多変数解析函数について.

IX　有限不分岐領域.

岡潔

(1953 年 10 月 20 日 受理)

序文. 1.　この論文は, 1936 年に最初のものが公表された一連の論文[1]の九番目のものである. 先ず我々の住んでいる (demeurons) 土地 (terrain) を鳥瞰しておこう.

1 変数の場合の解析接続の一般論は平坦なる原野における様なものである. そこでは多くの努力にも拘らず, 形式論理の範疇を越える事実は何一つ発見することができなかった[2]. それに引き換え多変数の場合のそれは峻険なる山岳地帯を思わす.

1902 年, Fabry は 2 重級数の収束半径が任意でないことを指摘した. このことから我々は, 1906 年 Hartogs によって, すべての正則域は擬凸状であると言う全く基本的で実に奇妙な事実に導かれた.

それ以後, 1932 年に至るまで, この分野 (terrain) では, 発見された一つの問題が新たに他の問題を生みだすという事態が続いた. これらの困難の累積された状況は, それらのアイデアの流れと共に, 次の著書の中で, 際立った姿で描き出されている.

Behnke–Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer kmoplexer Veränderlichen, 1934. ここでの主問題は次の通りである : Hartogs の逆問題, Cousin の第 1 および第 2 問題, 展開の問題[3].

1935 年, Weil は逆の方向への, すなわち問題を解く方向への, 最初の一歩を踏み出した. このお蔭で上記の問題の後ろの三つは有理函数に関する凸状域に対して解けるようになった[4].

[1]以前の論文は次の通りである.　I–Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936, II–Domaines d'holomorphie, 1937, III–Deuxième problème de Cousin, 1939 (Journal of Science of the Hiroshima University). IV–Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941, V–L'intégrale de Cauchy, 1941, (Japanese Journal of Mathematics). VI–Domaines pseudoconvexes, 1942, (Tohoku Mathematical Journal). VII–Sur les quelques notions arithmétiques, 1950, (Bulletin de la Société Mathématique de France). VIII–Lemme fondamental, 1951, (Journal of Mathematical Society of Japan). (我々の辿って来た道を振り返ってみて頂きたい.)

[2]例えば Denjoy の優れた論文 (C. R. Paris) を見よ.

[3]この著書の 54, 68, 79 頁を見よ. 我々がこの研究を始めることのできたのは正にこの著書のお蔭である.

[4]彼以前には, これ等の問題は筒状域の中でしか解けなかった.
A. Weil, Sur les séries de polynômes de deux variables complexes, 1932 (C.R.Paris).
A. Weil, L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, 1935 (Math. Annalen) を見よ.

我々が研究を始めたのは正にこの時期であり, これらの問題に対してである. 1943 年以後のこの問題の変遷についての精彩 (vivante) あるイメージを得るためには, Behnke–Stein の次の論文がある.

Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null– und Polstellenflächen, 1937[5], Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, 1940[6]. Dis Singularitäten der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen 1952[7].

2. この論文では, 上記の問題および第 VII 論文で導入した算術的問題を, 有限不分岐 (finis sans point critique intérieur) な擬凸状領域に対して論じる. これの本質的な部分は, 1943 年に日本語で発表したものに他ならない[8].

次の論文では, 分岐点を許すと, 非常に難しい問題に出合うことを見るであろう (23 節を見よ). この論文を分離して発表することにしたのは, その手段を準備し, 困難さの姿を明らかにするためである[9].

この論文は三つの章から成る. 第 I 章では第 VIII 論文で証明した補題に量的な補足を付け加える. 第 II 章では第 2 補題を準備する. そして第 III 章ではこれらの補題を使って上記の問題を論じる. (詳しくは Nos. 1, 7, 24 を見よ.)

第 1 章. 補題の補足.

1. 問題. 我々は Hartogs の逆問題 を Weil の積分[10]を用いないで解きたい. そうすると, 前の論文で確立した補題 [訳注. 基本補題のこと.] に関して次のような問題が生じる :

≪ 第 VIII 論文の補題で見るように, Δ_0 の近傍における (R) 上の任意の正則函数 u には, (A_0, B_0) の近傍における正則函数 $F(x,y)$ で, Σ 上で $F = uu_0$ となり, 大域的に $F \equiv 0 \mod (\Phi)$ となるものが対応する. それでいま, A_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ を (A_0, B_0) の近傍における正則函数として, 恒等的に

$$F = A_1\Phi_1 + A_2\Phi_2 + \cdots + A_\mu\Phi_\mu$$

とする. ここで V_0 を $\Delta_0 \Subset V_0 \subseteq (R)$ なる領域 (連結または非連結), M を或る正の数として,

[5] (Jahresbericht der Deutsch Mathematiker Vereinigung). また H. Cartan, Note sur le premier problème de Cousin, 1938 (C. R. Paris) を見よ.

[6] (Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, VIII)

[7] Nieuw Archief voor Wiskunde, Amsterdam)

[8] 第 VIII 論文の序文の Note を見よ. この日本語の論文にはすでに問題 (C_1), (C_2) が (explicite に), 問題 (E) が (implicite に) 示されている.

[9] 同上

[10] 第 VI 論文および第 III 章 B を見よ.

$$|u| < M, \qquad V_0 \text{ に対して}$$

と仮定する．このとき K を u にはよらない正の数として, A_i ($i = 1, 2, \ldots, \mu$) を,

$$|A_i| < KM$$

なる制限の下で, 求めることができるか.≫ [訳注. 1]

補題を構成する諸定理の量的な関係を調べる (inspecter) ことで, この問題を逐次解決しよう.

2．剰余の定理． 第 VII 論文 (以下 ≪第 論文≫ と言う言葉は省く.) の 5 節で定式化された, 次の様な, 剰余の定理から始める：

≪空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ に $[\mathfrak{D}, (C)]$ なる形の領域を考える．ここで $\mathfrak{D}$ は空間 (x) における (有限) 単葉な領域, (C) は y 平面の円である．そして $[\mathfrak{D}, (C)]$ における正則函数 $F(x, y)$ で, $\mathfrak{D}$ のすべての点 (x^0) に対し, 方程式 $F(x^0, y) = 0$ は (C) 内に λ 個の根を持つようなものを考える．λ は (x^0) によらない有限の整数である．そうすると $[\mathfrak{D}, (C)]$ における任意の正則函数 $f(x, y)$ は

$$f(x, y) = f_0(x, y) + \varphi(x, y) F(x, y)$$

の形に表すことができる．ここで f_0 と φ は $[\mathfrak{D}, (C)]$ における正則函数であり, f_0 は高々 $\lambda - 1$ 次の y の多項式である．(もし $\lambda = 0$ なら恒等的に零である.) さらに, このような分解は一意的である.≫

W. Rückert[11]に負うこの定理は, H. Cartan[12] によって量的に調べられた．その結果だけを定式化しておこう．

(C_0) を (C) に含まれる, (C) の同心円とし, (x^0) を $\mathfrak{D}$ の任意の点とするとき, $F(x^0, y) = 0$ の λ 個の根はすべて (C_0) 内にあると仮定する．そうすると, もし $[\mathfrak{D}, (C)]$ において $|f|$ が上限 M を持つなら, $[\mathfrak{D}, (C_0)]$ において

$$|f_0| < KM, \qquad |\varphi| < KM$$

である．K は f によらない正の定数である. [訳注. 2]

3．局所的問題 ($\mathrm{C_1}$)． 次は問題 ($\mathrm{C_1}$) を量的に調べることである．先ずそれを局所的な問題に対して考え, 次のことを示そう．

[11] Math. Annalen, 1933.

[12] H. Cartan, Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, 1944. (Annales de l'Ecole Normale, pages 192–194).

$\ll$ 空間 (x) における多円筒 (C) : $|x_i| < R$ $(i=1,2,\ldots,n)$[13] 内の正則函数 $F_1, F_2, \ldots, F_p$ に対し, 次の役割をする R より小さい正の数 r と正の数 K が対応する : (C) における正則函数 $f(x)$ で, (C) のすべての点で $f \equiv 0 \mod (F)$ であり, (C) において $|f| < M$ (M は或る正の数) となるものが与えられたとき, 多円筒 (γ) : $|x_i| < r$ $(i=1,2,\ldots,n)$ において, 恒等的に

$$f = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p$$

となるような正則函数 $A_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を,

$$|A_i(x)| < KM$$

なる制限の下に見つけることができる.$\gg$

これを示すため, 問題 (C_1) を次のように一般化する.

$\ll$ f_i, F_{ij} $(i=1,\ldots,p;\, j=1,\ldots,q)$ は空間 (x) 上の領域 $\mathfrak{D}$ における正則函数を表し, A_{ij} は

$$A_{ij} = A_{kl} \qquad (i \neq k)$$

$(i,k=1,\ldots,q;\, j,l=1,\ldots,p)$ の形の幾つかの等式を満たす未知函数を表すとして, 連立函数方程式系

$$\text{(a)} \qquad f_i = A_{i1}F_{i1} + A_{i2}F_{i2} + \cdots + A_{ip}F_{ip} \qquad (i = 1,2,\ldots,q)$$

が与えられたとし, この方程式系は $\mathfrak{D}$ のすべての点で解を持つとして[14], $\mathfrak{D}$ に対する解を見つけること.$\gg$

この函数方程式の形を整理しよう. 例えば, 等式 $A_{12} = A_{21}$ を伴う函数方程式

$$f_1 = A_{11}F_{11} + A_{12}F_{12}, \quad f_2 = A_{21}F_{21} + A_{22}F_{22},$$

を考える. ここで

$$\begin{array}{lll} \Phi_{11} = F_{11}, & \Phi_{12} = F_{12}, & \Phi_{13} = 0 \\ \Phi_{21} = 0, & \Phi_{22} = F_{21}, & \Phi_{23} = F_{22} \end{array}$$

[13] 空間 (x) における $\ll$ 多円筒 $\gg$ とは $|x_i - x_i^0| < r_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ の形の点集合のことである. ((x^0) は定点であり, r_i は正の数である).

[14] 方程式 (a) (等式を伴う) で, たとえ $\mathfrak{D}$ のすべての点で局所的に $f_i \equiv 0 \mod (F_{i1}, F_{i2}, \ldots, F_{ip})$ だとしても局所解を持つとは限らない. 例えば $x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2$, $x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2$, $A_{12} = A_{22}$ を見よ.

と置くと, 与えられた函数方程式は

$$f_1 = B_1\Phi_{11} + B_2\Phi_{12} + B_3\Phi_{13},$$
$$f_2 = B_1\Phi_{21} + B_2\Phi_{22} + B_3\Phi_{23}$$

の形になる. (a) の形の函数方程式 (与えられた等式を伴う) は, このような整理を施すことで, 常に

$$f_i = B_1\Phi_{i1} + B_2\Phi_{i2} + \cdots + B_r\Phi_{ir} \quad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

の形に直せる. ここで $(\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \ldots, \Phi_{ir})$ は順序を無視すれば, $(F_{i1}, F_{i2}, \ldots, F_{ip}, 0, \ldots, 0)$ である[15]. [訳注. 3]

このように一般化された問題に対する上記の命題を証明 (légitimer) しよう. この命題は $(0, q)$ に対しては正しいから, $n \geq n' > 0,\ q \geq q' > 0$ なるすべての (n', q') に対して正しいことを仮定して, $(n, q{+}1)$ と $(n{+}1, 1)$ に対して証明 (justifier) すればよい. [訳注. すなわち, 空間の次元 n と式の個数 q に関する 2 重帰納法である.] $(n, q{+}1)$ に対する命題から始める.

空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ において, 連立函数方程式

$$(1) \qquad f_i = A_1F_{i1} + A_2F_{i2} + \cdots + A_pF_{ip} \quad (i = 1, 2, \ldots, q+1)$$

を考える. ここで f_i, F_{ij} $(j{=}1, \ldots, p)$ は多円筒

$$(C) : \ |x_k| < R \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

に与えられた正則函数であり, A_j は未知函数を意味する. 方程式 (1) は (C) のすべての点で解を持つと仮定し, 帰納法の仮定の下で, 多円筒 (γ) : $|x_k| < r$ $(k{=}1, 2, \ldots, n)$ に対する解を, $|A_j(x)| < KM$ なる制限の下で求めようというのである. ここで r $(< R)$, K は f_j によらない正の数であり, M は (C) における $|f_i(x)|$ の上限である.

仮定によって, 命題は $(n, 1)$ に対しては正しいから, 函数方程式

$$(2) \qquad f_1 = A_1F_{11} + A_2F_{12} + \cdots + A_pF_{1p}$$

に対し, f_1 によらない正の数 R_1 $(< R)$ と K_1 が存在し, 多円筒 (C_1) : $|x_k| < R_1$ $(k{=}1, 2, \ldots, n)$ に対して,

$$|A_i^0| < K_1M$$

[15] このような整理をするだけで H. Cartan は, 問題 (K) が常に解けると言う我々の証明 (VII, No. 6) を非常に短くした. H. Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiques de plusieurs variables, 1950, (Bulletin de la Société Mathématique de France) を見よ.

なる制限の下にある正則函数 A_i^0 $(i=1,2,\dots,p)$ を, 恒等的に方程式 (2) を満たすように見つけることができる. ここで

$$B_i = A_i - A_i^0 \qquad (i=1,2,\dots,p)$$

と置く. そうすると方程式 (2) は

$$B_1F_{11} + B_2F_{12} + \cdots + B_pF_{1p} = 0 \tag{3}$$

となる.

函数方程式 (3) は $\Delta \Subset (C)$ なるすべての多円筒 Δ において,

$$C_{ij} = C_{kl} \ (i \neq k;\ i,k=1,2,\dots,p;\ j,l=1,\dots,r')$$

の形の幾つかの等式を伴った,

$$B_i = \sum C_{ij}\Pi_{ij} \qquad (i=1,2,\dots,p;\ j=1,\dots,r')$$

の形の形式解を持つ (VII の定理 4 および 3). これに方程式のときと同じ仕方の整理をして,

$$B_i = \sum C_j\Pi_{ij} \qquad (i=1,2,\dots,p;\ j=1,\dots,r)$$

の形の形式解が得られる. [訳注. 4]

この解と $B_i = A_i - A_i^0$ を

$$f_i = \sum A_kF_{ik} \qquad (i=2,\dots,q+1;k=1,\dots,p) \tag{4}$$

へ代入して

$$\varphi_i = \sum C_j\Phi_{ij} \qquad (i=2,\dots,q+1;j=1,\dots,r) \tag{5}$$

の形の函数方程式が得られる. ここで $\varphi_i = f_i - \sum A_k^0F_{ik}$ $(k=1,2,\dots,p)$ であり, Φ_{ij} は (C_1) における (f) にはよらない定まった正則函数である. これは明らかに (n,q) の場合であるから, 所期の性質を持つ (5) の解は存在する. したがって, 与えられた方程式 (1) に対してもそうである.

次に, [訳注. $(n+1,1)$ の場合] 空間 $(x_1,x_2,\dots,x_n,y)$ に多円筒

$$(C)\ :\ |x_i| < R, \quad |y| < R \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

と函数方程式

$$f = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p \tag{6}$$

を考える. この f と F_j $(j=1,\dots,p)$ は (C) に与えられた正則函数で, (C) のすべての点で $f\equiv 0 \mod (F)$ となるようなものを表し, A_j は未知函数を表す. 帰納法の仮定の下で, この方程式に対しての命題を証明 (justifier) しよう. F_j のどれか一つは恒等的に零ではないと仮定し (もしそうでなければ問題はない), 視点を定めるため, 恒等的に $F_1(x,y)\neq 0$ とする. Weierstrass [訳注. 予備定理] により, ((x,y) と R を変えて) $F_1(x,y)$ は最高次の係数が 1 の y の多項式と見なすことができる. $\rho<R$, $\rho''<\rho'<R$ なる三つの数 ρ,ρ',ρ'' を選び, 多円筒 $\Delta:|x_i|<\rho$ $(i=1,2,\dots,n)$ のすべての点 (x') に対して方程式 $F_1(x',y)=0$ は円 $(C''):|y|<\rho''$ 内に同一個数の根を持ち, $\rho''\leq|y|<\rho'$ には根を持たないとする. λ をその根の個数とする. 円 $|y|<\rho'$ を (C') として, $[\Delta,(C')]$ 内で考えると, F_1 は常に y の λ 次の多項式と仮定することができる.

そうすると剰余の定理により函数 $f(x,y)$ は $f=f_0+\varphi F_1$ の形に表される. ここで f_0 と φ は $[\Delta,(C')]$ における正則函数を表し, 特に f_0 は y の高々 $\lambda-1$ 次の多項式である. (もし $\lambda=0$ なら恒等的に零である.) そしてさらに, もし $[\Delta,(C')]$ で $|f|<M$ なら, K を f によらない正の数として, $[\Delta,(C'')]$ で $|f_0|<KM$, $|\varphi|<KM$ が得られる. したがって方程式 (6) の函数 f は $\lambda-1$ 次以下の y の多項式であると仮定することができる. (以下 $\lambda>0$ と仮定する. もしそうでなければ問題はない.) 同様に方程式 (6) の函数 F_k $(k=2,3,\dots,p)$ も $\lambda-1$ 次以下の y の多項式であると仮定することができる. [訳注. このような特殊な場合に成り立てば, 一般な場合にも成り立つというのである.]

$[\Delta,(C'')]$ に対する方程式 (6) をこの条件の下で考える. $A_j(x,y)$ $(j=1,2,\dots,p)$ を (6) の解とするとき, もしすべての A_j が $\lambda-1$ 次以下の y の多項式なら, さし詰めそれを特殊解と呼ぶ. 特殊解の A_1 は高々 $\lambda-2$ 次でなければならない. (もし $\lambda=1$ なら $A_1=0$ である.)

(x^0) を Δ の任意の点とする. y' を (C') の任意の点とするとき, 方程式 (6) は (x^0,y') に対して局所解を持つ. 従って VII の定理 1 により, 方程式 (6) は $[(x^0),(C'')]$ の或る近傍に対して解を持つ. このことから方程式 (6) に付けられた条件, 特に F_1 の条件により, Δ のすべての点 (x^0) に対して方程式 (6) は局所特殊解を持つ (上記の解に対して剰余の定理を適用して).

ここで

$$f=\varphi_1 y^{\lambda-1}+\varphi_2 y^{\lambda-2}+\cdots+\varphi_\lambda,$$

$$F_1=y^\lambda+\Phi_1 y^{\lambda-1}+\Phi_2 y^{\lambda-2}+\cdots+\Phi_\lambda,\quad A_1=B_2 y^{\lambda-2}+\cdots+B_\lambda,$$

$$F_i=\Phi_{i1} y^{\lambda-1}+\Phi_{i2} y^{\lambda-2}+\cdots+\Phi_{i\lambda},\quad A_i=B_{i1} y^{\lambda-1}+B_{i2} y^{\lambda-2}+\cdots+B_{i\lambda},$$

$(i=2,3,\ldots,p)$ と置く．そうすると (A) が方程式 (6) の特殊解であるためには (B) が Δ に定義される次の連立函数方程式を満たすことが必要十分である．

$$(7)\quad 0=B_2+\sum B_{i1}\Phi_{i1},\quad 0=(B_2\Phi_1+B_3)+\sum(B_{i1}\Phi_{i2}+B_{i2}\Phi_{i1}),\ldots,$$

$$\varphi_\lambda=B_\lambda\Phi_\lambda+\sum B_{i\lambda}\Phi_{i\lambda},\quad (i=2,3,\ldots,p).$$

方程式 (6) が Δ のすべての点に対して局所特殊解を持つから, 方程式 (7) は Δ のすべての点で局所解を持つ．これは (n,q) の場合である．したがって帰納法の仮定により, 原点における, 所期の条件を満たす解が存在する．したがって方程式 (6) に対しても同様である．

当初の命題はしたがって正しい．一口に言えば, <u>一般化された問題 (C_1) は常に量的条件を満たす局所解を持つ</u> ことが分かった．

4．大域的問題 ($\mathbf{C_1}$)． 今度は問題 (C_1) を量的に, しかも大域的に調べる (inspecter) ことが問題である．そのために引き続き一般な形での考察を続けなければならない．

VII の No. 4 の幾何学的状勢を思い出そう．

$\ll$ 各 x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 平面に閉円 $(\overline{C}_i)$ を描き, $(\overline{C}_i)$ を成分としてを持つ閉多円筒を $(\overline{C})$ とする．$(\overline{C})$ の勝手な点を E_0 と表す．

x_n を実部と虚部に分けて $x_n=X+iY$ とし, x_i^0 を複素数値, Y^0 を実数値として, $x_i=x_i^0$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$, $Y=Y^0$ の形の直線を考え, E_1 をこの直線と閉多円筒 $(\overline{C})$ との交わりとする．E_1 は線分であるが, 点になることもある．

同様に, 実次元を順次 1 ずつ増やしていって, E_2, $E_3,\ldots$ を考え, E_{2n} に達する．例えば E_2 は x_i $(i=1,2,\ldots,n-1)$ 平面の成分が $(\overline{C}_i)$ の点で, x_n 平面の成分が $(\overline{C}_n)$ であるような閉筒状集合であり, E_{2n} は閉多円筒 $(\overline{C})$ を示す.$\gg$

問題 (C_1) (一般な, そして量的な) は E_0 の近傍では解けることを見た．それで <u>E_1 の場合</u> へ移ろう．

$\ll$ 集合 E_1 の任意の一つを考え, それを同じ文字 E_1 で表す．これは実際に線分であると仮定してもよい．

空間 $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ における E_1 の成分は点であり, それを Q と表す．そして x_n 平面における成分は線分で, それを l と表す．l は水平である．それの左端を m_0, 右端を m_q として, l 上に $q-1$ 個の点 $m_1,\ldots,m_{q-1}$ を左から右へ取る．l_i を閉線分 $[m_{i-1},m_i]$ $(i=1,2,\ldots,q)$ とし, 空間 (x) において, M_i を筒状集合 (Q,m_i), L_i を筒状集合 (Q,l_i) として

$$L_1\cup L_3\cup L_5\cup\cdots=\Delta_1,\quad L_2\cup L_4\cup L_6\cup\cdots=\Delta_2$$

と置く．そうすると

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = E_1, \quad \Delta_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2 = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{q-1}$$

である.≫

さて $(\overline{C})$ と同心で, $(\overline{C})$ を含む多円筒 (C') において函数方程式

$$(1) \qquad f_i = A_1F_{i1} + A_2F_{i2} + \cdots + A_pF_{ip} \quad (i = 1, 2, \ldots, p')$$

を考え, これは (C') のすべての点で解を持つと仮定する．(記号はいつもの意味を持つとする.) 問題 (C_1) は E_1 のすべての点で (量的に) 解けるから, 線分 l_h $(h=1,2,\ldots,q)$ を十分小さく取ると, 各 L_h の近傍でそれを解くことができる．詳しくは, x_n 平面上で l_h の中点を中心とした l_h を含む円 α_h および, 空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ に Q を中心とする多円筒 (β) を, f_i と関係なく描くことができ, 多円筒 (β, α_h) における正則函数 A_j $(j=1,\ldots,p)$ で, 恒等的に等式 (1) を満たし, (β, α_h) 内で条件

$$|A_j| < K_1 M$$

を満たすようなものが存在する．ここで K_1 は f_i によらない正の数で, M は $|f_i|$ の (C') における上限である．

$\alpha_h \cap \alpha_{h+1} = \gamma_h$ $(h < q)$ として,

$$(\beta, \alpha_1) \cup (\beta, \alpha_3) \cup \ldots = V_1, \quad (\beta, \alpha_2) \cup (\beta, \alpha_4) \cup \ldots = V_2$$

を考え, V_1 に対しては $A_j = A'_j$ とし, V_2 に対しては $A_j = A''_j$ として, さらに $A'_j - A''_j = B_j$ と置く．そうすると $V_0 = V_1 \cap V_2 = (\beta, \gamma_1) \cup (\beta, \gamma_2) \cup \cdots \cup (\beta, \gamma_{q-1})$ で恒等的に

$$(2) \qquad B_1F_{i1} + B_2F_{i2} + \cdots B_pF_{ip} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p')$$

が得られる．

函数方程式 (2) に対しては, (C) と同心で, $(C) \Subset (C'') \Subset (C')$ なる多円筒 (C'') における形式解

$$(3) \qquad B_j = \sum C_k \Phi_{jk} \quad (j = 1, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, p'')$$

が得られる．(VII の定理 4 と 3．Φ_{jk} は或る正則函数である.) $V_0 \subset (C'')$ と仮定する．

もう一度 $B_j = A'_j - A''_j$ とする．B_j は V_0 における正則函数であり, しかもこの方程式は V_0 のすべての点で解 (C) を持っているから, 式 (3) は V_0 における問題 (C_1) を与える．x_n 平面上に m_h $(h=1,2,\ldots,q-1)$ を

中心とする円 δ_h および空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ における Q を中心とする多円筒 (β') を次のように描く. すなわち, $\delta_h \Subset \gamma_h$, $(\beta') \Subset (\beta)$ であり, さらに指定された性質を持ち, [訳注. (2) を満たす] V_0 内で $|B_j| < M$ を満たすすべての正則函数 B_j に対して, 方程式 (3) を満たす正則函数 C_j で, 閉多円筒 (β', δ_h) に対して条件

$$|C_h| < K_2 M$$

を満たすものを見つけることができる. K_2 は B_j によらない (勿論 M にもよらない) 正の定数である. [訳注. 5]

次の <u>Cousin 積分</u>[16] を考える.

$$I_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_h \int_{d_h} \frac{C_k(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)}{t - x_n} dt \quad (h = 1, 2, \ldots, q-1),$$

ここで d_h は δ_h の垂直な直径を表し, 積分はそれに沿って下から上へ取る (i は虚数単位である).

r をすべての d_h の長さの半分より小さい正の数とし, x_n 平面上で線分 l 迄の距離が r より小さい点の集合を λ とする. λ を直径 d_h によって次のように分割する. すなわち, d_1 の左にある λ の部分を λ_1 とし, d_1 と d_2 の間の部分を λ_2 とする. 等々. そして

$$\mu_1 = \lambda_1 \cup \lambda_3 \cup \lambda_5 \cup \ldots, \quad \mu_2 = \lambda_2 \cup \lambda_4 \cup \lambda_6 \cup \ldots$$

と置く.

この幾何学的状勢の下で, 積分 $I_k(x)$ は各領域 (連結または非連結) (β', μ_g) $(g = 1, 2)$ における正則函数を与える. それを $\varphi_k^{(g)}(x)$ と表す. これらは $[(\beta'), (d_h \cap \lambda)]$ $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$ のすべての点で正則になり, 恒等的に

$$\varphi_k^{(1)}(x) - \varphi_k^{(2)}(x) = C_k(x)$$

となる. そして明らかに

$$|\varphi_k^{(1)}(x)| < K_3 M, \qquad |\varphi_k^{(2)}(x)| < K_3 M$$

が得られる. ここで K_3 は正の定数を示し, M は $|B_j|$ の V_0 における上限を表す.

各 (β, μ_g) $(g = 1, 2;\ A_j^{(1)} = A'_j,\ A_j^{(2)} = A''_j)$ に対し, それぞれ

$$\psi_i^{(g)}(x) = A_1^{(g)} F_{i1} + A_2^{(g)} F_{i2} + \cdots + A_p^{(g)} F_{ip} \quad (i = 1, 2, \ldots, p')$$

[16] この性質を持ち, この役割をするこの形の積分をすべて Cousin 積分と呼ぶ. (Cousin, Acta Math., 1895 を見よ.)

$$-\sum_j \left[\sum_k \varphi_k^{(g)}\Phi_{jk}\right] F_{ij} = a_1^{(g)}F_{i1} + a_2^{(g)}F_{i2} + \cdots + a_p^{(g)}F_{ip}$$
$$(j = 1, \ldots, p; k = 1, \ldots, p'')$$

と置く.

そうすると恒等的に $\psi_i^{(g)} = f_i$, $a_i^{(1)} = a_i^{(2)}$ である. したがって (β', λ) に対して恒等的に

$$f_i = a_1F_{i1} + a_2F_{i2} + \cdots + a_pF_{ip} \quad (i = 1, 2, \ldots, p')$$

であり, さらに

$$|a_j| < K_4M \quad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

である. ここで K_4 は f_i によらない正の定数であり, M は上記と同じ数を表す. r' は r と (β') の半径より小さい数である.

