal{D}_p は有界であり \mathcal{D} と同じ性質を持つから正則域である。 [訳注. H. Behnke-K. Stein の定理.] したがって, \mathcal{D}_p の形を考慮すれば, H. Cartan-P. Thullen の定理により \mathcal{D}_p は \mathcal{D}_{p+q} における正則函数に関して凸状である。ここで q は任意の正の数である。 [訳注. \mathcal{D}_p は正則域 \mathcal{D}_{p+q} と多円筒 (γ_p) の共通部分の M を含む連結成分である.] したがって, 前に述べたように, \mathcal{D}_p で正則な函数が与えられたとき, \mathcal{D}_p の完全内部に与えられた任意の領域で, それにいくらでも近い \mathcal{D}_{p+q} での正則函数を見つけることができる。(第 II 論文の 5 節)。そうすると, 有界領域の場合と同様の議論で²⁴, \mathcal{D} での正則函数を使ってその函数を近似することができる。すなわち \mathcal{D} は \mathcal{D} で正則な函数に関して凸状である。したがって, H. Cartan-P. Thullen の定理により, \mathcal{D} は正則域である。 [訳注 9]

空間 (x, y) における正則域 \mathcal{D} と, その領域における正則函数 χ が与えられたとし, 任意の正の数 r にたいし, \mathcal{D} に関する境界距離²⁵が $r|\chi|$ より大きいような点の集合を考え, それを $\mathcal{D}(\chi, r)$ と表す。このとき,

²²Math. Ann. 1932.

²³(単葉) 有界領域については, H. Behnke-K. Stein, Math. Ann. 1938 を見よ。

²⁴先の論文の補助定理 1 を見よ。

²⁵すなわち, P を中心とし, 半径 ρ の等径双円筒が \mathcal{D} に含まれるような ρ の上限。(この言葉の連結かそうでないかによらず, 開集合にたいして使う。)

1° $\mathfrak{D}(\chi, r)$ は正則域である。

2° もし $1/\chi$ が \mathfrak{D} 内で有界なら、 $\mathfrak{D}(\chi, r)$ は \mathfrak{D} の完全内部に含まれ、次の性質 (α) を持つ。すなわち、 $\mathfrak{D}(\chi, r)$ を完全内部に含み、 $\mathfrak{D}(\chi, r)$ にいくらかでも近い開集合で、 \mathfrak{D} における正則関数に関して凸状なものを見つけることができる。²⁶

1°. これは H. Cartan-P. Thullen の定理から容易に導かれる。最初の部分の証明から始める。 \mathfrak{D} は正則域であるから、 \mathfrak{D} を固有の存在域とするような函数 $\Phi(x, y)$ が存在する。その函数を使って函数族

$$\Phi[x + \rho\chi(x, y)e^{i\theta}, y + \rho'\chi(x, y)e^{i\theta'}]$$

を作る。ここで $\rho, \rho', \theta, \theta'$ は実パラメータで、 $|\rho| \leq r, |\rho'| \leq r$ である。集合 $\mathfrak{D}(\chi, r)$ は (もし存在すれば) 開集合である。 P をその集合の任意の点とし、 P を中心とする半径 $r|\chi(P)|$ の双円筒 (γ) を描く。この族の函数が中心 P で取る値の集合は (γ) 内で $\Phi(x, y)$ が取る値の集合と一致する。このことから、この函数族の固有の正則域 (連結または非連結の) [訳注. この函数族に属する函数のすべてが正則であるような領域の最大のもの.] は $\mathfrak{D}(\chi, r)$ であることがわかる。したがって Cartan-Thullen により $\mathfrak{D}(\chi, r)$ は正則域よりなる。

2°. $1/\chi$ が \mathfrak{D} で正則で有界であると仮定する。そうすると、 \mathfrak{D} は有界であるから、 $\mathfrak{D}(\chi, r)$ は \mathfrak{D} の完全内部に含まれる。 F を \mathfrak{D} の完全内部に含まれる閉集合で、 $\mathfrak{D}(\chi, r)$ を含み、性質 (α) を持つものとする。 ρ を正の数とすれば、Cartan-Thullen により、すべての $\mathfrak{D}(1, \rho)$ は性質 (α) を持つ。したがってそのような F は確かに存在する。 [訳注. ρ を十分小さく取ればよい.] そのような F 全体の共通部分 F_0 を考える。 F_0 は $\mathfrak{D}(\chi, r)$ を含む閉集合である。 F の有限個の共通部分 F_1 は常に F と同じ性格を持つ。また F_0 にいくらかでも近い F_1 を見つけることができる。したがって F_0 は性質 (α) を持つ。それで F_0 が $\mathfrak{D}(\chi, r)$ とその集積点よりなることを示せばよい。それでそうではないと仮定する。 r' を F_0 のすべての点が $\mathfrak{D}(\chi, r')$ またはその集積点からなるようなものの最大のものとする。 $r' < r$ である。 $\mathfrak{D}(\chi, r')$ は $\mathfrak{D}(\chi, r)$ を完全内部に含む。 M を F_0 の点で M の \mathfrak{D} に関する境界距離が $r'|\chi(M)|$ であるような点とする。 r'' を r' より小さく、ただし r' の十分近くに取り、 M の $\mathfrak{D}(\chi, r'')$ に関する境界距離が $\mathfrak{D}(\chi, r)$ の任意の点の $\mathfrak{D}(\chi, r'')$ に関する境界距離の半分より小さいとする。 $\mathfrak{D}(\chi, r'')$ は正則域であるから、Cartan-Thullen の定理により $\mathfrak{D}(\chi, r'')$ で正則な函数 $f(x, y)$ であって、

$$|f(M)| > 1, \quad |f(x, y)| < 1 \quad \mathfrak{D}(\chi, r) \text{ において}$$

となるものが存在しなければならない。そうすると F_0 は性質 (α) を持つから、しばしば用いた命題により \mathfrak{D} における正則函数 $\varphi(x, y)$ で $\mathfrak{D}(\chi, r)$ の近

²⁶二つの正則函数 φ と ψ を考え、双円筒 $|x - x_0| < r|\varphi(x_0, y_0)|, |y - y_0| < r|\psi(x_0, y_0)|$ を使って $\mathfrak{D}(\varphi, \psi, r)$ [訳注. この双円筒が \mathfrak{D} に含まれるような点 (x_0, y_0) の全体] を考えても、同じ結果が得られる。

傍のすべての点にたいして

$$|\varphi(x, y)| < |\varphi(M)|$$

となるものを見つけることができる。これは F_0 の定義に反する。C.Q.F.D.

$\mathfrak{D}(1, r)$ を $\mathfrak{D}^{(r)}$ と表すことにする。 $\mathfrak{D}^{(r)}$ は \mathfrak{D} に関する境界距離が r より大きい \mathfrak{D} の点全体の集合である。

6. 仮定の整備. 仮定を整備することから始めよう。新たに空間 (x, y) において原点を含む 有界 な領域 \mathfrak{D} と、それぞれ

$$x_2 = 0, \quad x_2 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad a_1 < 0 < a_2$$

なる形の三つの平行な超平面 L, L_1, L_2 を考え、それらの各々は \mathfrak{D} を分断しているとする。 \mathfrak{D} の部分で L_1 より上の部分、 L_2 より下の部分および L_1 と L_2 の間の部分をそれぞれ $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ および \mathfrak{D}_3 と表し、開集合 \mathfrak{D}_1 と \mathfrak{D}_2 は正則域よりなる と仮定する。これだけの仮定から再出発する。

まず,

$$\chi_1 = e^{-ix}, \quad \chi_2 = e^{ix}$$

と置いて、 \mathfrak{D} 内に集合

$$A = \mathfrak{D}(\chi_1, \rho), \quad B = \mathfrak{D}(\chi_2, \rho), \quad C = \mathfrak{D}^{(\rho)}$$

を考える。 ρ は後に述べる多くの条件を満たす十分小さい正の数である。最初に χ_1 と χ_2 は決して零にならないことを注意しておく。 x'_2 を定数とし、超平面 $x = x'_2$ 上にある A, B, C の部分をそれぞれ $(a), (b), (c)$ と表す。

1° もし $x'_2 = 0$ なら、 $|\chi_1| = |\chi_2| = 1$ であるから、

$$(a) = (b) = (c)$$

である。

2° もし $x'_2 > 0$ なら、 $|\chi_1| > 1 > |\chi_2|$, $(\rho|\chi_1| > \rho > \rho|\chi_2|)$ であるから、

$$(a) \leq (c) \leq (b)$$

である。より詳しくは、もし (a) が存在すれば (c) も実際に存在して (a) を完全内部に含み、もし (c) が存在すれば (b) も実際に存在して (c) を完全内部に含む。[訳注. 超平面上の集合として.]

3° もし $x'_2 < 0$ なら、同様に

$$(b) \leq (c) \leq (a)$$

となる。

P, Q を固定された \mathfrak{D} の二点とし, 前者は L_1 より下に, 後者は L_2 より上にあるとする. そして ρ を十分小さく取り, 開集合 A, B の共通部分は P, Q および原点を同時に含む連結成分を持つとする. そのような連結成分を G とする. 二つの実数 b_1, b_2 を

$$a_1 < b_1 < 0 < b_2 < a_2$$

となるように取り, 超平面 $x_2 = b_1, x_2 = b_2$ をそれぞれ L'_1 および L'_2 と表す. 2 節の \mathfrak{D}, L, L_1 および L_2 に対応するものはこの領域 G と L, L_1, L_2 である. G の L'_1 より上の部分, L'_2 より下の部分, および L'_1 と L'_2 の間の部分をそれぞれ G_1, G_2 および G_3 と表す. ρ が限りなく 0 に近づけば G は限りなく \mathfrak{D} に近づく. [訳注 10]

まず集合 G_1 と G_2 は共に正則域であることを示すことが問題である. A の L'_1 より上の部分を A_1 とし, B の L'_2 より下の部分を B_2 とする. D_1 は正則域よりなるのであるから, A_1 もそうである. (ρ は十分小さいと仮定されている.) [訳注 11] 問題の集合 G_1 はこの A_1 に含まれている. G_1 の境界を見よう. それは A_1 の境界と B_2 の境界から成っている. M を G_1 の境界の後者の部分にある任意の点とする. A と B の関係から M は L より下または L 上になければならない. 上に述べた命題により, \mathfrak{D}_2 は正則域だから, B_2 は \mathfrak{D}_2 における正則関数に関して性質 (α) を持つ. (ρ は十分小さいと仮定されている.) [訳注 12] F を G_1 に含まれる任意の閉集合, L''_2 を L と平行で L と L'_2 の間にある超平面とする. この条件のもとで, \mathfrak{D}_2 における正則関数 $f(x, y)$ であって,

$$f(M) = 1$$

であり, さらに F の L''_2 より下にある部分および A_1 内の L''_2 の近傍において,

$$|f(x, y)| < 1$$

となるようなものを見つけることができる. ここで A_1 における有理型関数 $\Phi(x, y)$ であって, L''_2 より下の部分で極

$$\frac{1}{f(x, y) - 1}$$

を持ち, 他では正則なものを見つけよう. A_1 は正則域よりなり, 与えられた極は L''_2 の近傍には分布されていないからこのような $\Phi(x, y)$ は確かに存在する. この関数 Φ は M で極を持ち, F のすべての点で正則である. しかも M は G_1 と B_2 の共通の境界上の任意の点であった. したがって Cartan-Thullen により, 正則域よりなる開集合であって, G_1 に含まれ F を含むものを見つけることができる. そうすると, F は G_1 内の任意の閉集合なのだから, Behnke-Stein の定理により G_1 自身正則域である. G_2 にたいしても同様である. さ

らに集合 G_1 したがって G_2 も正則域よりなる開集合の減少列の極限であることを注意する. その証明は G_1 および G_2 の形より自明である.

