多変数解析函数について.

VIII　基本補題.

岡　潔

1951 年 3 月 15 日 受理

序文.　第 I 論文以来の主問題は：Cousin の問題, 展開の問題および凸性の問題である[1]. 第 I–VI 論文[2] において, これらの問題は, 一口に言って, 単葉有限な領域に対してはすべて肯定的に解けることを見た[3]. さらに著者は, 発表はしなかったが, これらの結果は少なくとも分岐点を含まない有限領域迄は成り立つことを確かめた[4].

それで今度は, 適当な無限遠点を導入すること, または分岐点を許すことが問題となる. ところで, 思い起こせば, 我々は内分岐領域については殆ど何も知らない. 例えば局所的な展開 [訳注. 1 変数の Puiseux 級数のような] は果たして可能なのか? それ故, 先ず後者の問題を取り上げる.

さて現在の研究に対する基本的なアイデアは第 I 論文の定理 II によって象徴的に示される. 我々は, 問題 (E) が解けていなかったので, それを第 II 論文の定理 I の形で使った[5]. しかし, 内分岐領域に対しては, 元の形

---

[1] これらの問題は H. Behnke et P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer Komplexer Veränderlichen, 1934 に基づいている. それらを正確な形で述べよう. D, D_0 を複素 n 変数の空間における連結または非連結な領域であって $D_0 \subsetneqq D$ とする. (すなわち D_0 は D の $\ll$ 部分領域 (Teilbereich)$\gg$ である.) もし, D における正則函数で, D_0 の異なる点で異なる函数要素を持つものが存在し, さらに $\Delta_0 \Subset D_0$ なる, 連結または非連結な領域 Δ_0 (すなわち Δ_0 はその境界と共に D_0 の内部に含まれている) に対し, $\Delta_0 \subset \Delta \Subset D_0$ なる Δ があって, $D_0 - \Delta$ のすべての点 P に対し, D における正則函数 f で, $|f(P)| > \max |f(\Delta_0)|$ となるものが対応するなら, D_0 を D に関して正則凸状と言う. 特に, D_0 がそれ自身に関して正則凸状なら, H. Behnke にしたがって, それを正則凸状 (regulär konvexe) と言う. そうすると問題は次の通りである：Cousin の問題. 正則凸状域で, 与えられた極 (または或る条件を満たす零) を持つ有理型函数 (または正則函数) を見つけること. 展開の問題. D_0 を D に関する正則凸状域 (連結または非連結) とするとき, D_0 における任意の正則函数 f に対し, $\Delta_0 \Subset D_0$ なるすべての領域 Δ_0 (連結または非連結) で f に一様収束するような, D における正則函数の級数を見つけること. 凸性の問題. すべての擬凸状領域は正則凸状か? 単葉領域に関しては, H. Cartan と P. Thullen の定理によって, $\ll$ 正則凸状域 $\gg$ を $\ll$ 正則域 (domaine d'holomorphie)$\gg$ に置き換えることができる.

[2] ここまでの論文は以下の通りである. I–有理函数に関する凸状域,1936, II–正則域, 1937, III–Cousin の第 2 問題, 1939 (Journal of Science of the Hiroshima University), IV–正則域と有理凸状域, 1941, V–Cauchy 積分, 1941 (Japanese Journal of Mathematics), VI–擬凸状領域, 1942 (Tohoku Mathematical Journal), VII–或る算術的概念について, 1950 (Bulletin de la Société Mathématique de France).

[3] 正確に云うと, Cousin の第 2 問題については, 零に対する必要十分条件を与え, 凸性の問題に対しては, 後に必要になる繰り返しを考慮して, 複素 2 次元に対して述べた.

[4] 1943 年にその詳細を日本語で高木貞治教授に書き送った.

[5] H. Behke と K. Stein は, この定理が不分岐多葉域にも応用できる事を再々述べている.

が不可欠である. それが表題の基本補題であり, 第 VII 論文を準備したのはこれを確立するためであった.

不分岐 (有限) 領域の場合, 基本補題を確立するためには, 問題 (C_2) と (E) を解き, さらに幾何学的不定域イデアルの局所擬底を見つけさえすればよい. その問題 (C_2) と (E) は第 VII 論文で解いたし, 最近 H. Cartan が, この最後の問題も, 問題 (K) が常に解けるという第 VII 論文の定理 4 を使って, 解決した[6]. しかし, 分岐点を許すと, 解析集合上の正則函数が必ずしも空間の正則函数の制限とはみなせないという新たな困難に出会う. そこから結局, 或る意味で幾何学的イデアルを含む, より広いイデアルに関する問題 (J) の一種が生じる.

この論文では, 第 VII 論文の定理 4 (定理 2) から出発し, この問題を解決して, 基本補題を確立し, さらにこれを基本的諸問題に如何に応用するかを簡潔に述べる. さらに付録として, 与えられたイデアルに関する問題 (J) が解けるための必要十分条件を, 同じ定理を使って示す.

≪ この論文では複素変数の有限空間しか扱わないので, 一般に空間のこの条件の記述は省く.≫

I. 不定域イデアルと局所擬底.

1. 一般概念 ≪ この論文の I で考える領域は例外なく 単葉 なので, 一般にその条件の記述は省く.≫

不定域正則イデアルについては第 VII 論文の 2 節で説明した. それをごく簡潔に繰り返す. 空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ において順序対 (f, δ) を考える. δ は 連結または非連結 な領域であり, f は δ における正則函数である. (I) を対 (f, δ) (常に順序付けられている) の集合とする. $(f, \delta) \in (I)$ という代わりに δ に対して $f \in (I)$ と言うこともある. (I) は, もし次の条件が満たされているなら, 正則不定域イデアルと呼ばれる :

[6] 正則イデアルの研究の推移について簡単に説明しよう. "イデアル" の概念を代数函数の分野から解析函数の分野に移植したのは W. Rückert である. (1933, Math. Annalen, Vol.107, pp 259-281) そして最初に, その本質的な差異を, 重要な結果と共に, 注意したのは H. Cartan である (1940, 第 VII 論文に挙げた論文). Cartan はまた Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes (Annales de l'Ecole Normale Supérieurs, (3), LXI); Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables comlexes, (1950, Bulletin de la Société Mathématique de France) を発表した.

さて, 著者は先ず Cartan のこの二つの論文の初めの方と Rückert の論文の存在を知らないままで第 VII 論文を発表した. それでこの論文を他の論文と比較して検討しておこう. 第 VII 論文は二つの部分からなっている. その初めの部分では 問題 (C_1), (C_2) および (E) が問題 (K) に帰着することが示されている. これは, 証明はされていないが, その準備は整えられた状態で, すでに Cartan によって示されている. 第二の部分で著者は先ず問題 (K) を解くために剰余の定理を準備している. この定理はすでに Rückert によって述べられ, 使われている.

1° もし $(f,\delta)\in(I)$ であり, α が領域 δ' (連結または非連結) における正則函数なら, $\delta\cap\delta'$ に対して $\alpha f\in(I)$ である.

2° もし $(f,\delta)\in(I)$, $(f',\delta')\in(I)$ なら $\delta\cap\delta'$ に対して $f+f'\in(I)$ である.

この論文では一般にこれを単にイデアルと呼ぶ. 定義から直ちに位相的な性質, すなわち, もし (I) がイデアルであって, $(f,\delta)\in(I)$ であり, さらに $\delta'\subset\delta$ なら $(f,\delta')\in(I)$ が導かれる. それで, 或る点 P に対して $f\in(I)$ またはそうでないという言い方ができる.

P を空間 (x) の点とするとき, もし, P ではいかなる函数も (I) に属さないなら, P をイデアル (I) の空隙点 (point lacunaire) と呼ぶ. (I) の空隙点全体の集合は明らかに閉集合である. P を空間 (x) の点とするとき, もし, P で (I) に属するすべての函数が P で零になるなら, P をイデアル (I) の零点と呼ぶ. (I) の零点全体の集合は, 空隙点集合の余集合上, 明らかに閉集合である. 逆に, 空間 (x) の任意の閉集合は明かにその空間の或るイデアルの零点集合である. [訳注 1]

空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ における有限個の正則函数の系 F_i $(i=1,2,\dots,p)$ は, 次の条件 :

1°. すべての F_i は $\mathfrak{D}$ のすべての点で (I) に属する.

2°. $\mathfrak{D}$ のすべての点 P で, (I) に属するすべての函数 f に対して, P で $f\equiv 0 \mod (F)$ となる.

を満たすときイデアル (I) の (有限) 擬底と呼ばれる.

函数系 F は, もしそれが或る点 P の或る近傍での (I) の擬底なら (I) の P における擬底と呼ばれる. そのような擬底は局所擬底と呼ばれる. [訳注. 局所擬底が問題になるのは, 常にイデアルの零点においてだけである.]

我々の観点からすると, 正則不定域イデアルに対する主問題は局所擬底を見つけることである. それを問題 (J) と呼ぶ. イデアルの零点集合について見たことから明らかなように, この問題は常に解を持つわけではない. それで次の言葉がこの問題に対して役に立つ : 空間 (x) に二つのイデアル (I_1), (I_2) が与えられたとき, もし $\mathfrak{D}$ のすべての点 P において, 一方に属している函数 f は必ず他方にも属しているという関係にあるとき, この二つのイデアルを $\mathfrak{D}$ で同等であると言い, それを $(I_1)\sim(I_2)$ と表す. もし P の或る近傍でそうなっているなら, その点 P で $(I_1)\sim(I_2)$ であると言う. [訳注. この場合, 一方が局所擬底を持てば他方もそうなる.]

問題 (J) について, 第 VII 論文で, 問題 (K) は常に解けることを見た (定理 4). この結果から出発しよう.

2．一般的原理． 空間 (x) において, $A_{ij}=A_{kl}$ $(i,k=1,2,\dots,q;\ j,l=1,2,\dots,p)$ なる形の等式を伴った

$$A_{i1}F_{i1}+A_{i2}F_{i2}+\cdots+A_{ip}F_{ip}=0 \qquad (i=1,2,\dots,q)$$

なる形の連立線形函数方程式系を考える．ここで F_{ij} は領域 $\mathfrak{D}$ における与えられた正則函数であり, A_{ij} は未知函数である．$(A_{11},A_{12},\dots,A_{qp})$ を $\mathfrak{D}$ に含まれる連結または非連結な領域 δ における正則函数系とするとき, もしこれが上記の方程式を恒等的に満たすなら, それを δ における解と呼ぶ．各 (A_{11},δ) に対し, 与えられた方程式の δ における解 $(A_{11},A_{12},\dots,A_{qp})$ が対応するような (A_{11},δ) の全体を (I) と表わす．(I) は明らかに一つのイデアルを作る．これを一般にイデアル (L) と呼ぶ．第 VII 論文の定理 4 は次の言い方と同等である．

領域 $\mathfrak{D}$ におけるすべてのイデアル (L) は領域 $\mathfrak{D}$ のすべての点で擬底を持つ．

この定理から直ちに導かれる一般的原理を調べることから始めよう．

1° H. Cartan の系． (I_1), (I_2) を空間 (x) における二つの正則不定域イデアルとし $(I)=(I_1)\cap(I_2)$ と置く．(I) は明らかに同じ性格のイデアルである．(I) が点 (x^0) において擬底を持つためには $(I_1),(I_2)$ がそうであることが十分である．(証明は明らかである．) [訳注 2]

2° 系 1． 空間 (x) に正則不定域イデアル $(I)=\{(f,\delta)\}$ と点 (x^0) が与えられているとき, (x^0) の近傍 V における正則函数 $F(x),\Phi_1(x),\dots,\Phi_p(x)$ を使って (I) を変形し, $(J)=\{(\varphi,\delta')\}$ を作る．ただし

$$\varphi=fF+A_1\Phi_1+\cdots+A_p\Phi_p,\quad \delta'=V\cap\delta\cap\alpha_1\cap\ldots\cap\alpha_p$$

であり, A_i $(i{=}1,2,\dots,p)$ は α_i における任意の正則函数である．(J) は明らかにイデアルを作る．(J) は点 (x^0) において擬底を持つと仮定し, さらに函数方程式

$$A_0F+A_1\Phi_1+\cdots+A_p\Phi_p=0$$

に対して, もし $(A_0,A_1,\dots,A_p)$ が V の点における解なら, A_0 は必ずその点で (I) に属すると仮定する．そうすると (I) は (x^0) で擬底を持つ．

実際, Ψ_i $(i=1,2,\dots,q)$ を, 点 (x^0) の近傍 V' $(V'\subseteq V)$ における (J) の擬底とし, 函数方程式

$$B_1\Psi_1+\cdots+B_q\Psi_q=A_0F+A_1\Phi_1+\cdots+A_p\Phi_p$$

を考える．これのイデアル $(L):\{(A_0,\delta)\}=(K)$ を V' で (I) と比較しよう．(J) の定義から, 或る点で (I) に属するすべての函数はその点

で (K) に属さなければならない．逆に第 2 の仮定により, 或る点で (K) に属するすべての函数はその点で (I) に属さなければならない．すなわち $(K) \sim (I)$ である．したがって定理により (I) は (x^0) で擬底を持つ．

C. Q. F. D.

3° $(I) = \{(f, \delta)\}$ を空間 (x) における或るイデアルとし, $\Phi(x)$ を領域 V における正則函数とする．そして任意の領域 α (連結または非連結) における任意の正則函数を A とし, $\varphi = f + A\Phi$, $\delta' = \delta \cap \alpha$ として, $(J) = \{(\varphi, \delta')\}$ を考え, それをアジョイント (adjoint) と呼ぶ．それとは別に $\varphi\Phi = f$ であるような (J) を作り, それを商 (quotient) と呼ぶ．[訳注. V の或る点に対して (I) に属する函数はその点に対してアジョイントにも商にも属する.]