このようにして, 多円筒 (C') における一般化された問題 (C_1) が与えられると, 所期の役割を果たす, (f) によらない正の定数 K_4 と r' を見つけることができる. [訳注. E_1 の近傍として Q を中心とする半径 r' の多円筒と, l までの距離が r' 以下の点の全体との直積を考えると, そこで上記の不等式を満たす a_j $(j=1, \ldots, p)$ が求まった.] 言い換えると一般化された量的問題 (C_1) は E_1 に対して常に解ける. 同様の議論を繰り返して次の結果に達する.

空間 (x) における多円筒 (C) において, 正則函数 $F_{i1}, F_{i2}, \ldots F_{ip}$ と f_i が与えられ, 函数方程式

$$f_i = A_1F_{i1} + A_2F_{i2} + \cdots + A_pF_{ip} \ (i = 1, 2, \ldots, p')$$

は (C) のすべての点で解 (A) を持つとする. そして (C) と同心の多円筒 (C_0) を $(C_0) \Subset (C)$ のように与える. このとき f_i によらない正の定数 K があって, M を (C) における $|f_i|$ の上限とするなら, (C_0) における正則函数 A_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ を, 函数方程式と条件 $|A_i| < KM$ を満たすように選ぶことができる. [訳注. 6]

5. 問題 (C_2)**.** 問題 (C_1) と問題 (C_2) の間には VII の No. 1 で見た関係がある. したがって上の結果から直ちに次の結果が得られる.

空間 (x) に半径がそれぞれ R_i, R_i^0 $(i = 1, 2, \ldots; R_i > R_i^0)$ の二つの同心の多円筒 $(C), (C_0)$ を描く. r を $r < R_i - R_i^0$ なる正の数として, (x^0) を (C_0) の任意の点とし, (x^0) を中心とする半径 r の多円筒 (γ) を描く. $F_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, p)$ を (C) における正則函数の系とする. この状況の下で, 次の役割をする正の定数 K が存在する. すなわち, M を (γ) によらない正

の数とし, $|\varphi|<M$ であるような (γ) における正則函数 φ が与えられ, (γ) のすべての対 $((\gamma_1),(\gamma_2))$ に対し, 対応する正則函数 φ_1, φ_2 は $(\gamma_1)\cap(\gamma_2)$ のすべての点で $\varphi_1\equiv\varphi_2 \mod (F)$ を満たすとする. このとき (C_0) における正則函数 $\Phi(x)$ を, $|\Phi|<KM$ であり, しかも (γ) のすべての点で

$$\Phi\equiv\varphi \mod (F)$$

となるように見つけることができる. [訳注. 7]

問題 (C_1) と (C_2) を我々は多円筒で研究した. しかし結果は単葉な筒状域でも成り立つ. それを確かめるためには, いつもの仕方, すなわち上空移行を応用すればよい.

6. (W) 函数. 補題の補足. (W) 函数を量的に調べよう. VIII の No. 7 を思い出そう. 空間 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 上に領域 $\mathfrak{D}$ (連結または非連結) を考え, これは非超越的な分岐点を内点として持っていてもかまわない. $\eta_1(p),\eta_2(p),\ldots,\eta_m(p)$ を $\mathfrak{D}$ における正則函数とする. 同じ座標を持つ $\mathfrak{D}$ のすべての通常点の対に対して $\eta_1(p)$ の解析要素は異なっていると仮定する. 空間 $(x_1,x_2,\ldots,x_n;\, y_1,y_2,\ldots,y_m)$ において

$$y_j=\eta_j(p),\quad p\in\mathfrak{D}\quad (j=1,\ldots,m)$$

で与えられる解析集合 Σ を考える.

1^o. Δ を $\Delta\Subset\mathfrak{D}$ なる領域 (連結または非連結) とし, Δ は $\underline{\Delta}$ の被覆面 (Überlagerungsbreich) とする. $\underline{\Delta}$ は Δ の空間 (x) 上への射影 (Grund-bereich) である. そうすると Δ の葉数は一定 ν である. (x) は $\underline{\Delta}$ の任意の点とし, $P_1,P_2,\ldots,P_\nu$ を点 (x) 上の Δ の点として,

$$F_1(x,y_1)=\prod[y_1-\eta_1(P_i)]\qquad (i=1,2,\ldots,\nu)$$

の形の函数を作る. Weierstrass により, 次のことが知られている.

≪ Δ 上の任意の正則函数 $u(P)$ に対し, 或る定まった方法で $\underline{\Delta}$ における (x) の正則函数を係数とする y_1 の多項式 $\Phi(x,y_1)$ が対応し, $F_1=0$ 上で $u\,\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}=\Phi$ となる.≫

この証明法[17]を良く見ることで次のことが分かる. [訳注. 8]

$A\Subset\Delta$ なるすべての領域 (連結または非連結) A に対し, u によらない正の数 K が対応し, y_1 の多項式 $\Phi(x,y_1)$ の係数は, 絶対値において A で KM を越えない. M は $|u|$ の Δ における上限である.

[17] W.F.Osgood, Lehrebuch der Funktionentheorie II_1. 1929, 116,117 頁を見よ.

2^o. (x^0, y^0) を解析集合 Σ の任意の点とする. 次の非特異 1 次変換 $\mathfrak{L}$ を考える.

$$x'_i = \sum A_{i,k}(x_k - x^0_k) + \sum A_{i,n+l}(y_l - y^0_l),$$
$$y'_j = \sum A_{n+j,k}(x_k - x^0_k) + \sum A_{n+j,n+l}(y_l - y^0_l),$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n; j, l = 1, \ldots, m).$$

Σ に関して, 空間 (x, y) に函数 $\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}$ を作った. 同じ方法で新しい空間の原点の近傍における Σ の像に関して, 空間 (x', y') における函数 $W(x, y)$ を作ろう. もし $\mathfrak{L}$ として適当な変換を選ぶなら, これは可能であり, しかも W は $\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}$ と同じ性質を持つ. この W 函数に関して, 前の場合 [訳注. 第 VIII 論文の No. 7] の証明法を調べれば, 容易に次のことが分かる.

$\ll$ $n+1$ 個の変換 $\mathfrak{L}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ を選んで, 対応する W_i 函数が上記の性質を持ち, さらにこれらの函数の共通零点の集合は, (x^0, y^0) の近傍で, Σ の特異点の集合 S_0 に含まれるようにすることができる.$\gg$

3^o. 点 (x^0, y^0) が S_0 に属していると仮定する. $U(x, y)$ を (x^0, y^0) の近傍における正則函数とし, S_0 上恒等的に零とする. $\ll$<u>零点定理</u>$\gg$ (VIII の No. 8) により, $\ll$ (x^0, y^0) の近傍で $U^\lambda \equiv 0 \bmod (W_1, W_2, \ldots, W_{n+1})$ となる. λ は正の整数である.$\gg$

4^o. 今度は No. 1 に述べた問題を考える (VIII の No. 10 を見よ). No. 4 以後に見て来たことから (Borel の補題により) 容易に次のことが分かる. すなわち, <u>整数 λ を十分大きく選びさえすれば, 答えは肯定的である.</u> [訳注. 9]

第 2 章. 擬凸状領域, 第 2 補題.

7. 初めに. 第 VI 論文の序文に述べたことを思い出そう. そこで述べたように, F. Hartogs は 1906 年, 多変数函数論に一時代を画したと思える一つの発見をした. すなわち, すべての正則域は <u>擬凸状</u> と呼ばれる極めて奇妙な制約の下にあるというのである[18].

同じ制約はこの理論の他の場所で次々と発見された. それを簡単に振り返っておこう. 1910 年, E. E. Levi は <u>有理型領域</u> もまた擬凸状であることを示した[19]. 1926 年, G. Julia は正則函数の族に対する <u>正規域</u> も同

[18] F. Hartogs, Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Intergralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen (Münch. Berichte).

[19] E. E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse (Annali di Matematica).

様であることを示した[20]. 1931 年, W. Saxer は 有理型函数の族 に対しても (或る意味で) 同じであることを付け加えた[21]. 最後に 1934 年, 著者は 解析面の族 も又同様であることを示した[22].

これらの定理は, それから導かれる幾つかの結果と共に, 発見者や他の数学者達[23], 特に Hartogs と E. E. Levi によって研究された.

この章は三つの部分 A. B. C. に分かれている. A では Hartogs と E. E. Levi に負う事柄を抽象化して述べる. B では第 VI 論文に述べた擬凸状函数について述べる. そして C では多葉域に対する固有の新しい問題を取り扱う[24].

A. 擬凸状領域

8. 領域. この論文で以下に考える領域は No. 24 のみを除いて 有限不分岐 (fini sans point critique intérieur) である. それで一々この条件は示さない. この種の領域は Behnke–Thullen の著書 の中に正確に記述されている. 以下に述べるのは単にそれの紹介であり, 後に使う幾つかの言葉と概念を付け加えただけのものである.

複素 n 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の空間を考え, その空間 (x) 上に点 P を考える. 点とは定まった座標 (x) を持つ或る物 (Ding) である. 空間 (x) の点 (x) は P の (空間 (x) への) 射影 と呼ばれ, $\underline{P}$ と表される. 時として P を $\underline{P}$ の上にあると言う. E を点 P の集合とする. 射影 $\underline{P}$ の集合を E の射影と言い, $\underline{E}$ と表す.

空間 (x) 上の点集合に対し, 一般に抽象的集合論の言葉と概念を用いる[25].

空間 (x) 上の点集合は, それが近傍 (Umgebungen) と呼ばれる ≪ 近傍の公理 (Umgebungspostulate)≫ を満たす部分集合の系 (S) を持ち, さ

[20] G. Julia, Sur les familles de fonctions de plusieurs variables (Acta Mathematica).
[21] W. Saxer, Sur les familles de fonctions méromorphes de plusieurs variables (C. R., Paris).
[22] K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc. (Journal of Science of the Hiroshima Univ.).
[23] Behnke-Thulles の著書や序文に示したそれらの帰結 (prolongement) を見よ. (さらに著者の上述のノートを見よ.)
[24] 最近著者は, この章の主題と Hartogs の逆問題に関する P. Lelong と F. Norget のいくつかの論文を受け取った. しかし, 現在, 序文で述べた問題の解決 (勿論主観的な) を検討している最中なので, 著者は後の機会にそれについて (客観的な形で) 述べるであろう. 所で, この問題と第 VIII 論文 (このために第 VII 論文が書かれた) に述べた補題の問題は著者にとって第 VI 論文 (1942) 以来の本質的な困難であった. (第 VI 論文における著者にとっての本質的な困難は積分方程式を採用するということの発見であり, 私はそれを第 I 論文 (1936) 以来追跡していたのである.) (No. 29 を見よ.)
[25] F. Hausdorff, Mengenlehre を見よ.

らにそれが (S) に準じた (respectant) 意味で連結であるとき, それを領域と呼ぶ.

空間 (x) 上に領域 $\mathfrak{D}$ を考える. 定義により, $\mathfrak{D}$ は定められた近傍系 (S) を持つ. したがって $\mathfrak{D}$ 上に連続曲線を描くことができる. P_1, P_2 を $\mathfrak{D}$ 上の点の任意の対とする. P_1, P_2 を結ぶ $\mathfrak{D}$ 上の長さのある連続曲線の長さの下限を $d(P_1, P_2)$ と表す. $d(P_1, P_2)$ は ≪ 距離の公理 (Entfernungspostulate)≫ を満たす. この $d(P_1, P_2)$ によって領域 $\mathfrak{D}$ 上の点 P_1, P_2 の <u>距離</u> (Entfernung) を定義する. それを導入することで領域に対し ≪ 距離空間 ≫ の言葉を用いることができる.

同じ空間 (x) 上の二つの領域の関係を考えよう. $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_0$ を二つの領域とし, $\mathfrak{D}_0$ のすべての点が $\mathfrak{D}$ に属しているとする. $\mathfrak{D}_0$ の各点を $\mathfrak{D}$ の同一の点に結びつける対応を考えたとき, もしその対応が両連続なら $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ の <u>部分領域</u> と呼び, $\mathfrak{D}_0 \subseteq \mathfrak{D}$ と表す. $\mathfrak{D}$ をまた $\mathfrak{D}_0$ の <u>延長</u>(prolongement) と言う. さらに集合として $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$ なら, 二つの領域 $\mathfrak{D}_0$ と $\mathfrak{D}$ は <u>等しい</u> (égaux) (または <u>同一</u> (identique) と言い, それを $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$ と表す.

$\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ を二つの領域とするとき, $\mathfrak{D}_1$ の点と $\mathfrak{D}_2$ の点の間に 1 対 1 両連続な対応を, 対応する点どうしが (空間 (x) への) 同じ射影を持つように作れるなら, その二つの領域は <u>同等</u> (équivalent) であると言い, それを $\mathfrak{D}_1 \sim \mathfrak{D}_2$ と表す.

擬凸状領域を定義するためには, 2 種類の関係 $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ と $\mathfrak{D}_1 \sim \mathfrak{D}_2$ を明確に区別しなければならない.

$\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}$ を二つの領域とするとき, $\mathfrak{D}_0$ のすべての点と $\mathfrak{D}$ の一部の点のとの間の対応を, $\mathfrak{D}_0$ の任意の点には $\mathfrak{D}$ の点が一意的且つ連続的に対応し, さらに対応する点どうしは同じ射影を持つように作れるなら, Behnke–Thullen にしたがって $\mathfrak{D}_0$ は $\mathfrak{D}$ に <u>含まれる</u> と言い, それを $\mathfrak{D}_0 < \mathfrak{D}$ と表す. (これは $\mathfrak{D}_0 \sim \mathfrak{D}$ の場合を含むことを注意しなければならない.) 等々. (上記の著書を見よ.)

もし $\mathfrak{D}_0 \subseteq \mathfrak{D}$ であり, さらに $\mathfrak{D}_0$ の点集合が領域 $\mathfrak{D}$ 上でコンパクトなら, 正確に言うと, $\mathfrak{D}_0$ の点のすべての無限列から, $\mathfrak{D}$ の点に収束する無限部分列が選びだせるとき, 部分領域 $\mathfrak{D}_0$ は $\mathfrak{D}$ の <u>完全内部</u> にあると言い, それを $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$ と表す.

今まで領域 (連結) という制限の下に述べて来たが, これらは (定義により) <u>領域 (連結または非連結)</u> に対しても同様である.

E を空間 (x) 上の点集合, $\mathfrak{D}$ を同じ空間上の領域とする. そして $\mathfrak{D}$ の点全体の集合を E' と表すとき, 記号 $E = \mathfrak{D}$ または $E \subseteq \mathfrak{D}$ は, それぞれ関係 $E = E'$ または $E \subseteq E'$ と理解する. 記号 $E \Subset \mathfrak{D}$ は点集合 E が $\mathfrak{D}$ に

含まれ, さらに E は領域 $\mathfrak{D}$ 上でコンパクトであることを意味する. このとき E は $\mathfrak{D}$ の 完全内部 に含まれるとも言う.

領域の族の交わり. Behnke–Thullen にしたがって, 抽象的な集合 $M = \{m, n, p, \ldots\}$ と, 空間 (x) 上の領域の族 $\{\mathfrak{D}_m, \mathfrak{D}_n, \mathfrak{D}_p, \ldots\}$ を考え, これらから次のような, 同じ空間上の点集合 δ を作る : (x^0) を中心とする多円筒 γ_0 で, この族のすべての領域 $\mathfrak{D}_m$ が γ_0 と同等な部分領域 V_m を持つものが存在するなら, (x^0) 上の V_m の点を P_m として, $Q=\{P_m\}$ を (座標 (x^0) を持つ) δ の点とする. $Q=\{P_m\}$, $Q'=\{P'_m\}$ を δ の点の任意の対とするとき, すべての $m \in M$ に対して $P_m = P'_m$ となるとき且つそのときのみ $Q=Q'$ と定義する.

空間 (x) 上にこのように定義された点集合 δ に対して次の様に近傍系 (S) を付与する : Q を δ の任意の点とし, Q を中心として γ_0 に含まれる多円筒 γ を描く. (x') を γ の任意の点とし, P'_m を (x') 上の V_m の点として, δ の点 $Q'=\{P'_m\}$ を考える. (x') が γ を動くとき, 点 Q' の全体は集合 v を描く. v は δ の単葉な部分集合である. $(S)=\{v\}$ と定義する. (S) は $\ll$ 近傍系の公理 $\gg$ を満たす. この近傍系 (S) を持つ集合 δ を同じ文字 δ で表す. そうすると, δ は空間 (x) 上の領域 (連結または非連結) である.

この領域 (連結または非連結) δ は明らかに次の性質を持つ.

1° すべての $m \in M$ に対して $\delta < \mathfrak{D}_m$ である.

2° δ' を第 1 の性質を持つ空間 (x) 上の領域 (連結または非連結) とすれば, 常に $\delta' < \delta$ となる.

この二つの性質を持つ, 空間 (x) 上の領域 (連結または非連結) は, 同等を除いてただ一つ定まる. δ を領域の族 $\{\mathfrak{D}_m, \mathfrak{D}_n, \mathfrak{D}_p, \ldots\}$ の 交わり と呼び, それを $\delta \sim \mathfrak{D}_m \cap \mathfrak{D}_n \cap \mathfrak{D}_p \cap \ldots$ と表す. (連結または非連結の領域に対しても同様である.)

同様に領域 (連結または非連結) の列の 核 を定義する. しかし, 領域の列の 収束 については, 変更することなしに, 著書の定義に従うこととする.

境界点. 境界点については何も変更することはないし, 何も付け加えることもない. しかし, 擬凸状領域を定義するため, さしあたって著書の記述を聞くことから始めよう.

$\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の領域とする. $\mathfrak{D}$ 内に点列 P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ を考える. この列は $\mathfrak{D}$ 内に集積点を持たないと仮定し, さらに次の性質を持つとする.

1° 射影の列 $\underline{P}_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ は点 (x^0) に収束する.

2° すべての正の数 ρ に対して, 正の整数 m が存在し, $i \geq m$, $j \geq m$ なる 2 点 P_i, P_j は, $\mathfrak{D}$ を通り, [訳注. その射影が] (x^0) を中心とする半径 ρ の多円筒 γ 内に留まる連続曲線で結べる.

このとき $R = (P_1, P_2, \ldots)$ は座標 (x^0) を持つ $\mathfrak{D}$ の <u>境界点</u> を定義すると言う. $R' = (P_1', P_2', \ldots)$ を $\mathfrak{D}$ の他の境界点とするとき, R' が同じ座標 (x^0) を持ち, さらに R と R' が次のような関係にあるとき $R = R'$ と言う: すべての正の数 ρ に対し, γ を上記の多円筒とするとき, 正の整数 m が存在して, $i \geq m$ であるような点 P_i, P_i' は $\gamma \cap \mathfrak{D}$ 内の連続曲線で結べる. 列 P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ の殆どすべての点を含む $\mathfrak{D}$ の単葉 [訳注. $\mathfrak{D}$ 上に単葉] な部分領域をすべて境界点 R の近傍と呼ぶ.

回転. 今後, $x_i' - \xi_i = \sum a_{ij}(x_j - \xi_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ (a_{ij} は定数) の形の, 距離 (ユークリッド的) を保存する, それ以外は任意な一次変換を, 空間 (x) の, 点 (ξ) の周りの回転と呼ぶ.

9. 擬凸状領域. 連続性定理を定義することから始めよう. $\mathfrak{D}$ を空間 $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ 上の領域とする. ここで $n \geq 1$ である. (しかし, 先ず $n > 1$ の場合に対して述べる.) M を $\mathfrak{D}$ の境界点とする. もし, 次の条件 (C) が満たされているすべての場合に, M が次の性質 (P) を持つとき, M は <u>連続性定理</u> を満たすと言う. $\mathfrak{D}$ のすべての境界点に対してそうであるとき $\mathfrak{D}$ が連続性定理を満たすと言う.

条件 (C). 変数 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ $(n \geq 2)$ の一つを他と区別して, それを y と表し, 他を $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ と表す. そして (ξ, η) を M の座標とする. そうすると M に対して正の数 ρ が対応し,

$$x_i = \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad 0 < |y - \eta| < \rho$$

を満たす点 (x, y) の集合を A と表すとき, M のただ一つの近傍に含まれる集合 A^* で, $\underline{A}^* = A$ となるものが存在する.

このとき, $\delta' < \rho$ なるすべての正の数 δ' に対して正の数 r が対応し,

$$|x_i - \xi_i| < r \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad |y - \eta| = \delta'$$

なる点集合を E と表すとき, $\mathfrak{D}$ のただ一つの単葉 [訳注. $\mathfrak{D}$ 上に単葉という意味.] な部分領域に含まれる点集合 E^* で, $\underline{E}^* = E$, $A^* \cap E^* \supset O$ となるものが存在する[26]. [訳注. 記号 $A \supset O$ は $A \neq \emptyset$ を意味する. 以下同様.]

性質 (P). 点 M に対し, $\delta \leq r$ なる正の数との対 (δ, δ') (δ は δ' に応じて定まる) が対応し, $|x_i' - \xi_i| < \delta$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ なるすべての点

[26] このことから, $x_i = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ 上の E^* のすべての点は A^* に属することになる.

(x') に対して少なくとも一つ円周 $|y-\eta|=\delta'$ 上の点 y' で, 次の条件を満たすものが対応する：

P を (x',y') 上の E^* の点とし, l を y 平面上の y' と η を結ぶ閉線分, L を空間 (x,y) の $((x'),l)$ の形の線分とするとき, 点 P を出発点とし, その射影が常に L 上にあるような線分を $\mathfrak{D}$ 上のに描いて行けば, 必ず $\mathfrak{D}$ の境界点に出合う. (L の終点またはその途中で.)

$n=1$ の場合は領域 $\mathfrak{D}$ が $(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ によらないという特別な場合と考えられる. [訳注. 正確には, $\mathfrak{D}$ の $x_j=x'_j$ $(j=1,\ldots,n-1)$ による切り口が点 $(x'_1,x'_2,\ldots,x'_{n-1})$ によらない.]

いま, $\mathfrak{D}$ を空間 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $(n\geq 1)$ 上の領域とする. もし $\mathfrak{D}$ のすべての境界点 M が連続性定理を満たし, さらに M のこの性質が M の射影の近傍における, 空間 (x) の 1 対 1 擬等角写像を許すなら, $\mathfrak{D}$ は擬凸状であると言う.

$n=1$ の場合は, すべての領域が擬凸状である.

10. 他の定義. 異なる形の擬凸状領域を定義しよう. 連続性定理から始める. 前節のそれを (A) 型連続性定理と呼び, 以下に (B) 型と (C) 型の連続性定理を考える.

$\mathfrak{D}$ を空間 $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ $(n>1)$ 上の領域とし, M を $\mathfrak{D}$ の境界点とする. $(x_1,x_2,y_1,y_2,\ldots,y_{n-2})$ を $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ の任意の置き換えとし, (ξ,η) を M の座標とする. 空間 (x) に (ξ) と異なる点 (a) を取り, (a) を中心とし, 境界が (ξ) を通る超球 S を描き, さらに (ξ) を中心とする超球 σ を描く. β を S の外にある σ の部分とする. β は線的単連結な領域である. 空間 (x,y) において $B=(\beta,\eta)$ とする. このような幾何学的状況の下で, もし M のただ一つの近傍に含まれる点集合で, その射影が B であるようなものは, どのような (a), σ に対しても存在しないならば, M は (B) 型連続性定理を満たすと言う. (空間 (z) 上の) 領域 $\mathfrak{D}$ は, もし $\mathfrak{D}$ のすべての境界点でそうなら, それを同じ言葉で呼ぶ.

$n=1$ の場合に対しては, すべての領域が (B) 型連続性定理を満たすと考えることができる.

$\mathfrak{D}$ をまた空間 $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ $(n>1)$ 上の領域とする. y を $z_1,z_2,\ldots,$ z_n の一つとし, 他を $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ とする. 空間 (x,y) に次の形の二つの領域を描く.

$$\begin{aligned}
&|x_i-x_i^0|<r, && \rho'<|y-y^0|<\rho \quad (i=1,2,\ldots,n-1);\\
&|x_i-x_i^0|<r',\ (r'<r) && |y-y^0|<\rho \quad (i=1,2,\ldots,n-1),
\end{aligned}$$

(ここで (x^0, y^0) は定点であり, r, r', ρ, ρ' は正の数である.) そしてこの二つの領域の和を Δ と書く. Δ は線的単連結である. 多円筒

$$|x_i - x_i^0| < r, \quad |y - y^0| < \rho \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

を C と表す. このような幾何学的状況の下で, 領域 $\mathfrak{D}$ (空間 (x) 上の) が, $\Delta^* \sim \Delta$, $\Delta^* \subseteq \mathfrak{D}$ なる領域 Δ^* が対応するすべての場合に, $C^* \sim C$, $\Delta^* \subset C^* \subseteq \mathfrak{D}$ なる領域 C^* が存在するという性質を持つなら, $\mathfrak{D}$ は (C) 型連続定理 を満たすと言う.

1 変数の平面上のすべての領域は (C) 型連続性定理を満たすと考えることができる. (C) 型連続性定理のみ 大域的 であることを注意しておく.

さて空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 1)$ 上の領域 $\mathfrak{D}$ を考える. もし $\mathfrak{D}$ の任意の境界点 M が (B) 型連続性定理を満たし, さらにこの性質が, M の近傍における, 空間 (x) の 1 対 1 擬等角写像を許すなら $\mathfrak{D}$ を (B) 型擬凸状 と呼ぶ.

$\mathfrak{D}$ を空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 1)$ 上の領域, M を $\mathfrak{D}$ の境界点とする. M を中心とし, 半径 ρ の多円筒 γ を描き, δ を γ 上の $\mathfrak{D}$ の部分の, M を境界点に持つ連結成分とする. この幾何学的状況の下で, もしすべての M に対して正の数 ρ_0 が対応し, すべての ρ $(\rho \leq \rho_0)$ に対応する部分領域 δ が (C) 型連続性定理を満たし, さらにそれが多円筒 γ のすべての 1 対 1 擬等角写像を許すなら, $\mathfrak{D}$ を (C) 型擬凸状 と呼ぶ.

この定義から平面 x_1 のすべての領域は (B) 型擬凸状であり, 同時に (C) 型擬凸状であることが導かれる.

11. 定義の一致. この三つの種類の擬凸状領域は同一種類の擬凸状領域であることを示そう. 以後それを単に $\ll$ 擬凸状領域 $\gg$ と呼ぶ. 複素 1 変数の平面上ではこれは自明であるから, 以下 $n > 1$ の空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で考える.

1^o. すべての (C) 型擬凸状領域は (A) 型擬凸状領域である ことは容易に分かる. (No. 9 より).

2^o. すべての (A) 型擬凸状領域は (B) 型擬凸状領域である ことを示そう. このためには, すべての (A) 型擬凸状領域は (B) 型連続性定理を満たすことを示せばよい.

$\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の (A) 型擬凸状領域, M を $\mathfrak{D}$ の境界点とする. 改めて $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の二つを x_1, x_2 と表し, 残りを $y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}$ と表す. 指示された状況 [訳注. (B) 型連続性定理の定義における状況] を考え, 矛盾に導くため, 空間 (x, y) 上の集合 B^* で, M のただ一つの近傍に含まれ, $B^* = B$ となるものが存在したと仮定する.

適当な平行移動と回転によって空間 (x) を空間 (x') に写して, S, $\sigma, \dots$ の像を同じ文字で表し, (a) と (ξ) の像はそれぞれ $(0,0)$ と $(R,0)$ であるとする. R は S の半径である. 空間 (x') の $x'_1 = R$ [訳注. 解析面] 上では, ただ一つの点 $(R,0)$ が S 上に有り, 他の点は S の外にある. しかも $\Re(x'_1)$ を x'_1 の実部とするとき, $\Re(x'_1) > R$ を満たす点は S の外にある. この状況で B^* が存在するということは, 空間 (x', y) 上の領域 $\mathfrak{D}$ が (A) 型連続性定理を満たすということに明らかに反する. したがって $\mathfrak{D}$ は (B) 型連続性定理を満たさなければならない.

3^o. 残っているのは, <u>すべての (B) 型擬凸状領域は (C) 型擬凸状領域である</u> ことを示すことだけである. このために先ず

≪ 二つの (B) 型擬凸状領域の交わりの各連結成分はまた (B) 型擬凸状領域である ≫

ことを確かめよう.