正の数 δ を ρ より大きく, ρ に十分近く取り,

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_3^{(\rho)}, \quad \mathfrak{D}'' = \mathfrak{D}_3^{(\delta)} \quad (\rho < \delta)$$

を考える. \mathfrak{D}'' は \mathfrak{D}' の完全内部に含まれる. $C = \mathfrak{D}^{(\rho)}$ であるから, C と \mathfrak{D}' は L'_1 と L'_2 の間およびそれらの超平面の近傍では一致する. (ρ は十分小さいと仮定されている.) [訳注 13] \mathfrak{D}_3 は正則域であるから Cartan-Thullen の定理により, \mathfrak{D}' のすべての境界点にたいし, 小さい双円筒 (γ) と \mathfrak{D}_3 における正則函数 $f(x, y)$ で

$$|f| > 1 \quad (\gamma) \text{ において}, \quad |f| < 1 \quad \mathfrak{D}'' \text{ において}$$

となるものが対応する. Borel-Lebesgue の補題により, \mathfrak{D}' の境界は有限個の (γ) で覆われる.

$$X_j(x, y) \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

をそれらの (γ) に対応する函数 $f(x, y)$ とする. 集合 G_3 は D_3 の完全内部に含まれる. したがって 函数 X_j は G_3 の近傍で正則である.

仮定 1° (2 節) を調べよう.

1° 超平面 L の近傍では G は $C = \mathfrak{D}'$ の一つまたは複数の連結成分よりなる. したがって G と L の交わりの近傍には

$$|X_j(x, y)| \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

を満たす点は存在しない.

2° G の L'_2 上の部分は C の L'_2 上の部分の完全内部に含まれており, したがって \mathfrak{D}' の L'_2 上の部分の完全内部に含まれている. しだがって, もし δ が ρ の十分近くに取られているなら, ε を十分小さい正の数とすると, ν 個の条件

$$|X_j(x, y)| > 1 - \varepsilon$$

を満たす点は L'_1, L'_2 の G 内の部分の近傍には存在しない.

3° G から条件

$$|X_j(x, y)| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

を満たさない G_3 の点を取り除けば, 開集合が得られる. この集合は δ が ρ に限りなく近づけば, G に限りなく近づく. それで δ を ρ の十分近くにとって, その連結成分が 2 点 P, Q および原点を同じ一つの連結成分に含まれるようにして, その連結成分を Δ と名付けることにする. このようにして, G 内に条件 1 を満たし, G にいくらでも近い領域 Δ が作られた.

7. 仮定 2° へ移る. 第 V 論文において次のことを見た. “空間 (x, y) における正則域 V にたいし, 正の数 ε と V の完全内部に含まれる領域 V_0 が与えられたとき, (V_0, V_0) における, 複素変数 $x, y; x_0, y_0$ に関する正則函数 R であって, $x = x_0, y = y_0$ では 1 になり, さらに次の性質を持つ正則函数が見つけられる. すなわち, V におけるすべての正則函数 $f(x, y)$ にたいして, 不等式 $|f - \varphi| < \varepsilon$ を満たす正則函数 $\varphi(x, y)$ で, 恒等的に

$$(1) \quad (\varphi - \varphi_0)R = (x - x_0)P + (y - y_0)Q$$

となるものが対応する. ここで φ_0 は $\varphi(x_0, y_0)$ を表し, P, Q は (V_0, V_0) における, 複素変数 $x, y; x_0, y_0$ に関する正則函数を表す.”

この命題を, V として正則域よりなる \mathfrak{D}_3 を取り, V_0 として $\mathfrak{D}' (= \mathfrak{D}_3^{(\rho)})$ を完全内部に含む開集合を取って, \mathfrak{D} に応用しよう. ρ は十分小さく取られているから, V_0 は G_3 を完全内部に含む. V_0 にたいして性質 (1) を持つ正則函数 $\varphi(x, y)$ の全体よりなる族を考える. そして 6 節の函数 $f(x, y)$ の族の代わりにこの族から再出発する. そうすると同じ道を辿って仮定 1° と 2° を同時に満たす新しい領域 Δ が得られる.

仮定 3° に注目しよう.

1° 上記のことを, 偏微分 $\partial\varphi/\partial y$ が恒等的に零ではない函数 $\varphi(x, y)$ の族から出発して, することもできる. そうすると二つの条件 1°, 2° を満たし, ν 個の偏微分 $\partial X_j/\partial y$ が恒等的に零ではない領域 Δ が得られる. 我々が考えようとしているのは常にこのような領域についてである.

2° G_3 において ν 個の解析的な集合 Σ_j

$$x_2 = 0, \quad |X_j(x, y)| = 1$$

を考える. 偏微分 $\partial X_j/\partial y$ についての Δ の性質から, Σ_j は高々 2 次元である. ここで Δ にたいし, 解析的な集合 Σ_j および Σ_k ($j \neq k, j, k = 1, 2, \dots, \nu$) の交わりは 1 次元であるという条件を満たすようにしよう. $1/2$ より大きい 2 つの正の数 r, r' を取り, G_3 内に解析的な集合 $T_{j,k}$

$$x_2 = 0, \quad |X_j(x, y)| = r, \quad |X_k(x, y)| = r'$$

を考える. G_3 内で $x_2 = 0, |X_j(x, y)| = r$ で定義された解析的な集合は明らかに高々 2 次元である. したがって, r を固定して考えたとき, 高々有限個の r' を除いて, 集合体 $T_{j,k}$ は高々 1 次元である. したがって今の場合, α_j を正の数として,

$$(2) \quad Y_j = \alpha_j X_j \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

なる形の適当な変形をすれば十分である. 実際, 新しい条件 [訳注. Σ_j と Σ_k の交わりが 1 次元であるという条件] にたいし $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ を順次高々有

限個の値を避けて選べばよい。△ にたいする前の 3 条件は α_j を十分 1 の近くに取ればよい。

3° 次は △ において、 $\partial X_j / \partial y$ が任意の j にたいして、 Σ_j 上の高々有限個の点以外では零にならないようにする問題である。解析面 $\partial X_j / \partial y = 0$ は、 ξ を実軸上の点として、 $x = \xi$ の形の解析平面を含むかもしれない。[訳注 14] G_3 内でそれを避けるためには、 β を十分小さい適当な純虚数として、 $X_j(x, y)$ の代わりに

$$X_j(x + \beta, y)$$

を取ればよい。この変形の影響について言えば、△ は最後の条件 (すなわち 2°) を除いてすべての条件を満たすことは容易に分かる。これに反し、変形 (2) は今の条件にたいしていかなる影響も与えないから、順序を逆にして、二つの変形を順次行い、二条件と他の条件も同時に満たすようにできる。そうすれば G_3 の中で

$$x_2 = 0, \quad \frac{\partial X_j}{\partial y} = 0$$

によって定義される解析的な集合は、すべての j にたいして高々 1 次元である。したがって、 r を $1/2$ より大きい正の数にとれば、それと $|X_j| = r$ との交わりは、有限個の r を除いて高々有限個の点よりなる。結論として、最後の二つの条件 (2° と 3°) は (2) の形の適当な変形により、△ が他の条件を満たしながら同時に成り立つようにできる。これらを纏めて次の命題が得られる。

与えられた領域 \mathcal{D} のいくら近くにも、2 節で示した性質を持つ領域 △ を見つけることができる。

8. 連結した正則域の改作。△₁ に注目しよう。それは G_1 内の開集合であり、 G_1 は正則域よりなる。△₁ の境界点は G_1 の境界か、 L かまたは ν 個の超平面 $|X_j(x, y)| = 1$ に含まれている。この第 3 の場合を考える。M をそのような △₁ の任意の境界点とする。視点を定めるため、 $|X_1(x, y)| = 1$ と仮定する。X₁(x, y) は G_3 の近傍で正則である。G₁ 内における有理型函数 $\Phi(x, y)$ で G_3 では極

$$g(x, y) = \frac{1}{X_1(x, y) - X_1(M)}$$

を持ち、他では正則なものを見つけよう。△ の条件 1 により、 $g(x, y)$ は L'_2 の G 内の部分の任意の点で正則だから、 $\Phi(x, y)$ は存在する。したがって、Cartan-Thullen により、△₁ は正則域からなる。さらに G_1 は正則域からなる開集合によって外部から近似される。(6 節) したがって △₁ を完全内部に含む正則域で △₁ にいくらでも近い開集合が存在する ことが同様に分かる。△₂ にたいしても同じである。

(ρ) を △ の近傍で与えられた極とする。そうすると △₁ の近傍で極 (ρ) を持つ有理型函数 $\Phi_1(x, y)$ が存在する。同様に $\Phi_2(x, y)$ を △₂ におけるそれと

する. $f = \Phi_1 - \Phi_2$ と置く. f は Δ_1, Δ_2 の共通の境界 S の近傍で正則な函数である. この函数に対応して Δ に関する 1 章の問題の解 $F_1(x, y), F_2(x, y)$ が見つかる. そこで

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_1 - F_1 & (x, y) \in \Delta_1 \\ \Phi_2 - F_2 & (x, y) \in \Delta_2 \end{cases}$$

と置くと, $\Phi(x, y)$ は Δ において極 (φ) を持つ有理型函数になる. このようにして Δ の近傍に極が与えられたとき, Δ においてその極を持つ有理型函数が見つかることが分かった.