もし, (I) が V の点 (x^0) で擬底を持てば アジョイントに対しても商に対してもそうなる．

アジョイントに付いては明らかである．商に対しては定理から直ちに導かれる．[訳注. 3] 逆はどうだろう?

例.—複素 2 変数 (x, y) の空間で, 二つのエレメント $(xy, \Delta), (1, \Delta')$ によって生成されるイデアル (I) を考える．この Δ は空間 (x, y) を意味し, Δ' は $|y| > 0$ で与えられる．(I) は原点で擬底を持たない．それに反し (I) の (y, Δ) によるアジョイントは Δ に対して擬底 (y) を持ち, (I) の (x, Δ) による商も同様である．このように逆はアジョイントに対しても商に対しても正しくない．しかしアジョイントと商を同時に見ると, (y, Δ) に対して, 商は原点で擬底を持たず, (x, Δ) に対してはアジョイントがそうなる．[訳注. 4] ここに次の事実が存在する．

系 2. 空間 (x) に正則不定域イデアル (I) と, 点 (x^0) の或る近傍 V における或る正則函数 $\Phi(x)$ が与えられているとき, もし (I) の (Φ, V) によるアジョイントと商が共に (x^0) における擬底を持つなら, 元のイデアル (I) もそうなる．

実際, $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p)$ を点 (x^0) の近傍 V' $(V' \subseteq V)$ におけるアジョイントの擬底とする．もし V' を十分小さく取れば, $\Phi_i = F_i + A_i\Phi$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ と書ける．ここで V' に対して $F_i \in (I)$ であり, A_i は V' における或る正則函数である．f を V' の或る点 (x') で (I) に属し, それ以外は任意の函数とすると, それは (x') で, α_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ を正則函数として, 恒等的に

$$f = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_p F_p + (\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p)\Phi$$

と書ける．[訳注. f は (x') でアジョイントに属しているから.] ここで, (I) の商を (J) と表わし, $(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p)$ を B と表わす．そうする

と $B\Phi \in (I)$ でなければならない. [訳注. $f - \sum \alpha_i F_i \in (I)$ だから.] すなわち, (x') で $B \in (J)$ である. 逆に, もし正則函数 f が (x') でこの二つの条件 [訳注. $f = \sum a_i F_i + B\Phi$ と表せることと $B \in (J)$ となること] を満たせば, (x') で $f \in (I)$ でなければならない. さて, $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_q)$ を V' (十分小さく取り直して) に対する (J) の擬底とすると, $B \in (J)$ であるための必要十分条件は β_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ を正則函数として

$$\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p = \beta_1 \Psi_1 + \cdots + \beta_q \Psi_q$$

と書けることである. したがってイデアル (I) は [訳注. 上記の 2 式を連立方程式と見たときの] イデアル (L) と同等であるから (x^0) において擬底を持つ. C.Q.F.D.

3. 幾何学的イデアル. 空間 (x) に領域 $\mathfrak{D}$ と $\mathfrak{D}$ における解析集合 (variété caractéristique)[7] Σ が与えられたとし, $\delta \subseteq \mathfrak{D}$, f は $\Sigma \cap \delta$ で恒等的に零となる正則函数として, (f, δ) の集合 (I) を考える. (I) は明らかにイデアルを作る. それを (領域 $\mathfrak{D}$ で定義された Σ に付随する) 幾何学的不定域イデアルと呼ぶ.

H. Cartan の定理. すべての幾何学的不定域イデアルは局所擬底を持つ.

系 1 を使ってこれを再証明しよう. (x^0) を Σ の任意の点として, (I) が (x^0) で擬底を持つことを示せばよい. Weierstrass の定理によって, (x^0) の或る近傍内の Σ の部分は有限個のエレメント [訳注. 解析集合の局所的既約成分] からなることが知られている. このエレメントはまた解析集合であると言う知識は用いないで, この各エレメントに対して上記のようなイデアルを定義することができる. 暫くそれを同じ言葉で言い表すことにする. [訳注. エレメントがまた解析集合であることは証明を要する. ここではその事も同時に証明してしまおうというのである.] (I) は, (x^0) の近傍ではそれらのイデアルの交わりであるから, Cartan の補題により, その各々が (x^0) で擬底を持つことを示せばよい. Σ が点または曲面のときは自明である.

それで新たに空間 $(x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_m)$ $(n > 0,\ m > 1)$ で考え, Σ の点 (x^0, y^0) の近傍で, 或る解析集合の n 次元 (この論文では常に 複素次元である.) のエレメント Σ と, 対応する幾何学的イデアル (I) を考え, (I) は (x^0, y^0) で擬底を持つことを示そう. Weierstrass により, 座標系を

[7] 解析集合とは局所的に有限個の正則函数の共通零点の集合として表される点集合のことである.

次のように取ることができる. 多円筒 $[(\gamma),(\gamma')]$:

$$\begin{aligned}(\gamma) \;:\; |x_i - x_i^0| < r \qquad (\, i = 1,2,\ldots,n\,),\\ (\gamma') \;:\; |y_j - y_j^0| < \rho \qquad (j = 1,2,\ldots,m)\end{aligned}$$

を描き, (I) と Σ はここで定義されていて, 空間 (y) への Σ の射影[8]は $\Subset (\gamma')$ であり, さらに (I) は $[(\gamma),(\gamma')]$ に対して次の正則函数を含んでいる.

$$F_i(x,y_i),\ \Psi_j(x,y_1,y_j) = y_j\frac{\partial F_1(x,y_1)}{\partial y_1} - \Phi_j(x,y_1)\ \begin{pmatrix} i = 1,2,\ldots,m \\ j = 2,\ldots,m\end{pmatrix}$$

ここで, $F_i(x,y_i)$ は最高次係数が 1 の y_i の多項式 [訳注. 既約な] であり, $\Phi_j(x,y_1)$ は y_1 の多項式である. 特に $F_1(x,y_1)$ は次の性質を持つ. すなわち, Σ の空間 (x,y_1) への射影は $F_1(x,y_1) = 0$ と一致し, Σ と $\dfrac{\partial F_1(x,y_1)}{\partial y_1} = 0$ の交わりは, もし存在すれば, $n-1$ 次元である. (したがって F_1 は重複因子を持たない.) [訳注 5]

(x',y') を $[(\gamma),(\gamma')]$ の任意の点とし, $f(x,y)$ を (x',y') で (I) に属する任意の函数とする. 第 VII 論文に示された剰余の定理により, $(y_2,y_3,\ldots,y_m)$ に関する多項式で, その次数は f および (x',y') によらない上限を持ち, (x',y') で $f \equiv \varphi \mod (F_2,F_3,\ldots,F_m)$ となる正則函数 $\varphi(x,y)$ が見つけられる. したがって f および (x',y') によらない正の整数 λ を, (x',y') で

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^{\lambda} f \equiv \psi \mod (F_2,\ldots,F_m,\Psi)$$

となるように選ぶことができる. ψ は (x,y_1) における正則函数である. [訳注. f に $(\partial F_1/\partial y_1)^\lambda$ を掛け, Ψ_j を使って φ から y_j $(j = 2,\ldots,m)$ を消去したのである. Φ_j は (x,y_1) のみの函数であることに注意.] しかも ψ は, (I) に属しているので, 明らかに (x',y') で $F_1(x,y_1)$ によって割り切れる. したがって (x',y') で

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^{\lambda} f \equiv 0 \mod (F,\Psi)$$

である.

さて, 系 1 に従って, (I) の変形 $(J) = \{(\varphi,\delta')\}$ を次のように作る.

$$\varphi = f\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^{\lambda} + A_1F_1 + \cdots + A_{2m-1}\Psi_m,\quad \delta' = \delta\cap\alpha_1\cap\ldots\cap\alpha_{2m-1}$$

[8]点 (x',y') の集合の空間 (x) への射影とは, 点 (x') の集合のことである.

(J) は (x^0, y^0) で擬底を持つ. [訳注. (F, Ψ) が擬底である.] 残っているのは第 2 条件 [訳注. 系 1 の] を調べることだけである. 函数方程式

$$A_0 \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^{\lambda} + A_1 F_1 + \cdots + A_{2m-1}\Psi_m = 0$$

を考える. $(A_0, A_1, \ldots, A_{2m-1})$ を $[(\gamma), (\gamma')]$ の任意の点 (x', y') における任意の解とする. そうすると, $F_1, \ldots, \Psi_m$ は Σ 上で恒等的に零であるのに $\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}$ はそうではないので, A_0 は Σ 上で恒等的に零でなければならない. したがって (x', y') で $A_0 \in (I)$ である. C. Q. F. D.

いまやエレメント Σ は解析集合であることが明らかとなった. 何故なら, 今考えているイデアルは不定域イデアルであるから, 擬底の函数の共通零の集合は (x^0, y^0) の近傍で Σ と一致しなければならない.

4. 射影. 空間 $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ に点 (x', y') の集合が与えられているとき, 点 (x') の集合を与えられた集合の, 空間 (x) 上への射影と言う. $\mathfrak{D}$ を空間 (x) の領域, $\mathfrak{D}'$ を空間 (y) の連結または非連結な領域とし, さらに (I) を $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ に空隙点をもたないような空間 (x, y) における正則不定域イデアルとし, Σ を領域 $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ における (I) の零点集合とする. $\mathfrak{D}$ の任意の点 (x) に対し, Σ の空間 (y) 上への射影は $\Subset \mathfrak{D}'$ であると仮定する. そして, $\delta \subseteq \mathfrak{D}$ とし, f を $(\delta, \mathfrak{D}')$ のすべての点で (I) に属するような函数として, $(J) = \{(f, \delta)\}$ を考える. (J) は明らかにイデアルを作る. これを, $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ に関する, 空間 (x) 上への <u>イデアル (I) の射影</u> と言う.

定理 1. <u>もしイデアル (I) が $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ のすべての点で擬底を持つなら, 射影 (J) は $\mathfrak{D}$ に対してそうなる.</u>

実際, (x^0) を $\mathfrak{D}$ の任意の点とし, (J) が (x^0) で擬底を持つことを示せばよい. <u>Weierstrass</u> によって, Σ と解析集合 $x_i = x_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の交わりは明らかに有限個の点である. (x^0, y^0) をそれらの点 (もし存在するなら) の任意の一つとする. (y^0) を中心に多円筒 Δ' $(\Delta' \Subset \mathfrak{D})$ を描き, さらに (x^0) を中心に多円筒 Δ $(\Delta \Subset \mathfrak{D})$ を十分小さく描いて $\Sigma \cap (\Delta, \Delta')$ の空間 (y) 上への射影が $\Subset \Delta'$ であるようにし, (I) の (Δ, Δ') に関する空間 (x) 上への射影 (K) を考える. Δ (十分小さい) 内で (J) は明らかにこのようなイデアル (K) の有限個の交わりであるから, <u>Cartan の系</u> により, (K) に対して命題を確かめればよい.

(K_1) を (I) の (Δ, Δ') に関する空間 $(x, y_1, \ldots, y_{m-1})$ 上への射影とする. もしこの場合にこの命題が正しければ, (K) に対しても正しい. [訳注. すなわち m に関する帰納法である.] それで $m = 1$ と仮定し, y_1 を y

と表わす．この場合 Δ' は円である．この状況のもとで (K) が (x^0) で擬底を持つことを証明しよう．

イデアル (I) は (Δ, Δ') の近傍のすべての点で擬底を持つから, 第 VII 論文の定理 3 によって, (Δ, Δ') の近傍で大域的な擬底を持つ．それを $(F, \Phi_1, \ldots, \Phi_p)$ と表す．これらの函数の共通零点の集合は Σ と一致しなければならない．それで $F(x^0, y) \not\equiv 0$ と仮定することができる．もしそうでないなら Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ のどれかがそうなる．[訳注．それと取り替えればよい.] さらに, Σ は Δ' の境界上に点を持たないから, そこで $F(x^0, y) = 0$ は根を持たないと仮定することができる．さらに, Δ をもっと小さくして, (Δ, Δ') の近傍で $F = \omega F_1$ となるようにする．この ω は零を取らない正則函数であり, F_1, は係数が Δ の近傍における (x) の正則函数であるような, y の多項式で, その最高次の係数は 1 である．さらに Δ の近傍のすべての (x) に対して $F_1 = 0$ は Δ' 内にしか根を持たない．それで F 自身がそうであると仮定する．λ を多項式 F の次数とする．そうすると, 剰余の定理により, Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ は y_1 の, 次数 $< \lambda$ の多項式であると仮定することができる．[訳注．擬底を取り替えただけである.]