実際, 空間 (x) 上に二つの (B) 型擬凸状領域 $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ を考え, 交わり $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ の任意の連結成分 $\mathfrak{D}_0$ を選ぶ. M を $\mathfrak{D}_0$ の任意の境界点とし, 空間 (x) における $\underline{M}$ の近傍を 1 対 1 擬等角写像によって写し, $(x), M, \mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ の像をそれぞれ $(x'), M', \mathfrak{D}'_0, \mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2$ と書く. ($\mathfrak{D}'_0, \mathfrak{D}'_1$ および $\mathfrak{D}'_2$ は $\underline{M}$ の近傍にしか定義されていない.) そして矛盾に導くため $\mathfrak{D}'_0$ と M' に関する指示された点集合 [訳注. 上述の B^*] が存在すると仮定する. $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2$ は (B) 型擬凸状領域であるから, このことから直ちに M' は $\mathfrak{D}'_0$ の内点であることが導かれる.

今見たことから, 問題になっている命題を証明するためには

≪ すべての (B) 型擬凸状領域は (C) 型連続性定理を満たす ≫

ことを示せばよい. これを確かめよう. $\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の (B) 型擬凸状領域とする. 改めて $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の置き換えを $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y)$ とし, 指示された幾何学的状況を考え, $\Delta^* \sim \Delta$, $\Delta^* \subseteq \mathfrak{D}$ となるような Δ^* が存在すると仮定して, $C^* \sim C$, $\Delta^* \subset C^* \subseteq \mathfrak{D}$ となる領域 C^* が存在することを示せばよい. 簡単のため (x^0, y^0) を $(0,0)$ と仮定する.

(x') を多円筒 $|x_i| < r$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ の任意の点とし, $\rho'' = \dfrac{1}{2}(\rho + \rho')$ として, y' を円周 Σ', $|y| = \rho''$ の任意の点とする. (x', y') を始点, $(x', 0)$ を終点とする空間 (x, y) の線分を L とする. P を (x', y') 上の Δ^* の点とし, P から出発して, その射影が常に L にあるように, $\mathfrak{D}$ 内の線分を連続的に描く. そうすると二つの場合が可能である. 一つは $\mathfrak{D}$ の境界点 M に (L の途中または終点で) 出合うときであり, もう一つは境界点には出合わないときである. 第 1 の場合は M の座標を (x', y'') とする.

もし (x') が多円筒 $|x_i| < r'$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ のなかにあれば, いかなる y' [訳注. Σ 上の] に対しても M は存在しない. この多円筒を γ_0 と

表す.

　このような性質を, 多円筒 γ_1:

$$|x_1| < r, \quad |x_j| < r' \qquad (j = 2, 3, \ldots, n-1)$$

について調べる. γ_1 の点 (a) で, b を Σ' $(|y| = \rho'')$ 上の適当な点とするとき, (a, b) に M (a, b') が対応するようなものが存在すると仮定する. 式

$$d(x, y) = \left(\left| \frac{K}{x_1} \right|^2 + |y|^2 \right)^{1/2}$$

を考える. ここで K は正の数であり, 右辺は正の分枝を表す. Σ を空間 (x) で $|x_1| < r$, $x_i = a_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$ で与えられる円とし, (x', y') を (Σ, Σ') の任意の点とする. (x', y') に点 M (x', y'') が対応するなら (x', y') に数 $d = d(x', y'')$ を付与し, そうでなければ何もしない. γ_0 のすべての点 (x') に対しては, 第二の場合しか生じないから, 集合 d は有界である. その上限を d_0 とする.

　十分大きな K と, 十分 r に近い $0 < r_1 < r$ なる r_1 に対して

$$d(a, b') = \left(\left| \frac{K}{a_1} \right|^2 + |b'|^2 \right)^{1/2} > \left[\left(\frac{K}{r_1} \right)^2 + (\rho'')^2 \right]^{1/2} = d_1$$

となる. したがって, この K に対して $d_0 > d_1$ である. $r_1 < |x_1'| < r$ を満たす (Σ, Σ') のすべての点 (x', y') に対し, 対応する数 d は, それが存在する限り, $d < d_1$ $(< d_0)$ を満たさなければならない. このことから容易に (Σ, Σ') 上の点 (ξ, η) が存在し, それに対応する境界点 M_0 (ξ, η') で $d(\xi, \eta') = d_0$ $(\xi_i = a_i,\ i = 2, 3, \ldots, n-1)$ となることが分かる.

　空間 (x) を

$$X_1 = \frac{K}{x_1}, \quad X_2 = x_2,\ \ldots,\ X_{n-1} = x_{n-1}, \quad Y = y$$

によって写し, $\mathfrak{D}, M_0$ の, 空間 (X) への像をそれぞれ $\mathfrak{D}', M_0'$ とする. 空間 (X, Y) に 2 点 $(0, 0)$, $Q\left(\frac{K}{\xi_1}, \eta'\right)$ を取り, $(0, 0)$ を中心とし Q を通る超球 S と Q を中心とする十分小さい半径の超球 σ を描き, S の外にある σ の部分でを β と表す. B を $(X, Y) \in \beta$, $X_i = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ で与えられる, 空間 (X, Y) における点集合とする. そうすると容易に (X, Y) 空間上の集合 B^* で, M_0' のただ一つの近傍に含まれ, $\underline{B}^* = B$ となるようなものの存在が分かる. M_0' は $\mathfrak{D}'$ の境界点であり $\mathfrak{D}'$ は M_0' の近傍で (B) 型擬凸状であるから, これは矛盾である. したがって集合 (γ_1, Σ') の点 (x', y') のすべてに対し $\mathfrak{D}$ の境界点は一つも対応することができない.

γ_2, $|x_1|<r$, $|x_2|<r$, $|x_k|<r'$ $(k=3,4,\ldots,n-1)$ に移り, 全く同様の議論をし, それを繰り返す. そして最後に $C^*\sim C$, $\Delta^*\subset C^*\subseteq\mathfrak{D}$ となる領域 C^* の存在することが分かる. このようにして次の結果が得られた.

擬凸状領域 (A) 型, (B) 型, (C) 型の三種は一つの同じ種類の領域を表す.

我々は擬凸状領域という言葉を連結ではない領域に対しても使う. 途中で次のことも見た.

二つの擬凸状領域 (同じ空間上の) の交わりはまた擬凸状である.

すべての擬凸状領域は (C) 型連続性定理を満たす.

12. 擬凸状領域の列の核. 空間 (x) 上に擬凸状領域の列が与えられたとき, もし核 (連結または非連結) が存在すれば, それもまた擬凸状領域である.

実際, $\mathfrak{D}_1,\mathfrak{D}_2,\ldots,\mathfrak{D}_p,\ldots$ を空間 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 上の擬凸状領域の列とする. ここで $n\geq 2$ と仮定してもよい. 擬凸状領域の判定としては (C) 型連続性定理を用いる.

$E_1\sim\mathfrak{D}_1$, $E_2\sim\mathfrak{D}_1\cap\mathfrak{D}_2$, $\ldots$, $E_p\sim\mathfrak{D}_1\cap\mathfrak{D}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{D}_p$, $\cdots$ を考える. この列のすべての要素は擬凸状領域である.

$\delta_1\sim\mathfrak{D}_1\cap\mathfrak{D}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{D}_p\cap\cdots$ を考える. $E_p>E_{p+1}$ $(p=1,2,\ldots)$ であり, E_p は擬凸状領域であるから, 採用した判定法により δ_1 もまた擬凸状領域であることは直ちに分かる.

$\delta_p\sim\mathfrak{D}_p\cap\mathfrak{D}_{p+1}\cap\cdots$ と置き, 列 $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_p,\ldots$ を考える. そうすると $\delta_p<\delta_{p+1}$ である. 次の二つの条件を満たす領域 (連結または非連結) δ_0 を考える.

1° $\delta_0>\delta_p$ $(p=1,2,\ldots)$.
2° δ を第一の条件を満たす領域 (連結または非連結) とすれば $\delta>\delta_0$.

交わりを考えたときと同様の論法により, 少なくとも一つの δ_p $(p=1,2,\ldots)$ が存在すれば δ_0 は実際に存在することが分かる. δ_0 が存在すれば, それは同等を除いて一意的である. この δ_0 が列 $\mathfrak{D}_p$ $(p=1,2,\ldots)$ の核と呼ばれるものである.

δ_0 は存在すると仮定する. 改めて $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ の 並べ換えを $(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)$ と書く. 空間 (x,y) 内に

$$|x_i-x_i^0|<r,\quad |y-y^0|<\rho\qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

の形の多円筒 C を描く. Δ は C の点で, 二つの条件

$$\rho'<|y-y^0|<\rho,\quad |x_i-x_i^0|<r'\ \ (<r)\qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

の少なくとも一つを満たすものの集合とする． この状勢の下で, $\Delta^* \sim \Delta$, $\Delta^* \subseteq \delta_0$ なる領域 Δ^* が存在すると仮定する．

さて, δ_0 の存在を証明したのと同じ論法で, δ_0 のすべての点 P に対して, P を中心とする多円筒 γ と正の数 m が対応し, δ_0 の点 P に対応する δ_p の点を P_p とするとき (δ_0 の第 1 の性質の中に言外に指示されている対応による) $p \geq m$ なるすべての δ_p は γ と同等で, P_p を含む部分領域を持つことが導かれる．このような正の整数の最小を改めて m と書く．

$\Delta^* \Subset \delta_0$ と仮定する．いま見たことから, Borel の補題によって $C^* \sim C$, $\Delta^* \Subset C^* \subseteq \delta_0$ なる領域 C^* の存在が分かる．このことから仮定無しに同じ結果が得られる．列 $\mathfrak{D}_p$ $(p=1,2,\ldots)$ の核 δ_0 はこのようにして (C) 型連続性定理を満たす．

次に γ を空間 (x) 内の任意の多円筒とし, γ を 1 対 1 擬等角に写像する．$\gamma \cap \mathfrak{D}_p$ $(p=1,2,\ldots)$ の列の核は $\gamma \cap \delta_0$ の像である．$\gamma \cap \mathfrak{D}_p$ の各々の像は擬凸状だから, 今見たことから $\gamma \cap \delta_0$ の像は (C) 型連続性定理を満たす．δ_0 はしたがって擬凸状である．

B. 擬凸状函数.

13．定義． E. E. Levi の微分条件を満たす (実) 函数は和を許さない．すなわち, 例え $L(\varphi_1) \geq 0$, $L(\varphi_2) \geq 0$ であっても $L(\varphi_1+\varphi_2) \geq 0$ とは限らない．(したがって, 例えば算術平均を取ることができない.) 第 VI 論文で擬凸状函数を思いついた (concevoir) のはこの不便さを取り除くためであった．我々はそれを複素 2 変数でしかしなかったので, それを拡張しよう．

空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ において

$$L \ : \ x_i = f_i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

なる形の 1 次元の解析集合 L を考える．ここで u は変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ のどれか一つを意味し, $f_i(u)$ は u の高々1 次の多項式を表す．以下 L を解析直線 (droite caractéristique) と呼ぶ．$\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の領域 (有限不分岐), P を $\mathfrak{D}$ の任意の点, (x) を P の座標とする．$\varphi(P)$ を P の実一価函数 (値 $-\infty$ を取ってもかまわない) とするとき, もしその函数が次の条件を満たすなら, それを領域 $\mathfrak{D}$ における擬凸状函数[27]と呼ぶ:

1° $e^{\varphi(P)}$ は有限で, (P に関して) 上半連続である．

2° P_0 を座標 (x^0) を持つ $\mathfrak{D}$ の任意の点とし, L を P_0 を通る, それ以外は任意の解析直線とするとき, $\varphi(P)$ の L 上への制限 (trace) は x_j^0 の近

[27] P. Lelong による Plurisousharmonique.

傍で x_j に関する劣調和函数である. ここで x_j は変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の一つで, L 上で定数ではない任意の一つである.

劣調和函数 (subharmonique)[28]については容易に知れるだろうから説明はしない[29]. ただ定数 $-\infty$ をそれに含めたことだけを思い出しておこう. なお便宜上この種の函数の判定法について簡単な注意をしておく.

劣調和函数は局所的に判定できるから, 局所的判定法を得れば十分である. $\psi(z)$ を z_0 の近傍における複素変数 z の実一価函数 (値 $-\infty$ を取ることができる) とし, $e^{\psi(z)}$ は有限で上半連続とする. この函数が (z_0 の近傍で z に関して) 劣調和であるためには次の二つの条件を満たすことが必要十分である:

1° $\psi(z)$ は強い意味で相対的極大値を持たない. (すなわち z' を定点とするとき, $|z-z'|<\rho$ の形の円で, そこで $\psi(z)<\psi(z')$ となるものは存在しない.)

2° $u(z)$ を $|z|<+\infty$ における z の (すなわち z の実部と虚部に関して) 調和函数で, それ以外は任意のものとするとき, $\psi(z)+u(z)$ に対しても同様である.

劣調和函数の性質から, 擬凸状函数の, それに対応する, 次のような性質が直ちに導かれる.

1° 擬凸状函数 $\varphi(x)$ と正の数 c が与えられたとき, $c\varphi(x)$ もまたそうである.

2° もし $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ が擬凸状函数なら $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ もまたそうである.

3° 同じ条件の下で, 上限 (borne supérieur) $\max[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ もそうである.

4° 空間 (x) 上の領域 $\mathfrak{D}$ において, 列 $e^{\varphi_p(P)}$ は $e^{\varphi(P)}$ に収束するような, 擬凸状函数の列 $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_p(P), \dots$ が与えられたとき, もしこの収束が $\mathfrak{D}$ の完全内部で一様収束であるか, またはそれが減少列であるなら, $\varphi(P)$ はまた $\mathfrak{D}$ で擬凸状である.

5° 擬凸状函数の, 凸な増加函数 (定数 $+\infty$ を除く) はまたそうである.

14. Hartogs 半径. ここで擬凸状函数の例を求めよう (récolter). 今の場合, 直ちに Hartogs に負う一つの概念 (conception) に思い至る. それは正則半径である.

[28] または sousharmonique

[29] 例えば, F. Riesz, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport avec la théorie du potentiel, I, 1926, II, 1930 (Acta Mathematica).
T. Radó, Remarques sur les fontions subharmoniques, 1928 (C. R., Paris)
を見よ.

それを抽象的に定義しよう. $\mathfrak{D}$ を空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 上の領域, P を $\mathfrak{D}$ の点とし, (x^0) を P の座標とする. 点 (x^0) を中心とする多円筒 C, $|x_i - x_i^0| < r_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を, 条件 $C^* \sim C$, $C^* \subseteq \mathfrak{D}$, $P \in C^*$ を満たす領域 C^* が存在するように描く. そして $\{r_n\}$ の上限を $R(P)$ と書き, それを (空間 (x) 上の) 領域 $\mathfrak{D}$ の x_n に関する Hartogs 半径と言う. 他の x_i に対しても同様に考える.

$\mathfrak{D}$ を空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 上の擬凸状領域とする. $\mathfrak{D}$ の x_n に関する Hartogs 半径は $-\log R(P)$ が擬凸状であるような函数である.

実際, イメージをはっきりさせるため, $\mathfrak{D}$ は有界であると仮定する. 二つの擬凸状領域の交わりはまた擬凸状領域であり, 擬凸状函数の減少列の極限は擬凸状函数であるから, この仮定によって一般性が失われることはない.

函数 $\log 1/R(P)$ は完全内部で実, 一価, 有界であり, 明かに上半連続である. したがってこれが擬凸状であることを確かめるためには第 2 の条件を見ればよい.

P_0 を $\mathfrak{D}$ の任意の点とし, 記述を簡単にするため, その座標 (x_0) を (0) と仮定する. L を P_0 を通る任意の解析直線とする. 座標軸に関する L の位置によって二つの場合を区別する.

先ず一般な場合, すなわち L が変数 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ のどれか一つ, 視点を定めるためそれを x_1 として, それをパラメータとし, A_i を定数として,

$$(1) \qquad x_i = A_i x_1, \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

の形で表される場合を考える. 空間 (x) に

$$X_1 = x_1, \quad X_i = x_i - A_i x_1 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

の形の変換を施し, $\mathfrak{D}$, P および L の像を引き続き同じ文字で表す. L の方程式は $X_i = 0$ $(i=2,3,\ldots,n)$ となる. 他方, 空間 (X) 上の領域 $\mathfrak{D}$ の X_n に関する Hartogs 半径を $R'(P)$ とする. x_1 を固定して考えると, 変換 $X_n = x_n - A_n x_1$ は X_n 平面上の平行移動を表す. したがって

$$R'(P) = R(P)$$

である.

要するに, この第一の場合は L が

$$(2) \qquad x_i = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

の形で表される特別な場合に帰着する．この場合, $R(P)$ の L 上への制限は変数 x_1 のみの函数である． それを $R(x_1)$ と表す． $[R(x_1)]^{-1}$ は原点の近傍で強い意味の最大を取ることはできない． このことは $\mathfrak{D}$ が (C) 型連続性定理 を満たすことから明らかである．

次に $u(x_1)$ を $|x_1| < \infty$ における x_1 の任意の調和函数とし, 実部が $-u(x_1)$ となる整函数を $f(x_1)$ として, 変換

$$X_j = x_j, \quad X_n = x_n e^{f(x_1)} \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

を考える．これは空間 (x) に対して 1 対 1 である．$\mathfrak{D}$, L の像を引き続き同じ文字で表す．$\mathfrak{D}$ はやはり空間 (X) 上の擬凸状領域である．L は同じ形 $X_k = 0$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$ と表される．空間 (X) 上の $\mathfrak{D}$ の X_n に関する Hartogs 半径の L への制限は

$$R(x_1) e^{-u(x_1)}$$

である．したがって $-\log R(x_1)$ の上記の性質は, 函数 $-\log R(x_1) + u(x_1)$ に受け継がれる．したがって, 判定条件により, その制限 $-\log R(x_1)$ は劣調和函数である．

L が

$$x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

の形で表される特殊な場合を調べることが残っている．$R(P)$ の L 上への制限は変数 x_n だけの函数である．それを $R(x_n)$ と表す．

平面 x_n 上に原点を中心とし, 半径 $\dfrac{1}{3}R(0)$ の円 γ を描く．x'_n を γ の任意の点とする． 円 C, $|x_n - x'_n| < R(x'_n)$ は円 γ を含み, その円周上に少なくとも一点 ξ_n が存在し, $(0, \ldots, 0, \xi_n)$ 上には $\mathfrak{D}$ の境界点 M があって, そこへは P_0 から出発して, 空間 (x) への射影の頂点が順次 (0), $(0, \ldots, 0, x'_n)$, $(0, \ldots, 0, \xi)$ であるような, $\mathfrak{D}$ 上の折れ線に沿って到達できる．各 x'_n に対してそのような円 γ を描き, 集合 $\{\xi\}$ を考える．γ に対して明かに

$$-\log R(x_n) = \max(-\log |x_n - \xi|)$$

が得られる．この右辺は ξ が上記の集合を動くときの上限を意味する．したがって, 制限 $-\log R(x_n)$ は劣調和函数である．

Hartogs 半径を少し修正 (modifier) しよう．その方がより好都合なのである．

空間 (x) 上に領域 $\mathfrak{D}$ を考え, P を $\mathfrak{D}$ の任意の点とする．空間 (x) 内に $\underline{P}$ を中心とする超球 S を, $S^* \sim S$, $S^* \subseteq \mathfrak{D}$, $P \in S^*$ を満たすような

(x) 上の領域 S^* が存在するように描く. r を S の半径とする. このような r の上限を $d(P)$ と表し, それを領域 $\mathfrak{D}$ の (ユークリッド的) 境界距離と呼ぶ.

$d(P)$ を空間 (x) 上の擬凸状領域 $\mathfrak{D}$ のユークリッド的境界距離とするとき, $-\log d(P)$ は $\mathfrak{D}$ において擬凸状である.

これを証明するのにも, $\mathfrak{D}$ を有界と仮定することができる. P_0 を $\mathfrak{D}$ の任意の点とし, (x^0) をその座標とする. $R(P)$ を $\mathfrak{D}$ の x_n に関する Hartogs 半径とする. 明かに

$$d(P_0) \leq R(P_0)$$

である. T を点 P_0 を中心とする任意の回転とし, $\mathfrak{D}$ の点の座標 (x) は (X) に変るとする. そして $R_T(P)$ を空間 (X) 上の $\mathfrak{D}$ の X_n に関する Hartogs 半径とする. そうすると

$$d(P_0) \leq R_T(P_0)$$

である.

他方 M を, P_0 からの $\mathfrak{D}$ 上の距離 (Entfernungen) が最も短いような $\mathfrak{D}$ の境界点とし, (ξ) を M の座標とする. 明かに (x^0) と (ξ) との距離は $d(P)$ である. (x^0) を中心とする回転 T_0 で, ξ' を ξ の像とするとき

$$\xi'_j = x^0_j, \quad \xi'_n = x^0_n + d(P_0) \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

となるものを見つけることができる. そうすると

$$d(P_0) = R_{T_0}(P_0)$$

である.

したがって,

$$d(P) = \min[R_T(P)]$$

が得られる. (ここで右辺は T が指定された集合 [訳注. 点 P_0 を中心とする回転] を動くときの下限を意味する.) $-\log R_T(P)$ は擬凸状であるから $-\log d(P)$ も擬凸状である.

函数 $-\log d(P)$ は次の性質を持つ：

1° $\mathfrak{D}$ が空間 (x) と一致するときを除いて, それは $\mathfrak{D}$ で連続である. 除かれた場合のそれは定数 $-\infty$ になる.

2° P が $\mathfrak{D}$ の境界に近づくとき, それは $+\infty$ に発散する.

15. 微分条件. 空間 (x) の或る部分 (portion) で, 実 (一価) 連続で, 変数 x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ の実部及び虚部に関する 2 階までの連続な偏導函数を許す函数 $\varphi(x)$ を考える. $\varphi(x)$ が擬凸状であるための条件を調べよう.

(その部分に) 点 (x^0) を取り, (その点の近傍で,) その点を通る

$$x_j = f_j(t) \qquad (j=1,\ldots,n)$$

なる形の (複素)1 次元の解析集合 λ を考える. ここで $f_j(t)$ は $(f_j(0)=x_j^0$ となるような) 原点の近傍における正則函数である. t, x_j を実部と虚部に分けて

$$t = u+iv, \qquad x_j = u_j + iv_j$$

(i は虚数単位) と置き, $\varphi(x)=\varphi(u_1,u_2,\ldots u_n;\, v_1,v_2,\ldots,v_n)$ と表す. この状況の下で $\varphi(x)$ の λ 上への制限

$$\Phi(u,v) = \varphi[u_j(u,v), v_j(u,v)]$$

に対して, (x^0) の近傍で

$$\Delta\Phi(u,v) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}$$

を計算しよう.

$$\frac{\partial u_j}{\partial u} = \frac{\partial v_j}{\partial v} = \alpha_j, \qquad \frac{\partial v_j}{\partial u} = -\frac{\partial u_j}{\partial v} = \beta_j$$

と置いて,

$$\Delta\Phi = \sum_j \sum_k \left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j \partial u_k} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v_j \partial v_k}\right)(\alpha_j\alpha_k + \beta_j\beta_k) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j \partial v_k} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_k \partial v_j}\right)(\alpha_j\beta_k - \alpha_k\beta_j)\right]$$

$(j,k=1,\ldots,n)$ が得られる. この等式の右辺を $W(\varphi;\alpha,\beta)$ と表す.

$\Phi(t)$ が劣調和函数であるためには $\Delta\Phi \geq 0$ であることが必要十分であるから, 計算によって次の命題が得られる :

$\varphi(x)$ を実, 連続で (複素変数の実部と虚部に関する) 2 階までの連続な偏導函数を許す函数とする. $\varphi(x)$ が擬凸状であるためには, いたる所

$$W(\varphi;\alpha,\beta) \geq 0$$

となることが必要十分である.

さらに計算により直ちに次のことがいえる.

同じ条件の下で, $\varphi(x)$ が擬凸状であることは, 任意の 1 対 1 擬等角写像を許す.

16. 主性質. $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ を空間 (x, y) の点 (x^0, y^0) の近傍における実連続函数とする. x_j, y $(j=1, \ldots, n)$ を実部と虚部に分けて

$$x_j = u_j + iv_j, \qquad y = y_1 + iy_2$$

と置き, $\varphi(x, y) = \varphi(u, v, y_1, y_2)$ のように表す. $\varphi(u, v, y_1, y_2)$ は 2 階までの連続な偏導函数を許すと仮定し, $W(\varphi; \alpha, \beta)$ は, $(0, 0)$ 以外のすべての実数の組 (α, β) に対して, いたるところ正であると仮定する. 以下 (紛れのない限り) そのことを単に

$$W(\varphi; \alpha, \beta) > 0$$

と表す.

さらに

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 > 0 \qquad (x^0, y^0) \text{ において}$$

と仮定する. この状況の下で (x^0, y^0) の或る近傍に, (x^0, y^0) を通る解析面 σ を, その点以外は空間の

$$\varphi(x, y) > \varphi(x^0, y^0)$$

の部分にあるように描こう.

簡単のため, (x^0, y^0) を原点とし, $\varphi(x^0, y^0)=0$ とする. そして

$$y=f(x)=\sum_j a_j x_j + \sum_j \sum_k b_{jk} x_j x_k, \quad b_{jk}=b_{kj} \quad (j, k=1, 2, \ldots, n)$$

の形の解析面 σ を考える. a_j, b_{jk} および $f(x)$ を

$$a_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad b_{jk} = \gamma_{jk} + i\delta_{jk}, \quad f(x) = P(u, v) + i\,Q(u, v)$$

のように実部と虚部に分ける. そうすると

$$\gamma_{jk} = \gamma_{kj}, \qquad \delta_{jk} = \delta_{kj}$$

である. $\varphi(x, y)=\varphi(u, v, y_1, y_2)$ に $y_1=P(u, v)$, $y_2=Q(u, v)$ を代入して,

$$\Phi(x) = \Phi(u, v) = \varphi(u, v, P(u, v), Q(u, v))$$

が得られる．$\Phi(u,v)$ は 2 階までの連続な偏導函数を許すから, 原点で次のように展開することができる：

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &= \sum_j \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}u_j + \frac{\partial\Phi}{\partial v_j}v_j\right)\\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_j\sum_k\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial u_k}u_ju_k + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial v_k}u_jv_k + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_j\partial v_k}v_jv_k\right] + \varepsilon;\\ &\quad \varepsilon = \frac{1}{2}\sum_j\sum_k[\xi_{jk}u_ju_k + 2\eta_{jk}u_jv_k + \zeta_{jk}v_jv_k] \quad (j,k=1,\ldots,n),\end{aligned}$$

ここで偏導函数は原点における値を意味する．(差し当たって以下同様) $\xi_{jk},\eta_{jk},\zeta_{jk}$ については, 例えば

$$\xi_{jk} = \frac{\partial^2\Phi(\theta u,\theta v)}{\partial u_j\partial u_k} - \frac{\partial^2\Phi(0,0)}{\partial u_j\partial u_k}, \qquad 0<\theta<1$$

である．偏導函数は連続だから (u,v) が原点に収束するとき ξ_{jk} も零に収束する．η_{jk},ζ_{jk} についても同様である．

さて, σ の方程式の $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ を次の条件を満たすようにすることができると仮定する．すなわち：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_j} = \frac{\partial\Phi}{\partial v_j} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial u_k} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_j\partial v_k}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial v_k} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_k\partial v_j} \qquad (j,k=1,\ldots,n).$$

そうすると

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &= \frac{1}{4}\sum_j\sum_k\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial u_k} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_j\partial v_k}\right)(u_ju_k + v_jv_k)\right.\\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial v_k} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_k\partial v_j}\right)(u_jv_k - u_kv_j)\right] + \varepsilon = \frac{1}{4}W(\Phi;u,v) + \varepsilon\end{aligned}$$

が得られる．

さて, 仮定により, $W(\Phi;\alpha,\beta)>0$ である．したがって, 前節の計算により, 容易に $W(\Phi;u,v)>0$ が得られる．そうすると ε の形から, 正の数 ρ を, 原点以外で

$$\Phi(u,v)>0 \qquad |x_j|<\rho \quad (j=1,\ldots,n) \quad \text{に対して}$$

となるように選ぶことができる．それは σ が原点以外で $\varphi(x,y)>0$ の部分に留まっていることを意味する．したがって系 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ を, 上記の条件が満たされるように選べばよい．

まず, 条件 $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_j} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_j} = 0$ に対しては, 簡単な計算から

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} &= \frac{\partial \phi}{\partial u_j} + \frac{\partial \phi}{\partial y_1}\alpha_j + \frac{\partial \phi}{\partial y_2}\beta_j = 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial v_j} &= \frac{\partial \phi}{\partial v_j} - \frac{\partial \phi}{\partial y_1}\beta_j + \frac{\partial \phi}{\partial y_2}\alpha_j = 0
\end{aligned}
$$

が得られる. 仮定により $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^2 > 0$ だから, この 1 次方程式は解ける.