このことから Δ が正則域であることを見よう. Δ の境界は 3 つの部分より成る.

1° M を Δ の境界点で, ν 個の函数 $X_j(x, y)$ の少なくとも一つの絶対値が 1 を取るとする. 視点を定めるため, $|X_1(M)| = 1$ とする. Δ_0 を Δ の完全内部に与えられた領域とする. Δ の点 N を M の十分近くに取り, 解析面 $X_1(x, y) = X_1(N)$ が G_3 の近傍で定義されており, Δ_0 を通らず, L'_1, L'_2 の近くにはこないとする. Δ の条件 1 により, N は確かに存在する. そうすると Δ における有理型函数 $\Phi(x, y)$ で, Δ_3 で極

$$\frac{1}{X_1(x, y) - X_1(N)}$$

を持ち, 他では正則なものが見つかる. $\Phi(x, y)$ は Δ_0 では正則であり, N で極を持つ. N は M のある近傍内の Δ の点で, それ以外は任意である.

2° M' を Δ と G_1 の共通の境界の任意の点とする. G_1 は正則域からなる開集合によって外から近似されるから, Δ の条件 1 を考慮して, Cartan-Thullen により, Δ 内の点 N' を M' の十分近くを取れば, G_1 の近傍における正則函数 $f(x, y)$ で,

$$f(N') = 1$$

であり, さらに Δ_0 の L より上の部分および L の Δ 内にある部分の近傍で

$$|f(x, y)| < 1$$

となるものを見つけることができる. したがって Δ における有理型函数 $\Psi(x, y)$ であって, L より上の部分においては極

$$\frac{1}{f(x, y) - 1}$$

を持ち, 他で正則なものが存在する. $\Psi(x, y)$ は Δ_0 で正則であり, N' では極を持つ. N' は M' のある近傍内の Δ の点で, それ以外は任意である.

3° Δ と G_2 の共通の境界にたいしても同様である.

したがって Cartan-Thullen により, Δ 内に Δ_0 を含む正則域からなる開集合が存在する. ここで Δ_0 は Δ 内の任意の領域である. したがって

Behnke-Stein により Δ は正則域である。領域 \mathfrak{D} にたいしても同様である。かくして次の命題が得られた。

有界領域 \mathfrak{D} と $x_2 = a_1, x_2 = a_2, (a_1 < a_2)$ の形の二つの超平面が与えられたとする。ここで x_2 は x の虚部で同じある。このとき、もし \mathfrak{D} の部分の $x_2 = a_1$ より上および $x_2 = a_2$ より下が共に正則域なら \mathfrak{D} も正則域である。

9. H. Cartan の意味の擬凸状領域。しばしば述べたように、我々の理論に大域的な凸状性を導入したのは H. Cartan である。ところがその同じ論文²⁷の中で次のような形の領域を考えている。すなわち、 \mathfrak{D} を問題の領域とするとき、 \mathfrak{D} の任意の境界点 (有限の) のまわりの十分小さい超球を描けば、 \mathfrak{D} のその中の部分は正則域からなる。そしてそれを彼は至る所擬凸状であると呼んでいる。それでいま見たばかりのことをこのタイプの領域に適用しよう。

\mathfrak{D} をこのタイプの任意の領域とする。 \mathfrak{D} は有界であると仮定する。平面 x をそれぞれ実軸と虚軸に平行な二組の直線によって同じ形の矩形 ω に分割する。 y 平面もそのような ω' に分割する。前の定義により、空間 (x, y) を十分小さい (ω, ω') に分割すれば、 (ω, ω') の任意の一つに十分近いすべての正則域 Δ に対し、 \mathfrak{D} の Δ 内の部分は正則域を成す。したがって前の命題により \mathfrak{D} が正則域であることを見るのは容易である。

\mathfrak{D} が有界でないときは、 \mathfrak{D} の点 M を中心とした半径 p の超球 (γ_p) を描く。 p は任意の正の整数である。 \mathfrak{D}_p を \mathfrak{D} の (γ_p) 内の部分の M を含む連結成分とする。前に言ったことから、 \mathfrak{D}_p は正則域である。そして、正則域の列 $\mathfrak{D}_p (p = 1, 2, \dots)$ は \mathfrak{D} に収束する。したがって Behnke-Stein の定理により \mathfrak{D} は正則域である。このようにして次の命題が得られた。

すべての H. Cartan の意味の擬凸状領域は正則域である。

著者は、この結論、したがって証明の本質的な部分は任意個数の複素変数の場合に適用できると信じている。

III. 補足問題

10. はじめに、 \mathfrak{D} を空間 (x, y) の或る領域、 E を \mathfrak{D} の余集合とする。 E が E の任意の境界点 (ξ, η) の近傍で $F. Hartogs$ に負う連続定理を満たし、その性質が (ξ, η) の近傍の 1:1 擬等角写像に関して不変であるとき、 \mathfrak{D} を擬凸状領域と呼ぶ。この第 1 の条件は次のような意味である。もし (ξ, η) の近傍で E が解析平面 $x = \xi$ 上に (ξ, η) 以外の点を持たないなら、すべての与えられた正の数 ρ にたいして、十分小さい正の数 γ が対応し、 $|x' - \xi| < \gamma$

²⁷Bull. Soc. Math. France 1931.

となるすべての x' にたいして (x', y') が E に含まれるような y' が少なくとも一つ $|y - \eta| < \rho$ 内に対応する.²⁸

擬凸状領域の主要な性質は F. Hartogs と E. E. Levi によって研究され、前に引用した G. Julia の論文で非常に組織的な形で述べられている。²⁹

空間 (x, y) において、 $x = x_1 + ix_2$ および $y = y_1 + iy_2$ とし、境界 S が $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ で与えられ、 Δ の内部で $\varphi < 0$ 、外部で $\varphi > 0$ であるような有界な領域 Δ を考える。ここで φ は はっきり定義された (bien définie)³⁰ 実函数であって、 S の近傍では連続であり、2 階まで連続な偏導関数を持つ。この条件のもとで E. E. Levi は Δ が擬凸状であるためには S で $L(\varphi) \geq 0$ となることが必要条件であることを示した。ここで

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right)^2 \right] \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \right) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 \right] \\ &\quad - 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right) \\ &\quad - 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right) \end{aligned}$$

である。これは次の命題からの帰結である。もし S の点 P で $L(\varphi) < 0$ なら、 P を通る解析面で、 P で特異点を持たず、 P の近傍では P を除いて Δ 内に留まるものが存在する。ここで $L(-\varphi) = -L(\varphi)$ であることを注意しておく。

このことから、前章で得られたばかりの結果によって、もし S 上のすべての点で $L(\varphi) > 0$ ならば Δ は正則域であることが導かれる。したがって、Behnke と Stein の定理を考慮して、任意の擬凸状領域がこの性質 ($L(\varphi) > 0$) を持つ領域の列で内部から近似できるかどうかが問題となる。[訳注。Hartogs の逆問題を解くためには]これがこの節で研究しようとしている問題である。

ところで $L(\varphi_1) > 0$ であり、さらに $L(\varphi_2) > 0$ であったとしても $L(\varphi_1 + \varphi_2) > 0$ とは限らない。それでこの問題を研究するために、先ず同じような役割を演じ、函数の和に関して不変であるような別の条件を探そう。

空間 (x, y) において擬凸状領域 \mathfrak{D} を考える。 ξ を定数とし、 $x = \xi$ なる形の解析平面による \mathfrak{D} の切り口の y 平面への射影を $\mathfrak{D}(\xi)$ と表す。 $\mathfrak{D}(\xi)$ は y 平面の開集合である。 $\mathfrak{D}(\xi)$ の点 η から $\mathfrak{D}(\xi)$ の境界までの距離 (通常の) を $R_\eta(\xi)$ と表す。 \mathfrak{D} で定義されたこの函数 $R_y(x)$ は F. Hartogs の正則半径 に相当する。Hartogs は

$$-\log R_y(x)$$

²⁸ この定義は第 IV 論文で与えたものと少し異なるが、それらは同値である。G. Julia の前掲の論文を見よ。

²⁹ Acta Math. 1926 以後しばしばこの論文を引用するだけとする。

³⁰ すなわちすべての点に有限または有限ではない φ の値がただ一つ対応している。

が x に関して劣調和な函数であることを示した. (\log の分枝は実とする.)

ここで劣調和函数の定義について一つの注意をしておこう. A を x 平面の領域とする. A においてはっきり定義された実函数 φ は次の条件を満たすとき A における x に関する 劣調和函数 と言う. 1° $e^{\varphi(x)}$ は A において有限で, 上半連続である. 2° (δ) を A の完全内部に含まれる任意の領域とし, γ を (δ) の境界, $u(x)$ を (δ) における x に関する (すなわち x_1 と x_2 に関する) 調和函数であつて, 境界 γ を込めて連続なものとする. このとき, もし γ で

$$\varphi(x) \leq u(x)$$

であれば, (δ) でもそうである. このように定義された劣調和函数は値 $-\infty$ を取ることができる. 我々は定数 $-\infty$ もここに含まれると考える.³¹

さて, Hartogs 半径 にたいし, さらに この函数はすべての解析平面上で x または y に関して劣調和である ことが分かる. このような性質を持つ函数を研究すると, 微分条件が求めている性質を持つことが分かる. そして上に定式化した問題にたいして, すべての擬凸状領域は新しい性格を持つ領域の列で内部から近似できることが分かる. これで十分である. [訳注 15]

11. 実函数の新しいクラス. 空間 (x, y) において任意の領域 \mathfrak{D} を考える. 擬凸状であつてもなくてもかまわない.