(x') を Δ の任意の点とし, $\varphi(x, y)$ を y の, $\leq 2\lambda - 2$ 次の 多項式で, $[(x'), \Delta']$ のすべての点で (I) に属し, それ以外は任意のものとする．もし (x') を中心とする多円筒 δ を十分小さく描くなら (δ, Δ') のすべての点で $\varphi \equiv 0 \mod (F, \Phi)$ となる．したがって 第 VII 論文の定理 1 によって, φ は

$$\varphi = C_0 F + C_1 \Phi_1 + \cdots + C_p \Phi_p$$

と表される．ここで C_i $(i = 0, 1, \ldots, p)$ は (δ, Δ') の近傍での正則函数である．剰余の定理によって C_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ は次数 $\leq \lambda - 1$ の y の多項式に選ぶことができる．C_0 も y の多項式に選べることを示そう．実際, Ψ を, δ の近傍における (x) の正則函数を係数とする, y の多項式として, $C_0 = \Psi/F$ である．そして δ のすべての点 (x') に対して方程式 $F = 0$ は Δ' 内にしか根を持たない．しかも C_0 は (δ, Δ') の近傍で正則である．他方, $a(x)$ を y の多項式 Ψ の最高次係数とし, η を y に関する方程式 $\Psi = 0$ の任意の根とするとき解析函数 $a(x)\eta(x)$ は δ の近傍で分岐点以外の特異点を持たない．この事から C_0 は y の多項式であることが導かれる．[訳注．訳は原文のまま．F の最高次係数が 1 だから, C_0 が多項式であることは明らかである.] したがって次数は $\leq \lambda - 2$ 次である．

このようにして y の, $\leq 2\lambda - 2$ 次の多項式 $\varphi(x, y)$ で, $[(x'), \Delta')]$ の近傍のすべての点で (I) に属するものは上の形に表わすことができ, その $C_0, C_1, \ldots, C_p$ は示された性質を持つことが分かった．逆もまた明らかに

正しい. それで

$$F = y^\lambda + A_1 y^{\lambda-1} + \cdots + A_\lambda, \qquad \Phi_i = A_{i1} y^{\lambda-1} + \cdots + A_{i\lambda},$$
$$C_0 = u_2 y^{\lambda-2} + \cdots + u_\lambda, \qquad C_i = u_{i1} y^{\lambda-1} + \cdots + u_{i\lambda}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$
$$\varphi = B_0 y^{2\lambda-2} + \cdots + B_{2\lambda-2}$$

と置く. そうすると, [訳注. φ が (I) に属するための] 必要十分条件は

$$B_0 = u_2 + \sum A_{i1} u_{i1},\ \ldots,\ B_{2\lambda-2} = u_\lambda A_\lambda + \sum u_{i\lambda} A_{i\lambda}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$

と同等である.

この特別の場合として, (x') において $f(x) \in (K)$ となるための必要十分条件は f が (u) と共に連立函数方程式

$$u_2 + \sum A_{i1} u_{i1} = 0,\ \ldots,\ f = u_\lambda A_\lambda + \sum u_{i\lambda} A_{i\lambda}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$

を満たすことである. この (x') は Δ の任意の点であり, A_i, A_{ij} $(j = 1, \ldots, \lambda)$ は Δ において与えられた正則函数である. このように, イデアル (K) はイデアル (L) と同等であり, したがって (x^0) において擬底を持つ. C. Q. F. D.

II. 内分岐領域.

5. 定 義. H. Behnke と P. Thullen の著書に沿って, 複素 n 変数 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の有限空間における, 分岐点を内点として含まない領域, その境界点, 境界点としての分岐点等を考える. 内分岐領域を定義しよう.

M を領域 $\mathfrak{D}$ の分岐点とする. もしそれが次の条件

1°. 位数が有限である[9].

2°. $\underline{M}$ を M の基点 (Grundpunkt) とするとき, $\underline{M}$ を含む単葉な領域 $\underline{\delta}$ があって, δ を $\mathfrak{D}$ の $\underline{\delta}$ 上の部分の, M を境界点とする連結成分とするとき, $\underline{\delta}$ 内にある δ の境界点の基点の集合が解析面をなす.

を満たすなら, それを 非超越的分岐点 と呼ぶ.

$\mathfrak{D}$ を上記のように定義された任意の領域とする. $\mathfrak{D}$ に非超越的分岐点の一部分を付け加えた集合 $\mathfrak{D}'$ を考える. 付け加える集合は空集合でもよいが, そうでないときは, $\mathfrak{D}'$ に付け加えられた $\mathfrak{D}$ のすべての分岐点 M に

[9] この著書の 13 頁の, 葉数 m の代わりに, 数 $m-1$ を分岐点の位数と呼ぶ.

対し, M の基点 $\underline{M}$ を含む単葉な領域 $\underline{\delta}$ があって, δ を $\mathfrak{D}$ の $\underline{\delta}$ 上の部分の M を境界点とする連結成分とするとき, δ の非超越的分岐点はすべて $\mathfrak{D}'$ に含まれるとする. 以後 $\mathfrak{D}'$ を <u>領域</u> と呼ぶ. 領域 $\mathfrak{D}'$ の点で分岐点でないものはすべて <u>通常点</u> と呼ばれる. このように拡張された二つの領域の関係や交わりは, 与えられた領域の通常点よりなる領域を使って定義すればよい.

$\mathfrak{D}$ を或る領域, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ の通常点の集合とする. このとき, $\mathfrak{D}_0$ が擬凸状なら $\mathfrak{D}$ を <u>擬凸状</u> と呼ぶ.

$\mathfrak{D}$ を或る領域, P を $\mathfrak{D}$ の任意の点とし, その座標を以後, 一般に (x) と表わす. 函数 $f(P)$ が次の条件

1° $\mathfrak{D}$ のすべての点に対して f の一つのしかもただ一つの有限値が対応する.
2° $f(P)$ は P の連続函数である.
3° $\mathfrak{D}$ のすべての通常点の近傍で $f(P)$ は (x) の正則函数である.

を満たすとき, それを $\mathfrak{D}$ で <u>正則</u> と言う. $\mathfrak{D}$ で正則であり, $\mathfrak{D}$ を含む他のすべての領域に対してそうではない函数が存在するとき, $\mathfrak{D}$ を <u>正則域</u> と呼ぶ.

<u>H. Cartan</u>[10] にしたがって

$$\Delta \Subset (R), \quad f_i(P) \in A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

なる形で表される点集合 Δ を <u>多面体領域</u> と呼ぶ. ここで (R) は或る正則域の部分領域 (Teilbereich, 連結または非連結), [訳注. すなわち, (R) の異なる点で異なる函数要素を持つ函数が存在する.] $f_i(P)$ は (R) における正則函数, A_i は平面の <u>単連結</u> な有界 <u>閉</u> 領域を意味する. この形の領域 (閉, 連結または非連結) は最初 <u>A. Weil</u>[11] によって考えられた. 第 I 論文の基本補題 (定理 II) を確立したのはこれに対してであったし, それを再構成しようとしているのもこれに対してである.

6. (H) 性. 空間 (x) に単葉な領域 $\mathfrak{D}$ を描き, $\mathfrak{D}$ 内に解析集合 S を考える. S 上の函数 u が, もし次の条件

1° S のすべての通常点に対し u で定められた一つの値が対応し, u は局所的には空間 (x) における正則函数の制限 (trace) となっている.
2° u は S の任意の点の近傍における通常点に対して有界である.

[10] H. Cartan, 1950, No. 21.
[11] A. Weil, 1932 (C. R.), 1935 (Math. Annalen).

を満たすなら, それを 正則 と言う. u が S の点 P の或る近傍で正則ならその点で正則と言う.

M を S の点とし u を M における S 上の正則函数とする. もし u が, 有り得る特異点を除いて, 空間 (x) の正則函数の制限になっているなら, u は (H) 性を持つと言う. もしすべての u が (H) 性を持つなら, 点 M が (H) 性を持つという[12]. この性質を調べるため, 次の補題を導入する.

H. Cartan の補題. (三環定理) 空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 3)$ において次の形の三つの単葉領域 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ を考える.

$$
\begin{array}{lllll}
(\Delta_1) & \rho_1 < |x_1| < r_1, & |x_2| < r_2, & |x_3| < r_3, & (x_4, \ldots, x_n) \in \mathfrak{D} \\
(\Delta_2) & |x_1| < r_1, & \rho_2 < |x_2| < r_2, & |x_3| < r_3, & \quad {}'' \qquad {}'' \\
(\Delta_3) & |x_1| < r_1, & |x_2| < r_2, & \rho_3 < |x_3| < r_3, & \quad {}'' \qquad {}''
\end{array}
$$

ここで $\mathfrak{D}$ は単葉領域, r_i $(i = 1, 2, 3)$ は正の数, ρ_i は 0 または正の数である. (i, j, k) を $(1, 2, 3)$ の巡回置換の任意のものとし, $\Delta_j \cap \Delta_k$ における正則函数 $g_i(x)$ で, 恒等的に

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0$$

となるものが与えられたとすると, 各 Δ_i における正則函数 $h_i(x)$ を, 恒等的に

$$g_1 = h_2 - h_3, \quad g_2 = h_3 - h_1, \quad g_3 = h_1 - h_2$$ [13]

となるように見つけることができる.

補題 1. 有限空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 3)$ における単葉領域 $\mathfrak{D}$ における解析面 S と S 上の正則函数 u および S 上の $n-3$ 次元の解析集合 S_0 が与えられているとする. このとき, もし u が $S - S_0$ のすべての点で (H) 性を持つなら S_0 に対してもそうである.

実際, (x^0) を S_0 の任意の点とする. (x^0) で u が (H) 性を持つことを言えばよい. (x^0) を原点とし, 以下原点の十分小さな近傍内のみで考える. S_0 は $(n-3)$ 次元だから, 座標系 (x) と正の数 ρ, r, r' を適当に選び, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$, $r_1 = r_2 = r_3 = r$, および $\mathfrak{D} : |x_i| < r'$ $(i = 4, \ldots, n)$ として, Cartran の補題に沿って領域 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ を描き, S_0 は各 Δ_j $(j = 1, 2, 3)$ の近傍に点を持たないようにする.

そうすると, u は Δ_1 の近傍におけるすべての S の点で (H) 性を持つ. したがって問題 (C_2) に関する 第 VII 論文の定理 2 により, Δ_1 の近傍における正則函数 $F_1(x)$ を, それの制限が u になるように求めること

[12] 例えば, 空間 (x, y) における解析面 $y^2 = x^3$ に対し, 点 $(0, 0)$ は (H) 性を持たない.
[13] H. Cartan : Note sur le premier problème de Cousin, 1938, C. R.

ができる.[14] (常に S の特異点を除いて.) 同様に Δ_2 と Δ_3 に対して正則函数 $F_2(x)$, $F_3(x)$ を求めることができる.

$\Delta_1 \cap \Delta_2$ において $F_1 - F_2$ は S 上恒等的に零である. $F(x) = 0$ を S の方程式とする. $F(x)$ は $(C) : |x_i| < r,\ |x_j| < r'\ (i = 1, 2, 3; j = 4, \ldots, n)$ における重複因子を持たない正則函数であるから, g_3 を $\Delta_1 \cap \Delta_2$ における或る正則函数として, 恒等的に

$$F_1 - F_2 = g_3 F$$

が得られる. 同様に $\Delta_2 \cap \Delta_3$, $\Delta_3 \cap \Delta_1$ に対してそれぞれ

$$F_2 - F_3 = g_1 F, \qquad F_3 - F_1 = g_2 F$$

が得られる.

このとき

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0$$

だから, Cartan の補題 によって, 各 Δ_i における正則函数 $h_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ を恒等的に

$$g_1 = h_2 - h_3, \quad g_2 = h_3 - h_1, \quad g_3 = h_1 - h_2$$

となるように見つけられる. ここで

$$\Phi_i = F_i - h_i F \qquad (i = 1, 2, 3)$$

と置く. そうすると, 各 Φ_i は Δ_i における正則函数で, S 上 u となる. しかも恒等的に

$$\Phi_i - \Phi_j = (F_i - F_j) - (h_i - h_j)F = g_k F - g_k F = 0$$

であるから, 各 Φ_i は $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ におけるただ一つの正則函数 $\Phi(x)$ の部分であるにすぎない.

そうすると, Hartogs によって $\Phi(x)$ は多円筒 (C) において正則でなければならない. v を $\Phi(x)$ の S 上への制限とする. $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ 内の S の部分では恒等的に $u = v$ である. 他方, (C) における S の各成分 (既約) は (C) における有理型函数の極の位置であると考えられるから, Hartogs によって $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ 内に必ず点を持つ. したがって (C) 内の S で $u = v$ となる. このように u は原点で $\Phi(x)$ の制限である. C. Q. F. D.