第 2 の条件については, 系 (α, β) の値はすでに決まっているから, それはすべての (j, k) $(j, k = 1, \ldots, n)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial u_k} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_j \partial v_k}\right) &= \frac{\partial \phi}{\partial y_1}\gamma_{jk} + \frac{\partial \phi}{\partial y_2}\delta_{jk} + c_1 = 0 \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial v_k} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_k \partial v_j}\right) &= \frac{\partial \phi}{\partial y_2}\gamma_{jk} - \frac{\partial \phi}{\partial y_1}\delta_{jk} + c_2 = 0
\end{aligned}
$$

なる形で与えられる (γ, δ) のみに関する連立代数方程式系である. この c_1, c_2 は (γ, δ) に独立である. 仮定により $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^2 > 0$ だから, この方程式は解ける. このようにして求める解析面 σ は描けた. これを纏めて：

空間 (x) の点 (x^0) の近傍に実連続函数 $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が与えられており, u_j, v_j を x_j $(j = 1, \ldots, n)$ の実部, 虚部として $\varphi(x) = \varphi(u, v)$ とする. そして, $\varphi(u, v)$ は 2 階までのの連続な偏導函数を許し, $W(\varphi; \alpha, \beta) > 0$ であって, さらに少なくとも一つの偏導函数 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_j}$ が (x^0) で零ではないとする. そうすると (x^0) の近傍における解析面 σ で, (x^0) を通り, その点以外は $\varphi(x) > \varphi(x^0)$ なる部分に留まるものを描くことができる. さらに偏導函数 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_n}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial v_n}$ の少なくとも一つが (x^0) で零ではないとすると, f を $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ の高々2 次の多項式として, σ を

$$x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

の形に取ることができる.

17. 擬凸状函数の修正. 擬凸状函数を上記の定理の条件を満たすように修正することが問題である.

連続性の階数を高める問題から始めよう．この問題は劣調和函数に対してすでに T. Radó[30] と F. Riesz[31] よって解決されている．その方法は以下に述べるように我々の場合にも適用できる．

1° $\mathfrak{D}$ を空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 上の領域とする．Behnke–Thullen の著書 に沿って次のように 境界距離 (Randdistanz) を考える：P を $\mathfrak{D}$ の任意の点とし (x^0) をその座標とする．(x^0) を中心に半径 r' の多円筒 γ を $\gamma^* \sim \gamma$, $\gamma^* \subseteq \mathfrak{D}$ かつ $P \in \gamma^*$ なる領域 γ^* が存在するように描く．γ^* を領域 $\mathfrak{D}$ 上の P を中心とする半径 r' の 多円筒近傍 と呼ぶ．r をそのような r' のすべての上限とし，その r を P の $\mathfrak{D}$ に関する境界距離と呼ぶ．(混乱を避けるため，ときとしてこれを 多円筒的境界距離 と呼ぶ.) $\mathfrak{D}$ の点で境界距離が ρ より大きい点の集合を $\mathfrak{D}^{(\rho)}$ と表す．

さて，$\varphi(P)$ を $\mathfrak{D}$ における実，一価，上半連続で，有界 な函数とする．(この論文に限って連続函数から出発すれば十分である.) P を $\mathfrak{D}$ の任意の点，P' を $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}^{(r)}$ の或る定点とする．r は ($\mathfrak{D}^{(r)} \supset O$ であるような) 或る定まった正の数である．そして P' を中心とし，半径 r の多円筒近傍 γ を描き，Lebesgue 積分 によって，γ 上の $\varphi(P)$ の算術平均

$$\varphi_1(P') = \frac{1}{V}\int_V \varphi(P)dP, \qquad V = (\pi r^2)^n$$

を考える．函数 $\varphi_1(P)$ は $\mathfrak{D}_1$ で定義されており，$\mathfrak{D}_1$ のすべての点 P で有限の定まった値を取る．それは明かに 連続 である．$\varphi(P)$ から $\varphi_1(P)$ を作る操作を F. Riesz に従って

$$\varphi_1(P) = A_r[\varphi(P)]$$

と表す．

以下 $\varphi(P)$ は $\mathfrak{D}$ において 擬凸状 かつで有界であると仮定する．まず，$\varphi_1(P)$ はまた $\mathfrak{D}$ において擬凸状である ことを示そう．そのために $\mathfrak{D}$ は空間 (x) における 単葉 領域であると仮定する．それは一般性を失うものではない．(x^0) を $\mathfrak{D}_1$ の任意の点とし，L を (x^0) を通る任意の複素直線 (droite) とする．$\varphi_1(x)$ の L への制限が (x^0) の近傍で劣調和函数であることを示せばよい．L 上に (x^0) を中心とし，$\mathfrak{D}_1$ の完全内部に含まれるような十分小さい半径の円周 C を描く．そして Riemann 積分 によって φ_1 の C 上の積分平均

$$m = \frac{1}{2\pi\rho}\int_C \varphi_1(x)ds$$

を考える．ρ は C の半径である．$m \geq \varphi(x^0)$ を言えばよい．

[30] 前掲.
[31] 1930, 前掲.

C_0 を, 平行移動によって C に写せるような, 原点を中心とする円周とし, (X) を C_0 の任意の点とする. そうすると m は

$$m = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{C_0}\varphi(x^0+X)d(X)$$

なる形で表される. 積分は Lebesgue の意味で取る. ((X) は, ここでは, (X) を座標とする C_0 の任意の点を意味する.) γ_0 を空間 (x) の原点を中心とする, 半径 r の多円筒とし, (X') を γ_0 の任意の点とする. そうすると Lebesgue の意味で

$$m = \frac{1}{2\pi\rho V}\int_{C_0}d(X)\int_{\gamma_0}\varphi(x^0+X+X')d(X')$$

である. 函数 $\varphi(x^0+X+X')$ は空間 (X, X') において上半連続であるから, (B) 可測である. さらにそれは有界である. したがって, Lebesgue の定理により, 積分の順序を変えることができる. したがって

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2\pi\rho V}\int_{\gamma_0}d(X')\int_{C_0}\varphi(x^0+X+X')d(X) \\ &\geq \frac{1}{V}\int_{\gamma_0}\varphi(x^0+X')d(X') = \varphi_1(x^0) \end{aligned}$$

が得られる.

<u>さらに, もし $r_1 \geq r_2 \geq 0$ なら, $\mathfrak{D}^{(r_1)}$ に対して</u>

$$A_{r_1}(\varphi) \geq A_{r_2}(\varphi) \geq \varphi$$

<u>が得られる.</u> 証明は同様に直ちにできる.

r_p $(p=1,2,\ldots)$ を極限値が 0 の正の数の減少列とする. そうすると函数列 $A_{r_p}(\varphi)$ もやはり減少列であり, さらに有界であるから収束する. その極限を $\Phi(P)$ とする. それは $\mathfrak{D}$ に対して存在する. $A_r(\varphi) \geq \varphi$ だから $\Phi(P) \geq \varphi(P)$ が得られる. 他方, $\varphi(P)$ は上半連続だから $\Phi(P) \leq \varphi(P)$ である. したがって $\Phi(P) = \varphi(P)$ である. このようにして

$\ll$ 函数列 $A_{r_p}(\varphi)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ は減少しながら φ に収束し, この各 $A_{r_p}(\varphi)$ は $\mathfrak{D}^{(r_p)}$ で定義されていて, 連続な擬凸状函数である $\gg$

ことが分かった.

2° <u>有界ではない</u>場合を考える. $\varphi(P)$ を空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ における擬凸状函数とし, $\mathfrak{D}$ の完全内部で有界でないとする. そときは函数列

$$\psi_p(P) = \max[\varphi(P), -p] \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

を作る. これは減少しながら $\varphi(P)$ に収束する. $\mathfrak{D}$ で上半連続な函数はすべて $\mathfrak{D}$ の完全内部で上に有界だから, $\psi_p(P)$ の各々は $\mathfrak{D}$ の完全内部で有界である. これは前の場合に他ならない.

3° 新たに $\varphi(P)$ を $\mathfrak{D}$ における連続な実函数とする. x_i $(i = 1, \ldots, n)$ の実部と虚部をそれぞれ u_i, v_i とすると, $\varphi_1(P) = A_r(\varphi)$ は明かに連続で, $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}^{(r)}$ で定義されており, (u, v) に関する 1 階の連続な偏導函数 を許す. そして, もし $\varphi(P)$ が $\mathfrak{D}$ で既にその性質を持っているなら, $\varphi_1(P)$ は $\mathfrak{D}$ において (u, v) に関する 2 階までの連続な偏導函数 を許す. $\varphi_1(P)$ は $\mathfrak{D}$ において連続だから r が 0 に収束するとき, $A_r(\varphi)$ は $\mathfrak{D}$ の完全内部で一様 に φ に収束する.

操作 A_r を繰り返して

$$\varphi_2(P) = A_r[\varphi_1(P)] = A_r^2[\varphi(P)]$$

が得られる. $\varphi_2(P)$ は $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}^{(2r)}$ で定義されている. 同様に $\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}^{3r}$ に対して $\varphi_3(P) = A_r^3[\varphi(P)]$ を考える. もし $\varphi(x)$ が $\mathfrak{D}$ で擬凸状なら $\varphi_1(P)$ は $\mathfrak{D}_1$ で擬凸状であるから, $\varphi_2(P)$ は $\mathfrak{D}_2$ に対してそうなる. したがって $\varphi_3(P)$ は $\mathfrak{D}_3$ に対して同様になる. このようにして次の結果が得られた.

空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 上の或る領域 $\mathfrak{D}$ において, 擬凸状函数 $\varphi(P)$ と, 減少しながら零に収束する正の数の列 r_p $(p = 1, 2, \ldots)$ が与えられたとき, 函数列 $\varphi_p(P)$ を次のように作ることができる : すなわち各 $\varphi_p(P)$ は x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の実部と虚部に関する 2 階までの連続な偏導函数を許すような $\mathfrak{D}^{(r_p)}$ における擬凸状函数であり, その列は $\mathfrak{D}$ において減少しながら $\varphi(P)$ に収束する.

これの直接の帰結として, No. 16 の注意から, 次のことが言える.

すべての擬凸状函数は任意の 1 対 1 の擬等角写像を許す.

18. 第 2 の修正. $\varphi(P)$ を空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 上の領域 $\mathfrak{D}$ における 擬凸状 函数とする. 上記のことから $\varphi(P)$ は連続であり, u_j, v_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ をそれぞれ x_j の実部, 虚部とするとき, u_j, v_j に関する 2 階までの連続な偏導函数を許すと仮定することができる. したがって $\varphi(P)$ が主性質を満たすようにするためには, 条件

$$W(\varphi; \alpha, \beta) > 0, \quad \sum \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_j} \right)^2 \right] > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

を満たすようにすればよい. この第 2 の条件は, 複素 2 変数の場合は現われなかったことを思い出しておこう. (第 VI 論文の No. 13)

1°　第一条件 $W(\varphi;\alpha,\beta)>0$ を考える. $\psi(P)$ を $\varphi(P)$ と同じ性質を持つ別の函数とすれば

$$W(\varphi+\psi;\alpha,\beta)=W(\varphi;\alpha,\beta)+W(\psi;\alpha,\beta)$$

が得られる. φ は擬凸状だから $W(\varphi;\alpha,\beta)\geq 0$ である. したがって, もし $W(\psi;\alpha,\beta)>0$ なら $W(\varphi+\psi;\alpha,\beta)>0$ でなければならない. 他方,

$$\psi(P)=\sum(u_j^2+v_j^2)\qquad(j=1,2,\ldots,n)$$

に対して

$$W(\psi;\alpha,\beta)=4(\alpha_j^2+\beta_j^2)>0$$

が得られる. したがって, 減少しながら零に収束する正の数の列 ε_p $(p=1,2,\ldots)$ を取り,

$$\varphi_p(P)=\varphi(P)+\varepsilon_p\psi(P)$$

と置くと, 函数列 $\varphi_p(P)$ は領域 $\mathfrak{D}$ の完全内部で減少しながら一様に $\varphi(P)$ に収束する. 各 φ_p は 2 階までの連続な偏導函数を許し, $W(\varphi_p;\alpha,\beta)>0$ を満たす.

2°　今や第 2 条件しか残っていない. この条件をよく見ると, 問題自身を修正しなければならないことが分かる. 擬凸状函数を分類することから始める.

$\varphi(P)$ を空間 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 上の領域 $\mathfrak{D}$ における 擬凸状 函数とする. もしそれが $\mathfrak{D}$ において (u,v) に関する 2 階までの連続な偏導函数を許し, さらに $\mathfrak{D}$ に対して条件

$$W(\varphi;\alpha,\beta)>0,\quad \sum\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_j}\right)^2\right]>0\quad(j=1,2,\ldots,n)$$

を満たすなら, $\varphi(P)$ は $\mathfrak{D}$ に対して 性質 (P_0) を持つと言う.

もし $\mathfrak{D}$ のすべての点 P_0 に対し, P_0 を中心とする $\mathfrak{D}$ の多円筒近傍 γ が対応し, $\varphi(P)$ は γ で性質 (P_0) を持つ有限個の擬凸状函数の上限として与えられるなら, $\varphi(P)$ を 性質 (P_1) を持つと言う.

$\mathfrak{D}$ で性質 (P_1) を持つすべての擬凸状函数 $\varphi(P)$ は $\mathfrak{D}$ に対して主性質を持つ. 正確に述べると, $\mathfrak{D}$ の点 P_0 が与えられ, $\varphi(P_0)=\alpha$ とすると, P_0 を通る $\mathfrak{D}$ 上の解析面で, P_0 の近傍では P_0 を除いて $\varphi>\alpha$ の部分に留まるものを描くことができる. これは明らかである.

問題.　≪ 空間 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 上の領域 $\mathfrak{D}$ に連続な擬凸状函数 $\varphi(P)$ が与えられたとし, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}_0\Subset\mathfrak{D}$ なる領域, ε を正の数とするとき, 性質

(P_1) を持つ擬凸状函数 $\Phi(P)$ を, $\mathfrak{D}_0$ で $|\Phi(P)-\varphi(P)|<\varepsilon$ となるように見つけること.≫

この問題に対しては, 明かに次の原理が成り立つ:

≪ a, b を $a<b$ なる二つの実数とし, $\mathfrak{D}_1$ を $\mathfrak{D}$ の $u_1<b$ 上の部分, $\mathfrak{D}_2$ を $\mathfrak{D}$ の $u_1>a$ 上の部分とする. もしこの問題が $\mathfrak{D}_1$ および $\mathfrak{D}_2$ に対して解けるなら $\mathfrak{D}$ に対しても解ける.≫ [訳注. 10]

したがって問題は局所的に解けばよい.

3° 空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ において $a_i<u_i<b_i,\ c_i<v_i<d_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ $(a_i, b_i, c_i, d_i$ は実数) の形の単葉な領域 $\mathfrak{R}$ を考え, この形の領域をすべて長方形領域 (rectangulaire) と呼ぶ. $\varphi(x)$ を閉長方形領域 $\overline{\mathfrak{R}}$ における実連続函数とし, ε を正の数とする. そうすると, Weierstrass によってよく知られているように,

≪ 実係数の (u, v) の多項式 $\Phi(u, v)=\Phi(x)$ を $\overline{\mathfrak{R}}$ で $|\Phi(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ となるように見つけることができる.≫

この定理を応用するために或る注意をする.

$\varphi(x)$ を空間 (x) の単葉な領域 $\mathfrak{D}$ における実連続函数とし, $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}^{(r)}$ において

$$\varphi_1(x)=A_r[\varphi(x)]=\frac{1}{V}\int_\gamma \varphi(x')d\sigma \qquad (V=(\pi r^2)^n)$$

を考える. (ここで γ は (x) を中心とする半径 r の多円筒を表し, (x') は γ の任意の点を示し, $d\sigma$ は γ の体積要素を意味する.) $\mathfrak{D}$ において $|\varphi(x)|\leq M$ と仮定する. (M は或る正の数である.) そうすると, まず $\mathfrak{D}_1$ に対して

$$|\varphi_1(X)|\leq M$$

が得られる. $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}$ を評価するため, x_1 平面上に半径 r の 2 つの円を, その中心が水平線上の十分小さい距離 h にあるように描く. そうすると二つの十分細い三日月形の部分が得られ, その面積の和は $4rh$ より小さい. したがって $\mathfrak{D}$ において

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}\right|\leq\frac{4}{\pi r}M$$

が得られる. u_j, v_i $(j=2,3,\ldots,n;\ i=1,2,\ldots,n)$ に対しても同様である. $\mathfrak{D}_2=\mathfrak{D}^{(2r)}$ に対して $\varphi_2=A_r(\varphi_1)$ を評価しよう. ξ, η を u_j, v_i $(i=1,2,\ldots,n)$ のどれかの二つとするとき,

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\eta}A_r\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\right)$$

だから, 上記の不等式により, $\mathfrak{D}_2$ において,

$$\left|\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\xi\partial\eta}\right| \le \left(\frac{4}{\pi r}\right)^2 M$$

が得られる.

$\Phi(u,v)=\Phi(x)$ を高々 ν 次の実係数の (u,v) の多項式とする. γ_0 を原点中心の半径 r の多円筒, (x') を γ_0 の任意の点とすると, $\varphi_1(x)$ は

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{V}\int_{\gamma_0}\varphi(x+x')d\sigma$$

の形に表される. 特別な場合として, $\Phi_1(x)$ $(=A_r[\Phi(x)])$ は $\Phi(x)$ と同じ性質を持つ. したがって $\Phi_2(x)$ もそうである.

$\varphi(x)$ を (u,v) に関する 2 階までの連続な偏導函数を許す実連続函数とし

$$\begin{aligned}W(\varphi;\alpha,\beta)=\sum_i\sum_j\Bigg[&\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i\partial u_j}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v_i\partial v_j}\right)(\alpha_i\alpha_j+\beta_i\beta_j)\\&+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i\partial v_j}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j\partial v_i}\right)(\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i)\Bigg]\end{aligned}$$

$(i,j\!=\!1,2,\ldots,n)$ を考える. 空間 (α,β) において, 原点を中心とする半径 1 の超球を描き, (α',β') をその境界上の任意の点として

$$w(\varphi(x))=\min W(\varphi(x);\alpha',\beta')$$

を考える. $W(\varphi;\alpha,\beta)>0$ となるためには $w(\varphi(x))>0$ となることが必要十分である. $\varphi(x)$ を単葉領域 $\mathfrak{D}$ に対して上記の性質を持つ与えられた函数とする. $\mathfrak{D}$ で $W(\varphi;\alpha,\beta)>0$ であるためには, $\mathfrak{D}_0\Subset\mathfrak{D}$ であるようなすべての領域 $\mathfrak{D}_0$ に対して $w(\varphi)$ の下限が正であることが必要十分である. もし $w(\varphi)$ が $\mathfrak{D}$ において下限 w_0 を持てば, $\mathfrak{D}$ において, 明かに

$$w(\varphi_1)\ge w_0$$

である.

さて, $\mathfrak{R}$ を空間 (x) の長方形領域とし, $\varphi(x)$ を閉領域 $\overline{\mathfrak{R}}$ の近傍における擬凸状函数で, (u,v) に関する 2 階までの連続な偏導函数を許し, $W(\varphi;\alpha,\beta)>0$ とする. そうすると, すべての正の数 ε に対し, (u,v) に関する実係数の多項式 $\Phi(x)=\Phi(u,v)$ を, $\overline{\mathfrak{R}}$ の近傍で

$$|\Phi(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

となるように見つけることができる. $\Phi_2(x) = A_r^{(2)}[\Phi(x)]$ および $\varphi_2(x) = A_r^{(2)}[\varphi(x)]$ を考え, ε を十分小さく選び, r は適当に選ぶ. 今見たことから Φ_2 と φ を φ_2 と比べると, 多項式 Φ_2 は φ と同じ性質を持つことが容易に分かる.

それで, 上に与えた函数 $\varphi(x)$ は実係数の (u,v) に関する多項式であると仮定する. そうすると 条件

$$\sum\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_i}\right)^2\right]>0 \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

だけが問題である. さて, この状勢で, 容易に分かるように, 正の数 ε が与えられたとき, $\varphi(x)$ と同じ性質を持つ (u,v) の多項式 $\psi(x)$ で, $\overline{\mathfrak{R}}$ の近傍で $|\varphi(x)-\psi(x)|<\varepsilon$ となり, さらに上記の最後の条件に関して, $\psi(x)$ の 1 階の偏導函数のすべてが零になる点の集合は <u>孤立点</u> であるようなものを見つけることができる.[32]

4°　前に注意したように, 第 VI 論文において, $n=2$ の場合, いま問題にしている状勢は何の障碍もないことを見た. ここで用いようとしているのはこの事実である. 定理の正確な形を思い起こそう.

$\ll$ $\varphi(x_1,x_2)$ を u_i, v_i $(i=1,2)$ に関する 2 階までの連続な偏導関数を許す実連続函数とし, 空間 (x_1,x_2) の点 (x_1^0,x_2^0) で $W(\varphi;\alpha,\beta)>0$ とする. もし (x^0) で

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}=\frac{\partial\varphi}{\partial v_2}=0$$

なら, (x^0) を通り, (x^0) を除いて $\varphi(x)>\varphi(x^0)$ なる部分に留まる解析面をその点の近傍に見つけることができる.$\gg$

(x^0) を空間 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ の定点, $\varphi(x)$ を実係数の (u,v) の多項式とし, それは (x^0) の近傍において $W(\varphi;\alpha,\beta)>0$ となり, さらにそれの 1 階の偏導函数の少なくとも一つは (x^0) の近傍の, その点以外のすべての点で, 零にならず, その点では, それらは同時に零になるとする. 簡単のため (x^0) を原点とし,

$$\Phi(x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2,0,\ldots,0)$$

と置く. 原点の近傍で $w(\Phi)\geq w(\varphi)>0$ だから, $W(\Phi;\alpha,\beta)>0$ である. したがって原点を除いて, 原点の近傍で $\Phi(x_1,x_2)>\Phi(0,0)$ に留まるような, 空間 (x_1,x_2) における $ax_1=x_2$ なる形の解析平面を描くことができる. 一般性を失うことなく $a=0$ と仮定することができる.

[32] L を (u,v) の 1 次同次多項式として $\psi=\varphi+L$ を考えればよい.

空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に原点を中心とする半径 r の多円筒 γ を描く. r は原点を中心とする半径 $2r$ の多円筒内で上記の状勢がすべて成り立つように十分小さく取り, さらに r より小さい正の数 ρ を取って,

$$\varphi_1 = \varphi(x_1+\rho, x_2, \ldots, x_n), \qquad \psi = \max(\varphi, \varphi_1)$$

と置く. $\varphi(x_1, 0, \ldots, 0) = \chi(x_1)$ に対して, $0 < |x_1| < 2r$ では $\chi(x_1) > \chi(0)$ だから, 明かに ψ は多円筒 γ で性質 (P_1) を持つ擬凸状函数である. さらに $|\varphi - \psi|$ は ρ と共に零に収束する. (2°) で提起された問題は, このように解決した.

C. 境界問題.

19. 境界問題. この章の目標は次の問題を解くことである.

境界問題. 空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 上に擬凸状領域 $\mathfrak{D}$ が与えられたとき, 次の条件を満たす, $\mathfrak{D}$ における擬凸状函数 $\Phi(P)$ を見つけること:

1° $\Phi(P)$ は性質 (P_1) を持つ.
2° すべての実数 α に対し, $\Phi(P) < \alpha$ を満たす $\mathfrak{D}$ の点の集合 $\mathfrak{D}_\alpha$ は条件 $\mathfrak{D}_\alpha \Subset \mathfrak{D}$ を満たす.

この問題の意味は第 VI 論文の ≪III. 補足問題≫ に書かれていることを想起すれば, よく理解されるであろう.

さて, 今の場合, $\mathfrak{D}$ は単葉ではないので, $\mathfrak{D}$ 上常にコンパクトな $\mathfrak{D}_\alpha$ を作るためには, Hartogs 半径以外に, $\mathfrak{D}$ に関する新たな種類の擬凸状函数を探さなければならない. (同じ理由で, Cartan–Thullen の定理は多葉な正則域で与えられた問題を扱うのには, もはや十分ではないことになる.) 正確に言えば, 新らたに次の問題が生じる.

補助問題 ≪ $\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の領域とし, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ に関する多円筒境界距離が零ではない領域とするとき, $\mathfrak{D}_0$ における連続な擬凸状函数 $\lambda_0(P)$ であって, すべての実数 α に対し, $\lambda_0(P) < \alpha$ となるような $\mathfrak{D}_0$ の点の集合 Δ_α が条件 $\Delta_\alpha \Subset \mathfrak{D}$ を満たすようなものを見つけること.≫

20. 連続曲線の正規族. この機会に, Montel[33] の概念を連続曲線に応用してみよう[34]. これは, 補助問題を研究するのに, 不可欠なものではないが, しかし有用なものではある.

[33] P. Momtel, Leçons sur les familles normales を見よ.
[34] 我々はすでにこの概念を解析面に応用した. No. 7. 見よ.

空間 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に連続曲線の族 $(\mathfrak{F})$ が与えられているとき, もし $(\mathfrak{F})$ のすべての無限列 C_j $(j=1,2,\dots)$ から部分無限列 C_{p_j} $(j=1,2,\dots)$ を取り出し, すべての 曲線 C_{p_j} に対して, C_{p_j} を表す方程式,

$$x_i = \varphi_i^{(j)}(t), \quad 0 \le t \le 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

($\varphi_i^{(j)}$ は連続函数) を, 函数列 $\varphi_i^j(t)$ $(j=1,2,\dots)$ が $0 \le t \le 1$ で一様収束するように選ぶことができるなら, $(\mathfrak{F})$ を正規族と呼ぶ.

この度は, 次の判定条件を述べるに止める.

空間 (x) に長さのある連続曲線の族 $(\mathfrak{F})$ が与えられたとき, もし $(\mathfrak{F})$ の曲線の全長が, その集合で有界なら, $(\mathfrak{F})$ は正規族をなす[35].

実際, C を $(\mathfrak{F})$ の任意の曲線とし, l を C の全長, s を C の始点から C の任意の点 (x) までの弧の長さとして, $t = s/l$ とし,

$$x_i = \varphi_i(t), \quad 0 \le t \le 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

と置く. 閉区間 $[0,1]$ の任意の 2 点 t, t' に対して常に

$$|\varphi_i(t) - \varphi_i(t')| \le l|t - t'|$$

が得られる. $\{l\}$ は有界だから, $1, 2, \dots, n$ のすべての i に対して函数族 $\{\varphi_i(t)\}$ は区間 $[0,1]$ で同等連続である. したがって, それは, よく知られているように, $[0,1]$ で正規族をなす. したがって, 定義により $(\mathfrak{F})$ は正規族をなす.

21. 補助問題の解決. 補助問題の中で, 擬凸状であるという要請を一時無視する. そうすると手近に求める性質を持つ函数が色々目に付く. その中から次のものを選ぶ.

O を $\mathfrak{D}_0$ の定点とし, P を $\mathfrak{D}_0$ の任意の点とする. $d(P_1, P_2)$ を領域 $\mathfrak{D}_0$ 上の 2 点 P_1 と P_2 の間の距離とする. (正確に言うと, $\mathfrak{D}_0$ 上で P_1 と P_2 を結ぶ曲線の長さの下限である.)

$$\lambda(P) = d(O, P)$$

と置く. $\lambda(P)$ は $\mathfrak{D}_0$ における実連続函数である. α を任意の数とし, Δ_α を $\lambda(P) < \alpha$ なる $\mathfrak{D}_0$ の点の集合とする. $\mathfrak{D}_0$ の $\mathfrak{D}$ に関する多円筒的境界距離は零ではないので, 上記の判定法から明かなように $\Delta_\alpha \Subset \mathfrak{D}$ である. このように $\lambda(P)$ は求める函数の一つである. [訳注. 11]

[35] この族の曲線までの原点からの距離が有界であるという条件を付け加える.