\mathfrak{D} においてはっきり定義された実函数 $\varphi(x, y)$ が次の条件を満たすとき, \mathfrak{D} における x と y に関する擬凸状函数と名付ける. 1° 函数 $e^{\varphi(x, y)}$ は有限であつて, \mathfrak{D} 内で x, y に関して上半連続である. 2° \mathfrak{D} の点を通る任意の解析平面 L を考えるとき, $\varphi(x, y)$ は L の \mathfrak{D} 内の部分で x または y に関して劣調和函数である.

劣調和函数 の性質に対応して, 容易に 擬凸状函数 の次の性質が得られる. ここでは後に使うものだけを挙げておく.

1° $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$ を領域 \mathfrak{D} における二つの擬凸状函数とすれば, それらの和 $\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$ もまたそうである.

2° 同じ条件の下で, $\max(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$ もそうである.

3° 領域 \mathfrak{D} において擬凸状函数の列 $\varphi_n(x, y)$ ($n = 1, 2, \dots$) が与えられたとき, $e^{\varphi_n(x, y)}$ が \mathfrak{D} 内で, 一様に, または減少しながら $e^{\varphi(x, y)}$ に収束すれば $\varphi(x, y)$ は \mathfrak{D} における擬凸状函数である.

\mathfrak{D} を空間 (x, y) における擬凸状領域とし, $R_y(x)$ を \mathfrak{D} に関する Hartogs 半径とする. このとき函数

$$\varphi(x, y) = -\log R_y(x)$$

³¹劣調和函数に関しては, 例えば

F. Riesz, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport avec la théorie du potentiel, I 1926. (Acta Math.)
を見よ.

は \mathfrak{D} における擬凸状函数である. (\log の分枝は実とする.)

証明. $1/R_y(x)$ は \mathfrak{D} においてはつきり定義された函数であって有限である. 上半連続性を調べるために, 先ず \mathfrak{D} を有界とする. (ξ, η) を \mathfrak{D} の任意の点とし, (ξ_p, η_p) ($p = 1, 2, \dots$) を \mathfrak{D} における任意の点列で, (ξ, η) に収束するものとする. さらに α を列 $R_{\eta_p}(\xi_p)$ ($p = 1, 2, \dots$) の極限值の一つとする.

$$(1) \quad \alpha \geq R_{\eta}(\xi)$$

を示そう. Y_p を領域 $\mathfrak{D}(\xi_p)$ の境界点で

$$|Y_p - \eta_p| = R_{\eta_p}(\xi_p)$$

となるものとする. $R_{\eta}(\xi)$ は η_p から有界領域 $\mathfrak{D}(\xi)$ の境界迄の距離だから, このような Y_p は確かに存在する. α は列 $|Y_p - \eta_p|$ の極限の一つであるから, 列 Y_p は

$$|Y_0 - \eta| = \alpha$$

となるような極限点 Y_0 を持たなければならない. 列 (ξ_p, η_p) のすべての点は \mathfrak{D} の境界上にあるのだから, 極限点 (ξ_0, Y_0) もそうである. したがって Y_0 は $\mathfrak{D}(\xi)$ の境界または $\mathfrak{D}(\xi)$ の外にある. このことから関係式 (1) が成り立つ. このようにして $R_y(x)$ は \mathfrak{D} 内で下半連続である.

\mathfrak{D} が有界でないときは, 増大しながら \mathfrak{D} に収束する有界な擬凸状領域の列 \mathfrak{D}_p ($p = 1, 2, \dots$) が存在する. R_p を \mathfrak{D}_p に関する Hartogs 半径とする. 函数 $1/R_p$ は上記のことから \mathfrak{D}_p 内で上半連続である. さらに列 $1/R_p$ は下降列である. したがって $1/R_y(x)$ は \mathfrak{D} で上半連続である.

第 2 の条件を調べよう. \mathfrak{D} の任意の点 P を取る. 簡単のため, これを原点とする. Hartogs により, $\varphi(x, 0)$ は原点の近傍で x に関して劣調和函数である. a を任意の定数として, \mathfrak{D} を写像

$$X = x, \quad Y = y - ax$$

によって空間 (X, Y) の領域 \mathfrak{D}' へ写し, \mathfrak{D}' の Hartogs 半径 $R'_Y(X)$ を考える. 固定された x にたいして $Y = y - ax$ は y 平面の平行移動である. したがって

$$R'_Y(X) = R_y(x)$$

である. \mathfrak{D}' は原点 $X = 0, Y = 0$ を含む擬凸状領域であるから, $-\log R'_0(X)$ は $X = 0$ の近傍で劣調和である. したがって函数 $\varphi(x, ax)$ も $x = 0$ の近傍で劣調和である.

残っているのは $\varphi(0, y)$ を $y = 0$ の近傍で調べることだけである. $R_y(0)$ は点 y から $\mathfrak{D}(0)$ の境界迄の距離を表している. $\mathfrak{D}(0)$ は原点 $y = 0$ を含んでいる. したがって $1/R_y(0)$ は連続である. この函数は $\mathfrak{D}(0)$ が y 平面全体

と一致すれば定数 0 になる. それで $\mathfrak{D}(0)$ は (有限の) 境界点を持つと仮定する. η をそのような点とする. そうすると明らかに

$$\varphi(0, y) = \max[-\log |y - \eta|]$$

となる. ここで記号 \max は $[\]$ 内の値の上限を表し \log の分枝は実である. 函数 $-\log |y - \eta|$ は y に関して調和である. このことから擬凸状函数の性質 2, 3 に対応する劣調和函数の性質から, 容易に $\varphi(0, y)$ が y に関する劣調和函数であることが分かる. C.Q.F.D.

\mathfrak{D} を擬凸状領域, $d(x, y)$ を \mathfrak{D} の点 (x, y) から \mathfrak{D} の境界点までの (通常の) 最短距離とする. 函数 $-\log d(x, y)$ は \mathfrak{D} における擬凸状函数である. (\log の分枝は実とする).

証明. もし有界領域にたいしてこの命題が正しければ, $-\log d(x, y)$ は擬凸状函数の下降列の極限となるから一般の場合も正しい. それで \mathfrak{D} は有界であると仮定する.

$|a|^2 + |b|^2 = 1$ となる 2 つの数 a, b を使って, 次のような変換 T を考える.

$$X = ax - by, \quad Y = \bar{b}x + \bar{a}y$$

ここで \bar{a}, \bar{b} は a, b の共役を表す. \mathfrak{D}' を \mathfrak{D} の T による像とし, $R'_Y(X)$ を \mathfrak{D}' に関する Hartogs 半径 とする. $-\log R'_Y(X)$ は \mathfrak{D}' における X, Y の擬凸状函数である. (\log は実とする). したがって定義そのものから

$$\psi(x, y) = -\log R'_Y(X)$$

は \mathfrak{D} における x, y の擬凸状函数である.

さて, (x', y') を \mathfrak{D} の任意の点, (x'', y'') をその境界点とし, (X', Y') , (X'', Y'') をそれぞれそれらの T による像とする. もし (a, b) を

$$a(x' - x'') = b(y' - y'')$$

となるように選べば

$$X' = X''$$

であるから

$$|Y' - Y''| \geq R'_{Y'}(X')$$

である. したがって

$$-\frac{1}{2} \log[|x' - x''|^2 + |y' - y''|^2] \leq \psi(x', y')$$

となる.

このことから、函数 $-\log d(x, y)$ は \mathcal{D} の内部で一様収束する擬凸状函数の列の極限として表される。したがって性質 3° により $-\log d(x, y)$ は \mathcal{D} で擬凸状である。 C.Q.F.D.

この函数 $-\log d(x, y)$ は特に次の性質を持つ。1° \mathcal{D} が空間 (x, y) と一致しない限り、 \mathcal{D} で連続である。2° 点 (x, y) が任意の仕方で \mathcal{D} の境界へ近づくと、この函数は常に ∞ に収束する。

12. 微分条件. 空間 (x, y) の任意の領域 \mathcal{D} に 2 階まで連続な偏導函数を持つ実数値連続函数 $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ が与えられたとき、 φ が x, y の擬凸状函数であるための条件を求めよう。

\mathcal{D} の任意の点 P を取り、簡単のためにそれを原点とする。解析平面

$$y = ax, \quad a = \alpha + i\beta$$

を考えると、その上で

$$\Phi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

が得られる。ここで

$$y_1 = \alpha x_1 - \beta x_2, \quad y_2 = \beta x_1 + \alpha x_2$$

である。 $\Phi(x_1, x_2)$ は $x = 0$ の近傍で定義されている。そこで

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}$$

を計算しよう。

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}, & D &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}, \\ B &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}, & C &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}, \end{aligned}$$

と置いて、容易に

$$(1) \quad \Delta\Phi = A + 2B\alpha + 2C\beta + D(\alpha^2 + \beta^2)$$

が得られる。ここで A, B, C, D を実定数と考え、 α, β を実パラメータと考えて

$$-\infty < \alpha < +\infty, \quad -\infty < \beta < +\infty$$

にたいして式

$$(2) \quad U(\alpha, \beta) = A + 2B\alpha + 2C\beta + D(\alpha^2 + \beta^2)$$

を考察しよう。先ず、 U の下限 m を計算する。1° $D \leq 0$ のとき、もし $B = C = D = 0$ なら $m = A$ であり、そうでなければ $m = -\infty$ である。2° $D > 0$ のとき、少なくとも一つの (α, β) で $U = m$ となるものが存在し、その (α, β) は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \alpha} &= B + D\alpha = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \beta} &= C + D\beta = 0 \end{aligned}$$

によって与えられる。したがって

$$(3) \quad mD = AD - (B^2 + C^2)$$

である。

次に式 $U(\alpha, \beta)$ が非負であるための条件を調べよう。そのためには先ず $D \geq 0$ でなければならぬ。実際もしそうでなければ、 $m = -\infty$ となる。さらに、1° もし $D = 0$ なら $B = C = 0$ かつ $A \geq 0$ でなければならぬ。2° もし $D > 0$ なら $mD \geq 0$ でなければならぬ。

それを纏めると

$$(4) \quad A \geq 0, \quad D \geq 0, \quad AD - (B^2 + C^2) \geq 0$$

が 必要 条件を与える。

逆に条件 (4) が満たされたとする。そうすると次の 2 つの場合だけが生じる。その一つは $D = 0$ で、そのときは $m = A \geq 0$ が導かれる。他の一つは $D > 0$ で、この時は (3) より $mD \geq 0$ となり、したがって $m \geq 0$ となる。すなわち条件 (4) は十分条件である。