7. (**W**) **函数**. 空間 (有限) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ において単葉な領域 $\underline{\mathfrak{D}}$ と $\underline{\mathfrak{D}}$ 上の多葉域 (Überlagerungsbereich) $\mathfrak{D}$ を考える. [訳注. $\underline{\mathfrak{D}}$ 上の,

[14] 閉多円筒に関する定理を今の場合に応用するためには, 何時ものように $y = 1/x$ を考えればよい. [訳注. 6]

相対境界の無い内分岐領域のことである.] $\mathfrak{D}$ は連結でなくてもかまわない. $\mathfrak{D}$ は有限葉と仮定する. そうすると $\mathfrak{D}$ は一定葉数になる. その葉数を ν とする. P を 座標が (x) の $\mathfrak{D}$ の点とし, $\eta_1(P), \eta_2(P), \dots, \eta_m(P)$ を $\mathfrak{D}$ における正則函数とする. $\underline{\mathfrak{D}}$ の, 同じ座標を持つ通常点のすべての対に対して, $\eta_1(P)$ の函数要素は異なる と仮定する. 空間 $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ において

$$y_i = \eta_i(P) \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

によって与えられる解析集合 Σ を考える. $\mathfrak{D}$ の点 P に対し, 座標 (x, η) を持つ Σ の点 M が対応する. 逆に, η_1 の性質から, Σ の通常点に対しては $\mathfrak{D}$ の一つのしかもただ一つの点が対応する.

Δ を空間 (x, y) の領域であって, $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ [訳注. (y) は任意] によって与えられる領域に含まれ, Σ の点を含むものとする. Δ における正則函数 $F(x, y)$ であって, Σ 上の任意の正則函数 u に対し, $\Sigma \cap \Delta$ の任意の点 M で uF が (H) 性を持つようなものを考え, それを Δ における Σ に関する (W) 函数と呼ぶ. 明かに, Δ における Σ に関する (W) 函数の全体は定域 Δ における正則イデアルを作る.

$P_1, P_2, \dots, P_\nu$ を点 (x) 上の $\mathfrak{D}$ の点とし, 函数

$$F_1(x, y) = \prod [y_1 - \eta_1(P_i)] \quad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

を作る. Weierstrass によって良く知られているように,

≪ $\mathfrak{D}$ 上の任意の正則函数 $u(P)$ に対し, $\underline{\mathfrak{D}}$ 内の点 (x) の正則函数を係数とする y_1 の多項式 $\Phi(x, y_1)$ が対応して, $F_1 = 0$ 上で

$$u = \frac{\Phi}{(\partial/\partial y_1) F_1}$$

となる.≫

通常の証明[15]は $\mathfrak{D}$ が連結であろうとなかろうと関係がない. 他の言い方をすると,

$\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}$ は領域 $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ における Σ に関する (W) 函数である.

函数 η_1 を良く見よう. σ を領域 $\mathfrak{D}$ の分岐点集合とする. σ は $\mathfrak{D}$ 上の解析面である. (すなわち Σ 上の $(n-1)$ 次元の解析集合の $\mathfrak{D}$ への像である.) したがって σ は 分岐面 と呼ばれる. σ_0 を σ の $\mathfrak{D}$ における任意の (既約) 成分とし, P' を σ_0 の点で, σ_0 の点の基点の集合 $\underline{\sigma_0}$ (σ_0 の基点

[15] W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II 1, 1929, pp. 116,117 を見よ.

集合と呼ぶ) が $\underline{P'}$ で通常であり, σ の他のどの成分も P' を通らないような, それ以外は任意のものとする. 空間 (x) における $\underline{P'}$ の近傍に $1:1$ 擬等角写像を施して, 解析面 $\underline{\sigma}$ は $x_1 = 0$ で与えられていると考えることができる. $\mu - 1$ をこの分岐面の位数とする. そうすると, P' の近傍で

$$\eta_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots, \qquad t = x_1^{\frac{1}{\mu}}$$

が得られる. a_i $(i = 0, 1, \ldots)$ は $(x_2, \ldots, x_n)$ の正則函数である. a_1 の性質により二つの場合が生じる.

<u>場合 1. $a_1 \not\equiv 0$ の場合</u>. S を $F_1(x, y_1) = 0$ で与えられる空間 (x, y_1) の解析面, M' を P' に対応する S 上の点とし, さらに S_0 を P' が存在する $\mathfrak{D}$ のシートに対応する M' の十分小さい近傍における S の (既約) 成分とする. もし P' において $a_1 \neq 0$ なら, S_0 は明らかに M' で通常である. したがってこの場合 S_0 の特異点の集合は高々 $n-2$ 次元である. 補題 1 により, S_0 の点はすべて (H) 性を持つ. このような性質を持つすべての分岐面を η_1 に関して <u>第 1 種</u> であると言う.

<u>場合 2. σ_0 上 $a_1 \equiv 0$ の場合</u>. T_0 を σ_0 に対応する S_0 の点集合とする. この場合函数 $(x_1)^{\frac{1}{\mu}}$ は T_0 のどの点においても S_0 に関して (H) 性を持たない. この種の分岐面を η_1 に関して <u>第 2 種</u> であると言う. [訳注 7]

P を $\mathfrak{D}$ の点とする. もし $\eta_1(P) = \eta_1(P')$ となるような P 以外の同じ座標を持つ点 P' が存在するなら, P を η_1 に関する <u>重複点 (point équivoque)</u> と言う. τ を $\mathfrak{D}$ の η_1 に関する重複点の集合とする. τ は明かに $\mathfrak{D}$ 上の解析面である. それを <u>重複面</u> と呼ぶ. M を η_1 に関する $\mathfrak{D}$ の重複点 P に対応する S の点とする. そうすると, 少なくとも二つの M を通る S の分枝が存在する. この場合, M は S に関して (H) 性を持たない. 実際, S 上の M の近傍における函数 u で, 一つの分枝で 0, 他の分枝で 1 となるものを考える. 定義により, u は S 上の正則函数であるが, M の近傍における空間 (x, y_1) の正則函数で, S の通常点で u となるものは存在しない.

このようにして, S の点で $\mathfrak{D}$ の, η_1 に関する第 2 種の分岐点または重複点に対応する点はすべて (H) 性を持たないことが分かった. S の他のすべての点は明らかに (H) 性を持つ. このことから次の結果が得られる.

<u>Δ を空間 (x, y) における有界単葉な領域で, 境界と共に領域 $(x) \in \mathfrak{D}$ に含まれるものとし, $U(x, y)$ を Δ における正則函数で</u>,

$$u_0(P) = U(x_1, \ldots, x_n, \eta_1(P), \ldots, \eta_m(P))$$

<u>と置いたとき, この函数 u_0 が η_1 に関する $\mathfrak{D}$ の第 2 種の分岐面 σ' および重複面 τ 上で恒等的に零になるとする. そうすると正の整数 λ を, U^λ</u>

が Δ における, Σ' に関する (W) 函数となるように見つけることができる.

実際, $\mathfrak{D}_0$ を $\Delta\cap\Sigma$ に対応する $\mathfrak{D}$ 内の領域とする. $\partial F_1/\partial y_1$ に $y_i=\eta_i(P)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ を代入して $v_0(P)$ が得られる. [訳注. F_1 は, 実際は, (x,y_1) のみの函数である.] $\mathfrak{D}_0$ にたいし, 正の整数 λ を, u_0^λ が σ' と τ 上で, 次元の低い ($\mathfrak{D}$ 上の) 解析集合を除いて v_0 で割り切れるように求めることができる. M を Δ 内の Σ の任意の点とし, u を M における Σ 上の任意の正則函数とすると, Weierstrass により uU^λ は M の近傍のすべての点で, Σ 上の $n-2$ 次元の集合を除いて (H) 性を持つ. したがって, 補題 1 により, 例外無しにそうなる. [訳注 8] C. Q. F. D.

(x^0) を $\underline{\mathfrak{D}}$ の点とし, (x^0) を中心に多円筒 $(C)\Subset\mathfrak{D}$ を描く. R を (C) のすべての点に対して $|\eta_i|<R$ $(i=1,2,\ldots,m)$ となるような正の数とし, 空間 (y) に半径 R の多円筒 (Γ) を描き, $[(C),(\Gamma)]$ を Δ とする.

T を Δ における Σ に関する (W) 函数全体の共通零点の集合とし, S_0 を Δ 内の Σ の特異点の集合とすると, $T\subseteq S_0$ である. [訳注 9]

実際, 先ず $T\subseteq\Sigma$ である. 何故なら $(x)\in\underline{\mathfrak{D}}$ にたいする Σ に付随する幾何学的 (不定域) イデアルは Cartan の定理 により Δ の近傍のすべての点で擬底を持つから, 第 VII 論文の定理 3 により, Δ における擬底 $(\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_p)$ を持つ. 函数 Φ_i $(i=1,2,\ldots,p)$ の Δ における共通零点の集合は Σ である. 他方, Φ_i は Σ 上恒等的に零であるから, それらはすべて (W) 函数である. したがって $T\subseteq\Sigma$ である.

次のような形の, 空間 (x) の非特異線形写像 L を考える.

$$x_i'=\sum A_{i,k}x_k+\sum A_{i,n+l}y_l,\quad y_i'=\sum A_{n+i,k}x_k+\sum A_{n+i,n+l}y_l,$$

$$(i,k=1,2,\ldots,n;\ j,l=1,2,\ldots,m,)$$

$$|A_{p,p}-1|<\varepsilon,\ |A_{p,q}|<\varepsilon\quad(p\not\equiv q;\ p,q=1,2,\ldots,n+m)$$

ε は後に説明する正の数である. Σ と Δ, の空間 (x',y') への像を同じ文字で表わす. 元の空間の領域 $(x)\in\underline{\mathfrak{D}}$ において $F_i(x,y_i)=0$ $(i=1,2,\ldots,m)$ で表わされる解析集合 Σ_1 を考える. ここで

$$F_i(x,y_i)=\prod[y_i-\eta_i(P_j)]\quad(j=1,2,\ldots,\nu)$$

であり, P_j は平面の点 (x) 上の $\mathfrak{D}$ の点である. Σ は Σ_1 の幾つかの成分よりなる. $\underline{\mathfrak{D}}$ の完全内部に含まれ, (C) を完全内部に含む多円筒 $|x_i-x_i^0|<r_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を描き, 正の数 $R'>R$ を, この多円筒のすべての点 (x) で $|\eta_i|<\rho<R'$ $(i=1,2,\ldots,m)$ となるように取る. ρ

は或る定数である. そうすると p を $1, 2, \ldots, m$ のどれかとするとき, Σ_1 は m 個の点集合

$$|x_i - x_i^0| < r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad |y_p| = R'$$

の各々の近傍に点を持たない. [訳注. y_p 以外は任意.] ε を十分小さく取ると (x', y') においてもそうである. 正確に言うと, (x'^0) を (x^0) の像とするとき, [訳注. (x^0) と同じ座標を持つ (x') 空間の点と考えればよい.] 函数 $F_j(x', y') = F_j(x, y_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ は

$$|x_i' - x_i'^0| < r_i, \quad |y_j'| < R' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$$

の近傍で定義されていて, 正則である. そしてさらに函数 $F_j(x', y')$ の共通零点は m 個の点集合

$$|x_i' - x_i'^0| < r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad |y_p'| = R'$$

の近傍に点を持たない. この状勢の下で, Weierstrass により, 連立方程式系 $F_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ を $|x_i' - x_i'^0| < r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ の中で (y') に関して解くことができる. Σ は

$$|x_i' - x_i'^0| < r_i, \quad |y_j'| < R' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$$

における Σ_1 の幾つかの (既約) 成分の和であるから, Σ を表示する方程式に対しても同じである. $\mathfrak{D}'$ を $|x_i' - x_i'^0| < r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ 上の Σ に対応する多葉域 (連結または非連結) とし, $y_j' = \eta_j'$ $(j = 1, \ldots, m)$ を Σ の方程式とすると η_j' は $\mathfrak{D}'$ 上で正則函数である. ε を十分小さく取り, Δ は多円筒

$$|x_i' - x_i'^0| < r_i \quad |y_j'| < R' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$$

の完全内部にあるとする.

$(A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{n+m,n+m})$ を上に定めた半径 ε とする複素 $(n+m)^2$ 次元の空間の多円筒の点と考える. 明らかに η_1' は第 1 類 [訳注. ベールのカテゴリーで.] の点集合の点 (A) を除いて η_1 と同じ性質を持つ. [訳注. 同じ座標を持つ異なった点で異なる函数要素を持つ.] M を Σ の通常点の任意のものとする. 容易に分かるように, 第 1 類の集合 A を除いて, 対応する点は η_1' に関する $\mathfrak{D}'$ の通常点であり, 重複点でもない. したがって (x', y') がその条件をみたすような (A) を見つけることができる.