それでは, どうすればこの函数 $\lambda(P)$ を擬凸状函数にすることができるか? 先ず $\lambda(P)$ は次の性質

$$(1) \qquad |\lambda(P_1)-\lambda(P_2)| \leq d(P_1, P_2)$$

を持つことを注意しよう. これに平均値を取る方法 (No. 17 で述べた) を結びつける.

$\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}_0^{(r)}$ に対して $\lambda_1(P)=A_r[\lambda(P)]$ を考える. u_i, v_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ のどれか一つを ξ と表すと, (1) により,

$$\left|\frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi}\right| \leq \frac{4}{\pi}$$

が得られる. (No. 8 (3°) を見よ.) 次に $\mathfrak{D}_2=\mathfrak{D}_0^{(2r)}$ に対して $\lambda_2(P)=A_r[\lambda_1(P)]$ を考える. η を u_i, v_i どれか一つとする. $\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\right| \leq \frac{4}{\pi r}M$ (M は $\mathfrak{D}$ における φ の上限, (3°), No. 18) だから, 上記の不等式により,

$$\left|\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial\xi\partial\eta}\right| \leq \left[\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\frac{1}{r}=\right]K$$

が得られる. さらに (1) により $|\lambda_2(P)-\lambda(P)| \leq 2\sqrt{n}r$ が得られる.

(α', β') を空間 (α, β) の原点を中心とする半径 1 の超球の任意の境界点とすると,

$$w(\lambda_2)=\min W(\lambda_2;\alpha', \beta') > \left[-8n^2K=-\left(\frac{8n}{\pi}\right)^2\frac{2}{r}=\right]-K_1$$

が得られる. $\mu(x)=\sum(u_i^2+v_i^2)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ に対しては

$$W(\mu;\alpha', \beta')=4$$

が得られるから, 正の数 M を $4M>K_1$ となるように取って,

$$\lambda_0(P)=\lambda_2(P)+M\mu(x)$$

を作る. そうすると $\lambda_0(P)$ は $\mathfrak{D}_2$ に対して定義されていて, $W(\lambda_0;\alpha,\beta)>0$ を満たす. $\lambda_0(P)$ が所期の性質を持っていることは明らかである.

このようにして得られた函数 $\lambda_2(P)$ は $\mathfrak{D}_2$ にしか存在しない. しかし $\mathfrak{D}_0$ に対してこの性質を持つ函数を得るためには $\mathfrak{D}_0$ よりもっと大きい領域から出発すればよい. 補助問題はこのようにして解ける.

22. 境界問題の解決. 第２補題. No. 19 の問題を完成させるために次の問題を考える.

問題. $\ll \mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の擬凸状領域とし[36], $\varphi(P)$ を $\mathfrak{D}$ における連続な擬凸状函数で, ($\mathfrak{D}$ に対し) 性質 (α), すなわちすべての実数 α に対して $\varphi(P) < \alpha$ で与えられる $\mathfrak{D}$ の点集合は $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれる, という性質を持つとする. このとき, この函数 $\varphi(P)$ を $\mathfrak{D}$ に対するこの性質を保ちながら性質 (P_1) を持つように修正すること.$\gg$

この問題を解くために, a_p $(p=1,2,\ldots)$ を, $a_p<a_{p+1}$ で, 極限が ∞ の正の数の列とし, $\varphi(P)<a_p$ で定義される $\mathfrak{D}$ の点集合を $\mathfrak{D}_p$ と表す. そうすると $\mathfrak{D}_p \Subset \mathfrak{D}$ である. No. 18 の問題は解けるから, 正の数 ε が与えられたとき, $\mathfrak{D}_p$ において, 性質 (P_1) を持ち,

$$|\varphi(P) - \Phi_p(P)| < \varepsilon$$

となる擬凸状函数 $\Phi_p(P)$ を見つけることができる. ε を十分小さく取って, $\Phi_p(P) < a_q$ で定義される $\mathfrak{D}_p$ の点集合を $\mathfrak{D}'_{p,q}$ とするとき, $q = 2, 3, \ldots, p-1$ に対して

$$\mathfrak{D}_{q-1} \Subset \mathfrak{D}'_{p,q} \Subset \mathfrak{D}_{q+1}$$

となるようにする.

函数列 $\Phi_p(P)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ から, 次のように逐次的に函数列 $\Phi'_p(P)$ を作る. 最初に

$$\Phi'_1 = \Phi_6$$

と置く. 函数 Φ'_1 は $\mathfrak{D}_6$ に存在している. それは擬凸状であり, 性質 (P_1) を持っており

$$\Phi'_1 > a_4 \qquad (\mathfrak{D}_6 - \mathfrak{D}_5) \quad \text{に対して}$$

である.

Φ'_2 を作るために, 先ず次のように Ψ_2 を作る.

$$\Psi_2 = c_2(\Phi_7 - a_3)$$

c_2 は正の定数である. $\mathfrak{D}_2 \Subset \mathfrak{D}'_{7,3} \Subset \mathfrak{D}_4$ だから, c_2 を十分大きく取って

$$\begin{array}{lll} \Psi_2 < \Phi'_1 & \mathfrak{D}_1 & \text{に対して} \\ \Psi_2 > \Phi'_1 & (\mathfrak{D}_6 - \mathfrak{D}_5) & \text{に対して} \\ \Psi_2 > a_5 & (\mathfrak{D}_7 - \mathfrak{D}_6) & \text{に対して} \end{array}$$

となるようにする. そして

$$\begin{array}{lll} \Phi'_2 = \max(\Phi'_1, \Psi_2) & \mathfrak{D}_6 & \text{に対して} \\ \quad = \Psi_2 & (\mathfrak{D}_7 - \mathfrak{D}_6) & \text{に対して} \end{array}$$

[36] $\varphi(P)$ のような性質の函数を持つすべての領域は擬凸状領域でなければならないから.

と置く.

これを続けて, 函数列 Φ'_p $(p=1,2,\ldots)$ が得られ, 各函数 Φ'_p は次の性質を持つ: Φ'_p は性質 (P_1) を持つ $\mathfrak{D}_{p+5}$ における擬凸状函数であって, $\mathfrak{D}_{p-1}$ $(p>1)$ に対しては $\Phi'_p=\Phi'_{p-1}$ であり, $\mathfrak{D}_{p+5}-\mathfrak{D}_{p+4}$ に対しては $\Phi'_p>a_{p+3}$ である. この函数列は $\mathfrak{D}$ において収束する. その極限函数を $\Phi(P)$ とする. Φ は $\mathfrak{D}$ において性質 (P_1) を持つ擬凸状函数である. それは $(\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_{p+4})$ $(p=1,2,\ldots)$ に対して $\Phi>a_{p+3}$ であるから, $\mathfrak{D}$ において性質 (α) を持つ.

この問題はこのように解けるので, 境界問題を解くためには次の問題を解けばよい.

問題. $\ll$ 空間 (x) に擬凸状領域 $\mathfrak{D}$ が与えられたとき, $\mathfrak{D}$ において性質 (α) を持つ擬凸状函数を見つけること.$\gg$

これは補助問題の完全な形である. これを先程の問題と Hartogs 半径より作られた函数 $d(P)$ を使って解こう.

$\mathfrak{D}$ が空間 (x) に一致する場合は除こう. 何故ならその場合は

$$\mu(x)=\sum|x_i|^2 \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

が解を与える.

$\mathfrak{D}$ のユークリッド的境界距離 $d(P)$ を考える. $-\log d(P)$ は連続な擬凸状函数である. この函数を, 簡単のため, $\delta(P)$ と表す. a_p $(p=1,2,\ldots)$ を $a_p<a_{p+1}$ で, 極限が $+\infty$ の正の数の列とし, $\delta(P)<a_p$ で定義される $\mathfrak{D}$ の点の集合を $\mathfrak{D}_p$ と表す. 補助問題は解けるから, $\mathfrak{D}_p$ における連続な擬凸状函数 $\varphi_p(P)$ を, $\varphi_p<\alpha$ で与えられる $\mathfrak{D}_p$ の点集合が $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれるように作る. α は任意の実数である. a_1 を $\mathfrak{D}_1\supset O$ [訳注. $\mathfrak{D}_1\neq\emptyset$ の意味] となるように十分大きく選ぶ.

O を $\mathfrak{D}_1$ の定点とし, $d(P_1,P_2)$ を $\mathfrak{D}$ 上の点 P_1,P_2 の間の距離として, $\lambda(P)=d(O,P)$ と置く. l_p $(p=1,2,\ldots)$ を強い意味で増大しながら $+\infty$ に収束する数列とし, それは以下で逐次的に作られる. Δ_p を $\lambda(P)<l_p$ で定義される $\mathfrak{D}_p$ の点集合とする. そうすると $\Delta_p\Subset\Delta_{p+1}$ であり, Δ_p $(p=1,2,\ldots)$ の極限は $\mathfrak{D}$ である.

列 φ_p $(p=1,2,\ldots)$ から次のように逐次的に函数列 $\Phi_p(P)$ を作る. 先ず $\Phi_1=\varphi_2$ とする. そうすると, Φ_1 は $\mathfrak{D}_2$ に存在する連続な擬凸状函数である.

Φ_2 をつくるために,

$$\delta<\frac{a_1+a_2}{2}, \qquad \varphi_3<\alpha_1$$

で定義される $\mathfrak{D}$ の点集合 Δ_1' を考える. α_1 は後に定める実数である. l_1 は任意に定め, α_1 は $\Delta_1' \Supset \Delta_1$ となるように十分大きく選ぶ. 次に, $\underline{\Delta_1' \Subset \mathfrak{D}_2}$ だから, l_2 を $\Delta_2 \supset \Delta_1'$ となるように十分大きく選ぶ. この状勢の下で

$$\Psi_2(P) = c_2 \max\left[\delta(P) - \frac{a_1 + a_2}{2}, \varphi_3(P) - \alpha_1\right]$$

なる形の函数を考え, 正の数 c_2 を十分大きく選ぶ. そうすると $\Psi_2(P)$ は次の性質を満たす：

$$\begin{array}{lll} \Psi_2 < \Phi_1 & \Delta_1 & \text{に対して} \\ \Psi_2 > a_2 & (\mathfrak{D}_3 - \Delta_2) & \text{に対して} \\ \Psi_2 > \Phi_1 & \underline{\Delta_2 \text{ 内の } \Delta_2 \text{ の境界の近傍で}}. & \end{array}$$

ここで

$$\begin{aligned} \Phi_2(P) &= \max(\Phi_1, \Psi_2) \qquad & \Delta_2 \qquad & \text{に対して} \\ &= \Psi_2 & (\mathfrak{D}_3 - \Delta_2) \quad & \text{に対して} \end{aligned}$$

と置く. そうすると $\Phi_2(P)$ は $\mathfrak{D}_3$ で定義された連続な擬凸状函数で, Δ_1 に対しては $\Phi_2 = \Phi_1$ であり, $\mathfrak{D}_3 - \Delta_2$ に対しては $\Phi_2 > a_2$ である. これを続ける.

そうすると, 連続な擬凸状函数の列 $\Phi_p(P)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ で, Φ_p は $\mathfrak{D}_{p+1}$ で定義されており, Δ_{p-1} に対しては $\Phi_p = \Phi_{p-1}$ であり, $p \geq q > 1$ のとき $p > 1$ なる限り $(\mathfrak{D}_{p+1} - \Delta_q)$ に対して $\Phi_p > a_q$ である. この列は $\mathfrak{D}$ で収束し, その極限を $\Phi(P)$ とすれば, $\Phi(P)$ は $\mathfrak{D}$ で連続で擬凸状であり, $\mathfrak{D} - \Delta_p$ $(p = 2, 3, \ldots)$ に対して $\Phi(P) > a_p$ だから, $\mathfrak{D}$ に対して性質 (α) を持つ.

このようにして, 求めている次の結果が得られた.

補題 I. 空間 (x) 上に分岐点を含まない擬凸状領域 $\mathfrak{D}$ が与えられたとき, $\mathfrak{D}$ における擬凸状函数 $\Phi(P)$ で次の性質を持つものが見つけられる.

1° $\Phi(P)$ は性質 (P_1)[37] を持つ.
2° 任意の実数 α に対し $\Phi(P) < \alpha$ で与えられる $\mathfrak{D}$ の点集合は $\mathfrak{D}$ の完全内部に留まる.

23. 今後の問題. 領域の内点として (適当な意味の) 無限遠点を許すか, 非超越分岐点を許すかしたときの境界問題の今後の性格 (caractère) を簡単に指摘しておこう.

第 1 の場合に対しては, 補助函数 $\mu(x) = \sum|x_i|^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が使えなくなる. これが未知 (étrange) の問題を生む.

第 2 の場合に対しては, Hartogs 半径が役に立たなくなる. これは実に大変と思える困難を呈する.

この困難の様相の詳細については, 今後の論文で描くと言うに止める.

第 III 章.　主問題.

24. 一般概念.　空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 上に領域 (有限不分岐) $\mathfrak{D}$ を考え, P を $\mathfrak{D}$ の任意の点, (x) をその座標とする. P の函数 $f(P)$ は, もしそれが $\mathfrak{D}$ で一価であり, さらに $\mathfrak{D}$ のすべての点で (x) の正則函数なら, $\mathfrak{D}$ に対して <u>正則</u> と呼ばれる. $f(P)$ を $\mathfrak{D}$ における (P の) 正則函数とするとき, もしその函数が, $\mathfrak{D}$ の異なる点で常に異なる函数要素 (élément de Taylor) を持ち, さらに $\mathfrak{D}$ のどの境界点を越えても解析接続できないとき $\mathfrak{D}$ は $f(P)$ の正則域であると言う. もし $\mathfrak{D}$ が正則域であるような函数が少なくとも一つ存在すれば, $\mathfrak{D}$ は <u>正則域</u> と呼ばれる.

Hartogs (1906) により正則域は擬凸状である. この擬凸状であるという概念は <u>局所的な凸性</u> の一種である. (それを局所的に定義することができる.) ところで, 1926 年 Julia は次のような大域的な問題を提起した. すなわち, すべての正規域は正則域か? そして 1931 年, Julia[38] の問題を取り扱うため, <u>H. Cartan</u> は, 初めて <u>大域的な凸性</u> の一種を導入した. (これは元々局所的な方法では表現できない.)[39]　その基本的なアイデアは次の通りである:

$\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の領域 (連結または非連結) とし, $(\mathfrak{F})$ を $\mathfrak{D}$ における <u>正則</u> 函数の或る族とする. もし $\mathfrak{D}$ が次の条件を満たすなら, それを <u>$(\mathfrak{F})$ に関して凸状</u> または, 単に <u>$(\mathfrak{F})$–凸状</u> と呼ぶ.

1°　族 $(\mathfrak{F})$ は, 少なくとも一つ, $\mathfrak{D}$ の異なる点のすべての対で異なる函数要素を持つ函数 $f_0(P)$ を含む.

2°　$\Delta \Subset \mathfrak{D}$ なるすべての領域 (連結または非連結) Δ に対して, $\Delta \subseteq \Delta' \Subset \Delta'' \subseteq \mathfrak{D}$ なる二つの領域 (連結または非連結) Δ', Δ'' が存在し, Δ''–Δ' のすべての点 P_0 に対して, $|f(P_0)| > \max|f(\Delta)|$ となるような, $(\mathfrak{F})$ の函数 $f(P)$ が対応する. (ここで右辺は $|f(P)|$ の Δ における上限を意味する.)

---

[38] Julia の問題は第 VI 論文の序文で述べたように, 単葉, 有限領域に対しては解かれた. その最終段階は Behnke と Stein に負う. H. Behnke–K. Stein, Konvergente Folgen von Regularitätsbreichen und die Meromorphiekonvexität, 1938 (Math. Annalen) を見よ.

[39] H. Cartan, Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes, 1931 (Bull. de la Soc. Math. de France).

特別な場合として, $\mathfrak{D}$ が $\mathfrak{D}$ における正則函数に関して凸状なら Behnke に従って, $\mathfrak{D}$ は <u>正則凸状</u> (regulär–konvex) であると言う. この概念について, 後にこの第 1 の条件は第 2 の条件の必然的帰結であることを見るだろう.

もっと一般に, もし $\mathfrak{D}$ が $\mathfrak{D}' \supseteq \mathfrak{D}$ なる領域 $\mathfrak{D}'$ における正則函数全体の族に関して凸状なら, $\mathfrak{D}$ は <u>$\mathfrak{D}'$ に関して正則凸状</u> であると言う.

1932 年, H. Cartan と P. Thullen は単葉で有限なすべての正則域は正則凸状であることを見出した[40]. (これは葉数が有界な場合は同様に成り立つ.) これは単葉な領域の場合, 実に基本的な事実であり, 正則域を他の種の擬凸状領域, 有理型域, 正規域, $\cdots$ と区別する理由を与える. 実際, この定理の助けによって, 我々は単葉有限な正則域に対して Cousin の問題と展開の問題を解決した.

しかし, 今の場合は [訳注. 無限葉の場合], すでに注意したように Cartan–Thullen の証明法 (実に単純な) はもはや通用しない. したがって, 正則凸状域自身を基本概念とみなさなければならない. すなわち, 先ず :

≪ 空間 (x) 上のすべての 擬凸状領域 (有限不分岐) は正則凸状か ?≫

以後これを <u>Hartogs の逆問題</u> と言う.

他の主問題 (我々にとって第 I 論文以来の), <u>Cousin の問題</u> と <u>展開の問題</u> は, 先に述べたように, 筒状域に対して以外[41], 長い間放置されていた. <u>Cauchy の定理</u> については, H. Poincaé が折よく第 1 定理を一般化した. しかし, 第 2 定理は進歩のないままであった.

ところで, 1935 年, Weil は Poincaré の結果を使って Cauchy の第 2 定理を一般化した[42]. 前に言ったように, このことは, その直接の結果として, 有理函数に関して凸状な領域に対する主問題を解けるようにした. そして我々もまた, 第 VI 論文で Hartogs の逆問題に対して Weil のこの積分を使った.

Weil の論文の中で, またすでに $(\mathfrak{F})$–凸状の概念の中で, 次の形の閉集合が現われる.

$\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の超越内分岐点を持たない領域 (連結または非連結) [訳注. 通常の内分岐領域のことであろう.] とし, P を $\mathfrak{D}$ の任意の点, Δ を $\mathfrak{D} \ni \Delta$ なる $\mathfrak{D}$ 上の点の閉集合とする. もし Δ 上の正則な函数 $f_0(P)$ で, Δ の異なる通常点のすべての対で異なる函数要素 (élément de Taylor) を持つものが存在し, さらに $f_j(P)$ を $\mathfrak{D}$ 上の正則函数, A_j は平面上の単

[40] H. Cartan–P. Thullen, Regularitäts– und Konvergenzbereiche, (Math. Annalen).
[41] P. Cousin, 1895, (Acta Mathematica).
[42] この問題について S. Bergmann の仕事をも参照しなければならない. 後に, それについて述べる機会があるだろう.

葉有界な閉領域 (連結) (また時としてもっと一般に有界な閉集合) として, Δ を

$$f_j(P) \in A_j \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

なる形で表すことができるなら, これを 解析多面体 と言う[43].

第 I 論文の定理 II, 第 II 論文の定理 I および第 VIII 論文の基本補題を確立したのは この解析多面体に対してであった. 今の場合 [訳注. 不分岐領域の場合] にこれらの原理の形をよく見よう.

上の定義で $\mathfrak{D}$ は内分岐点を含まないと仮定する. $f_0(P)$ は $\mathfrak{D}$ の異なる点で常に異なる函数要素を持っているから, 有限個の函数の系 $\varphi_k(P)$ $(k=1,2,\ldots,p)$ (望むなら $p \leq n+1$) を, $\mathfrak{D}$ の同じ座標を持つ異なる点の対のすべてで, 順序のついた値の系 $(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_p)$ が異なるように見つけることができる. それで改めて多面体 Δ を

$$(1) \qquad x_i \in A_i, \quad f_j(P) \in B_j \quad (i=1,\ldots,n;\, j=1,2,\ldots,\nu)$$

の形で表す. ここで A_i, B_j は平面上の単葉有界な閉領域 (連結) を表し, $f_j(P)$ は $\mathfrak{D}$ における正則函数で, 上記の函数 $\varphi_k(P)$ $(k=1,2,\ldots,p)$ をその中に含んでいるものとする.

(x) を (P) の座標とする. $\mathfrak{D}$ のすべての点 P_0 において, 空間 $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_\nu)$ における解析集合の要素

$$y_j = f_j(x) \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

を考える. $f_j(x)$ は P_0 の近傍における分枝を意味する. P_0 が $\mathfrak{D}$ を動く (décrit) とき, 解析集合の要素は解析集合を描 (trace) く. それを Σ' と表し, 方程式 $y_j = f_j(P)$ $(P \in \mathfrak{D},\ j=1,2,\ldots,\nu)$ と表す. 組 (f) の性質により, $\mathfrak{D}$ の点 P と 座標 $[x, f(P)]$ の Σ' の点 M との間には 1 対 1 の対応がある.

空間 (x,y) に閉筒状域 (A,B) を考え, Σ' の (A,B) 上の部分を Σ と表す. Δ の点 P と Σ の点 $M[x, f(P)]$ は 1 対 1 に対応し, 特に 境界点は境界点に対応する. P を座標 (x) を持つ Δ の点とし, Q を同じ座標 (x) を持つ, P とは異なる Δ の任意の点として

$$\alpha(P) = \max|f_j(P) - f_j(Q)| \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

と置く. そして α_0 を (P が Δ を動いたときの) $\alpha(P)$ の下限とする. $\alpha_0 > 0$ である. $3\rho < \alpha_0$ なる正の数 ρ を取って, 空間 (x,y) における次のような点 (x',y') の集合 V を考える. すなわち V の点 (x',y') には (x')

[43] 第 VIII 論文では H. Cartan にしたがって A_j を単連結であるとした, しかし, それは自然とは思えないので, 以後その条件を省く.

を座標とし, $|f_j(P')-y'_j|<\rho\,(j=1,2,\ldots,n)$ を満たすような Δ の点 P' が少なくとも一つ対応する. V の点 (x',y') に値 $\varphi(P')$ を対応させる. (x') にはただ一つの P' が対応するから, このように定義された函数は一価であり, しかも正則である. 以後この函数を同じ記号 φ を使って $\varphi(x,y)$ のように表す. [訳注. 12]

今の場合, 基本補題は次のような形になる.

補題 II. この幾何学的状勢の下で, 閉集合 A_i^0, B_j^0 $(i=1,2,\ldots,n,$ $j=1,2,\ldots,\nu)$ を, A_i^0 は開領域 A_i の完全内部に含まれ, B_j^0 は開領域 B_j の完全内部に含まれるものとする. そうすると, 次のような役割を演ずる正の定数 K が対応する. すなわち $\mathfrak{D}$ 上の解析多面体 Δ の近傍に正則函数 $\varphi(P)$ が与えられたとき, Δ における $|\varphi|$ の上限を N として, $(A^0,$ $B^0)$ における正則函数 $\Phi(x,y)$ を, Σ 上で $\Phi=\varphi$ であり, しかも (A^0,B^0) で $|\Phi|<KN$ となるように見つけることができる. [訳注. 13]

この章は 三つの部分 A, B, C からなる. A では Cousin の第 1 問題および展開の問題を正則凸状域に対して論じる. これは Hartogs の逆問題を論じるのに必要である. そして B ではこの問題 [訳注. Hartogs の逆問題] を解く.

第 VII 論文で述べたように, この研究の途上で幾つかの算術的問題に出合った. すなわち第 I 論文の定理 II では 問題 (C_2), 第 II 論文の定理 I では問題 (E), 第 V 論文に述べた Weil の条件では問題 (C_1). 我々は第 VII 論文で 不定域イデアル[44] の概念と H. Cartan の定理[45] を使って, それらを閉多円筒に対して解いた.

C では Cousin の第 2 問題とこれらの問題を論じる. 問題 (E) に対しては反例を挙げる. 他の問題については (有限不分岐な) 擬凸状領域に対して (肯定的に) 解けることを見るだろう.

A. 正則函数の展開, Cousin の第 1 問題.

25. 正則函数の展開. 第 I 論文のアイデアと No. 24 の補題 II によって次の定理が得られる.

定理 I. $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ を空間 (x) 上の有限不分岐な二つの領域とし, $\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{D}'$ とする. $\mathfrak{D}$ は連結でなくてもかまわない. もし $\mathfrak{D}$ が $\mathfrak{D}'$ に関して正則凸状なら, $\mathfrak{D}$ におけるすべての正則函数は, $\mathfrak{D}$ の完全内部で一様収束する $\mathfrak{D}'$ での正則函数の級数に展開される.

[44] 複素 1 変数のみの解析接続の理論において, すでに (f,δ) の形の要素を考えた.

[45] H. Cartan, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, 1940 (Journal de Mathématiques).

実際, $f(P)$ を $\mathfrak{D}$ における正則函数とする. 領域 (連結または非連結) $\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{D}'$ に関して正則凸状だから, それは

$$|x_i| \leq r_i, \quad |\varphi_i(P)| \leq 1, \quad P \in \mathfrak{R} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\, j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

の形の解析多面体 Δ_p の増大列の極限として表される. ここで $\mathfrak{R}$ は $\Delta_p \Subset \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{D}$ なる領域 (連結または非連結) を示し, r_i は正の実数, $\varphi_j(P)$ は $\mathfrak{D}'$ における正則函数で, Δ_p の近傍の, 同じ座標を持つ異なる点の対のすべてで, 値の組 $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ が異なるようなものである.

空間 $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\nu)$ に閉多円筒

$$C \;:\; |x_i| \leq r_i, \quad |y_j| \leq 1, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\, j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

と

$$\Sigma \;:\; y_j = \varphi_j(P) \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu), \quad P \in \mathfrak{R}$$

で与えられる解析集合 Σ を考える. (P の座標は (x) である.) 補題 II により, C の近傍における正則函数 $F(x, y)$ で, Σ 上 $F = f$ となるものを見つけることができる. $F(x, y)$ を原点で Taylor 級数に展開し, $y_j = \varphi_j(P)\,(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ を代入すると, $\mathfrak{D}'$ における正則函数を項とし, Δ_p で一様収束するような, $f(P)$ の Δ_p の近傍における展開が得られる. このことから直ちにこの定理が得られる.

26. Cousin の第 1 問題. Cousin 第 1 問題についても同様であることを確かめよう. 次の補題を証明することから始める.

空間 (x) 上に補題 II の解析多面体 Δ と Δ を通る超平面 L を考える. L は Δ を二つの部分 Δ_1 と Δ_2 に分ける. Δ_0 を Δ の L 上の部分とする. この幾何学的状況の下で, Δ_0 の近傍に正則函数 $\varphi(P)$ が与えられたとき, それぞれ Δ_1 の近傍および Δ_2 の近傍における正則函数 $\varphi_1(P)$ および $\varphi_2(P)$ を, 恒等的に $\varphi_1(P) - \varphi_2(P) = \varphi(P)$ となるように見つけることができる.

これを証明するのに, 簡単のため, u を x_1 の実部として, L は $u = 0$ で定義されていると仮定する. そしてさらに Δ_1 は Δ の $u \leq 0$ 上の部分, Δ_2 はその $u \geq 0$ 上の部分とする. Δ は (補題 I に示した意味の下に)

$$x_i \in A_i, \quad f_j(P) \in B_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\, j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

なる形で与えられている. x_1 平面に A_1 を含む $|x_1| < R$ の形の円を描く. L を垂直な直径とする. そうすると 補題 II により, 共通部分 $(x_1 \in L) \cap (A, B)$

の近傍における正則函数 $\Phi(x,y)$ で, Σ' ($y_j = f_j(P)$, $j=1,2,\dots,\nu$) 上で $\Phi=\varphi$ となるものが得られる. Cousin 積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(t,x_2,\dots,x_n,(y))}{t-x_1}dt$$

を考える. ここで i は虚数単位であり, 積分は下から上へ取る. Cousin によってこの積分の性質 (およびその働き) はよく知られている. ここで $y_j=f_j(P)$, $(j=1,2,\dots,\nu)$ を代入して求める函数の対が容易に得られる.

$\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の有限不分岐な領域とする. 今までと全く同様に, $\mathfrak{D}$ に Cousin 第 1 問題を与えることができる. それは繰り返さない.