元の問題に戻ろう。 φ を \mathfrak{D} における擬凸状函数とする。 Φ は原点で x に関して劣調和な函数であるから、 $x = 0$ において $\Delta\Phi \geq 0$ でなければならない。しかも $y = ax$ の形のすべての解析平面にたいしてそうである。したがって、今見たことから (4) は \mathfrak{D} の任意の点 P にたいして必要である。

逆に条件 (4) が \mathfrak{D} の任意の点で成り立つと仮定しよう。 \mathfrak{D} の任意の点 P にたいして $\Delta\Phi \geq 0$ なのだから、 φ は P の近傍において、 P を通る $y = ax + b$ の形のすべての解析平面上で劣調和である。条件 (4) は x, y に関して対称であるから $x = ay + b$ の形の解析平面にたいしても同様である。したがって φ は \mathfrak{D} における擬凸状函数である。このようにして次の命題が得られた。

$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ を領域 \mathfrak{D} における 2 階まで連続的な偏導関数を持つ実数値連続函数とする。 φ が \mathfrak{D} において x, y に関して擬凸状函数であるための必要十分条件はそれが \mathfrak{D} で次の条件を満たすことである。³²

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \geq 0,$$

³²この条件はまた φ がすべての正則な解析平面上で劣調和函数であるための必要十分条件でもある。

$$V(\varphi) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right)^2 \geq 0$$

13. 主性質. 引き続き領域 \mathcal{D} における 2 階までの連続な偏導関数を持つ実数値連続関数 φ を考える. そして \mathcal{D} において

$$A > 0, \quad V = AD - (B^2 + C^2) > 0$$

と仮定する. このことから $D > 0$ となる.

P を \mathcal{D} の任意の点とする. 先ず P において

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right)^2 \neq 0$$

であると仮定する. E. E. Levi の $L(\varphi)$ の符号を調べよう.

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2, & d &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right)^2, \\ b &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}, & c &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \end{aligned}$$

と置くと,

$$L(\varphi) = Ad + Da - 2Bb - 2Cc$$

となる. 以下 a, b, c, d と A, B, C, D はそれらの点 P における値を表すと考えておく. 仮定により a, d の内の少なくとも一つは零でない. それで視点を定めるため,

$$d > 0$$

と仮定する. 定義により恒等的に

$$ad - (b^2 + c^2) = 0$$

である. したがって

$$\alpha = \frac{-b}{d}, \quad \beta = \frac{-c}{d},$$

と置くと

$$\frac{L(\varphi)}{d} = A + 2B\alpha + 2C\beta + D(\alpha^2 + \beta^2)$$

が得られる.

12 節の式 $U(\alpha, \beta)$ を見よう. もし $D > 0$ なら, 下限 m は $mD = V$ で得られる. したがって, さらに $V > 0$ なら常に $U(\alpha, \beta) > 0$ であり, したがって $L(\varphi) > 0$ となる.

それで P にたいし, $d > 0$ 且つ $L(\varphi) > 0$ である. E. E. Levi により, $y = f(x)$ という形の解析面であって, P を通り, P の或る近傍では P 以外, その上で $\varphi > \varphi(P)$ となるものが存在する. ここで $f(x)$ は P の x 平面への射影の近傍で正則な函数を表す. 実際には, $f(x)$ は x の 2 次の多項式の範囲で求まる. $a > 0$ の場合も全く同様である.

次に 例外の場合 について考える. P において

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0$$

であると仮定しよう. 簡単のため, P を原点とし $\varphi(P) = 0$ とする.

$$y = ax, \quad a = \alpha + i\beta$$

なる形の解析平面を取り,

$$\Phi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

を考える. ここで

$$y_1 = \alpha x_1 - \beta x_2, \quad y_2 = \beta x_1 + \alpha x_2$$

である. φ は 2 階までの連続な偏導関数を持つから, $x = 0$ の近傍で

$$\Phi = \frac{1}{2}(\mu_1 x_1^2 + 2\mu_2 x_1 x_2 + \mu_3 x_2^2) + (\varepsilon_1 x_1^2 + 2\varepsilon_2 x_1 x_2 + \varepsilon_3 x_2^2)$$

となる. μ_1, μ_2, μ_3 は a によって定まる実定数であり, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ は x_1, x_2 の有限な実数値函数で, x と共に 0 に収束するものである. 解析平面 $y = ax$ が原点の近傍で, 原点以外は $\varphi \leq 0$ の点を通らないようにしたい. [訳注. a を適当に取って.] そのためには原点を中心とする y 平面の十分小さい円の中で中心以外は $\Phi > 0$ となればよい. そしてそのためには

$$(1) \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_1 \mu_3 - \mu_2^2 > 0$$

であれば十分である. 単純な計算によって

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} \alpha^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \beta^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} \alpha \beta + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} \alpha + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} \beta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \\ \mu_3 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \alpha^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} \beta^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} \alpha \beta + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \alpha - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \beta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}, \\ \mu_2 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} (\alpha^2 - \beta^2) - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \right) \alpha \beta + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_1} \right) \alpha \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2} \right) \beta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned}$$

が得られる. ここで偏導関数はすべて原点における値を表している.

(α, β) を直交座標の取られたカーテシアン平面の点と考える。そうすると方程式 $\mu_2 = 0$ の形にしたがって二つの場合に分けられる。その一つは

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}$$

となる場合であり、このときは $D > 0$ であるから

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} > 0$$

となる。したがってこの場合は α を十分大きく取れば $(\alpha, 0)$ にたいして条件 (1) は満たされる。それで

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \right)^2 + \left(4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} \right)^2 > 0$$

と仮定する。この場合、方程式 $\mu_2 = 0$ は双曲線またはその極限として互いに交わる 2 本の (実) 直線を表す。方程式 $\mu_1 = 0$, $\mu_3 = 0$ については $\partial \varphi^2 / \partial y_1^2$ および $\partial \varphi^2 / \partial y_2^2$ は同時には零になり得ないから、それらは実際に 2 次曲線である。先ず、

$$\mu_1 + \mu_3 = D(\alpha^2 + \beta^2) + 2B\alpha + 2C\beta + A$$

であることが分かり、したがって

$$(3) \quad \mu_1 + \mu_3 > 0$$

である。そこで、また視点を定めるため、 $\mu_2 = 0$ が双曲線であると仮定する。点 (α, β) を双曲線の一つの分枝に沿って動かし、 μ_1 の符号を見る。もし μ_1 がある点 M でその符号を変えれば、(3) によって M で $\mu_2 = 0$ 且つ $\mu_3 > 0$ であるから、条件 (1) は M の近傍の或る点で満たされる。 μ_3 の符号についても同様であり、さらに $\mu_2 = 0$ が二つの直線の組を表しているときも同様である。それで $\mu_2 = 0$ が双曲線を表しているときは、その各分枝の上で μ_1 と μ_3 が 符号を変えない、または $\mu_2 = 0$ が交わる 2 直線の組を表しているときは、その両直線の上でそうであると仮定する。この条件の下で、条件 (1) を満たす点 (α, β) が存在することを示そう。それで十分である。

μ_1, μ_2, μ_3 における α と β の 2 次の部分をそれぞれ

$$\lambda_1(\alpha, \beta), \quad \lambda_2(\alpha, \beta), \quad \lambda_3(\alpha, \beta),$$

と表す。ここで変換

$$\alpha' = -\beta, \quad \beta' = \alpha;$$

を考える。これは原点を中心にして平面を $\pi/2$ だけ回転さすことである。そうすると

$$\lambda_2(\alpha', \beta') = -\lambda_2(\alpha, \beta)$$

となる。したがって $\mu_2 = 0$ は 直角双曲線または直交する 2 本の直線 を表している。さらに

$$\lambda_1(\alpha', \beta') = \lambda_3(\alpha, \beta), \quad \lambda_3(\alpha', \beta') = \lambda_1(\alpha, \beta)$$

であり,

$$\lambda_1 + \lambda_3 = D(\alpha^2 + \beta^2)$$

である。したがって $\lambda_1 > 0$ なる部分の拡がり方は $\lambda_1 < 0$ なる部分の拡がり方より、原点における角においてより大 である。 λ_3 についてもそうである。

$\mu_2 = 0$ が直角双曲線を表す場合を考える。上のことから、点 (α, β) が双曲線のどれかの分枝に沿って無限に遠ざかると、この点は $\lambda_1 \leq 0$ なる部分に留まることはできない。したがってその分枝の上に $\mu_1 > 0$ となるような点が少なくとも一つ存在する。すなわち上記の仮定から $\mu_2 = 0$ 上のいたるところ $\mu_1 \geq 0$ である。 λ_3 についても同様であり、さらに μ_2 が直交する 2 本の直線を表している場合も同様である。すなわち $\mu_2 = 0$ 上のいたるところ $\mu_1 \geq 0, \mu_3 \geq 0$ である。さらに曲線 $\mu_2 = 0$ は $\mu_1 = 0$ とも $\mu_3 = 0$ とも一致しない。実際漸近線がすでに異なっている。したがって条件 $\mu_1 > 0, \mu_3 > 0, \mu_2 = 0$ を満たす点 (α, β) は必ず存在する。その点で求める条件 $\mu_1\mu_3 - \mu_2^2 > 0$ はたしかに満たされている。

$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ を 2 階までの連続な偏導関数を持つ実連続函数とし、領域 \mathfrak{D} で

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} > 0, \quad V(\varphi) > 0$$

とする。このとき \mathfrak{D} の任意の点 P にたいし、 P を通り、 P で特異点を持たず、 P の近傍では P を除いて $\varphi > \varphi(P)$ なる部分に留まるような解析面が存在する。

14. 先ず、上の命題にたいする注意を与える。 \mathfrak{D} の内部に点 P を中心とする超球 S を描く。 S の中で $\varphi < \varphi(P)$ となる部分を考え、もしそれが存在すれば、その連結成分の任意の一つを Δ と表す。 Δ は正則域であることを示そう。

Δ を含む (単葉な) 正則域を考える。H. Cartan-P. Thullen³³により、それらの最小のものが存在する。それを G と表す。 G は S に含まれていなければならない。 $\Delta \neq G$ と仮定する。 Δ の形から G は φ の値が $\varphi(P)$ であるような点を少なくとも一つ含んでいる。したがって α を G における φ の値の上限とすると、前の命題により φ は G 内で α を取ることはできない。したがって $\varphi(P) < \alpha$ である。[訳注 16]

³³H. Cartan-P. Thullen, 前掲の論文を見よ。

Q を G の境界点で $\varphi(Q) = \alpha$ となるような点とする. 前の命題により Q を通り, Q の近傍では Q 以外 $\varphi > \alpha$ に留まるような解析面 $F(x, y) = 0$ が存在する. Q のまわりの十分小さい超球 (δ) であって, $F(x, y)$ はそこで境界を込めて正則で, $F = 0$ と (δ) の境界との交わりは G の外にあるようなものを Δ の点を含まないように描く. このような (δ) は確かに存在する. 正の数 ε を十分小さく取り, 超曲面 $|F| = \varepsilon$ と (δ) の境界との交わりもまた G の外にあるようにする. そして G の点で, (δ) に属していないか, または条件 $|F| > \varepsilon$ を満たす点よりなる集合 E を考える. E のすべての連結成分は H. Cartan の意味の擬凸状領域である. したがって正則域である. これは G の定義に反する. したがって $G = \Delta$ である. それで次の命題が得られた.