Cartan の定理と第 VII 論文の定理 3 により, Δ 内の正則函数 $\Psi(x)$ で, Ψ の Σ 上への制限の $\mathfrak{D}'$ への像が η_1' に関する第 2 種の分岐点と重複点で恒等的に零になり M では零にならないものが存在する. 今言ったことか

ら λ を或る正の整数とするとき, Ψ^λ は Σ に関する Δ における (W) 函数である. したがって $T \subseteq S_0$ である. [訳注 10] C. Q. F. D.

8. 零点定理. 次のような補題がある.

Hilbert–Rückert の補題. $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, $f(x)$ を点 (x^0) における正則函数とする. もし f がすべての F_i の共通零点集合上で恒等的に零になるなら $f^\lambda \equiv 0 \mod (F)$ となる正の整数 λ を見つけることができる.[16]

もし $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ と $f(x)$ が正則で, (x^0) を中心とする多円筒 (C) の中で上記の様に関係づけられているなら, 補題は (C) のすべての点で成り立つ. 従って, 第 VII 論文の定理 1 により, この補題は $(C_0) \Subset (C)$ なるすべての多円筒で成り立つ.

この補題を上の結果に応用して次の結果が得られる.

補題 2 $F(x, y)$ を Δ における正則函数とし, Σ の特異点集合 S_0 上で恒等的に零になるとする. Δ' を $\Subset \Delta$ なる領域とする. このとき 正の整数 λ を F^λ が Δ' における Σ に関する (W) 函数となるように見つけることができる.

さて 我々の研究の基本的な性格は解を 見つける ことにある. したがって零点定理の中の数 λ がどのようにして求まるのかを明らかにするため, これを直接証明し直す. [訳注. 証明は Σ の次元に関する帰納法である.]

1° $F_1, F_2, \ldots, F_p$ を空間 $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ $(n \geq 0, m > 0)$ の点 (x^0, y^0) における正則函数とし, そのどれも恒等的には零でないとする. Σ をそれらの函数の共通零点の集合とする. Σ の (既約) 成分は n 次元であると仮定する. そうすると (x^0, y^0) の近傍における Σ 上恒等的に零となるすべての正則函数 $f(x, y)$ に対して正の整数 μ と Σ 上で恒等的には零にならない 正則函数 $H(x, y)$ を, (x^0, y^0) の近傍で $Hf^\mu \equiv 0 \mod (F)$ となるように見つけることができる.

証明のため (x^0, y^0) は Σ の点であると仮定する. 以下, 我々は常に与えられた状勢が成り立つような (x^0, y^0) の近傍内で考える. 座標系と 正の数 r, ρ, ρ' $(\rho > \rho')$ を適当に選んで, 多円筒 $\Delta = [(\gamma), (\gamma')]$:

$$
\begin{aligned}
(\gamma) \ &:\ |x_i - x_i^0| < r \qquad && (i = 1, 2, \ldots, n), \\
(\gamma') \ &:\ |y_j - y_j^0| < \rho \qquad && (j = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

を描き, (x) が (γ) 内にあるとき, q を $1, 2, \ldots, m$ のどれかとして, Σ は $|y_q - y_q^0| \geq \rho'$ 上に点を持たないと仮定する. Weierstrass によって次のよ

[16] S. Bochner and W. Martin, Several complex variables, 1948, Chapter X を見よ.

うな m 個の函数 $\Phi_j(x,y_j)$ が得られる．すなわち, $\Phi_j(x,y_j)$ は重複因子を持たない y_j の多項式で, その係数は (γ) 内の (x) の正則函数であり, その最高次係数は1である．そして Σ の, 空間 (x,y_j) への射影は $(x)\in(\gamma)$ に対し $\Phi_j=0$ で与えられる．[訳注．$n=0$ のときも考えられており, そのときは $\Phi_j=y_j-y_j^0$ である.]

ここで ν を j によらない或る正の整数とし (x^0,y^0) において $\Phi_j^\nu\equiv 0 \mod (F)$ となることを示そう．(F_k,Δ) $(k=1,2,\ldots,p)$ によって生成される不定域イデアル (I) と, それの Δ に関する空間 (x,y_j) 上への射影 (J) を考える．Σ' を Σ の空間 (x,y_j) 上への射影とすると, $(x)\in(\gamma)$ にたいして Σ' は解析面である．さて, 定理1により, (J) は $[(x)\in(\gamma),|y_j-y_j^0|<\rho]$ のすべての点で擬底を持つ．したがって Σ' は (J) の零点集合でなければならない．そうすると, Φ_j は Σ' 上恒等的に零になるから, 整数 ν' を (x^0,y^0) で $\Phi_j^{\nu'}\in(J)$ となるように見つけることができる．[訳注 11] そうすると (x^0,y^0) で $\Phi_j^{\nu'}\in(I)$ である．ν を $j=1,\ldots,m$ にたいする ν' の最大とする．そうすると (x^0,y^0) で $\Phi_j^\nu\equiv 0 \mod (F)$ である.

$\Phi_j=0\,(j=1,\ldots,m)$ によって与えられる Δ 内の解析集合 T を考える．Σ は Δ 内で T の幾つかの (既約) 成分からなる．Σ' を Σ に含まれない成分の和とする．Δ 内で T に付随する幾何学的不定域イデアル (K) を考える．容易に分かるように, $(\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_m)$ は Δ における (K) の擬底を与える. (例えば 剰余の定理 によって) [17]．φ を Σ' のすべての成分で恒等的に零になり, Σ の成分ではそうはならないような Δ における正則函数とする. そうすると (x^0,y^0) で $f\varphi\equiv 0 \mod (\Phi)$ である．さて (x^0,y^0) で $\Phi_j^\nu\equiv 0 \mod (F)$ であった．したがって (x^0,y^0) で $(f\varphi)^\mu\equiv 0 \mod (F)$ である．ここで $\mu=m(\nu-1)+1$ である．これはこの命題が正しいことを示している.

2° 上記の零点定理を確認しよう．どの $F_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,p)$ も恒等的には零でないと仮定する．先ず, Σ が同じ次元の成分からなっているときに成立するなら, 常に成立することを見よう．例えば, $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ とし, Σ_1 は λ $(0<\lambda<n)$ 次元, Σ_2 は $\lambda-1$ 次元とする．Σ_2 は (x^0) の近

[17] 実際, $f(x,y)$ を T の点 (a,b) の近傍で, T 上恒等的に零になる正則函数とする．空間 (x) で (a) を中心とする多円筒 δ および空間 (y) で (b) を中心とする多円筒 δ' を描き, y_j 平面の成分を δ_j と表す．そして上記の状勢はこの (δ,δ') でも成り立っているとする．δ 内のすべての点 (x) に対して $\Phi_j(x,y_j)=0$ は δ'_j 内に λ_j 個の根を持つとする．そうすると (δ,δ') 内で恒等的に (1) $f=f_0+\varphi\Phi_1$ と書ける．ここで f_0,φ は正則函数であり, さらに f_0 は y_1 の $<\lambda_1$ 次の多項式である．δ 内の点 (x') を $\Phi_1(x',y_1)=0$ が λ_1 個の根 $\eta_1,\ldots,\eta_{\lambda_1}$ を持つように選び, さらに δ'_k 内に $y'_k(k=2,\ldots,m)$ を $\Phi_k(x',y'_k)=0$ となるように取る．(1) の式でそれらの値を代入すると $f'=f'_0+\varphi'\Phi'_1$ が得られる．ここで $y_1=\eta_l$ $(l=1,\ldots,\lambda_1)$ を代入すると $\Phi'_1=0,\ f'=0$ であるから $f'_0=0$ である．f'_0 は $<\lambda_1$ 次の y_1 の多項式であるからそれは $f'_0\equiv 0$ であることを意味する．すなわち f_0 の係数はすべて $\Phi_k(x',y_k)$ $(k=2,\ldots,m)$ 上で零となる．[訳注．帰納法により, これで証明されている.]

傍で正則函数 $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_q$ の共通零点の集合として与えられていると仮定し, 空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y)$ の点 $(x^0, 0)$ の近傍で

$$F_1(x),\ F_2(x)\ , \ldots,\ F_p(x),\ y\Phi_1(x),\ \ldots,\ y\Phi_q(x)$$

を考えると, この共通零の集合は明らかに λ 次元の成分からなる. $f(x)$ は条件を満たすから, 命題は新しい函数系に対して正しい. したがって $y=0$ とおいて (F) に対しても正しい. 同様の議論は疑いもなく一般な場合にも正しい. [訳注 12]

したがって Σ の成分は r $(< n)$ 次元であると仮定する. 上の補題により, (x^0) で $Hf^\mu \equiv 0 \mod (F)$ である. $(H, \mu$ 上記の意味を持つ.) さて, もし (x^0) で, ν を或る正の整数として, $f^\nu \equiv 0 \mod (H, F)$ となるなら (x^0) において $f^{\nu+\mu} \equiv 0 \mod (F)$ である. Σ' を Σ と $H=0$ の交わりとすると, H の性質により Σ' は (もし存在すれば) $(r-1)$ 次元である. したがってもし命題が $r-1$ 次元のときに正しければ r に対しても正しい. この命題は $r=0$ のときは明らかに正しい. (前の命題により) したがって常に正しい.

9. **(Z) イデアル.** もう一度 7 節の初めに述べた, 空間 (x) 上の領域 $\mathfrak{D}$ と $\mathfrak{D}$ に対応した, 空間 (x, y) における解析集合 Σ を取り上げる. 単葉領域における Cousin の第 2 分布 を拡張して, $\mathfrak{D}$ 上の 零の分布 $(\mathfrak{z})$ を定義しようと思うと, 直ちに次のような新しい状勢に出会う.

一般に内分岐した領域上の解析面は局所的にもただ一つの正則函数の零点集合として表すことはできない.

著者の作った例は単純ではないので, 後の論文で発表する. [訳注 13]

σ を領域 $\Delta \subseteq \mathfrak{D}$ 内の既約な解析面とし, u を σ 上で恒等的に零となる Δ 内の正則函数とする. u の σ 上の 零の位数 を定義することから始めよう.

場合 1. σ が Δ の分岐面ではないとき. P_0 を $\mathfrak{D}$ の分岐点ではない σ の点とする. P_0 の近傍では, (x) を P の座標とすると, $u(P)$ は (x) の正則函数である. したがって u の σ 上の零の位数 λ が決まる. λ は P_0 によらない. これを u の σ 上の零の位数と呼ぶ. (もし $u \equiv 0$ なら $\lambda = \infty$ であり, u が σ 上で恒等的に零ではないなら $\lambda = 0$ である.)

場合 2. σ が Δ の分岐面の場合. P_0 を σ の点とし, 分岐面の他のどの成分にも属さないとする. P_0 の近傍で σ は $f(x)=0$ と表わされる. ここで f は重複因子を持たない (x) の正則函数である. $\mu - 1$ を分岐面 σ の位数とする. このとき, もし $u \not\equiv 0$ なら, $u/f^{\frac{\lambda}{\mu}}$ は P_0 の近傍で有界であり $u/f^{\frac{\lambda+1}{\mu}}$ はそうではないとなる正の整数 λ が見つかる. λ は P_0 によら

ない. それを u の σ 上の零の位数と呼ぶ. (もし $u \equiv 0$ なら $\lambda = \infty$ であり, u が σ 上で恒等的に零ではないなら $\lambda = 0$ である.) [訳注 14]

σ を領域 $\Delta \subseteq \mathfrak{D}$ 内の解析面, $\sigma_1.\sigma_2, \ldots$ を (Δ 内の) σ の (既約) 成分とし, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ を正の整数とする. Δ 内の零の分布 $(\mathfrak{z})$ を $\{(\sigma_i, \lambda_i)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ によって次のように定義する. u を Δ 内の正則函数とするとき, u の σ_i 上の零の位数が少なくとも λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ であるとき, u は少なくともこの零 $(\mathfrak{z})$ を取る と言う.

P_0 を σ 上の点, $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ を P_0 の近傍における正則函数の有限個の系とするとき, もしこれらの函数の共通零点の集合が低次元の点 [訳注. 低次元の解析集合] を除いて σ であり, これらの函数の σ_i 上の零の最小位数が λ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ のとき, (u) は P_0 における 零 $(\mathfrak{z})$ を定義する という.

次に, u を $\mathfrak{D}$ の点 P_0 における $\mathfrak{D}$ 上の正則函数とし, M_0 を P_0 に対応する Σ の点とする. もし M_0 における空間 (x, y) の正則函数 $U(x, y)$ で, U の (Σ 上への) 制限の ($\mathfrak{D}$ への) 像が u, すなわち $U(x, \eta) = u$ のとき, u は P_0 で Σ に関して (H) 性 を持つと言う. [訳注 15]

さて $\mathfrak{D}$ 上に 零の分布 $(\mathfrak{z})$ を考える. $(\mathfrak{z})$ は $\mathfrak{D}$ 上の Σ に関して (H) 性を持つ有限個の正則函数の系によって局所的に定義されている と仮定する. そして空間 (x, y) において (f, δ) の集合 (I) で, δ は領域 $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ に含まれ, (f, δ) の (Σ 上への) 制限の ($\mathfrak{D}$ への) 像を (f', δ') とするとき, f' は δ' で少なくとも $(\mathfrak{z})$ を取るものを考える. (I) は明らかにイデアルを作る. それを一般に イデアル (Z) と呼ぶ.