$\mathfrak{D}$ を 正則凸状 と仮定する. そうすると $\mathfrak{D}$ は

$$|x_i| \le r_i, \quad |f(P)_j| \le 1, \quad P \in \mathfrak{R} \quad (i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,\nu)$$

の形の解析多面体の増大列の極限である. ここで ($\Delta \Subset \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{D}$, r_i は正の実数, そして) $f_j(P)$ は補題 II で示された性質を持つ $\mathfrak{D}$ における正則函数を表す. $(\mathfrak{p})$ を $\mathfrak{D}$ に与えられた極とする. 今証明したばかりの 補題 により, Δ_p の近傍で $(\mathfrak{p})$ を持つ有理型函数 $G_p(P)$ を見つけることができる.

$H_p(P)=G_{p+1}-G_p$ とすると, H_p は Δ_p の近傍での正則函数である. ε_p を任意の正の数とする. 定理 I により, $\mathfrak{D}$ における正則函数 $K_p(P)$ を, Δ_p で $|K_p-H_p|<\varepsilon$ となるように求める. そうすると何時もの仕方で次の結果を得る.

定理 II. Cousin の第 1 問題は空間 (x) 上の有限で内分岐点を持たない正則凸状域で常に解ける.

B. Hartogs の逆問題. —出発点.

27. 補助問題. 補題 I, II, および定理 I, II によって Hartogs の逆問題を論じよう. 第 VI 論文のアイデアに従って Cousin 積分の役を果たすものを求めることから始める.

空間 (x) 上に 有界 領域 (不分岐) $\mathfrak{D}$ を描く (Décrivons). u を x_1 の実部とし, a_1, a_2 を $a_1<0<a_2$ なる実数とする. $\mathfrak{D}$ の部分で $u<a_2$ [訳注. 半空間を意味する. 以下同様.] 上のものを $\mathfrak{D}_1$, $a_1<u$ 上のそれを $\mathfrak{D}_2$, $a_1<u<a_2$ 上のものを $\mathfrak{D}_3$ と表す. $\mathfrak{D}_1$ と $\mathfrak{D}_2$ は実際に存在し, 共に 正則凸状である と仮定する. そうすると $\mathfrak{D}_3$ もそうである.

$f_j(P)$ $(j=1,2,\dots,\nu)$ を $\mathfrak{D}_3$ における正則函数とし, 次のような $\mathfrak{D}$ の部分集合 E を考える : $\mathfrak{D}_3$ に属さない点はすべて E に属する. $\mathfrak{D}_3$ の点 P については, それが条件

$$|f_j(P)|<1 \qquad (j=1,2,\dots,\nu)$$

を同時に満たすもの, 且つそのようなもののみが E に属する. E は $u<a_1$ 上の部分および $a_2<u$ 上の部分に拡がっているような連結成分を持つと仮定し, その任意の一つを Δ と表す. この Δ に関連して, この函数の系 (f) は次の条件 (C) を満たす と仮定する.

≪1° 正の数 δ_1 があって, $\mathfrak{A}$ を Δ の $|u|<\delta_1$ 上の部分とするとき

$$\mathfrak{A} \Subset \mathfrak{D}$$

となる.

2° 正の数 δ_2 および 1 より小さい正の数 ε_0 があって, p を $1, 2, \ldots, \nu$ の任意の一つとするとき, $\mathfrak{D}_3$ の点で

$$|f_p(P)| \geq 1 - \varepsilon_0$$

を満たすものは $|u-a_1|<\delta_2$ および $|u-a_2|<\delta_2$ の外に留まる.

3° 順序の付いた値の系 $(f_1, f_2, \ldots, f_\nu)$ は $\mathfrak{A}$ の, 同じ座標を持つ異なる点の, いかなる対に対しても一致しない. ≫

第 2 の条件によって Δ は領域である. $1-\varepsilon_0 < \rho_0 < 1$ なる実数 ρ_0 を取り, 次のような Δ の部分集合 Δ_0 を考える : $\mathfrak{D}_3$ に属さないすべての Δ の点は Δ_0 に属する. $\mathfrak{D}_3$ の部分をなす Δ の点 P は, 条件 $|f_j(P)|< \rho_0$ $(j=1,2,\ldots,\nu)$ を満たすとき且つそのときのみ Δ_0 に属する. 第 2 の条件により, Δ_0 は $\mathfrak{D}$ 上の開集合である. Δ_0 の $u<0$ 上の部分を Δ_0' と表し, その $u>0$ 上の部分を Δ_0'' と表す. この状況の下で次の補助問題 を提起しよう.

≪ $\mathfrak{A}$ に正則函数 $\varphi(P)$ が与えられたとき Δ_0' における正則函数 $\varphi_1(P)$ と Δ_0'' における正則函数 $\varphi_2(P)$ を, $u=0$ 上の Δ_0 の部分でも正則になり, 恒等的に $\varphi_1(P)-\varphi_2(P)=\varphi(P)$ となるように見つけること.≫

28. 正則凸状域の場合. この問題を $\mathfrak{D}$ の代わりに先ず $\mathfrak{D}_3$ で考える. No. 26 で述べた方法で解 (φ_1, φ_2) は得られる. 問題なのはその表現である.

空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$ において $y_j=f_j(P)$ $(j=1,2,\ldots,\nu)$ で与えられる解析集合 Σ を考える. P は 座標 (x) を持つ $\mathfrak{A}$ の任意の点である. $\mathfrak{D}$ は有界であるから, 正の数 r_0 を十分大きく取って, $\mathfrak{D}$ は空間 (x) の, 原点を中心とする半径 r_0 の多円筒に含まれているとし, $r>r_0$, $\rho_0<\rho<1$ として, 空間 (x, y) に多円筒 C :

$$|x_j| < r, \quad |y_k| < \rho \qquad (j=1,2,\ldots,n;\, k=1,2,\ldots,\nu)$$

を考える. さらに, $\mathfrak{A}$ 上に

$$|u| < \delta, \quad |f_k(P)| < \rho \qquad (k=1,2,\ldots,\nu)$$

で与えられる部分集合 $\mathfrak{A}'$ を考える. ここで δ は $<\delta_1$ なる実数である. ($\delta_1 < -a_1, a_2$ でなければならない). $\mathfrak{A} \Subset \mathfrak{D}$ だから $\mathfrak{A}'$ は $\mathfrak{A}' \Subset \mathfrak{A}$ なる開集合である.

$\varphi(P)$ は $\mathfrak{A}$ における正則函数であるから, 補題 II により, Σ 上 $\Phi = \varphi$ となるような, C と $|u| < \delta$ の共通部分における正則函数 $\Phi(x, y)$ を作ることができる. l を x_1 平面の虚軸上の線分で原点を含み円環 $r_0 < |x_1| < r$ 内に端点を持つものとし, Cousin 積分

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\Phi(x'_1, x_2, \ldots, x_n, (y))}{x'_1 - x_1}\, dx'_1$$

を考える. この i は虚数単位であり, 積分は下から上へ取る. $y_k = f_k(P)$ を $\Psi(x, y)$ の式に代入して

$$\psi(P) == \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\Phi(x'_1, x_2, \ldots, x_n, f_1(P), \ldots, f_\nu(P))}{x'_1 - x_1}\, dx'_1$$

が得られる. $\psi(P)$ の, $\Delta'_0 \cap \mathfrak{D}_3$ における部分は正則函数を表す. これを $\psi_1(P)$ と書く. $\psi_2(P)$ を $\Delta''_0 \cap \mathfrak{D}_3$ におけるそれとする. これらの函数 $\psi_1(P), \psi_2(P)$ は $u = 0$ 上の Δ_0 の部分でも正則であり, 求める関係 $\psi_1(P) - \psi_2(P) = \varphi(P)$ を満たす.

解 (ψ_1, ψ_2) のこの表現を修正しよう. y_k $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$ 平面上に原点を中心とする半径 ρ_0 の円 Γ_k を描く. Cauchy により, $|x_i| < r$, $|y_k| < \rho_0$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \nu)$ に対して

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^\nu}\int_{\Gamma_1}\frac{dy'_1}{y'_1 - y_1}\int_{\Gamma_2}\frac{dy'_2}{y'_2 - y_2}\cdots\int_{\Gamma_\nu}\frac{\Phi(x, y')}{y'_\nu - y_\nu}dy'_\nu$$

が得られる. (積分は Γ_k の正の方向に取る.) 略して, それをしばらく次の形に書く.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^\nu}\int_{(\Gamma)}\frac{\Phi(x, y')}{\prod(y'_k - y_k)}(dy') \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

上の $\psi(P)$ の式に $\Phi(x, y)$ のこの式を代入し, それを略して

$$(1) \qquad \psi(P) = \int_{(l, \Gamma)} \chi(x'_1, y', P)\, \Phi(x'_1, x_2, \ldots, x_n, y')(dx'_1, dy')$$

が得られる. ここで

$$\chi(x'_1, y', P) = [(2\pi i)^{\nu+1}(x'_1 - x_1)(y'_1 - f_1(P))\cdots(y'_\nu - f_\nu(P))]^{-1}$$

である. これが $\mathfrak{D}_3$ に対する解の, 求めていた表現である.

29．一般な場合． (1) 式で, 空間 (x', y') における筒状集合 $(l, (\overline{\Gamma}))$[46]は, それを含む正則凸状域の減少列の極限である．V をその列の一つの領域とする．$(V, \mathfrak{D}_1)$ において, $(V, \mathfrak{D}_3)$ では $\chi(x'_1, y', P)$ と同じ極を持ち, 他では正則な有理型函数 $\chi_1(x'_1, y', P)$ を作る．これは Cousin 第 1 問題であるから, V を $(l, (\overline{\Gamma}))$ の十分近くに選びさえすれば, 条件 (C) の第 2 条件と $(V, \mathfrak{D}_1)$ は正則凸状であることから, それは可能である (定理 II).

$(\chi - \chi_1)$ は $(V, \mathfrak{D}_3)$ で正則であり, $(V, \mathfrak{D}_3)$ は $(V, \mathfrak{D}_1)$ に関して正則凸状だから, それを, $(V, \mathfrak{D}_3)$ の完全内部で一様収束する, $(V, \mathfrak{D}_1)$ における正則函数の級数に展開することができる (定理 I). したがって, 正の数 ε に対し, $(V, \mathfrak{A})$ で $|(\chi_1 - \chi) - F_1| < \varepsilon$ となるような, $(V, \mathfrak{D}_1)$ における正則函数 $F(x'_1, y', P)$ を作ることができる．ここの V は前の V の完全内部にある $(l, (\overline{\Gamma}))$ の新たな近傍を意味する．

$$K_1(x'_1, y', P) = \chi - \chi_1 - F_1$$

と置く．K_1 は $(V, \mathfrak{D}_3)$ で正則で, $(V, \mathfrak{A})$ で $|K_1| < \varepsilon$ となる正則函数である．

$\mathfrak{D}_2$ に対しても全く同様に $K_2(x'_1, y', P)$ を作る．これらの函数を使って積分 (1) を次のように変形する．

$$(2)\quad I_1(P) = \int_{(l,\Gamma)} [\chi(x'_1, y', P) - K_1(x'_1, y', P)]\Phi(x'_1, x_2, \ldots, x_n, y')(dx'_1, dy')$$

$$I_2(P) = \int_{(l,\Gamma)} [\chi(x'_1, y', P) - K_2(x'_1, y', P)]\Phi(x'_1, x_2, \ldots, x_n, y')(dx'_1, dy')$$

$I_1(P)$ を見よう．$\chi - K_1 = \chi_1 + F_1$ だから (l, Γ) 上の定まったすべての点 (x'_1, y') に対し, 函数 $(\chi - K_1)$ は $\mathfrak{D}_1$ で有理型 であり, さらに $P \in \Delta'_0$ に対して正則である．したがって $I_1(P)$ は Δ'_0 に対して正則である．同様に $I_2(P)$ は Δ''_0 に対して正則である．

解析函数 $I_1(P)$, $I_2(P)$ は $u = 0$ 上の Δ_0 のすべての点で正則になる．何故なら (1) で与えられた函数 $\psi(P)$ は同じ性質を持ち, K_1, K_2 は正則だからである．$\psi(P)$ の性質から

$$(3)\quad I_1(P) - I_2(P) = \varphi(P) - \int_{(l,\Gamma)} [K_1(x'_1, y', P) - K_2(x'_1, y', P)]\Phi(x'_1, x_2, \ldots, x_n, y')(dx'_1, dy')$$

が導かれる．

$$K(x'_1, y', P) = K_1(x'_1, y', P) - K_2(x'_1, y', P)$$

[46] $(l, (\overline{\Gamma}))$ は点集合 $x_1 \in l,\ y_j \in (\overline{\Gamma_j})$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ を意味する．$(\overline{\Gamma}_j)$ は円周 Γ_j の閉円である．[訳注．この脚注は間違い．$(\overline{\Gamma}_j)$ は円周 Γ_j そのものである.]

と置く．そしてこの (3) 式をよく見る．$\varphi(P)$ は $\mathfrak{A}$ に対して正則である．K は $(V,\mathfrak{D}_3)$ で，$\Phi(x,y)$ は $C\cap(|u|<\delta)$ に対して正則である．したがってこの右辺は $\mathfrak{A}$ に対して正則な函数を表し，したがって左辺も同じである．

$$\varphi_0(P) = I_1(P) - I_2(P)$$

と置く．これが $\varphi(P)$ の第 1 近似である．このようにして，<u>与えられた函数 $\varphi(P)$ とその第 1 近似 $\varphi_0(P)$ は共に同じ領域 (連結または非連結) $\mathfrak{A}$ で正則である</u> ことが分かった．これが基本的なアイデアである．

差 $\varphi'=\varphi-\varphi_0$ を評価しよう．

$$\varphi' = \int_{(l,\Gamma)} K\cdot\Phi\,(dx_1', dy')$$

が得られる．φ は $\mathfrak{A}$ において有界であると仮定する．それは一般性を失わない．M を $|\varphi|$ の $\mathfrak{A}$ に対する上限とする．<u>補題 II</u> により，N を φ によらない或る定数として，$C\cap(|u|<\delta)$ における正則函数 $\Phi(x,y)$ を $|\Phi|<NM$ であるように見つけることができる．K については，$K=K_1-K_2$ であり，$(l,(\overline{\Gamma}),\mathfrak{A})$ において $|K_1|<\varepsilon$, $|K_2|<\varepsilon$ である．したがって $\mathfrak{A}$ に対して

$$|\varphi'(P)| < 2\varepsilon N N_1 M, \quad N_1 = 2r(2\pi\rho_0)^{\nu}$$

が得られる．それで，λ を 1 より小さい正の数とし，ε を $2\varepsilon NN_1<\lambda$ となるように選ぶと $|\varphi'(P)|<\lambda M$ が得られる．

もし $\varphi(P)$ の代わりに改めて $\varphi'(P)$ から出発すれば，全く同様にして，$\mathfrak{A}$ で正則な $\varphi'(P)$ の第 1 近似 $\varphi_0'(P)$ が得られ，$\varphi''=\varphi'-\varphi_0'$ と置くと，$\mathfrak{A}$ に対して $|\varphi''|<\lambda^2 M$ となる．$\varphi_0'(P)$ は差 $I_1'(P)-I_2'(P)$ で与えられ，

$$I_1'(P)=\int_{(l,\Gamma)}[\chi(x_1',y',P)-K_1(x_1',y',P)]\Phi'(x_1',x_2,\ldots,x_n,y')(dx_1',dy'),$$
$$I_2'(P)=\int_{(l,\Gamma)}[\chi(x_1',y',P)-K_2(x_1',y',P)]\Phi'(x_1',x_2,\ldots,x_n,y')(dx_1',dy')$$

であり，この Φ' は，$|\Phi'|<\lambda NM$ となる，$C\cap(|u|<\delta)$ で正則な函数である．この操作を無限に繰り返すことで求める解が得られる．このようにして

<u>補助問題 (No. 27 の) は常に解ける．</u>

問題の解決．

30．第 II 論文のアイデアと補題 I． 第 II 論文のアイデアを思い出そう．$\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の領域，E を $\mathfrak{D}$ の点集合とする．もし $E\Subset\mathfrak{D}$ であって，

さらに $\mathfrak{D}$ での E の閉包[47]が $\mathfrak{D}$ に関して正則凸状な $\mathfrak{D}$ の部分領域 (連結または非連結) の減少列の極限であるなら, E は $\mathfrak{D}$ に関して外的正則凸状であると言う. [訳注. 実際は, 解析多面体の減少列の極限である.] もし Δ_1, Δ_2 が $\mathfrak{D}$ の二つの部分領域 (連結または非連結) であって, ともに $\mathfrak{D}$ に関して正則凸状なら $\Delta_1 \cap \Delta_2$ も同じ性質を持つ. E を $E \Subset \mathfrak{D}$ なる点集合とし, F_1, F_2 は E を含む $\mathfrak{D}$ の二つの点集合であって, 閉, コンパクトで, $\mathfrak{D}$ に関して外的正則凸状とする. そうすると上のことから $F_1 \cap F_2$ に対しても同様になる. F_p $(p = 1, 2, \ldots)$ を同じ性質を持つ $\mathfrak{D}$ の点集合の減少列とすると, その極限に対しても同様である.

$\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の正則凸状域, E を $E \Subset \mathfrak{D}$ なる点集合とする. そうすると E を含む $\mathfrak{D}$ の点集合 F で, 閉, コンパクトで, $\mathfrak{D}$ に関して外的正則凸状なものが存在する. [訳注. 解析多面体を取ればよい.] H をそのような F のすべての交わりとする. H は明かに E を含む $\mathfrak{D}$ の点集合で, $\mathfrak{D}$ 上, 閉, コンパクトである. H を $\mathfrak{D}$ に関する E の (H)–閉包と呼ぶ.

≪ H は適当な集合 F の可算個の交わりである.≫

これを示すために, 定理 I の証明法を思い出せば直ちに次のことが分かる : $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$ なる領域 (連結または非連結) とすると, $\mathfrak{D}$ におけるすべての正則函数は, $\mathfrak{D}_0$ で一様収束するような, $\mathfrak{D}$ における定まった有限個の正則函数の多項式の級数で表される. ここでその多項式の係数の実部と虚部は有理数に制限することができる. このことから直ちに上の結果が導かれる. [訳注. そのような多項式による解析多面体は可算個しかない.]

この結果と上記のことから, 容易に次のことが言える.

E の $\mathfrak{D}$ に関する (H)–閉包は $\mathfrak{D}$ に関して外的正則凸状である.

解析面に関連して, (H)–閉包は次の性質を持つ :

$\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の正則凸状域, E を $E \Subset \mathfrak{D}$ なる点集合, H を E の $\mathfrak{D}$ に関する (H)–閉包とする. σ_t を区間 $0 \leq t \leq 1$ 上のパラメータ t を持つ解析面片とし, $f(P, t) = 0$, $P \in V$ なる形で与えられているとする. ここで V は $V \Subset \mathfrak{D}$ なる或る領域, $f(P, t)$ は $(V, [0, 1])$ の近傍における (P, t) の正則函数で, 恒等的には零にならない[48]ものである. そうすると H と族 $\{\sigma_t\}$ は次のような関係になることはできない.

1° H とすべての σ_t の境界との $\mathfrak{D}$ 上の距離は或る正の数より大きい.
2° E とすべての σ_t との $\mathfrak{D}$ 上の距離は或る正の数より大きい.
3° σ_0 は H の点を通り, σ_1 は H からの距離が正の位置にある.

[47] $\mathfrak{D}$ における, E を含む最小の閉集合

[48] 固定された t に対し, P に関して.

矛盾に導くために, このような族 $\{\sigma_t\}$ が実際に存在したと仮定する. $(H,[0,1])$ の近傍において $[f(P,t)]^{-1}$ を極に持つ有理型函数 $G(P,t)$ を作ろう. 第 1 条件によりこれは Cousin 第 1 問題であり, H は $\mathfrak{D}$ に関して外的正則凸状である. したがって, 定理 II によりそれは可能である.

t が 区間 $[0,1]$ の上を 0 から 1 へ動いたとき, σ_t が H と交わる最後の t の値を α とする. 第 3 条件により, α は確かに存在する. M を σ_α が通る H の点とする. (M,α) は $G(P,t)$ の極 (不定点ではない) であるから, t が開区間 $(\alpha,1)$ 上を α に近づくと $G(M,t)$ の絶対値は限りなく大きくなる. 他方, 第 2 条件により, P が E の近傍にあれば, $G(P,t)$ は正則に留まる. したがって β を $(\alpha,1)$ 上, α の十分近くに取ると, $\max|G(E,\beta)|<|G(M,\beta)|$ が得られる. ここで左辺は $|G(P,\beta)|$ の E における上限を意味する.

$G(P,\beta)$ は H の近傍では正則であるから, 定理 I により, $G(P,\beta)$ を, H では一様収束する, $\mathfrak{D}$ で正則な函数の, 級数に展開することができる. したがって $\mathfrak{D}$ における正則函数 $\Phi(P)$ を $\max|\Phi(E)|<|\Phi(M)|$ となるように見つけることができる. これは H が最小であることに反する. したがって族 $\{\sigma_t\}$ は存在しない.

この原理を補題 I の状勢に応用して, 次の結果が得られる：

$\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の擬凸状領域, $\varphi(P)$ を $\mathfrak{D}$ における次の条件を満たす擬凸状函数とする

1° $\varphi(P)$ は性質 (P_1) を持つ.
2° $\mathfrak{D}_\alpha$ を $\varphi(P)<\alpha$ (α は任意の実数) で与えられる $\mathfrak{D}$ の点の集合とするとき, $\mathfrak{D}_\alpha \Subset \mathfrak{D}$ である.

この状勢の下で, もし或る定められた実数 β に対して $\mathfrak{D}_\beta$ が正則凸状なら, $\alpha<\beta$ なるすべての $\mathfrak{D}_\alpha$ は $\mathfrak{D}_\beta$ に関して正則凸状である. さらに $\mathfrak{D}$ 自身が正則凸状なら, すべての $\mathfrak{D}_\alpha$ は $\mathfrak{D}$ に関して正則凸状である[49].

これを示すためには, 第 2 の部分を証明すれば十分である. $\mathfrak{D}$ は正則凸状とし, Δ_α を $\varphi(P)\le\alpha$ で与えられる点集合とする. そうすると $\Delta_\alpha \Subset \mathfrak{D}$ であるから Δ_α の $\mathfrak{D}$ に関する (H)–閉包が存在する. それを H と表す. 矛盾に導くため $H\neq\Delta_\alpha$ と仮定する. $\max\varphi(H)=\beta$ と置くと, $\beta>\alpha$ である. P_0 を H 上の $\varphi=\beta$ なる点とする. 性質 (P_0) を持つ擬凸状函数は主性質を持つ (No. 16) という定理の証明法を思い出そう. [訳注. 定理では一つの解析面の存在しか言っていない. それでその証明を思い出す必要がある.] そうすると P_0 の近傍で今設定した状況が矛盾であることは容易に分かる. したがって $H=\Delta_\alpha$ である. これはすべての α に対してそうであるから, $\mathfrak{D}_\alpha$ は $\mathfrak{D}$ に関して正則凸状である[50].

[49] $\varphi(P)$ の 1 番目の条件は必要ではない. (その証明は容易である.)
[50] 同じ考え方により, 今の場合に対する第 II 論文の定理 I は, 第 VIII 論文 [訳注. 幾何

31. 問題の解決. 補助問題に戻ろう. 次の注意をする：

$\ll$ 補助問題における Δ に対しては, Δ で与えられた Cousin 第 1 問題は常に解ける.$\gg$

実際, $\mathfrak{D}_3$ は $\mathfrak{D}_1$ に関して正則凸状であり, $f_j(P)\,(j=1,2,\ldots,\nu)$ は $\mathfrak{D}_3$ における正則函数であるから, 定理 I により, $f_j(P)$ を $\mathfrak{D}_3$ の完全内部で一様収束するような $\mathfrak{D}_1$ での正則函数の級数に展開することができる. したがって Δ の $u<a_2$ 上の部分は正則凸状である. 同様に $a_1<u$ 上の部分もそうである. Δ に Cousin 第 1 問題が与えられたとする. 定理 II により, この問題は Δ の $u<a_2$ 上の部分に対して, および $a_1<u$ 上の部分に対しては解ける. 補助問題はすべて解けるから, 与えられた Cousin 第 1 問題は Δ に対して解ける.

どのようにして Δ_0 が作られるかを考えよう. 空間 (x) 上に, 二つの部分 $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ が共に正則凸状であるような 領域 $\mathfrak{D}$ を考える. すべての正則凸状域は, 擬凸状領域の増大列の極限として, 擬凸状であるから, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, したがって $\mathfrak{D}$ は擬凸状である. そうすると $\mathfrak{D}$ に補題 I を応用することができ, 次のことが分かる. すなわち $\mathfrak{D}$ において性質 (P_1) を持ち, すべての実数 α に対し, $\varphi(P)<\alpha$ で与えられる $\mathfrak{D}$ の点集合 $\mathfrak{D}_\alpha$ は $\mathfrak{D}_\alpha \Subset \mathfrak{D}$ であるような擬凸状函数 $\varphi(P)$ が存在する. $\mathfrak{D}_\alpha$ の $u<a_2$ 上の部分を $\mathfrak{D}'_\alpha$ と表し, その $a_1<u$ 上の部分を $\mathfrak{D}''_\alpha$ と表す. そうすると次のことが言える：

$\ll$ $\mathfrak{D}'_\alpha$ は $\mathfrak{D}_1$ に関して正則凸状である. $\mathfrak{D}''_\alpha$ に関しても同様である.$\gg$

実際, $\alpha'<\alpha,\ a'_2<a_2$ なる実数 α', a'_2 を取り, $\varphi(P)\le\alpha',\ u\le a'_2$ で与えられる $\mathfrak{D}_1$ の点集合 F を考える. ($F\supset O$ と仮定する.) $F\Subset\mathfrak{D}_1$ であり, $\mathfrak{D}_1$ は正則凸状だから, $\mathfrak{D}_1$ に関する F の (H)–閉包 H が考えられ, 前節に述べた証明法により $F=H$ であることが分かる. したがって $\mathfrak{D}'_\alpha$ は $\mathfrak{D}_1$ に関して 正則凸状である. 全く同様にして $\mathfrak{D}''_\alpha$ は $\mathfrak{D}_2$ に関して正則凸状である.

$\mathfrak{D}_\alpha$ に対してこのようであり, $\mathfrak{D}_\alpha$ は有界だから, $\mathfrak{D}_\alpha$ の中に Δ_0 を作ろう. そのため, 共通部分 $\mathfrak{D}'_\alpha\cap\mathfrak{D}''_\alpha$ における正則函数 $f_j(P)$ $(j=1,\ldots,\nu)$ で, 条件 (C) (No. 27) を満たすものを見つけることが問題である. その条件をよく見よう. (S_1), (S_2) を それぞれ $\mathfrak{D}'_\alpha\cap\mathfrak{D}''_\alpha$ における正則函数の有限個の系とし, (S_1) は第 1 と第 2 の条件を満たし, (S_2) は第 2 と第 3 の条件を満たすと仮定する. そうすると 和 $(S_1)\cup(S_2)$ は三つの条件を満たすことが分かる. それでそのように条件を分離して作ればよい.

系 (S_2) を作ることから始めよう. $\mathfrak{D}_1$ は 正則凸状であるから, $\mathfrak{D}_1$ における有限個の正則函数の系 (S) で, $\mathfrak{D}_\alpha$ に対して第 3 の条件を満たすもの

学的不定域イデアルの擬底の存在.] を用いることなく, 簡単に証明できる.

を見つけることができる. (S) を $\mathfrak{D}_\alpha$ に対して第 2 の条件を満たすようにするためには (S) のすべての函数に十分小さい数を掛けさえすればよい.

(S_1) については, P_0 を集合 $\varphi(P)=\alpha$, $u=0$ の任意の点とすると, P_0 の近傍で P_0 を通り, P_0 以外は $\varphi(P)>\alpha$ の部分にあるような解析面 σ_0 を描くことができる. $f(P)=0$ を σ_0 の方程式とする. $f(P)$ は正則函数である. β を α より大きい実数とし, $\mathfrak{D}_\beta$ の $u<a_2$ 上の部分で, 極 $[f(P)]^{-1}$ を持つ有理型函数 $G(P)$ を作ろう. $\mathfrak{D}_\beta$ のその部分は正則凸状だから, 定理 II により, β を十分 α の近くに選べばそれは可能である. 新たに a_2 として, 前のものより少し小さい実数を取る. そうすると $G(P)$ は $\mathfrak{D}'_\alpha$ において正則であり, $\mathfrak{D}'_\alpha$ の近傍で有理型である. 点集合 $\mathfrak{D}'_\alpha$ の境界上では P_0 のみが極である. P_0 はこの集合の任意の点であるから Borel の補題により 容易に (S_1) を見つけることができる. 我々がしてきた論法を思い出せば, 次のことが分かる.