前の命題の条件のもとで, S を \mathfrak{D} の完全内部にある P のまわりの超球とすれば, S 内で $\varphi < \varphi(P)$ となる部分は, もしそれが存在すれば, 正則域よりなる.

次に $\varphi(x, y)$ を領域 \mathfrak{D} における実数値 連続 函数とする. (x', y') を \mathfrak{D} の点で, 双円筒 (γ)

$$|x - x'| < r, \quad |y - y'| < r$$

が \mathfrak{D} の完全内部にあるような任意の点とする. (γ) 内の φ の値の平均を $\varphi_1(x', y')$ とする. 函数 $\varphi_1(x', y')$ は $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}^{(r)}$ で定義されている. ($\mathfrak{D}^{(r)}$ は \mathfrak{D} の点で, \mathfrak{D} に関する境界距離が r より大きいもの全体の集合を表す.) この操作を

$$\varphi_1(x, y) = A_r[\varphi(x, y)]$$

と表す. これはよく知られた平面での操作のアナロジーである.³⁴ だから $A_r(\varphi)$ の次の性質は自明であろう. [訳注 17]

$A_r(\varphi)$ は x_1, x_2, y_1, y_2 に関する 1 階の連続な偏導関数を持つ.

もし φ が 1 階の連続な偏導関数を持てば, $A_r(\varphi)$ は 2 階のそれを持つ連続函数である.

$$A_r[A_r(\varphi)] = A_r^2(\varphi)$$

を考える. 函数 $A_r^2(\varphi)$ は $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1^{(r)}$ で定義されていて連続である. しかも上の事から x_1, x_2, y_1, y_2 に関する 2 階の連続な偏導関数を持つ.

r が零に収束すれば, $A_r(\varphi)$ も $A_r^2(\varphi)$ も \mathfrak{D} の完全内部で一様に φ に収束する.

もし函数 $\varphi(x, y)$ が 擬凸状函数 なら $A_r(\varphi)$ もまた擬凸状函数である. したがって $A_r^2(\varphi)$ にたいしても同様である. [訳注 18]

³⁴例えば F. Riesz の前掲の論文を見よ.

$\psi(x, y)$ を領域 \mathcal{D} における x_1, x_2, y_1, y_2 に関して 2 階までの連続な偏導関数を持つ擬凸状函数とする. 12 節で見たことから, \mathcal{D} において

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_2^2} \geq 0, \quad V(\psi) \geq 0$$

が成り立つ. そこで函数

$$\chi(x, y) = \psi(x, y) + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)$$

を考える. ε は正の数ならいかに小さくてもよい. そうすると

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} > 0, \quad V(\chi) > 0$$

が得られる.

これを纏めて次の命題が得られる.

φ を領域 \mathcal{D} における連続な擬凸状函数とする. 正の数 ε と \mathcal{D} の完全内部に含まれる領域 \mathcal{D}_0 が与えられたとき, \mathcal{D}_0 における擬凸状函数 $\chi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ であって, 2 階までの連続な偏導関数を持ち, さらに条件

$$|\varphi - \chi| < \varepsilon, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} > 0, \quad V(\chi) > 0$$

を満たすものが存在する.

さて, 空間 (x, y) において擬凸状領域 \mathcal{D} を考える. 先ず \mathcal{D} は有界であると仮定する. 11 節の函数

$$\varphi(x, y) = -\log d(x, y)$$

を持ってくる. ここで $d(x, y)$ は \mathcal{D} の点 (x, y) から \mathcal{D} の境界までの距離である. $\varphi(x, y)$ は \mathcal{D} における擬凸状で連続な函数であるから, 前の命題により示された性質を持つ函数 $\chi(x, y)$ が得られる. \mathcal{D}_0 と ε を定めるために

$$\alpha < \beta < \gamma$$

なる 3 つの実数を, $\varphi < \alpha$ なる点 φ が実際に存在するように取る. \mathcal{D}_0 を十分大きく取って, 集合 $\varphi < \gamma$ を完全内部に含むようにする. \mathcal{D} は仮定により有界であり, 集合 $\varphi < \gamma$ は \mathcal{D} の完全内部に含まれているのであるから, そのような \mathcal{D}_0 は実際に存在する. 次に ε を十分小さく取り, $\chi < \beta$ は集合 $\varphi < \alpha$ を含み, 集合 $\varphi < \gamma$ の中に含まれるようにする. 前の最初の命題により, 集合 $\chi < \beta$ は H. Cartan の意味の擬凸状領域であり, したがって正則域である. α を ∞ に収束させると, 集合 $\varphi < \alpha$ は \mathcal{D} に収束する. したがって H. Behnke-K. Stein の定理 により \mathcal{D} は正則域になる.

\mathcal{D} が有界でないときは, しばしば見たように, 有界な擬凸状領域の列で \mathcal{D} に収束するものを見つけることができる. したがって前の事から \mathcal{D} は正則域である.

定理. 複素 2 変数の空間において, 単葉で有限なすべての擬凸状領域は正則域である.

著者はこの結果は複素変数の個数にはよらないと考えている.

訳 注

[訳注 1] Weil 積分を Cousin 型に使う方法は岡先生も独自に気付かれたらしく、第 I 論文の序文の脚注に“P. Cousin の定理の一般化については、A. Weil の積分から出発しても、同じ結果に到達することができると思う。”と書かれている。その後 Cartan の論文を見られて、彼の方が先にそのことを指摘しているのを知られ、第 III 論文の序文の脚注に“著者は論文 I の定理 I が彼に帰さなければならないことを認める。”と書かれた。

H. Cartan の論文には“1 次元の Cauchy 積分の代わりに多変数の André Weil 積分を使えば Cousin の方法と全く同様に証明される”と書かれているだけである。

複素 2 次元の場合、その仕方は次の通りである。

複素 2 変数 $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ の空間に正則域 \mathfrak{D} と \mathfrak{D} における正則函数 $X_j(x, y)$ ($j = 1, 2, \dots, \nu$) による閉解析多面体

$$\Delta : |X_j(x, y)| \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu)$$

を考え、 $\Sigma_j : |X_j(x, y)| = 1$ と置いて $\sigma_{jk} = \Sigma_j \cap \Sigma_k$ ($j \neq k; j, k = 1, 2, \dots, \nu$) は Weil 積分が成り立つ条件を満たしているとする。さらに \mathfrak{D} において Weil の条件

$$X_j(x, y) - X_j(x_0, y_0) = (x - x_0)P_j(x, y, x_0, y_0) + (y - y_0)Q_j(x, y, x_0, y_0)$$

は成り立っているとする。

Δ は原点を含むと仮定し、 L を $x_2 = 0$ で定義される超平面とし、 Δ の L より上の部分および下の部分をそれぞれ Δ_1 および Δ_2 と表す。さらに $S = L \cap \Delta$ および $\sigma_j = S \cap \Sigma_j$ ($j = 1, 2, \dots, \nu$) と置く。

ここで $f(x, y)$ を S の近傍で正則な函数とし、積分

$$I(x_0, y_0) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{j=1}^{\nu} \iint_{\sigma_j} \varphi_j(x, y, x_0, y_0) f(x, y) dx dy$$

を考える。ここで

$$\varphi_j(x, y, x_0, y_0) = \frac{Q_j(x, y, x_0, y_0)}{(x - x_0)(X_j(x, y) - X_j(x_0, y_0))} \quad (j = 1, 0, \dots, \nu)$$

である。各 σ_j の方向づけは空間のそれから自然に定まるものとする。なお σ_j が空集合のときは σ_j における積分は零と考えている。

積分 $I(x_0, y_0)$ は L 以外の Δ の点 (x_0, y_0) において、複素 2 変数 x_0, y_0 に関する正則函数を表す。それでその Δ_1 および Δ_2 における函数をそれぞれ $I_1(x_0, y_0)$ および $I_2(x_0, y_0)$ と表す。このとき、次の二つの命題が成り立つ。

1. $I_1(x_0, y_0)$ および $I_2(x_0, y_0)$ は共に Δ 内の S の点に解析接続される.
2. Δ 内の S の点で等式

$$f(x_0, y_0) = I_1(x_0, y_0) - I_2(x_0, y_0)$$

が成り立つ.