定理 2. イデアル (Z) (上に述べた) は $[(x) \in \underline{\mathfrak{D}}]$ のすべての点で擬底を持つ. [訳注. 本節の初めに述べた $\mathfrak{D}$ と Σ を考えており, イデアルの定義される領域は $[(x) \in \underline{\mathfrak{D}},\ |y_j| < \infty$ $(j = 1, \ldots, m)$ である.]

1^o これを証明するために, $(x) \in \mathfrak{D}$ における Σ に関する (W) 函数 $W(x, y)$ で, T を (I) の零の集合とするとき, $W(x, y)$ は T のどの既約成分上でも恒等的には零とならないものが存在するという 特別な場合 から始める.

$F_1(x, y), F_2(x, y), \ldots, F_p(x, y)$ を T の任意の点 M_0 における正則函数の系であって, M_0 の ($\mathfrak{D}$ への) 像 P_0 で零 $(\mathfrak{z})$ を定義するものとし[18], τ を T の ($\mathfrak{D}$ への) 像とする. 容易に分かるように, 定数 c_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ を適当に選べば, 函数 $F = \sum c_i F_i$ の (Σ への) 制限の ($\mathfrak{D}$ への) 像 F' は τ 上 $(\mathfrak{z})$ と同じ位数の零を持ち, $\underline{\tau}$ を τ の基点集合とするとき, $\underline{\tau}$ 上の他

[18] すなわち, F'_i を F_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ の Σ への制限の $\mathfrak{D}$ への像としたとき, (F') が P_0 の近傍で (z) を定義する.

の成分 [訳注. $\mathfrak{D}$ における $\underline{\tau}$ 上の解析面の τ 以外の既約成分.] 上で恒等的には零にならないようにできる. τ' を $F' = 0$ の τ に属さない既約成分の和とし, $\Phi(x)$ を (x) の正則函数で, [訳注. それを $\mathfrak{D}$ 上の函数と見たとき] τ' 上では少なくとも F' と同じ位数の零を持ち $\underline{\tau'}$ 外では零にならないものとする.

これらの函数 W, F, Φ を使って <u>系 1</u> に沿ってイデアル $(I) = \{(f, \delta)\}$ を変形し, 次のような $(J) = \{(\varphi, \delta')\}$ を作る. すなわち

$$\varphi = f\Phi W + A_0 F + A_1\Psi_1 + \cdots + A_r\Psi_r, \quad \delta' = V \cap \delta \cap \alpha_0 \cap \alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_r,$$

ここで V は F, Φ および W が正則であるような M_0 の (単葉な) 近傍であり, (Ψ) は Σ に付随する幾何学的 (不定域) イデアルの V における擬底である. (これは <u>Cartan の定理</u> により存在する.) 一般に 正則函数 $\psi(x, y)$ の (Σ への) 制限の ($\mathfrak{D}$ への) 像を ψ' と表す. 上の関係は $\mathfrak{D}$ 上では次のようになる.

$$\varphi' = f'\Phi W' + A_0' F'$$

したがって φ'/F' は (δ の Σ への制限の ($\mathfrak{D}$ への) 像 δ' 内で正則であり, しかも Σ に関して (H) 性を持つ. [訳注. 初めの項に付いては, $f'\Phi/F'$ は正則であり, それに (W) 函数が掛けられている.] したがって M_0 において $\varphi \equiv 0 \mod (F, \Psi_1, \ldots, \Psi_r)$ である. [訳注. M_0 における正則函数 A の, Σ への制限の $\mathfrak{D}$ への像が φ'/F' であるとすると, $\varphi - AF$ は Σ 上恒等的に零になる.] このように (J) は M_0 において擬底を持つから, 後は系 1 の第二の条件だけを調べればよい.

それで V において函数方程式

$$B\Phi W + A_0 F + A_1\Psi_1 + \cdots + A_r\Psi_r = 0$$

を考える. $(B, A_0, \ldots, A_r)$ を V の任意の点 (x', y') におけるこの方程式の解とし, (x', y') において $B \in (I)$ を確かめれば良い. これは, もし (x', y') が Σ の点でなければ明らかである. それで (x', y') は Σ の点であると仮定し, $\Psi_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ と置く. [訳注. 正確には, Σ への制限の $\mathfrak{D}$ への像を考える.] そうすると恒等的に

$$B'\Phi W' + A_0 F' = 0$$

となる. さて, 函数 $\Phi W'$ の τ 上の零の位数は零である. したがって B' は τ 上少なくとも F' と同じ位数の零を取る. したがって定義により, (x', y') で $B \in (I)$ である. 命題はこのようにして特別な場合には正しい.

一般の場合は以下に述べるように, <u>定理 1</u> によって, 上の場合に帰着さすことができる. [訳注 16]

2°. $\underline{\Delta}$ を $\Subset \mathfrak{D}$ なる任意の多円筒とし, Δ を $\underline{\Delta}$ 上の $\mathfrak{D}$ の部分の連結成分の任意の一つとする. Cartan の補題により Δ にたいする命題を証明すればよい. σ を $\mathfrak{D}$ の分岐面とし, $\underline{\sigma}$ をその基点集合とする. $\underline{\mathfrak{D}}$ 内の $\underline{\sigma}$ の既約成分で $\underline{\Delta}$ を通るものは有限個しかない. それを $\underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_2, \ldots, \underline{\sigma}_q$ とする. Cousin によって $\underline{\sigma}_1$ に対し, $\underline{\Delta}$ の正則函数 $f(x)$ で, $\underline{\sigma}_1$ で位数 1 の零を取り, 他では零にならないものが見つかる. $s_1, s_2, \ldots$ を $\underline{\sigma}_1$ 上にある Δ の分岐面の位数 とし, [訳注. $\underline{\sigma}_1$ 上に幾つも分岐面があるとして] r を $s_1+1, s_2+1, \ldots$ の最小公倍数として,

$$S(x) = (f(x))^{\frac{1}{r}}$$

を考える. Δ' を $S(x)$ の正則域と Δ の交わりの連結成分の任意の一つとする. [訳注. 2 つの多葉域の交わりであり, Δ および $S(x)$ の正則域の共通の被覆面の最小のものである.] 空間 $(x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m, z)$ において解析集合 Σ'

$$y_i = \eta_i(P), \quad z = S(P) \quad (P \in \Delta',\ \underline{P} = (x), i = 1, 2, \ldots, m)$$

を考える. $\underline{P}$ は P の基点である.

Δ 上の零の分布を定義する, 空間 (x, y) の正則函数の系は, 空間 (x, y, z) における函数系と考えることができるから, [訳注. z に関して定数とみて] それらは Δ' 上に零の分布を定義する. それを $(\mathfrak{z}')$ と表す. (I') を空間 (x, y, z) において $(\Sigma', \Delta'$ と) $(\mathfrak{z}')$ によって定義される (Z) イデアルとする. 容易に分かるように, $(x) \in \underline{\Delta}$ にたいして (I) は (I') の空間 (x, y) 上への射影である. [訳注. Δ' は Δ 上の多葉域であることに注意] したがって, 定理 1 により, (I') が領域 $(x) \in \underline{\Delta}$ のすべての点で擬底を持つことを示せばよい. さて, 定数 c を選んで $\eta_1' = \eta_1 + cS$ を作れば, この函数は Δ' をその正則域の一部として持ち, $\underline{\sigma}_1$ 上に第 2 種の分岐点を持たない. いいかえると, 一般性を失うことなく Δ は η_1 に関して σ_1 上に第 2 種の分岐点を持たないと仮定することができる. [訳注. 上記の Σ' を, $S(P)$ の代わりに, この η_1' を使って描けばよい.] 同様の議論を $\underline{\sigma}_2, \underline{\sigma}_3 \ldots, \underline{\sigma}_p$ に順次することによって η_1 は第 2 種の分岐点を持たないと仮定することができる.

3°. 7 節の終わりに述べた空間 (x, y) の 1 次変換 L をもう一度考える. もし ε を十分小さく取れば, Δ は (x') 空間上の領域 Δ' に写される. 容易に分かるようにこの関係は 1 : 1 擬等角である. したがって Δ を使ったイデアル (I) を調べる代わりに Δ' を使ったそれを調べればよい. そうするとそれは第 2 種の分岐面を持たないから Δ の η_1 に関する分岐面と重複面は共通の成分を持たない と仮定することができる.

P_1, P_2 を同じ基点 (x) 上の $\mathfrak{D}$ の通常点の対で, (x) 上に, 二つの面 [訳注. すなわち分岐面と重複面] の交わりの点は存在しないような, それ以

外は任意の点とする．$\mathfrak{D}$ 上の正則函数 $S(P)$ で $S(P_1) \neq S(P_2)$ となるようなものを見つけることが問題である．それで改めて，$\underline{\Delta}$ を $\Subset \underline{\mathfrak{D}}$ となるような多円筒だと考える．点 P_1, P_2 には Σ の同じ点 M が対応していると仮定する．もしそうでないなら 函数 η_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ のどれかがこの条件を満たす．仮定により M は 分岐面の Σ 上への像ではない．η_1 の x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に関する偏導関数は $\mathfrak{D}$ 上分岐面 σ を除いて正則であり，σ では明らかに極しか持たない[19]．さて D は η_1 の正則域の一部であるから，η_1 の偏導関数の中の一つ，それを $\xi(P)$ と書く，で $\xi(P_1) \neq \xi(P_2)$ となるものが存在する．Γ を (空間 (y) の) 原点を中心とした多円筒で，$(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ に対し Σ の 空間 (y) への射影が $\Subset (\Gamma)$ となるものとする．Cartan の定理と第 VII 論文の定理 3 により，多円筒 $[\underline{\mathfrak{D}}, (\Gamma)]$ における正則函数 $f(x, y)$ で，f の制限の像 f' は σ 上恒等的に零で $f(M) \neq 0$ なるものを見つけることができる．正の数 λ を十分大きく選んで $f^\lambda \xi = S$ と置く．S は $\mathfrak{D}$ 上正則であり $S(P_1) \neq S(P_2)$ である．

Δ に対し，分岐面と η_1 の重複面は共通の成分を持たないし，η_1 は Δ 内に第 2 種の分岐面を持たないから，Δ 上の正則函数 $S(P)$ を選んで空間 (x, y, z) に

$$y_i = \eta_i(P), \quad z = S(P) \quad (P \in \Delta, \underline{P} = (x),\ i = 1, 2, \ldots, m)$$

なる解析集合 Σ' を作り，Σ' の特異点の集合は高々 $(n-2)$ 次元であるようにできる．

定理 1 により，それが今の場合であると仮定することができる．詳しく言うと，Δ に対応する Σ の部分は高々 $(n-2)$ 次元しか特異点を持たない．そうすると 補題 2 により Σ に関する (W) 函数で Σ の部分の任意の点の近傍で T のどの成分上でも恒等的に零でないものが存在する．ここで T はイデアル (I) の零点集合である．これは (I) の特別の場合である．したがって (I) は Σ のすべての点で擬底を持つ．　C. Q. F. D.