$\ll$ α, α' を $\alpha'<\alpha$ なる, 任意の二つの実数とするとき, $\mathfrak{D}_\alpha$ における Δ_0 を $\Delta_0 \Supset \mathfrak{D}_{\alpha'}$ となるように作ることができる. $\gg$

これは $\mathfrak{D}_1$ と $\mathfrak{D}_2$ が正則凸状であるという仮定の下で成り立つ. 同じ条件の下で次のことを示そう：

$\ll$ $\mathfrak{D}_\alpha$ は正則凸状である.$\gg$

先ず, $\mathfrak{D}_\alpha$ に, $\mathfrak{D}_\alpha$ の異なる点の対のすべてで異なる函数要素を持つ函数 $f_0(P)$ が存在するという第 1 条件を確かめる. P_1, P_2 を同じ座標を持つ, それ以外は任意の $\mathfrak{D}_\alpha$ の異なる点の対とし, $\mathfrak{D}_\alpha$ における正則函数 $f(P)$ で, $f(P_1)\neq f(P_2)$ となるものを作ろう. ここで H. Cartan の方法を応用する[51]. (x^0) を P_1 と P_2 の共通の座標とする. (x^0) は $u<a_2$ または $a_1<u$ の少なくとも一方に属している. それで視点を定めるため, $u<a_2$ にあるとする. $\mathfrak{D}_1$ は正則凸状であるから $\mathfrak{D}_1$ における正則函数 $\psi(P)$ で $\psi(P_1)\neq\psi(P_2)$ となるものをが存在する. 先に見たことから, $\mathfrak{D}_\alpha$ で $\psi(P)(x_1-x_1^0)^{-1}$ を極とする $\mathfrak{D}_\alpha$ における有理型函数 $G(P)$ を見つけることができる. そこで $f(P)=(x_1-x_1^0)G(P)$ と置く. そうすると $f(P)$ は $\mathfrak{D}_\alpha$ で正則で, その $x_1-x_1^0=0$ 上の値は $\psi(P)$ であるから, それは求める函数である. このようにして所期の函数 $f_0(P)$ を容易に作ることができる.

第 2 の条件に移ろう. それは $\Delta \Subset \mathfrak{D}_\alpha$ なるすべての領域 (連結または非連結) Δ に対して $\Delta\subseteq\Delta'\Subset\Delta''\subseteq\mathfrak{D}_\alpha$ なる二つの領域 (連結または非連結) Δ', Δ'' があって $\Delta''-\Delta'$ のすべての点 P_0 に対し $|f(P_0)|>\max|f(\Delta)|$ を満たす $\mathfrak{D}_\alpha$ に於ける正則函数 $f(P)$ が対応するというのである. ところ

[51] Cousin の第 1 問題の応用法. 第 I 論文の 2 節 2° の脚注を見よ.

で, $\varphi(P_0)=\alpha$ なる $\mathfrak{D}_\alpha$ のすべての点 P_0 に対し, $\mathfrak{D}_\alpha$ で正則な函数 $G(P)$ で, $\mathfrak{D}_\alpha$ の近傍で有理型であって, $\varphi(P)=\alpha$ 上では P_0 のみを唯一の極 (不定点ではなく) とするものが見つけられる. このことから $\mathfrak{D}_\alpha$ が第 2 の条件を満たすことが直ちに分かる. (ここでは常に $\Delta''=\mathfrak{D}_\alpha$ と取ることができる.)

次に $\mathfrak{D}$ は空間 (x) 上の 擬凸状 領域とする. 補題 I の状勢の下で次のことを見よう :

(α) $\ll$ もし, すべての $\mathfrak{D}_\alpha$ が正則凸状なら, $\mathfrak{D}$ もまた正則凸状である.$\gg$

実際, 前節の終わりに見たことから, もし $\alpha<\beta$ なら $\mathfrak{D}_\alpha$ は $\mathfrak{D}_\beta$ に関して正則凸状であり, したがって定理 I により $\mathfrak{D}_\alpha$ におけるすべての正則函数は, $\mathfrak{D}_\alpha$ の完全内部で一様収束する, $\mathfrak{D}_\beta$ で正則な函数の級数に展開することができる. $\alpha_p\,(p=1,2,\ldots)$ を $\alpha_p<\alpha_{p+1}$ であって, 無限に大きくなる正の数の列とする. (α_1 を十分大きくとって $\mathfrak{D}_{\alpha_1}\supset O$ とする.) $f(P)$ を $\mathfrak{D}_{\alpha_2}$ における正則函数, ε を与えられた正の数とする.

$\ll$ $\mathfrak{D}$ における正則函数 $F(P)$ を $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ に対して $|F(P)-f(P)|<\varepsilon$ となるように $\gg$

作ろう. $\varepsilon_p\;(p=1,2,\ldots)$ を正の数の列で, $\sum\varepsilon_p$ は $<\varepsilon$ なる数に収束するものとする. 前のことから $\mathfrak{D}_{\alpha_3}$ における正則函数 $f_1(P)$ を $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ で $|f_1(P)-f(P)|<\varepsilon_1$ となるように見つけることができる. 同様にして $\mathfrak{D}_{\alpha_4}$ における正則函数 $f_2(P)$ を $\mathfrak{D}_{\alpha_2}$ で $|f_1(P)-f_2(P)|<\varepsilon_1$ となるように見つけることができる. このようにして $\mathfrak{D}$ の完全内部で一様収束する列 $f_2(P), f_3(P), \ldots$ が得られる. したがって極限 $F(P)$ は $\mathfrak{D}$ で正則であり, $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ に対して $|F(P)-f(P)|<\varepsilon$ である.

これができたので, $\mathfrak{D}$ が正則凸状であることの第 1 条件を調べよう. P_1, P_2 を同じ座標を持つ $\mathfrak{D}$ の任意の異なる点の対とする. α_1 を十分大きく取ると $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ はそれらの点を含む. $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ は正則凸状であるから $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ における正則函数 $f(P)$ で $f(P_1)\neq f(P_2)$ となるものが存在する. ε を $|f(P_1)-f(P_2)|>2\varepsilon$ となるように選ぶ. $F(P)$ を上に示したような f と ε に対応する函数とする. $F(P)$ は $\mathfrak{D}$ で正則で, $F(P_1)\neq F(P_2)$ である. したがって $\mathfrak{D}$ の異なるすべての点の対に対して異なる函数要素を持つような, $\mathfrak{D}$ における正則函数を作ることができる.

第 2 条件を調べよう. Δ を $\Delta\Subset\mathfrak{D}$ なる, それ以外は任意の領域とする. 十分大きな α_1 に対して $\Delta\Subset\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ である. $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ は $\mathfrak{D}_{\alpha_2}$ に関して正則凸状だから, $\Delta\subseteq\Delta'\Subset\Delta''\subseteq\mathfrak{D}_{\alpha_2}$ なる二つの領域 (連結または非連結) Δ', Δ'' があって, $\Delta''-\Delta'$ のすべての点 P_0 に対し $|f(P_0)|>\max|f(\Delta)|$ を満たす

$\mathfrak{D}_{\alpha_2}$ に於ける正則函数 $f(P)$ が対応する. ε を $|f(P_0)| - \max|f(\Delta)| > 2\varepsilon$ なるように選ぶ. $F(P)$ を上に示したような f と ε に対応する函数とする. $F(P)$ は $\mathfrak{D}$ で正則で, $|F(P_0)| > \max|F(\Delta)|$ である. 二つの条件はこのように満たされるので, $\mathfrak{D}$ は正則凸状でる.

この二つの中間結果を結んで次の結果が得られる.

(β) $\ll \mathfrak{D}$ を $\mathfrak{D}_1$ と $\mathfrak{D}_2$ が正則凸状であるような領域とすると, $\mathfrak{D}$ も正則凸状である. $\gg$

今度は $\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の擬凸状領域とする. P_0 を集合 $\mathfrak{D}_\alpha$ の任意の境界点とする. No. 16 の定理, すなわち性質 (P_0) を持つすべての函数は主性質を持つことの証明法より, $\mathfrak{D}_\alpha$ と P_0 を中心とする十分小さい多円筒近傍との交わりは正則凸状であることが分かる. したがって (β) により $\mathfrak{D}_\alpha$ が, さらに (α) により $\mathfrak{D}$ が正則凸状であることが分かる. これをまとめて, 次の定理が得られた. [訳注. 14]

定理 III. 空間 (x) 上の, 有限で分岐点を持たないすべての擬凸状領域は正則凸状である.

このことから直ちに正則凸状域または解析多面体の定義の中で第 1 条件は第 2 条件よりの帰結であることが導かれる.

32. 擬凸状領域と正則域.

系. 空間 (x) 上のすべての有限で不分岐な擬凸状領域は正則域である.

実際, $\mathfrak{D}$ を空間 (x) の擬凸状領域とする. 定理 III により $\mathfrak{D}$ は正則凸状である. したがって $\mathfrak{D}$ の異なる点のすべての対で異なる函数要素を持つ, $\mathfrak{D}$ で正則な函数 $F_1(x)$ が存在する. $\mathfrak{D}$ における正則函数 $F_2(x)$ で, $\mathfrak{D}$ のどの境界点を越えても解析接続できないものが存在すると仮定する. そして c を或る定数として $F(P) = F_1(P) + cF_2(P)$ を考える. c を適当に選べば, F は F_1 と F_2 の性質を共に保存する. (このためには c に対して高々可算個の数を避けさえすればよい. [訳注. 15]) したがって函数 $F_2(x)$ を作ればよい.

領域 $\mathfrak{D}$ は正則凸状であるから, $\Delta_p \Subset \Delta_{p+1}$ なる解析多面体の列 Δ_p $(p = 1, 2, \ldots)$ の極限である. 各 Δ_p は

$$|f_j(P)| \leq 1, \quad P \in \mathfrak{R}_p \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

なる形で表されている. ここで $f_j(P)$ は $\mathfrak{D}$ における (p に依存する) 正則函数であり, $\mathfrak{R}_p$ は $\mathfrak{D}$ の部分領域 (連結または非連結) で $\mathfrak{R}_p \Supset \Delta_p$ である. (ν は p に依存する.)

$\mathfrak{D}$ の境界点に関して, 次のような $\mathfrak{D}$ の点の列 Q_p $(p=1,2,\ldots)$ を選ぶことができる.

1° $Q_p \in (\mathfrak{R}_p - \Delta_p)$.
2° $\mathfrak{D}$ のすべての境界点は Q_p $(p=1,2,\ldots)$ の部分列で表現することができる. [訳注. 16]

ε_p $(p=1,2,\ldots)$ を, 和 $\sum \varepsilon_p$ が収束するような正の数の列とする. すべての Q_p に対し, 正則函数 $f_j(P)$ が対応し, それを新たに $\varphi_p(P)$ と表して, $\varphi_p(Q_p)=a_p$ とすれば, $|a_p|>1$ であり, Δ_p では $|\varphi_p(P_p)| \leq 1$ となるようにする. $\psi_p(P)=[\varphi_p(P)-a_p]^p$ と置く. σ_p を $\mathfrak{D}$ において $\varphi_p(P)=a_p$ で与えられる解析面とする. σ_p は Q_p を通る. $\psi_p(P)$ は $\mathfrak{D}$ における正則函数で, σ_p では p 位の零を取り, Δ_p では零にならない.

定理 I により, $\mathfrak{D}$ における正則函数 $\chi_p(P)$ を, Δ_p では

$$\left|\frac{1}{\psi_p(P)} - \chi_p(P)\right| < \frac{\varepsilon_p}{|\psi_p(P)|}$$

となるように見つけることができる.

$$F_2(P) = \prod [\psi_p(P) \cdot \chi_p(P)] \qquad (p=1,2,\ldots)$$

と置く. Δ_p では

$$|\psi_p(P) \cdot \chi_p(P) - 1| < \varepsilon_p$$

だから, この無限乗積は $\mathfrak{D}$ の完全内部で絶対一様に収束する. したがって, 極限函数 $F_2(P)$ は $\mathfrak{D}$ で正則であり, その零は因子 $(\psi_p\chi_p)$ の零の和で与えられる. $F_2(P)$ は任意の p に対し Q_p を通る解析面 σ_p で少なくとも p 位の零になる. したがって $F_2(P)$ は $\mathfrak{D}$ の境界点を越えて解析接続することはできない. したがって $\mathfrak{D}$ は正則域である.

C. 他の諸問題.

33. Cousin の第 2 問題. Cousin の第 2 問題に対しては, 元の形と一般性を保存するとき, この論文の場合が最後である. 実際, 無限遠点を導入すれば, 一般には正則函数による解が存在しないことは明らかであり, 非超越的分岐点を許せば, 前の論文で注意したように, 領域上の解析面による零の分布は, 一般には局所的にすら, 一個の正則函数の零点集合ではない.

Hartogs の逆問題が解けているので, この問題は正則凸状域について論じればよい.

この問題は第 III 論文で有限単葉領域に対して取り扱った. そこでは一口に言って, 補助概念を得るために問題自身を連続函数の分野にまで拡張

し, それを使って次のような結論を示した. すなわち, もし非解析解が存在すれば解析解もまた存在する. ここで拡張するのもこの結果である.

一般化した概念を今の場合に則して短く繰り返そう. $\mathfrak{D}$ を空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 上の (有限不分岐) 領域とし, P を $\mathfrak{D}$ の任意の点とする. $f_1(P)$, $f_2(P)$ を $\mathfrak{D}$ 上の二つの連続函数[52]とするとき, もし $\mathfrak{D}$ で恒等的に $f_1(P) = \lambda(P) f_2(P)$ となる零を取らない連続函数 $\lambda(P)$ が存在するなら, f_1 と f_2 は $\mathfrak{D}$ で<u>同等</u> $(f_1 \sim f_2)$ であると言う. $\mathfrak{D}$ に対して $f_1 \sim f_2$ のとき, もし零点の集合が内点を持たなければ, $\lambda(P)$ は<u>一意的</u>に定まる. しかしそうでないと, $\lambda(P)$ は定まらない. 其処から未知の現象 (phénomènes étranges) が生じる. したがって以下, <u>常にこの場合 (連続函数が或る点の近傍で恒等的零になる) を除外する</u>.

$\mathfrak{D}$ の任意の点 P_0 に対し, P_0 を中心とする多円筒近傍 γ と, γ における連続函数 $f(P)$ が与えられ, 隣接した γ のすべての対に対し, 対応する函数はその交わりの中で同等であるとする (同等条件). このとき, すべての γ 内で $F(P) \sim f(P)$ となるような, $\mathfrak{D}$ における連続函数 $F(P)$ を求めること. これが<u>一般化された Cousin の第 2 問題</u>である. もし函数 $F(P)$ が存在すれば $F(P)$ は $\mathfrak{D}$ に与えられた系 $\{(f, \gamma)\}$ (同等条件を満たす) で表される零 $(\mathfrak{z})$ を取ると言う.

Cousin の元の問題を一般化された問題と区別するため, <u>解析的零</u>, とか<u>解析解</u>とかいう言葉を用いる. そうでない場合にはしばしば<u>連続的零</u>, とか<u>非解析解</u>とかいう言葉を用いる. 領域 $\mathfrak{D}$ に解析的零が与えられたときは, 二つの問題が同時に生じたことになる.

領域 $\mathfrak{D}$ に零 $(\mathfrak{z})$ が与えられたとき, もし $\mathfrak{D}$ のすべての点 P_0 に対し, P_0 を中心とする多円筒近傍 γ と $P \in \gamma$, $0 \leq t \leq 1$ に対して定義された連続函数 $f(P, t)$ が対応し, 次の三つの条件を満たすなら, $(\mathfrak{z})$ は掃散可能であると言う：

1° $f(P, 0)$ は 零 $(\mathfrak{z})$ を持ち, $f(P, 1)$ は零を取らない.

2° $f(P, t)$ はいかなる実 $(2n + 1)$ 次元の部分でも恒等的零にはならない.

3° (f_1, γ_1), (f_2, γ_2) を $\{(f, \gamma)\}$ の任意の二つとし, $\delta = \gamma_1 \cap \gamma_2$ とするとき, もし $\delta \supset O$ なら $(P \in \delta,\ 0 \leq t \leq 1)$ に対して $f_1(P, t) \sim f_2(P, t)$ である.

領域 $\mathfrak{D}$ に零 $(\mathfrak{z})$ が与えられたとき, <u>もし $\mathfrak{D}$ における連続函数 $F(P)$ で零 $(\mathfrak{z})$ を持つものが存在するなら, $(\mathfrak{z})$ は $\mathfrak{D}$ に対して掃散可能でなければならない</u>. それを確かめるためには

$$f(P, t) = (1 - t)F(P) + t$$

[52]連続函数という言葉で、常に一価であると理解する.

を考えさえすればよい.

もし $\mathfrak{D}$ に与えられた零 $(\mathfrak{z})$ が掃散可能なら, 常に系 $\{(f(P,t),\gamma)\}$ を恒等的に $f(P,1)=1$ となるように選ぶことができる. またもし $(\mathfrak{z})$ が解析的なら, 常に $f(P,0)$ を正則であるように選ぶことができる.

この概念に関して, $\lambda(P)$ を $\mathfrak{D}$ における零を取らない連続函数とするとき, もし零を取らない $(\mathfrak{D},[0,1])$ における連続函数 $\lambda(P,t)$ で, $\mathfrak{D}$ のすべての点 P において $\lambda(P,0)=\lambda(P)$, $\lambda(P,1)=1$ となるものが存在するなら, $\lambda(P)$ は $\mathfrak{D}$ に対して 性質 (α) を持つと言う. 次の補題が得られる.

$\log\lambda(P)$ のすべての分枝が $\mathfrak{D}$ で一価になるためには $\lambda(P)$ が性質 (α) を持つことが必要十分である.

証明については, 何の修正も要らないので, 繰り返さない. [訳注. 第 III 論文を参照.]

我々は第 III 論文の結果を今の場合に拡張しようとしている所である. ところでこの状勢の下では第 II 論文の方法を採用するのが便利である. そのために (第 II 論文の) 定理 I を拡張しよう.

空間 (x) に閉多円筒 $C:|x_i|\le r_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ と C の近傍で定義された解析集合 Σ を考え, Σ_0 を Σ の C 上の部分とする. そうすると, Σ_0 は 空間 (x) に関して, (他の言い方をすれば, 多項式に関して) 外的正則凸状である.

これを確かめるために C の適当な近傍で定義された Σ に付随する幾何学的不定域イデアル $(\mathfrak{I})$ を考える. H. Cartan の定理によって $(\mathfrak{I})$ は局所擬底を持つ (第 VIII 論文を見よ). したがって 第 VII 論文の定理 3 により, C の近傍における擬底を持つ. このことから上の補題が導かれる. [訳注. 擬底の各々を多項式で近似すればよい.]

定理 IV. 空間 (x) 上の有限不分岐な擬凸状領域 $\mathfrak{D}$ に解析的な零 $(\mathfrak{z})$ が与えられたとき, もし非解析解が存在するなら解析解もまた存在する.

実際, 非解析解が存在するなら $(\mathfrak{z})$ は掃散可能だから, $(\mathfrak{z})$ に関する上記の条件を満たす系 $\{(f(P,t),\gamma)\}$ が存在する. ここですべての $f(P,0)$ は正則であり, すべての $f(P,1)$ は定数 1 であると仮定する.

領域 $\mathfrak{D}$ は $\Delta_p \Subset \Delta_{p+1}$ となる解析多面体の列 $\Delta_p\ (p=1,2,\ldots)$ の極限として表され, 各 Δ_p はいつもの意味で

$$|x_i|\le r_i,\quad |g_j(P)|\le 1,\quad P\in\mathfrak{R}\quad (i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,\nu)$$

の形で表される. ($g_j(P)$ は $\mathfrak{D}$ において正則である.) この多面体 Δ_p に対して補題 II の状況を考えると, 空間 $(x_1,\ldots,x_n,\,y_1,\ldots,y_\nu)$ に C,Σ,V

が得られる (No. 24). すでに見たように, Δ_p に正則函数 $\varphi(P)$ が与えられると, それは V で定義されていると見なすことができる. [訳注. (y) に関して定数と考える.] 同じ方法で, 掃散可能な零 $(\mathfrak{z}$ およびそれに対応する系 $\{(f(P,t),\gamma)\}$ も V で定義されていると見なすことができる. この V は, それが Σ の十分近くにあれば, 上の補題から, 空間 (x,y) に関して正則凸状である. したがって, 第 III 論文 (No. 8) で見たことから, そこで示された性質を持つ特殊解が得られる. この解に $y_j=g_j(P)$ $(j=1,2,\ldots,\nu)$ を代入して Δ_{p-1} $(p>1)$ に対する特殊解が得られる.

このように, すべての Δ_p に対して函数 $F_p(P,t)$ が得られ, それらは $[P\in\Delta_p,\, 0\le t\le 1]$ で連続で, $F_p(P,0)$ は Δ_p における正則函数であって, 恒等的に $F(P,1)=1$ であり, $[P\in\gamma,\, 0\le t\le 1]$ に対して $F_p(P,t)\sim f(P,t)$ である. このことから定理が得られる. その証明は第 III 論文のそれ (No. 9) と逐語的に同じであるので繰り返さない.

一般化された問題に対する同じ証明法を応用して容易に次の判定条件を得ることができる.

一般化された Cousin 第 2 問題が解けるためには, 与えられた零が掃散可能であることが必要十分である.

43. 問題 ($\mathbf{C}_1$), ($\mathbf{C}_2$), (E), 不完全解. 第 VII 論文の方針にしたがって, 問題 (C_1), (C_2), (E) に第 I 論文の方法を応用しよう.

第 I 章で一般化した問題 (C_1) から始める.

(α) ≪ 解析多面体 Δ の近傍で函数方程式

$$(1) \qquad \Phi_i=\sum A_j F_{ij} \qquad (i=1,2,\ldots,p;\, j=1,2,\ldots,q)$$

が与えられたとする. ここで Φ_i, F_{ij} は定まった正則函数を表し, A_j は未知函数を意味する. もしこの方程式が Δ の近傍でいたるところ局所解を持つなら, Δ の近傍で (大域的な) 解を持つ.≫

それを示すため, Δ はいつものように

$$|x_i|\le r_i,\quad |g_j(P)|\le 1,\quad P\in\mathfrak{R} \qquad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,\nu)$$

の形で与えられていると仮定し, 空間 (x,y) における閉多円筒：

$$C\ :\ |x_i|\le r_i,\quad |y_j|\le 1 \qquad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,\nu)$$

と

$$\Sigma\ :\ y_j=g_j(P),\quad P\in\mathfrak{R} \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

で定義される解析集合を考える. この状況の下で補題 II により, C の近傍における正則函数 $G_{kl}(x,y)$, $\Psi_k(x,y)$ $k=1,2,\ldots,p;\ l=1,2,\ldots,q)$ を

Σ 上で $G_{kl} = F_{kl}$, $\Psi_k = \Phi_k$ となるように見つけることができる. $(\mathfrak{I}_0)$ を C の近傍で定義された Σ に付随する幾何学的 (不定域) イデアルとし, $(H_1, H_2, \ldots, H_\lambda)$ を $(\mathfrak{I}_0)$ の C の近傍における擬底とする.

C の近傍における函数方程式

$$(2) \qquad \Psi_i = \sum A_j G_{ij} + \sum B_{ik} H_k$$
$$(i=1,2,\ldots,p;\ j=1,\ldots,q;\ k=1,2,\ldots,\lambda)$$

を考える. A_j, B_{ik} は未知函数である. 方程式 (1) は Δ の近傍のすべての点で局所解を持つから, 方程式 (2) は C の近傍でそうである. [訳注. 17] したがって No. 4 で見たことから, 方程式 (2) を満たす, C の近傍で正則な函数 A_j, B_{ik} を見つけることができる. このことから $y_l = g_l(P)$ $(l=1,2,\ldots,\nu)$ を代入して, 求める結果が導かれる.

問題 (C_2) について.

(β) $\ll$ Δ を空間 (x) 上の解析多面体, $F_1(P), F_2(P), \ldots, F_\mu(P)$ を Δ の近傍における正則函数の系とする. Δ の近傍のすべての点 P_0 に対し, P_0 を中心とする多円筒近傍 γ と, γ で定義された正則函数 $\varphi(P)$ が対応し, 多円筒近傍のすべての対 (γ_1, γ_2) に対し, 対応する函数 φ_1, φ_2 は共通部分 $\gamma_1 \cap \gamma_2$ のすべての点で $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \mod (F)$ とする. このとき, 正則函数 $\Phi(P)$ を, 任意の γ の任意の点で $\Phi \equiv \varphi(P) \mod (F)$ となるように見つけることができる.$\gg$

実際, 同じ状況の下で, $G_i(x,y)$ $(i=1,2,\ldots,\mu)$ を Σ 上 $G_i = F_i$ となるような C の近傍における正則函数とする. C の近傍における問題 (C_2) を次のように考える. C の近傍のすべての点 (x^0, y^0) に対して函数 $\psi(x,y)$ を対応させる. もし (x^0, y^0) が Σ の点なら ψ は Σ 上で値 φ を取るものとし, そうでなければ ψ は任意に取る. この状況の下で, H を上記の擬底として, C の近傍における正則函数 $\Psi(x,y)$ を, すべての点 (x^0, y^0) で $\Psi \equiv \psi \mod (G, H)$ となるように見つけること. これは明かに 問題 (C_2) であり, VII の定理 2 により, $\Psi(x,y)$ は存在する. $\Phi(P) = \Psi(x, g(P))$ と置く. そうすると $\Phi(P)$ は求める函数である.

次に $\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の領域とする. 順序対 (f, δ) を考える. ここで δ は $\mathfrak{D}$ の部分領域 (連結または非連結) を意味し, f は δ において定義された正則函数を表す. これらの (f, δ) について, 第 VII 論文と全く同様に $\mathfrak{D}$ 上のイデアル (不定域正則), イデアルの (有限) 擬底, 等々を定義することができる. これらは繰り返さない. 問題 (E) については, 次のことを見よう :

定理 V. 空間 (x) 上の有限不分岐擬凸状領域 $\mathfrak{D}$ に, $\mathfrak{D}$ のすべての点で局所有限擬底を持つ不定域イデアル $(\mathfrak{I})$ が与えられたとき, $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$ なるすべての領域 $\mathfrak{D}_0$ に対して $(\mathfrak{I})$ の有限擬底を見つけることができる.

これを確かめるため, ($\mathfrak{D}$ は擬凸状であるから) $\mathfrak{D}_0 = \Delta$ と仮定する. そして 命題 (α), (β) と同じ記号の下に, 補題 II のいつもの状況を考える.

V を C に十分近い近傍とする. (φ, δ') を順序対とする. δ' は空間 (x, y) における単葉な領域 (連結または非連結) を意味し, φ は δ' で定義された正則函数を表す. $\delta' \subseteq V$ とし, $[x, g(P)]$ を δ' 内の Σ の任意の点として, 函数 $\varphi[x, g(P)] = f(P)$ は局所的に $(\mathfrak{I})$ に属する様なものとして, (φ, δ') の集合 (J) を考える. (J) は 明かに V 内に定義された空隙点を持たないイデアルを作る.

P_0 を Δ の近傍の任意の点とし, $[f_1(P), f_2(P), \ldots, f_\mu(P)]$ を P_0 における $(\mathfrak{I})$ の擬底とする. (x^0) を P_0 の座標とし, M_0 を座標 $[(x^0), g(P_0)]$ を持つ Σ 上の点とする. $\varphi_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ を M_0 における正則函数で Σ 上 $\varphi_i = f_i$ となるものとすれば, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu, H_1, \ldots, H_\lambda)$ は明かに M_0 における (J) の擬底を与える. ((H) は上記の擬底を意味する.) Σ に属していない V の点では (J) は擬底 (1) を持つ. [訳注. 函数 1 のみよりなる系.] したがって, VII の定理 3 により (J) は C の近傍に対して (有限) 擬底を持つ. これに $y_j = g_j(P)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ を代入して定理が導かれる.