この論文で必要なのはこの二つの命題だけであるが、これが証明されれば、Cousin のアイデアに従って、正則域における Cousin 第 1 問題は容易に解ける。それで以下これを Weil のアイデアに従って証明する。

[証明] (ξ, η) を Δ 内の S の任意の点とする。まず、 x 平面で ξ を中心とする十分小さい半径 ρ の円板 $(\gamma) : |x - \xi| < \rho$ を描き、その周を γ とする。そして γ の下半平面の部分および上半平面の部分をそれぞれ $\gamma^{(1)}$ および $\gamma^{(2)}$ と表す。さらに実軸で、その (γ) 内の部分を $\gamma^{(1)}$ および $\gamma^{(2)}$ と置き換えたものをそれぞれ $l^{(1)}$ および $l^{(2)}$ として、

$$\sigma_j^{(i)} : x \in l^{(i)}, \quad |X_j(x, y)| = 1 \quad (i = 1, 2)$$

と置く。そして積分

$$I^{(i)}(x_0, y_0) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{j=1}^{\nu} \iint_{\sigma_j^{(i)}} \varphi_j(x, y, x_0, y_0) f(x, y) dx dy \quad (i = 1, 2)$$

を考える。このとき、Cauchy-Poincaré の定理により、 $(x_0, y_0) \in \Delta_1$ のときは $I(x_0, y_0) = I^{(1)}$ となり $(x_0, y_0) \in \Delta_2$ のときは $I(x_0, y_0) = I^{(2)}$ となる。したがって、

$$\sigma_j^* : x \in \gamma, \quad |X_j(x, y)| = 1$$

および

$$I^*(x_0, y_0) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{j=1}^{\nu} \iint_{\sigma_j^*} \varphi_j(x, y, x_0, y_0) f(x, y) dx dy$$

と置けば、 $x_0 \in \gamma$ のとき

$$I^*(x_0, y_0) = I_1(x_0, y_0) - I_2(x_0, y_0)$$

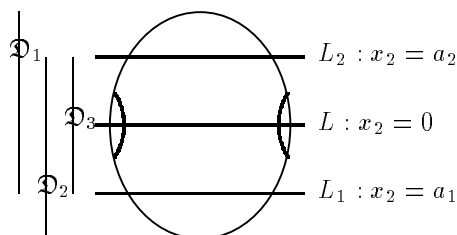
となる。

次に y 平面で η を中心とする十分小さい半径 ρ' の円板 $(\gamma') : |y - \eta| < \rho'$ を、双円筒 $[(\gamma), (\gamma')]$ が Δ に含まれるように描き、その周を γ' と表す。そうすると再び Cauchy-Poincaré の定理により、 $(x_0, y_0) \in [(\gamma), (\gamma')]$ のとき

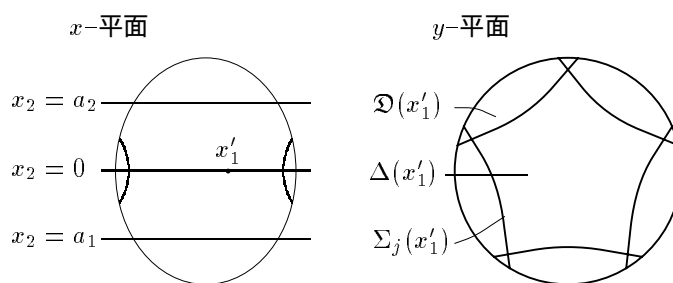
$$I^*(x_0, y_0) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{[\gamma, \gamma']} \frac{f(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} dx dy$$

となる。したがって複素 2 変数の場合の Cauchy の積分定理により、所期の等式が得られる。

[訳注 2] ここで設定された情勢は下の模型図がやや表している。



[訳注 3] \mathfrak{D} , Δ および Σ_j の $x = x'_1$ による切り口の y 平面への射影は下図のようになる。



[訳注 4] 例えば $X_1(x, y) = xy - 1$, $X_2(x, y) = x + y - 1$ として, 超曲面 $|X_1(x, y)| = 1$ によび $|X_2(x, y)| = 1$ をそれぞれ Σ_1^* および Σ_2^* と表す. $a = a_1 + ia_2$ を $x = x_1 + ix_2$ 平面の任意の点とすると, 解析平面 $x = a$ による Σ_1^* の切り口の $y = y_1 + iy_2$ 平面への射影 $\Sigma_1^*(a)$ は, $a \neq 0$ のとき

$$\left(y_1 - \frac{a_1}{|a|^2}\right)^2 + \left(y_2 + \frac{a_2}{|a|^2}\right)^2 = \frac{1}{|a|^2}$$

と表される曲線, (すなわち点 $(a_1/|a|^2, -a_2/|a|^2)$ を中心とし, 原点を通る円) であるが, $x = 0$ のとき, それは全平面である. 他方, $x = a$ による超曲面 Σ_2^* の切り口の y 平面への射影 $\Sigma_2^*(a)$ は, 点 $1 - a$ を中心とする半径 1 の円である.

[訳注 5] 例 1. $X_1(x, y) = x - y$, $X_2(x, y) = x + y$ として, 超曲面 $|X_1(x, y)| = 1$ によび $|X_2(x, y)| = 1$ をそれぞれ Σ_1^* および Σ_2^* と表す. x_1 を実数として, それらの $x = x_1$ による切り口は $x_1 \neq 0$ のとき, 高々 2 点でしか交わらないが, $x_1 = 0$ のとき, その交わりは原点を中心とする半径 1 の円である.

例 2. $X_1(x, y) = e^{y-x}$, $X_2(x, y) = e^{-x-y}$ として, 領域 $|X_1(x, y)| < 1$, $|X_2(x, y)| < 1$ を考えると, x_1 を実数として, それの $x = x_1$ による切り口は $x_1 > 0$ のとき, $-x_1 < \Re(y) < x_1$ であるが, $x_1 \leq 0$ のとき空集合である.

[訳注 6] この部分は多少難解と思えるので、補足の説明をする。始めに (1) 式は σ の 2 次元の部分における重積分であるため、 σ に含まれる有限個の点や有限個の滑らかな曲線は除いて考えてもかまわないことを注意しておく。

考えている状態をもう一度整理する。 $X_j(x, y)$ ($\partial X_j / \partial y \neq 0, j = 1, \dots, \nu$) を D_3 における正則函数とし、 D_3 に含まれていない点および D_3 の点で、不等式 $|X_j(x, y)| < 1$ ($j = 1, \dots, \nu$) を満たす点全体の一つの連結成分が Δ 、 $L \cap \Delta$ の閉包が S 、 S を L 上の集合と見たときの境界が σ である。そして $\Sigma_j : x_2 = 0, |X_j(x, y)| = 1$ はすべて 2 次元であり、 $\Sigma_j \cap \Sigma_k$ ($j \neq k$) はすべて 1 次元であると仮定されており、 $\sigma_j = \Sigma_j \cap \sigma$ と置いて、各 j にたいし、 $\partial X_j / \partial y$ は σ_j 上では高々有限個の点でしか零にならないと仮定されている。

まず、 σ および σ_j の $x = x'$ ($x' \in l$) による切り口の y 平面への射影 $\Gamma_{x'}$ および $\Gamma_{x'}^{(j)}$ は内点を含まないことが証明されている。もし内点を含めば、ある j にたいして、点集合 $|X_j(x', y)| = 1$ が内点を含むことになり、そうすると $X_j(x', y)$ が定数になり、したがって $\partial X_j(x', y) / \partial y \equiv 0$ となって仮定に反するというのである。

次に、 $\Sigma_j \cap \Sigma_k$ ($j \neq k$) がすべて 1 次元であると仮定したことから、 l の高々有限個の点を除いて $\Gamma_{x'}^{(j)}$ と $\Gamma_{x'}^{(k)}$ はどれも高々有限個の点しか共有しないことが述べられている。最初に注意したように、この除外された点では考える必要はない。それで以下 $x' (\in l)$ はそのような除外点ではないと仮定する。

ここで、本文には使われていないが、 D および Δ の $x = x'$ による切り口の y 平面への射影をそれぞれ $D_{x'}$ および $\Delta_{x'}$ と表すことにする。ただし $\Delta_{x'}$ の点を含まないような $D_{x'}$ の連結成分は無視する。そして $|X_j(x', y)| = 1$ で与えられる $D_{x'}$ 内の曲線を $C_{x'}^{(j)}$ と表す。 $C_{x'}^{(j)}$ は $D_{x'}$ の境界以外に端点を持たないことを注意しよう。さらに $C_{x'}^{(j)}$ の通常点の近傍で見ると、 $|X_j(x', y)|$ はその曲線の片側だけで 1 より小さく、他の側では 1 より大きい。なお $C_{x'}^{(j)}$ から $\partial X_j(x', y) / \partial y$ の零点および $C_{x'}^{(k)}$ ($j \neq k$) との交点をすべて除いたものを $C_{x'}^{(j)}$ の通常部分ということにする。

さて $D_{x'}$ から全ての $C_{x'}^{(j)}$ ($j = 1, \dots, \nu$) を除き去った開集合を $D_{x'}^0$ と表す。そうすると $D_{x'}^0$ の各連結成分 $d_{x'}^0$ にたいして次の事が分かる。

もし $d_{x'}^0$ が $\Delta_{x'}$ の点の一つでも含めば、 $d_{x'}^0$ は $\Delta_{x'}$ に含まれる。この場合、 $d_{x'}^0$ の境界は $\Gamma_{x'}$ に含まれ、逆に、高々 0 次元の集合を無視すれば、 $\Gamma_{x'}$ の各連結成分はそのような $d_{x'}^0$ の境界に含まれる。

証明。 $d_{x'}^0$ が $\Delta_{x'}$ の点 p を含むとし、 $d_{x'}^0$ の任意の点 q を取って $d_{x'}^0$ 内に p と q を結ぶ連続曲線 \mathcal{C} を考えると、 \mathcal{C} 上の全ての点で $|X_j| < 1$ ($j = 1, \dots, \nu$) だから、 \mathcal{C} は $\Delta_{x'}$ に含まれなければならない。さらに $d_{x'}^0$ の任意の境界点では、どれかの j にたいして $|X_j(x', y)|$ が 1 になっているのだから、それは $\Gamma_{x'}$ に含まれている。

逆に、ある j にたいして $C_{x'}^{(j)}$ の通常部分の点を (x', y') とし、それは $\Delta_{x'}$ の境界点ではないと仮定する。このとき j 以外の k にたいしては $|X_k(x', y')| \neq 1$

である。したがって、もし或る k にたいして $|X_k(x', y')| > 1$ なら、 (x', y') は $\Gamma_{x'}$ に属さない。それで $|X_k(x', y')| < 1$ ($j \neq k$) と仮定する。そうすると (x', y') を中心とする十分小さい半径 ρ の等経双円筒 (γ_1, γ_2) でそうなる。ところで、仮定により、 (x', y') で $\partial X_j / \partial y$ は零ではない。したがって超曲面 $|X_j(x, y)| = 1$ は、 ρ が十分小さいとき、 (γ_1, γ_2) を二つの部分に分け、その一方では $|X_j| < 1$ ($j = 1, \dots, \nu$) となる。しかし、その中には Δ に含まれない点が存在する。したがって (γ_1, γ_2) は Δ の外にあり、 (x', y') は $\Gamma_{x'}$ に含まれない。