III.　基本補題とその応用

10．基本補題．　複素 n 変数 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の有限空間に $\Delta \Subset (R)$ なる多面体領域 Δ を考える．(R) は一つの解析函数 $f_1(x)$ の正則域の部分 (Teilbereich; 連結または非連結) である．Δ は

$$x_i \in A_i \quad f_j(P) \in B_j, \quad P \in (R) \quad (i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m)$$

[19] D 上の函数の極とは，その函数がそこで正則ではなく，しかし，局所的に二つの正則函数の比によって表わされるような点のことである．

なる形とする．ここで $f_j(P)$ は (R) 上の正則函数, A_i, B_j は平面上の有界単葉で単連結な閉領域であり, P は座標 (x) を持つ．空間 $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ に閉筒状域 (A, B) と, 解析集合

$$\Sigma \ : \ y_j = f_j(P) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

を考える．Δ は Σ の (A, B) 内の部分に対応し, 境界は境界に対応している．A_i と B_j の近傍はそれぞれ円の近傍に等角写像されるから, 閉多円筒に対応する第 VII 論文 (以下単に VII と書く.) の諸定理はこの (A, B) に応用することができる．

次の条件を満たす Δ の点の集合 Δ_0 を考える．

$$x_i \in A_i^0 \quad f_j(P) \in B_j^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\, j = 1, \ldots, m),$$

ここで A_i^0, B_j^0 は $A_i^0 \subset A_i$, $B_j^0 \subset B_j$ なる単連結閉領域である．以下, Δ を一定のものと考え, Δ_0 は任意のものと考える．

u を Δ_0 の近傍における (R) 上の任意の正則函数とする．これは Σ 上の正則函数と見なすことができる．$U(x, y)$ を (A, B) の近傍における (x, y) の正則函数で, Σ の特異点集合 S_0 上で恒等的に零となり, Σ の [訳注. の各既約成分] 上ではそうではないとする．$U(x, y)$ は Cartan の定理と VII の定理 3 により存在する．したがって 補題 2 により, 正の整数 λ を, U^λ が (A, B) における Σ に関する (W) 函数となるように選ぶことができる．Σ に付随する幾何学的不定域イデアルは (Cartan の定理と VII の定理 3 により) (A, B) の近傍で擬底を持つから, VII の定理 2 により, (A^0, B^0) の近傍の正則函数 $F(x, y)$ を Σ 上 $F = U^\lambda u$ となるように見つけることができる．

u_0 を U^λ の (Σ 上への) 制限の ((R) 上への) 像とし, $(I) = \{(f, \delta)\}$ を, (A, B) の近傍で定義された (Z) イデアルで, (f', δ') を (f, δ) の (Σ 上への) 制限の ((R) 上への) 像とするとき, f' は δ' で u_0 で割れるようなものとする．定理 2 と VII の定理 3 により, (I) は (A, B) の近傍で擬底を持つ．それを $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu)$ と表す．各 Φ_i の制限の像は Δ の近傍で u_0 で割れる．(A^0, B^0) の近傍で $F \in (I)$ だから (A^0, B^0) の近傍のすべての点で $F \equiv 0 \mod (\Phi)$ である．したがって VII の定理 1 により, 大域的にそうなる．今言ったことを短く纏めよう．

基本補題. 有限空間 (x) 上の多葉域 (連結または非連結) (R) の上記の形の多面体領域 Δ に対応して空間 (x, y) の閉筒状域 (A, B) と上記のような解析集合 Σ を考える．そうすると Δ の近傍における (R) 上の正則函数 u_0 と (A, B) の近傍における有限個の正則函数の組 Φ_i $(i = 1, 2,$

$\ldots, \mu)$ を, 各 Φ_i の Σ 上への制限の (R) への 像は u_0 で割り切れ, さらに次の役割を果たすものが見つけられる. Δ_0 $(\Delta_0 \subset \Delta)$ を上のような任意の多面体領域とし, (A^0, B^0) をそれに対応する閉筒状域, u を Δ_0 の近傍の (R) 上の任意の正則函数とするとき, (A^0, B^0) の近傍における正則函数 $F(x, y)$ が存在し, Σ 上で $F = uu_0$ となり, 大域的に

$$F \equiv 0 \mod (\Phi)$$

となる.

第 I 論文以来の主要問題にこれが如何に応用されるかを簡単に示そう.

11. Cousin の問題. A_1 を閉円に取る. Δ_1 を Δ の $X \leq \varepsilon$ なる部分とする. ここで X は x_1 の実部 であり, ε は十分小さい正の数である. Δ_2 を $X \geq -\varepsilon$ なる部分とする. 更に $\Delta_1 \ni 0$, $\Delta_2 \ni 0$ と仮定し, $\Delta_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2$ と置く.

定理 3 この状況の下で, u を Δ_0 の近傍における (R) 上の正則函数とするとき, Δ_1 および Δ_2 の各近傍における (R) 上の正則函数 u_1, u_2 を恒等的に $u_1 - u_2 = u$ となるように見つけることができる.

実際 $-\varepsilon \leq X \leq \varepsilon$ なる A_1 の部分は単連結である. それを A_1^0 と表し, $A_k^0 = A_k$, $B_j^0 = B_j$ $(k = 2, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$ とする (A^0, B^0) に対応する多面体領域が上に示された Δ_0 である. この Δ_0, u に対して補題は成り立ち, (A^0, B^0) の近傍で恒等的に

$$F = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \cdots + c_\mu\Phi_\mu$$

が得られる. ここで c_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ は或る正則函数である. $\mathfrak{D}'$ を (A, B) の $X \leq \varepsilon$ なる部分, $\mathfrak{D}''$ を (A, B) の $X \geq -\varepsilon$ なる部分とする. Cousin により, $\mathfrak{D}'$ および $\mathfrak{D}''$ の近傍における正則函数 c_i', c_i'' を, 恒等的に

$$c_i' - c_i'' = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

となるように見つけることができる.

$$F' = \sum c_i'\Phi_i, \qquad F'' = \sum c_i''\Phi_i$$

と置く. F' と F'' はそれぞれ $\mathfrak{D}'$ の近傍と $\mathfrak{D}''$ の近傍における正則函数であり

$$F' - F'' = F$$

である. F' と F'' の Σ 上への制限の (R) 上への像を f' と f'' とする. そうすると,

$$f' - f'' = uu_0$$

である．ここで,

$$f' = u_0 u_1, \qquad f'' = u_0 u_2$$

と置く．Φ_i の性質から u_1, u_2 はそれぞれ Δ_1 と Δ_2 の各近傍における (R) 上の正則函数であり, $u_1 - u_2 = u$ である． C. Q. F. D.

12．正則函数の展開

定理 4　基本補題の状況で, Δ_0 上の近傍における (R) の任意の正則函数 $u(P)$ と与えられた正の数 ε に対し, Δ の近傍における (R) 上の正則函数 v を, Δ_0 で $|u(P)-v(P)| < \varepsilon$ となるように見つけることができる．

実際, 基本補題の函数 $F(x,y)$ は $F = \sum c_k \Phi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$ の形に表わされる．c_k は正則函数である．A_i^0, B_j^0 $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$ は単連結であるから, すべての正数 ε' に対し, 整函数 $c'_k(x,y)$ を, (A^0, B^0) の近傍で

$$|c_k(x,y) - c'_k(x,y)| < \varepsilon'$$

となるように見つけることができる．$G(x,y) = \sum c'_k \Phi_k$ と置く．これの Σ 上への制限の (R) への像を $g(P)$ と表す．$g(P)$ は Δ の近傍で正則な函数で, u_0 で割れる．したがって

$$g = u_0 v$$

と置くと, v は Δ の近傍で正則である．F の制限の像は $u_0 u$ であるから, ε' を十分小さく選べば Δ_0 の近傍で $|u - v| < \varepsilon$ である． C. Q. F. D.

IV. 補　　遺.

13．問題 (J) **に対する条件.**　(I) を空間 (x) における正則不定域イデアルとし, Σ をその零点集合とする．もし Σ が (x^0) の近傍で (I) の有限個の函数の共通零点として表せるなら (I) は (x^0) で 性質 (R) を持つという．

空間 (x) における正則不定域イデアルの集合 $(\mathfrak{F})$ は, もし次の性質

1°.　もしイデアル (I) が $(\mathfrak{F})$ に属し, $\Phi(x)$ が (x^0) における正則函数なら, (I) の Φ によるアジョイントと商も (x^0) において $(\mathfrak{F})$ に属する．
2°.　$(\mathfrak{F})$ のすべてのイデアル (I) は (x^0) で性質 (R) を持つ．

を満たすなら, それを (x^0) における (A) 族であると言う．

定理 5　空間 (x) における正則不定域イデアル (I) が (x^0) で擬底を持つためには, (x^0) において (I) を含む (A) 族が存在することが必要十分である.

実際, (x^0) で擬底を持つイデアル (I) の集合は (x^0) で (A) 族を作るから, この条件は必要である.

したがって (x^0) でイデアル (I) を含む (A) 族 $(\mathfrak{F})$ が存在すると仮定して (I) が (x^0) で擬底を持つことを見よう. 以下 $\ll (x^0)$ で $\gg$ という言葉は一般に省かれる. Σ を (I) の零点集合とする. その次元は n より小さいとする. Cartan の定理により Σ に付随する幾何学的イデアルは擬底を持つ. それを $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ とする. Σ は (I) の有限個の函数の共通零点集合であるから Hilbert–Rückert の補題により正の整数 λ を $F_1^\lambda \in (I)$ となるように見つけることができる.

系 2 に沿って, (I) の F_1 によるアジョイントと商を考える ((x^0) の十分小さい近傍において). もしこの二つが共に擬底を持てば (I) もそうなる. さて アジョイントは F_1 を含み, 商は $F^{\lambda-1}$ を含む. もし $\lambda-1>1$ なら 同じ操作を商に対して行い, それを続ける. 同様の操作を $F_2, F_3, \ldots, F_p$ に対して行い イデアルのシステム $[(J_1), (J_2), \ldots, (J_q)]$ に到達する. すなわち各 (J_j) $(j=1,\ldots,q)$ には, (I) から出発して, 函数 F_i $(i=1,2,\ldots,p)$ のどれかを使ってアジョイントと商を有限回繰り返して得られるものであり, すべての (J_j) $(j=1,\ldots,q)$ が擬底を持つときは (I) も擬底を持ち, さらに各 (J_j) は (F) を含む.

(J) をこのシステムの任意の一つとし, Σ' をそれの零点集合とする. このとき二つの可能な場合がある. 一つは $\Sigma=\Sigma'$ の時で, この時は (J) は擬底として (F) を持つ. [訳注 17] もう一つは $\Sigma \neq \Sigma'$ この場合明らかに $\Sigma' \subset \Sigma$ である. それで $\Sigma' \subset \Sigma$ であるような (J) からなる部分システム (S) を考える. [訳注. Σ' に付随する幾何学的イデアルの擬底を使って同様の操作をする.]

一般に点 (x^0) を通る解析集合 T を考える. Weierstrass により (x^0) の或る近傍における T の部分は有限個のエレメントよりなる. それで i 次元のエレメントの個数が ν_i $(i=n-1, n-2, \ldots, 0)$ のとき T に $\alpha=(\nu_{n-1}, \nu_{n-2}, \ldots, \nu_0)$ を対応さす. n は定められているとし, すべての α の集合 A を考え, 次のように順序を付ける. 即ち $\alpha'=(\nu'_{n-1}, \nu'_{n-2}, \ldots, \nu'_0)$ を α と異なる A のエレメントとするとき $\nu_{n-1}<\nu'_{n-1}$ または $\nu_{n-1}=\nu'_{n-1}, \ldots, \nu_i=\nu'_i, \nu_{i-1}<\nu'_{i-1}$ $(i=n-1, n-2, \ldots, 1)$ のとき $\alpha<\alpha'$ とする.

イデアル (I) に, (x^0) における零点集合 Σ に対応する順序集合 A のエレメント α を対応させ, システム (S) に (もし存在するなら) (S) のイデアルに対応するエレメントの最大 β を対応させる. そうすると, $\Sigma' \subset \Sigma$

だから $\beta < \alpha$ である.

(S) の各イデアル (J) は $(\mathfrak{F})$ に属しているから, 同じ操作を行って (I) の (S) に対応するイデアルのシステムが得られる. (J) が (S) を動いたときのそのシステムの和を (S_1) とする. もし (S_1) が存在すれば, (S_1) に対応する A のエレメント γ は $\gamma < \beta < \alpha$ を満たす. したがって この操作は有限回しか行えない. [訳注. 有限回の操作で幾何学的イデアルに到達する.] したがって (I) は (x^0) で擬底を持つ. C. Q. F. D.

訳　注

[訳注 1]　空間 (x) において, イデアル (I) の零点集合を E とし, (I) の空隙点集合に属さない E の集積点を P とすると, P に対して $f \in (I)$ となる函数 f はすべて P で零になる.

また空間 (x) において, E を任意の閉集合としたとき, δ を任意の領域 (連結または非連結), f を $E \cap \delta$ では零になり, それ以外は任意の函数として (f, δ) の全体を (I) とすれば, (I) はイデアルである. そして E に含まれない任意の点を P とすれば, E の点を一つも含まない P の近傍を δ とするとき, 定義により $(1, \delta) \in (I)$ だから, (I) の零点集合は E である.

[訳注 2]　定義通りに述べると, (x^0) における (I_1) と (I_2) の擬底を Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ および Ψ_j $(j = 1, \ldots, q)$ とするとき, (I) は $f_1, f_2,$ (φ), (ψ) を未知函数とし, 等式 $f_1 = f_2$ を伴った連立方程式

$$f_1 = \varphi_1 \Phi_1 + \cdots + \varphi_p \Phi_p$$
$$f_2 = \psi_1 \Psi_1 + \cdots + \psi_q \Psi_q$$

に関するイデアル (L) : $\{(f_1, \delta)\}$ と同等である.

[訳注 3]　(I) の (x^0) における局所擬底を F_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ とする. このとき (I) の (Φ, V) によるアジョイントのそこでの擬底は $(\Phi, F_1, \ldots, F_p)$ である. また (I) の (Φ, V) による商は, 方程式

$$A_0 \Phi + A_1 F_1 + \cdots + A_p F_p = 0$$

に関するイデアル (L) と同等である.

[訳注 4]　正則函数 f が点 (x, y) でイデアル (I) に属しているのは,

1. $y = 0$ のときは, α を (x, y) における任意の正則函数として $f = \alpha \cdot xy$ と表せるとき,
2. $y \neq 0$ のときは, α, β を (x, y) における任意の正則函数として $f = \alpha \cdot xy + \beta \cdot y$ と表せるとき,

である. したがってもし原点の近傍 V に対する (I) の擬底が存在すれば, V に含まれる (I) の零点集合は $x = 0$ を含む. 他方, V の点 $(0, y)$ $(y \neq 0)$ に対しては, 定義により, 函数 1 を含むから矛盾である.