ここで言いたかったのはこの事であった。

なお、本文中の s は $\Gamma_{x'}$ の連結成分とし、 s' は s から $\partial X_j / \partial y$ ($j = 1, \dots, \nu$) の零点、および $\sigma_j \cap \sigma_k$ ($j \neq k$) (共に有限個と仮定されている) を除き去った残りの連結成分と考えると分かりやすい。

[訳注 7] 一般に σ を空間 (x, y) に描かれた実 2 次元の滑らかな曲面とする。そしてその x 平面への射影は曲線 l であると仮定し、さらに x' を l の任意の点としたとき、 σ の $x = x'$ による切り口 $\sigma(x')$ は常に曲線であると仮定して、その y 平面への射影を l'_x と表す。このとき、 $f(x, y)$ を σ 上の滑らかな函数とすれば、 σ は適当なパラメータ u, v をもちいて

$$x = x(u), \quad y = y(u, v)$$

と表される。そうすると

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{dx}{du} \frac{\partial y}{\partial v}$$

である。したがって、積分の方向を σ の方向付けに合わずとして、等式

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \int_l \left(\int_{l'_x} f(x, y) dy \right) dx$$

が成り立つ。ここで () 内の積分はパラメータ x を含む y の函数の y 平面における線積分であり、() 外の積分は x の函数の x 平面における線積分である。

[訳注 8] 積分 I は S での差が丁度与えた函数 φ になるが、積分核 $\psi(x, y, x_0, y_0)$ が x_0, y_0 に関して \mathfrak{D}_3 でしか正則でないので、 I もそうである。それで積分核をすこし変形して、 x_0, y_0 に関して \mathfrak{D}_1 および \mathfrak{D}_2 で正則になるようにして積分 J_1 と J_2 を作り、その差が与えられた函数 $f(x, y)$ になるように φ を求めたのである。

[訳注 9] Behnke-Stein による、極限領域が有界な場合の証明を述べる。先ずそれに必要な定理を列挙する。領域はすべて多変数の複素空間における有界で単葉なものとする。

1. 正則凸状域は正則域である.
2. 領域 \mathfrak{D} で正則な函数による解析多面体 \mathfrak{P} ($\mathfrak{P} \in \mathfrak{D}$) における正則函数は \mathfrak{P} で一様収束するような \mathfrak{D} での正則函数の級数に展開される.
3. \mathfrak{D} を正則域, $\mathfrak{D}^{(\rho)}$ を境界距離が ρ より大きい \mathfrak{D} の点の全体とするとき, \mathfrak{D} で正則な函数による解析多面体で, $\mathfrak{D}^{(\rho)}$ を含み, $\mathfrak{D}^{(\rho)}$ にいくらでも近いものが存在する.
4. \mathfrak{D}_j ($j = 1, 2, \dots$) を正則域の列とし

$$\mathfrak{D}_j \in \mathfrak{D}_{j+1}, \quad \lim \mathfrak{D}_j = \mathfrak{D}$$

とする. このとき, もし正の数の列 ρ_j ($j = 1, 2, \dots$) があって,

$$\mathfrak{D}_j \in \mathfrak{D}_{j+2}^{(\rho_{j+2})} \in \mathfrak{D}_{j+1}$$

となるなら, \mathfrak{D} は正則域である.

さて, D を或る領域とし, それにたいして正則域の列 D_j ($j = 1, 2, \dots$) で

$$D_j \in D_{j+1}, \quad \lim D_j = D$$

となるものが存在したと仮定する. このとき, 部分列 D_{i_j} ($j = 1, 2, \dots$) と正の数の列 ρ_j ($j = 1, 2, \dots$) を適当に取って, 上記の命題 4 の条件を満たすようにできることを示そう.

証明. μ, ν ($\mu < \nu$) を二つの正の整数として, D_μ の境界点 P の D_ν および D に関する境界距離を $d_{\mu\nu}(P)$ および $d_\mu(P)$ と表し, それらの最大値を $M_{\mu\nu}$ および M_μ , 最小値を $m_{\mu\nu}$ および m_μ と表す. このとき ν を限りなく大きくすれば, M_ν と m_ν は共に零に収束し, $M_{\mu\nu}$ と $m_{\mu\nu}$ はそれぞれ M_μ と m_μ に収束することを注意しておく.

先ず, $D_{i_1} = D_1$ とする.

次に, D_{i_2} を $M_{i_2} < m_{i_1}$ となるように取る. m_{i_1} は定まった正の数であり, M_μ は零に収束するから, これは可能である.

次に, D_{i_3} を $M_{i_3} < m_{i_2}$, $M_{i_2 i_3} < m_{i_1 i_3}$ となるように取る. m_{i_2} は定まった正の数であり, $M_{i_2} < m_{i_1}$ となっているが M_μ は零に収束し $M_{i_2 \nu}$ と $m_{i_1 \nu}$ はそれぞれ M_{i_2} と m_{i_1} に収束するから, これは可能である.

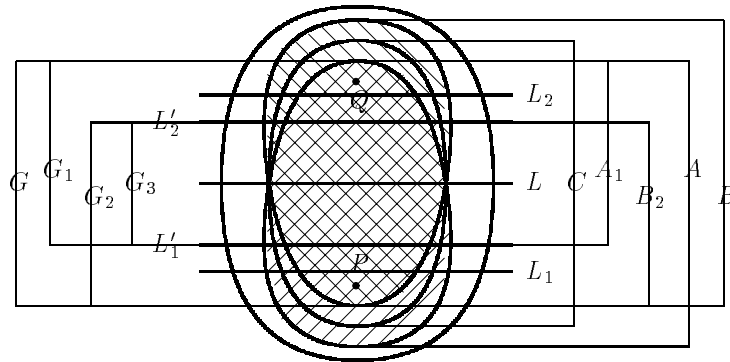
同様に $D_{i_{p+2}}$ を $M_{i_{p+2}} < m_{i_{p+1}}$, $M_{i_{p+1} i_{p+2}} < m_{i_p i_{p+2}}$ となるように取る. 前と同じ理由でこれも可能である.

このとき ρ_j を $M_{i_{j-1} i_j} < \rho_j < m_{i_{j-2} i_j}$ となるように取れば,

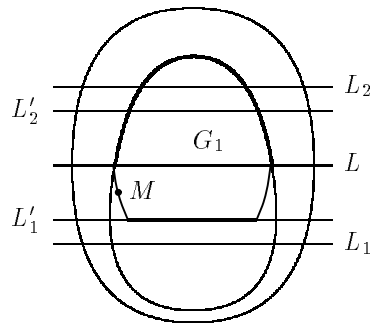
$$D_{i_{j-2}} \in D_{i_j}^{(\rho_j)} \in D_{i_{j-1}}$$

となっている.

[訳注 10] \mathfrak{D} , A , B , C , G 等の関係は下の模型図がやや表している.

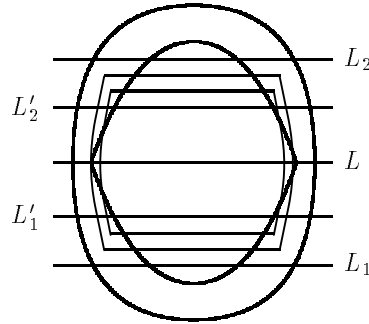


[訳注 11] \mathfrak{D}_1 が正則域なので $\mathfrak{D}_1(\chi_1, \rho)$ も正則域である. 他方, \mathfrak{D}_1 の境界は L_1 より上にある \mathfrak{D} の境界と L_1 の点よりなるから, $\mathfrak{D}_1(\chi_1, \rho)$ は $A = \mathfrak{D}(\chi_1, \rho)$ の点 p であって, L_1 までの距離が $\rho|\chi_1(p)|$ より大なものの全体である. それで A の点 p であって, L_1 までの距離が $\rho|\chi_1(p)|$ 以下になるものはすべて L'_1 より下に来るほど ρ を小さく取れば, A_1 は $\mathfrak{D}_1(\chi_1, \rho)$ の L'_1 より上の部分と一致する. そうなればそれは確かに正則域である. 下の図参照



[訳注 12] A_1 のときと同様, ρ が十分小さければ, $B_2 = \mathfrak{D}_2(\chi_2, \rho)$ は $\mathfrak{D}_2(\chi_2, \rho)$ の L'_2 より下の部分と一致する. 他方, $\mathfrak{D}_2(\chi_2, \rho)$ は \mathfrak{D}_2 における正則函数に関して性質 (α) を持つ. したがって B_2 もそうである.

[訳注 13] ρ が十分小さければ, $C = \mathfrak{D}^{(\rho)}$ の点で L_1 までの距離が ρ 以下のものは L'_1 より下のあり, L_2 までの距離が ρ 以下のものは L'_2 より上にある.



[訳注 14] 仮定 3° について, 2° では $|X_j| = 1$ ($j = 1, \dots, \nu$) の代わりに $|X_j| = \alpha_j$ ($j = 1, \dots, \nu$) を取ればよいというのであるが, 3° についても, D_3 の完全内部で y の函数 $X_j(x', y)$ が定数になるような x' は有限個しかないのであるから, α_j としてその定数の絶対値を避けるだけでよい.

[訳注 15] $-\log R_y(x)$ がすべての解析直線上で劣調和函数になることは一つの発見である. このことから, 擬凸状函数と言う概念が生まれた. 現在は多重劣調和函数と呼ばれている. この函数を使って一般な擬凸状領域を Cartan の意味の擬凸状領域で内部から近似することができる.

[訳注 16] P の近傍では P を除いて $\varphi > \varphi(P)$ なる部分に留まるような解析面が存在するのであるから当然であるが, 一般に定数ではない擬凸状函数はその定義域内で最大値を取らない. このことは劣調和函数がそうなのであるから, 擬凸状函数の定義により明らかである.

[訳注 17] ここで平均と言われているのは積分平均のことで,

$$A_r[\varphi(x, y)] = \frac{1}{V} \int_{(\gamma)} \varphi(x, y) dv$$

である. ここで V は (γ) の体積を表し dv は空間の体積要素を表す.

[訳注 18] 有限個の擬凸状函数の平均は擬凸状函数であり, 擬凸状函数の一樣収束列の極限函数も擬凸状函数であるから, 積分の定義によってその積分平均も擬凸状函数である.