なお, (I) の (y, Δ) によるアジョイントは擬底を持ち, 商は擬底を持たない. 逆に (I) の (x, Δ) によるアジョイントは擬底を持たず, 商は擬底を持つ. すなわちアジョイントと商の一方だけが擬底を持っても (I) が擬底

を持つとは言えない. ところがアジョイントと商を同時に考えると次の系 2 が成り立つというのである.

[訳注 5] Σ を $[(\gamma),(\gamma')]$ における純 n 次元の解析集合とし, それの空間 (y) への射影が (γ') の完全内部に含まれているとする. このとき Σ の, 空間 (x,y_j) への射影は, 多円筒 $[(\gamma),|y_j|<\rho]$ における解析面であり, (γ) における正則函数を係数とする, 最高次係数 1 の y_j の多項式 $F_j(x,y_j)$ の零として表される. そして Σ は空間 (x,y) で $F_j(x,y_j)$ の共通零として表される解析集合の幾つかの既約成分の和である. (例えば, 西野利雄著 多変数函数論 第 2 章参照). ところで, (x,y_1) 空間の多円筒 $[(\gamma),|y_1|<\rho]$ において $F_1=0$ で与えられる解析面を S とし, S と Σ が低次元の例外を除いて $1:1$ に対応している場合, Σ 上の正則函数 y_j を S 上の函数とみなすと, それは S 上で

$$y_j=\frac{\Phi_j(x,y_1)}{\partial F_1(x,y_1)/\partial y_1}$$

と表される. ここで $\Phi_j(x,y_1)$ は y_1 の多項式である. (このことは第 7 節にも使われており, そこでは W. F. Osgood の教科書が引用されている. なお, 西野利雄著 多変数函数論 6.2 参照) それで

$$\Psi_j(x,y_1,y_j)=y_j\frac{\partial F_1(x,y_1)}{\partial y_1}-\Phi_j(x,y_1)$$

と置くと, 函数 Ψ_j は Σ 上恒等的に零であり, したがってそれは $[(\gamma),(\gamma')]$ に対して (I) に属する.

[訳注 6] 新たに複素変数 y を導入して 空間 (x,y) に閉多円筒

$$(\Delta^*)\qquad |x_i|\le r\ (i=1,2,3),\quad |x_j|\le r'\ (j=4,\dots,n),\quad |y|\le\frac{1}{\rho}$$

および (Δ^*) における解析面 $\Sigma\ :\ x_1y-1=0$ を考える. そうすると S 上の正則函数 u は $S\cap\Delta_1$ に対応する, Σ に含まれる解析集合 σ 上の函数とみなされ, 仮定により, それは σ のすべての点で (H) 性を持つ. したがって, σ に関する幾何学的イデアルの (Δ^*) における擬底を函数系として, 問題 C_2 を解くことにより, (Δ^*) における正則函数 $F^*(x,y)$ を, σ 上で u と一致するように求められる. そうすると $F(x)=F^*(x,1/x_1)$ が求める函数である.

[訳注 7] $(x_1)^{\frac{1}{\mu}}$ が T_0 の点 (x^0,y_1^0) の近傍における正則函数 $F(x,y)$ の制限になっているとすれば, $(x_1)^{\frac{1}{\mu}}=F(x,\eta_1)$ でなければならない. しかし $F(x,y)$ は y の整級数であるから, $a_1\equiv 0$ の場合, それは不可能である.

[訳注 8]　この証明は少し説明不足と思える．S を空間 (x,y_1) の領域 $(\Delta,|y_1|<\infty)$ で $F_1(x,y_1)=0$ によって与えられる解析面とすると, η_1 に対する仮定によって, Σ と S は, 低次元の解析集合を除いて $1:1$ に対応しており, 例外点でも Σ からの対応は一意的である．それで Σ の点 M に対応する S の点を M^0 とし, uU^λ を S 上の函数とみなすと, それは M^0 で S に関して (H) 性を持つ．すなわち, M^0 における正則函数 $\Phi(x,y_1)$ を S 上で uU^λ に一致するように求めることができる．この函数を空間 (x,y) における函数とみなすと, それは Σ 上で uU^λ と一致するというのである．

[訳注 9]　Σ 複素 2 次元の空間における解析曲線の場合は, よく知られているように, Σ の点が特異点であることと (H) 性を持たないこととは同じであり, 特異点で一定以上の位数の零を持つ函数はそこで (H) 性を持つ．ところが 3 次元以上の空間では, 補題 1 に示されたように, 特異点でも (H) 性を持つことがある．しかし特異点で一定以上の位数の零を持てば (H) 性を持つという事は同じように成り立つというのである．

[訳注 10]　複素 $n+m$ 変数 $x_1,\dots,x_n;\ y_1,\dots,y_m$ の空間に n 次元の解析集合 Σ が与えられたとき, 必要なら座標系の 1 次変換をして, それは空間 (x) 上の或る内分岐多葉域 $\mathfrak{D}$ 上の適当な正則函数 $\eta_j(P)$ $(j=1,\dots,m)$ によって

$$y_j=\eta_j(P)\qquad(j=1,\dots,m)$$

と表すことができる．しかもその変換は恒等写像の幾ら近くにでも取れる．さらに Σ の通常点は $\mathfrak{D}$ の通常点に対応し η_1 に関して重複点ではないように取れる．此れは直感的には自明と思えるが, 丁寧に説明しようとすると結構面倒である．

本文中の曖昧な部分を補っておく．

$\mathfrak{D}$ は $\underline{\mathfrak{D}}$ 上の相対境界のない内分岐領域で, Σ は $y_j=\eta_j(P)$ $(P\in\mathfrak{D};\ (j=1,\dots,m)$ によって描れている．そして, 多円筒 (Δ_1,Δ_2)：

$$\Delta_1\ :\ |x_i-x_i^0|<r_i\ (i=1,2,\dots,n),\quad \Delta_2\ :\ |y_j|<R'\ (j=1,\dots,m)$$

を, $\Delta_1\Subset\mathfrak{D}$ であり, しかも $\Sigma_0=\Sigma\cap(\Delta_1,\Delta_2)$ の空間 (y) への射影は $\Subset\Delta_2$ である様に描く．$\mathfrak{D}$ の Δ_1 上の部分を $\mathfrak{D}_0$ とする．これとは別に, $x_i'^0=x_i^0$, $r_i'>r_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ として, 新たな空間 (x',y') に多円筒 (Δ_1',Δ_2')：

$$\Delta_1'\ :\ |x_i-x_i^0|<r_i'\ (i=1,2,\dots,n),\quad \Delta_2'\ :\ |y_j|<R'\ (j=1,\dots,m)$$

を描く．このとき, r_i' を r_i の如何に近くに取っても, 恒等写像に十分近い 1 次変換 $(x',y')=L(x,y)$ による Σ の像の (Δ_1',Δ_2') 内の部分 Σ_0' は Σ_0

の像を含み, Σ_0 と同様の性質を持つ. すなわち Σ'_0 の, 空間 (y') への射影は $\Subset \Delta'_2$ であり, Δ'_1 上の或る相対境界を持たない内分岐領域 $\mathfrak{D}'_0$ があって, Σ'_0 は

$$y'_j = \eta'_j(P') \qquad (P' \in \mathfrak{D}';\ j = 1, \dots, m)$$

と表される. ここで η'_j は $\mathfrak{D}'_0$ 上の正則函数であり, 特に η'_1 は η_1 と同様, $\mathfrak{D}'_0$ の異なった点で異なる函数要素を持ち, 第 2 種の分岐面を持たない. $\mathfrak{D}'_0$ は $\mathfrak{D}_0$ と解析的に同等な部分を含んでいる. そして L を適当に取れば, $\mathfrak{D}'_0$ の η'_1 に関する分岐面と重複面が一致しないようにできる.

[**訳注** 11]　ここでは Σ の次元に関する帰納法が使われていると思われる.

例えば, 空間 (x, y) の原点の近傍で二つの正則函数 $x(x+y), x(x-y)$ で生成された不定域イデアル (J) の零点集合は $x = 0$ であり, $x^2 \in (J)$ であるが, 一般にこのような場合の証明は自明ではない.

空間 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の原点の近傍で, p 個の正則函数 $F_j(x)$ $(j = 1, \dots, p)$ によって生成される不定域イデアルを (J) とし, (J) の零点集合 Σ は解析面であるとする. そして Σ を定義する函数を $f(x) = 0$ として, $F_j = f^{\lambda_j} F_j^0$ $(j = 1, \dots, p)$ とし, F_j^0 はすべて Σ 上恒等的零ではないとする. さらに $F_j^0(x)$ $(j = 1, \dots, p)$ によって生成される不定域イデアルを (J^0) とする. そうすると (J^0) の零点集合 Σ^0 の次元は高々 $n-2$ である. このとき, 正則函数 $\Phi(x)$ が Σ 上で恒等的に零となるなら, Σ^0 上でもそうである. したがってもし $\Phi^\lambda \equiv 0 \mod (F^0)$ となる λ が見つかるなら, $\Phi^{\lambda+\mu} \equiv 0 \mod (F)$ となる μ も見つかる.

同じ状勢の下で, Σ が零次元であるし, それを原点とする. そうすると (J) の x_1 平面への射影 (J_1) が考えられ, 擬底を持つ. すなわち (J_1) は, λ を或る正の整数として, x_1^λ で生成される. したがって, 元の空間の原点で $x_1^\lambda \equiv 0 \mod (F)$ となる.

[**訳注** 12]　一般な場合に付いては 西野利雄著 多変数函数論 7.1.3 に, 第 2 種変形として説明されている.

[**訳注** 13]　岡先生の例はどこにも書かれていない. この例を最初に公表したのは H. Grauert である. 西野利雄著 多変数函数論 6.1.4 に, 他の例と共にその例が挙げられている.

[**訳注** 14]　P_0 は分岐面の他の既約成分に属さないだけではなく, $\underline{\sigma}$ を σ の基点集合とし $\underline{P_0}$ を P_0 の基点とするとき, $\underline{P_0}$ は $\underline{\sigma}$ の通常点でなければならない.

例えば, $\mathfrak{D}$ を $y^3 + x_1 y + x_2 = 0$ で定義される代数函数のリーマン面とするとき $\underline{\sigma}$ は $4x_1^3 + 27x_2^2 = 0$ で与えられ, これは原点で既約である. し

かし, 原点上の $\mathfrak{D}$ の分岐指数は 2 であるのに, 原点以外の $\underline{\sigma}$ の点上の $\mathfrak{D}$ の分岐指数は 1 である.

[**訳注 15**]　第 6 節では解析集合上の正則函数に対して (H) 性を定義した. ここでは領域上の函数に対してそれをしている. 領域は常に解析集合に対応させて考えているから重複しているように思えるが, 厳密には新しい定義である.

[**訳注 16**]　$2°$ 以下は, 一種の上空移行である. 問題は三つある. その各々についてその要点を見ておこう.

1. η_1 に関する第 2 種の分岐面の処理.
   これについては $\mathfrak{D}$ 上の多葉な被覆面 $\mathfrak{D}'$ と, その上の, 第 2 種の分岐面を持たない, 正則函数 η' を作り, それを (η) に付け加えて Σ' を描く. そして $(\mathfrak{z})$ を $\mathfrak{D}'$ へ持ち上げて Σ' に関する (Z) イデアル (I') を作る.
2. η_1 に関する重複面の処理.
   これについては, Σ の同一点に対応する $\mathfrak{D}$ の 2 点で異なる値を持つ $\mathfrak{D}$ 上の正則函数を (η) に付け加えて Σ' を作る. ところで, 仮定により η_1 はその 2 点で異なる函数要素を持つから, それの偏導関数の中にはその 2 点で異なる値を持つものがある. それは一般に分岐面で極を持つが, もしその重複面が $\mathfrak{D}$ の分岐面でなければ, そこで零になる函数を掛けて正則にすることができる.
3. その重複面が $\mathfrak{D}$ の分岐面であるときの処理.
   分岐面は第 1 種のときだけ考えればよい. このときは, 重複面に対応する Σ の点で, 分岐面に対応する既約成分は低次元の解析集合を除いて一般には通常点である. それで 空間 (x, y) の座標系を 1 次変換でごくわずか変えて, 新たな領域を考えると, その点に対応する点は通常点になる.

このように $\mathfrak{D}'$, Σ', $(\mathfrak{z}')$ および (I') を作って Σ' の特異点の集合が高々 $n-2$ 次元となるようにする. このとき (I) は (I') の射影になっている. そして (I') は, 先の特別な場合であるから, 擬底を持ち, したがって定理 1 によって (I) が擬底を持つというのである.

[**訳注 17**]　一般に イデアル (I) の零の集合を Σ とし, (I) が Σ に付随する幾何学的イデアルの擬底をすべて含むなら, (I) はその幾何学的イデアルと同等である.