35. 合同の諸問題の完全解. 次の問題は擬凸状領域自身に関してこれらの問題を解くことである. 問題 (C_1), (C_2) に対しては以下に述べるようにそれは可能である.

定理 VI. 空間 (x) 上の有限不分岐な擬凸状領域 $\mathfrak{D}$ に函数方程式

$$(1) \qquad \Phi_i = \sum A_j F_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu; j = 1, 2, \ldots, \mu')$$

が与えられたとする. ここで Φ_i, F_{ij} は定まった正則函数を表し, A_i は未知函数を意味する. もしこの方程式が $\mathfrak{D}$ のいたる所で局所解を持つなら, $\mathfrak{D}$ で (大域的 な) 解を持つ.

実際, $\mathfrak{D}$ は $\Delta_p \Subset \Delta_{p+1}$ なる解析多面体の列 Δ_p $(p = 1, 2, \ldots)$ の極限として表され, 各 Δ_p は $\mathfrak{D}$ における正則函数によって表される. 中間結果 (α) により Δ_p の近傍に対する解 $(A_{p1}, A_{p2}, \ldots, A_{p\mu'})$ が存在する. これから 次のように別の解 (A'_p), を作ろう.

(A'_1) については $A'_{1i} = A_{1i}$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu')$ と置く.

(A'_2) を作るために $B_i = A_{2i} - A'_{1i}$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu')$ と置く. 系 (B) は Δ_1 の近傍で同次線形函数方程式

$$(2) \qquad B_1 F_{i1} + B_2 F_{i2} + \cdots + B_{\mu'} F_{i\mu'} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

を満たす.

$(\mathfrak{I}_1)$ を (B_1,δ) の集合であって, すべての (B_1,δ) に対して δ における方程式 (2) の解 $(B_1,B_2,\ldots,B_{\mu'})$ が対応するものとする. $(\mathfrak{I}_1)$ はイデアルであり, VII の定理 4 により, Δ_1 の近傍のすべての点における擬底を持つ. したがって定理 V により, $(\mathfrak{I}_1)$ は Δ_1 の近傍に対する擬底を持つ. 方程式 (2) は任意だから, このことから, 直ちに分かるように, 方程式 (2) は Δ_1 の近傍に対する形式解を持ち, [訳注. それを Π_{ij} として] それによって

$$B_i = \sum C_j \Pi_{ij} \quad (i=1,2,\ldots,\mu'; j=1,\ldots,\lambda)$$

なる形に書くことができる.

もう一度言うと, $B_i = A_{2i} - A'_{1i}$ $(i=1,2,\ldots,\mu')$ としたとき, 中間結果 (α) により, この函数系 (B) に対応して Δ_1 の近傍における函数系 (C) を, 恒等的に $B_i = \sum C_j \Pi_{ij}$ となるように見つけられると言うのである. ε_p $(p=1,2,\ldots)$ を正の数の列で $\sum \varepsilon_p$ は収束するものとする. 定理 I により $\mathfrak{D}$ における正則函数 $C'_j(P)$ を, Δ_1 で

$$\left| B_i - \sum C'_j \Pi_{ij} \right| < \varepsilon_1$$

となるように見つけられる.

$$A'_{2i} = A_{2i} - \sum C'_j \Pi_{ij}$$

と置く. A'_{2i} は Δ_2 の近傍で正則である. 系 (A'_2) は方程式 (1) を満たし, Δ_1 上で $|A'_2 - A'_1| < \varepsilon_1$ である.

同様にして (A'_3) を作り, それを続ける. 函数の列 A'_{pi} $(p=1,2,\ldots,)$ は $\mathfrak{D}$ の完全内部で一様収束する. A_i $(i=1,2,\ldots,\mu')$ をその極限函数とする. A_i は $\mathfrak{D}$ で正則で, 方程式 (1) を満たす.

定理 VII. $\mathfrak{D}$ を空間 (x) 上の有限不分岐な擬凸状領域とし,

$$F_1(P),\ F_2(P),\ \ldots,\ F_\mu(P)$$

を $\mathfrak{D}$ における正則函数の系とする. $\mathfrak{D}$ のすべての点 P_0 に対し, P_0 を中心とする多円筒近傍 γ と, γ で定義された正則函数 $\varphi(P)$ が対応し, 多円筒近傍のすべての対 (γ_1,γ_2) に対し, 対応する函数 φ_1, φ_2 は共通部分 $\gamma_1 \cap \gamma_2$ のすべての点で $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \mod (F)$ を満たすとする. このとき, $\mathfrak{D}$ における正則函数 $\Phi(P)$ を, 任意の γ で $\Phi \equiv \varphi(P) \mod (F)$ となるように見つけることが常にできる.

実際, $\mathfrak{D}$ を列 Δ_p $(p=1,2,\ldots)$ の極限とみなし, 中間結果 (β) によって Δ_p の或る近傍における解 $\Phi_p(P)$ が得られる. (定理 VI により γ のす

べての点で $\Phi\equiv\varphi$ であることと, γ で $\Phi\equiv\varphi$ であることとは同じであるから.) ε_p $(p=1,2,\ldots)$ をその和が収束するような正の数の列とし, 新たな解の列 Φ'_p $(p=1,2,\ldots)$ を逐次的に作ろう. 先ず $\Phi'_1(P)=\Phi_1(P)$ とする.

$p=2$ に対して, $\Psi_1=\Phi_2(P)-\Phi'_1(P)$ と置く. Ψ_1 は Δ_1 の近傍で正則函数であり, 定理 VI により, A_{i1} を Δ_1 の近傍における正則函数として

$$\Psi_1=A_{11}F_1+A_{12}F_2+\cdots+A_{1\mu}F_\mu \qquad (i=1,2,\ldots,\mu)$$

である. 定理 I により, $\mathfrak{D}$ における正則函数 $A'_{1i}(P)$ $(i=1,2,\ldots,\mu)$ を Δ_1 で

$$\left|\sum A'_{1i}F_i-\sum A_{1i}F_i\right|<\varepsilon_1$$

となるように見つけることができる.

$$\Phi'_2(P)=\Phi_2-\sum A'_{1i}F_i$$

と置く. $\Phi'_2(P)$ はまた Δ_2 の近傍における解であり, Δ_1 で $|\Phi'_2-\Phi'_1|<\varepsilon$ である.

同様にして函数列 Φ'_p $(p=1,2,\ldots)$ が得られ Φ'_p は Δ_p の近傍における解で, Δ_p で $|\Phi'_{p+1}-\Phi'_p|<\varepsilon_p$ である. この列は $\mathfrak{D}$ の完全内部で一様収束し, したがって極限 $\Phi(P)$ は $\mathfrak{D}$ における正則函数であり, すべての γ で恒等的に $\Phi(P)\equiv\varphi(P) \mod (F)$ を満たす.

36. 問題 (E) **と反例.** 問題 (E) については, 空間 (x) 上の (有限不分岐) 擬凸状領域に対して解けるとは限らない. その実例はすでに幾何学的不定域イデアルにおいて見つることができる.

例. 空間 (x_1,x_2,y_1,y_2) において $\nu\geq 3$ なる整数 ν を取り, 次の四つの函数 :

$$F_1=y_1^\nu-x_1^{\nu-1},\ F_2=y_2^\nu-x_2^\nu x_1,\ F_3=y_1y_2-x_1x_2,\ F_4=x_1^{\nu-2}+x_2^\nu$$

を考え, $F_1=F_2=F_3=F_4=0$ で定義される解析集合を Σ と表し, 空間 (x_1,x_2,y_1,y_2) で定義された Σ に付随する幾何学的不定域イデアルを $(\mathfrak{I}_0)$ で表す. イデアル $(\mathfrak{I}_0)$ の原点におけるいかなる擬底も, そのエレメントの個数は $\geq\nu-1$ であることを示そう.

矛盾に導くため, $\rho=\nu-2$ として, イデアル $(\mathfrak{I}_0)$ は原点で擬底

$$[\Phi_1(x,y),\ \Phi_2(x,y),\ \ldots,\ \Phi_\rho(x,y)]$$

を持つと仮定する. 空間 (x_1,x_2) 上に函数 $t=x_1^{1/\nu}$ のリーマン面 (複素 2 次元) を考え, それを $\mathfrak{R}$ と表す. P を $\mathfrak{R}$ の任意の点とし, (x_1,x_2) を P

の座標, t を P における $x_1^{1/\nu}$ の値とする. S を $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ で与えられた解析集合とし, M を S の任意の点とする. M の座標は何だろう.

$F_1=0$ だから 先ず $y_1=x_1^{(\nu-1)/\nu}=t^{\nu-1}$ が得られる. 次に $F_2=0$ からは $y_2=x_2x_1^{1/\nu}=\varepsilon x_2t$ が得られる. ここで ε は $\varepsilon^\nu = 1$ となる任意の数である. ところで, $F_3=0$ だから $x_1x_2=y_1y_2=\varepsilon x_2t^\nu=\varepsilon x_1x_2$ でなければならず, 実は $\varepsilon=1$ である. したがって M は $(x_1, x_2, t^{\nu-1}, x_2t)$ で与えられる. それで $\mathfrak{R}$ の点 $P\,(x_1, x_2, t)$ と S の点 M を結びつけると, その対応は 1 対 1 である.

(J_0) をイデアル $(\mathfrak{I}_0)$ の S 上への制限の $\mathfrak{R}$ への像とする. 詳しく言うと, $(\mathfrak{I}_0)=\{(f,\delta)\}$ として, δ' を δ の S 上への制限の $\mathfrak{R}$ への像とし, $f(x_1,x_2,t^{\nu-1},x_2t)=\varphi(t,x_2)=\varphi(P)$ としたとき, $(J_0)=\{(\varphi,\delta')\}$ である. 集合 (J_0) はどのような性格のものだろうか?

δ' を $\mathfrak{R}$ の任意の部分領域 (連結または非連結) とし, $\varphi(P)$ を δ' で定義された S に関して性質 (H) を持つ[53], それ以外は任意の正則函数とし, 順序対 (φ,δ') の集合を考えて, それを $(\mathfrak{O}_S)$ と表す. そして次の二つの条件を満たす $(\mathfrak{O}_S)$ の部分集合を $(\mathfrak{I})$ とする :

1° もし $(\varphi,\delta')\in(\mathfrak{I})$, $(\alpha,\delta'')\in(\mathfrak{O}_S)$ なら $\delta'\cap\delta''$ に対して $\alpha\varphi\in(\mathfrak{I})$ である.

2° もし $(\varphi_1,\delta_1)\in(\mathfrak{I})$, $(\varphi_2,\delta_2)\in(\mathfrak{I})$ なら, $\delta_1\cap\delta_2$ に対して $\varphi_1+\varphi_2\in(\mathfrak{I})$ である.

このとき $(\mathfrak{I})$ を $\underline{(\mathfrak{O}_S)\text{ 上のイデアル}}$ と呼ぶ.

そうすると, 上記の (J_0) は $(\mathfrak{O}_S)$ 上のイデアルである. さらに $F_4 = x_1^{\nu-2}+x_2^\nu = 0$ は重複因子を持たないから (J_0) は $\mathfrak{R}$ 全体で定義された $F_4=0$ に付随する幾何学的イデアルである (定義は同じ).

原点上の $\mathfrak{R}$ の点はただ一つである. それを P_0 と表す. P_0 における (J_0) の擬底は

$$\Phi_i(x_1,x_2,t^{\nu-1},x_2t)=\varphi_i(t,x_2)=\varphi_i(P)\quad(i=1,2,\ldots,\rho)$$

で与えられる. $\mathfrak{R}$ 上で次のような正則函数を考える.

$$f_i(t,x_2)=F_4t^{i-1}=(x_1^{\nu-2}+x_2^\nu)t^{i-1}\quad(i=1,2,\ldots,\rho+1)$$

すべての f_i は S に関して性質 (H) を持つ. 実際 S 上で

$$t^\alpha(x_1^{\nu-2}+x_2^\nu)=y_1^{\nu-\alpha}x_1^{\alpha-1}+y_2^\alpha x_2^{\nu-\alpha}\quad(\alpha=1,2,\ldots,\rho)$$

[53] ≪ φ は S に関して性質 (H) を持つ ≫ とは ≪ φ が, 局所的に空間 (x_1,x_2,y_1,y_2) における正則函数の S への制限の R への像である ≫ ことを意味する.

である.

さらに, この函数 $f_i(t,x_2)$ は $F_4=0$ 上で恒等的に零になる. したがってそれは $\mathfrak{R}$ に対して (J_0) に属する. したがって P_0 の近傍で

$$f_i = c_{i1}\varphi_1 + c_{i2}\varphi_2 + \cdots + c_{i\rho}\varphi_\rho \quad (i=1,2,\ldots,\rho+1)$$

と書ける. c_{ij} $(j=1,2,\ldots,\rho)$ は $(0,0)$ の近傍における (t,x_2) の正則函数で S に関して性質 (H) を持つ.

S に関して性質 (H) を持つ P_0 の近傍における正則函数 $f(P)$ を考え, それを $f(P)=f(t,x_2)$ とする. そうすると 空間 (x_1,x_2,y_1,y_2) の原点の近傍における正則函数 $F(x_1,x_2,y_1,y_2)$ で, 恒等的に $F(x_1,x_2,t^{\nu-1},x_2t)=f(t,x_2)$ となるものが存在する. したがって $f(t,x_2)$ を原点の周りで Taylor 展開して $x_2=0$ と置くと,

$$f(t,0) = a_0 + a_{\nu-1}t^{\nu-1} + a_\nu t^\nu + \cdots$$

でなければならない. $(a_0, a_{\nu-1}, a_\nu \ldots$ は定数).

函数 $\varphi_i(t,x_2)$ は $F_4=0$ 上で零でなければならないし, $F_4=0$ は重複因子を持たないから, それらは

$$\varphi_i(t,x_2) = (x_1^{\nu-2}+x_2^\nu)h_i(t,x_2)$$

の形でなければならない. $h_i(t,x_2)$ は正則函数である. したがって $t=0$ の近傍で

$$\begin{aligned}\varphi_i(t,0) &= x_1^{\nu-2}(A_{i1}+A_{i2}t+A_{i3}t^2+\cdots+A_{i\rho+1}t^\rho)+Bx_1^{\nu-2}t^{\rho+1}+\cdots\\ &= \psi_i(t)+Bx_1^{\nu-2}t^{\rho+1}+\cdots\end{aligned}$$

(ここで A_{ij} $(j=1,2,\ldots,\rho+1)$ と B は定数).

$$c_{ij}(t,0) = \gamma_{ij} + \delta_{ij\nu-1}t^{\nu-1} + \delta_{ij\nu}t^\nu + \cdots \qquad (i=1,2,\ldots,\rho+1;\ j=1,\ldots,\rho)$$

と置く. $\nu-1=\rho+1$ であり, さらに

$$f_i(t,0) = x_1^{\nu-2}t^{i-1} = c_{i1}(t,0)\varphi_1(t,0) + \cdots + c_{i\rho}(t,0)\varphi_\rho(t,0) \qquad (i=1,2,\ldots,\rho+1)$$

だから

$$x_1^{\nu-2}t^{i-1} = \gamma_{i1}\psi_1(t) + \gamma_{i2}\psi_2(t) + \cdots + \gamma_{i\rho}\psi_\rho(t)$$

でなければならない. $x_1^{\nu-2}t^{j-1}$ の係数を比較して

$$\gamma_{i1}A_{1j}+\gamma_{i2}A_{2j}+\cdots+\gamma_{i\rho}A_{\rho j}=\varepsilon_{ij} \qquad (i=1,2,\ldots,\rho+1;\ j=1,\ldots,\rho+1)$$

が得られる. ここで

$$\varepsilon_{ij}=1 \quad i=j \ \text{なら}, \qquad \varepsilon_{ij}=0 \quad i\neq j \ \text{なら}$$

である.

独立な複素変数 $z_1,z_2,\ldots,z_\rho$ によって

$$L_k(z)=A_{k1}z_1+A_{k2}z_2+\cdots+A_{k\rho}z_\rho \quad (k=1,2,\ldots,\rho)$$

を考えると, 恒等的に $\gamma_{\rho+1,1}L_1+\gamma_{\rho+1,2}L_2+\cdots+\gamma_{\rho+1,\rho}L_\rho=0$ が得られる. $\gamma_{\rho+1,1}A_{1,\rho+1}+\gamma_{\rho+1,2}A_{2,\rho+1}+\cdots+\gamma_{\rho+1,\rho}A_{\rho,\rho+1}=1$ だから, この内少なくとも一つの $\gamma_{\rho+1,k}$ $(k=1,2,\ldots,\rho)$ は零ではない. すなわち, $L_1,L_2,\ldots,L_\rho$ は1次従属である. 他方,

$$\gamma_{i,1}L_1+\gamma_{i,2}L_2+\cdots+\gamma_{i,\rho}L_\rho=z_i \qquad (i=1,2,\ldots,\rho)$$

だから $L_1,L_2,\ldots,L_\rho$ は一次独立でなければならない. これは矛盾である. したがって 原点における $(\mathfrak{I}_0)$ のすべての擬底の個数は $\geq\nu-1$ でなければならない.

今度は 空間 (x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) に

$$y_3=b_\nu, \quad F_i(x_1,x_2,y_1,y_2)=0 \qquad (i=1,2,3,4)$$

で与えられる解析集合 T_ν を考える. ここで ν は $\nu\geq 3$ なる正の整数であり, b_ν は定数, $F_i(x_1,x_2,y_1,y_2)=0$ は上述の函数を意味する. 点 $(0,\ldots,0,b_\nu)$ を含む領域で定義される T_ν に付随する幾何学的不定域イデアルに対し, その点における局所擬底のエレメントの個数は 常に $\geq\nu-1$ である.

空間 (x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) に多円筒

$$C\ :\ |x_i|<1, \quad |y_j|<1 \qquad (i=1,2;j=1,2,3)$$

を描き, 数列 $b_\nu=1-2^{-\nu}$ $(\nu=3,4,\ldots)$ を取って, C 内に解析集合 $T=T_3+T_4+\cdots$ を考え, C 内に定義された T に付随する幾何学的不定域イデアル $(\mathfrak{I}_1)$ を考える. 上に見たことから $(\mathfrak{I}_1)$ は C に対して如何なる有限擬底をも持たない ことは明らかである.

(1953年10月12日)

訳　注

[訳注. 1]　第 VIII 論文の基本補題を要約しておく.

(R) を 複素 n 変数 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の有限空間における或る解析函数 $f_1(x)$ の正則域の部分とし, $f_j(P)$ を (R) 上の正則函数, A_i, B_j を複素平面上の単連結な閉領域として,

$$x_i \in A_i \quad f_j(P) \in B_j, \quad P \in (R) \quad (i = 1, 2, \dots, n, \, j = 1, \dots, m)$$

なる形で与えられる解析多面体領域 Δ $(\Delta \Subset (R))$ を考え, 空間 $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ に閉筒状域 (A, B) と, 解析集合

$$\Sigma \;:\; y_j = f_j(P) \qquad (j = 1, \dots, m)$$

を考える.

$U(x, y)$ を (A, B) の近傍における正則函数で, Σ の特異点集合 S_0 上で恒等的に零 (Σ の上ではそうではない) になるものとすると, 正の整数 λ を十分大きく取れば, U^λ が (A, B) における Σ に関する (W) 函数となる.

u_0 を U^λ の Σ 上への制限の (R) 上への像とするとき, $u_0 = 0$ によって Δ に与えられる零による (Z) イデアル (I) は (A, B) の近傍で擬底を持つ. それを $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_\mu)$ と表す.

ここで A_i^0, B_j^0 を, それぞれ $A_i^0 \subset A_i$, $B_j^0 \subset B_j$ であるような単連結閉領域とし,

$$x_i \in A_i^0, \quad f_j(P) \in B_j^0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n; \, j = 1, \dots, m),$$

なる形で与えられる Δ の部分集合 Δ_0 を考え, u を Δ_0 の近傍における (R) 上の任意の正則函数とする. そうすると (A^0, B^0) の近傍における正則函数 $F(x, y)$ で, Σ 上で $F = u_0\, u$ となるものが存在する. この函数は (A^0, B^0) の各点で (I) に属する. したがって (A_0, B_0) の近傍における正則函数 A_i $(i = 1, 2, \dots, \mu)$ によって, 恒等的に

$$F = A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_2 + \cdots + A_\mu \Phi_\mu$$

と表される.

[訳注. 2]　H. Cartan のアイデアは次の通りである. $(C) : |y| \leq r$ として,

$$(1) \qquad I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta| = r} \frac{f(x, \eta)}{F(x, \eta)} \frac{F(x, \eta) - F(x, y)}{\eta - y} d\eta$$

を考える. この積分は

$$(2) \qquad I = f(x, y) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta| = r} \frac{f(x, \eta)}{(\eta - y) F(x, \eta)} d\eta \cdot F(x, y)$$

となる. 他方, (1) 式より

$$\frac{F(x,\eta)-F(x,y)}{\eta-y}=\sum_{j=1}^{\lambda-1}Q_j(x,\eta)y^j$$

と置いて

$$I=\sum_{j=1}^{\lambda-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta|=r}\frac{f(x,\eta)}{F(x,\eta)}Q_j(x,\eta)d\eta\right)y^j \tag{3}$$

となる. この (2) 式と (3) 式の積分は $\mathfrak{D}$ における正則函数であるから, これで剰余の定理は証明されている. さらに (C_0) : $|y|\leq r_0$ とすると, $|y-\eta|\geq r-r_0$ だから, 上記の式の積分を評価して所期の結果が得られる.

[訳注. 3] 一般な場合を説明しておく. (a) 式で A_{ij} の異なるものの全体を勝手な順序で 1 列に並べて B_j $(j=1,2,\ldots,r)$ とし,

$$f_i=B_1\Phi_{i1}+B_2\Phi_{i2}+\cdots+B_r\Phi_{ir}\quad(i=1,2,\ldots,q)$$

と置く. そして左辺が f_i の式で, 各 j に対し, B_j が $A_{i,k}$ $(k=1,2,\ldots,p)$ のどれか, 例えば $A_{i,k'}$ なら $\Phi_{ij}=F_{ik'}$ と定め, そうでなければ, $\Phi_{ij}\equiv 0$ と定めればよい.

[訳注. 4] 空間 (x) における領域 (連結または非連結) δ における p 個の正則函数の組 (f) と δ との対 $((f),\delta)$ の集合から, 不定域イデアルと同様に不定域モジュールとでも言うべきものを定義することができる. そうすると, 原文中の Δ における p 個の正則函数の r' 個の組

$$(\pi_{1j},\ldots,\pi_{pj})\qquad(j=1,\ldots,r')$$

はその不定域モジュールの擬底というべきものに相当する. 脚注参照.

[訳注. 5] Cousin 積分によって得られる正則函数の量的評価は次の通りである.

複素変数 $z=x+iy$ の平面で, $a,b,c\,(c<a)$ を或る正の数として二つの閉矩形領域

$$\begin{aligned}\Delta_1\ &:\quad -a\leq x\leq c,\qquad |y|\leq b\\ \Delta_2\ &:\quad -c\leq x\leq a,\qquad |y|\leq b\end{aligned}$$

を考え, $\Delta_3=\Delta_1\cap\Delta_2$, $L:x=0$, $|y|\leq b$ と置く.

$f(z)$ を Δ_3 における正則函数し, M を或る正の数として, 不等式 $|f(z)| \leq M$ を満たすと仮定し, Cousin 積分

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

を考える. さらに ρ を $c<\rho<a$, $\rho<b$ なる数とし, 新たに二つの閉矩形領域

$$\begin{aligned}
\Delta_1' \ &: \qquad -a+\rho \leq x \leq 0, \qquad & |y| \leq b-\rho \\
\Delta_2' \ &: \qquad 0 \leq x \leq a-\rho, \qquad & |y| \leq b-\rho
\end{aligned}$$

を考えて, $I(z)$ の Δ_1' および Δ_2' の部分をそれぞれ $f_1(z)$ および $f_2(z)$ とする. このとき不等式

$$|f_i(z)| \leq \frac{(b+\rho)M}{\pi\rho} \qquad (z \in \Delta_i',\ i=1,2)$$

が成り立つ.

[訳注. 6] 問題 (C_1) の解法の本質的な部分を, 単独方程式の形で述べておく.

隣接した二つの多円筒 λ_i $(i=1,2)$ の各々で

$$f = a_1^i F_1 + \cdots + a_\nu^i F_\nu$$

と表されているとして, $\lambda_1 \cup \lambda_2$ での解を求る.

$\lambda_1 \cap \lambda_2$ で $c_j = a_j^1 - a_j^2$ と置き, 各 λ_i における正則函数 b_j^i を

$$c_j = b_j^1 - b_j^2, \quad b_1^i F_1 + \cdots + b_\nu^i F_\nu = 0$$

となるように求めればよい.

線形函数方程式

$$a_1 F_1 + \cdots + a_\nu F_\nu = 0$$

に対する形式解とは, この方程式の解 (a) 全体の作る不定域モジュールの擬底のことである. それを $(A_1), (A_2), \ldots, (A_\mu)$ とすれば, $\lambda_1 \cap \lambda_2$ で

$$(c) = \alpha_1(A_1) + \cdots + \alpha_\mu(A_\mu)$$

と表されるから, Cousin 積分によって, 各 λ_i $(i=1,2)$ における函数系 (β^i) $(i=1,2)$ を, $\lambda_1 \cap \lambda_2$ では $(\alpha) = (\beta^1) - (\beta^2)$ となるように求めて,

$$(b^i) = \beta_1^i(A_1) + \cdots + \beta_\mu^i(A_\mu)$$

と置けばよい.

[訳注. 7]　問題 (C_2) の解法の本質的な部分を, 単独方程式の形で述べておく.

隣接した二つの多円筒 $\gamma_i\,(i=1,2)$ の各々に与えられた正則函数 φ_i が, $\gamma_1\cap\gamma_2$ の各点で

$$\varphi_1-\varphi_2=a_1F_1+\cdots+a_\nu F_\nu$$

と表されるとして, $\gamma_1\cup\gamma_2$ での解 Φ を求る.

$\gamma_1\cap\gamma_2$ で $h=\varphi_1-\varphi_2$ と置き, 各 γ_i における正則函数 ψ_i を

$$h=\psi_1-\psi_2,\quad \psi_i=b_1^iF_1+\cdots+b_\nu^iF_\nu$$

となるように求めればよい.

問題 (C_1) が解けていれば, $\gamma_1\cap\gamma_2$ で

$$h(x)=c_1F_1+\cdots+c_\nu F_\nu$$

と表し, Cousin 積分によって, 各 $\gamma_i\,(i=1,2)$ における正則函数 $b_j^i\,(i=1,2)$ を $\gamma_1\cap\gamma_2$ では

$$c_j=b_j^1-b_j^2\qquad (j=1,\ldots,\nu)$$

となるように求めればよい.

[訳注. 8]　上の命題における函数 $\Phi(x,y_1)$ は

$$\Phi(x,y_1)=F_1(x,y_1)\left\{\frac{u_1(P_1)}{y_1-\eta_1(P_1)}+\cdots+\frac{u(P_\nu)}{y_1-\eta_1(P_\nu)}\right\}$$

で与えられるのであった. したがって $|\eta_1|\leq r$ となるような数 r を定め, $|y_1|=2r$ とすると

$$|\Phi(x,y)|\leq\frac{(3r)^\nu\nu}{r}M$$

である.

[訳注. 9]　No. 1 に提起されている問題は V_0 における正則函数 $u(|u|<M)$ にたいして, Σ 上で $F=uu_0$ となる (A_0,B_0) における正則函数 F を,

$$F=A_1\Phi_1+A_2\Phi_2+\cdots+A_\mu\Phi_\mu$$

と書き表したとき, $|A_i|<KM$ となるように求めることであったが, 問題 (C_1) は量的評価付きで解けているから, F が, 或る数 K' によって

$$|F|<K'M$$

となるように求まればよい．ところで，点 (x^0, y^0) の近傍で

$$U^{\lambda} = \alpha_1 W_1 + \cdots + \alpha_{n+1} W_{n+1}$$

と表され，さらにその点の近傍で Σ 上 $W_1 u = \Phi$ となる函数は，K'' を或る正の数として，$|\Phi| < K''M$ なる条件の下で求まる．したがって，$|\alpha_j| < N\ (j=1,\ldots,n+1)$ とするとき，(x^0, y^0) の近傍で Σ 上 $uu_0 = \Phi^0$ となる函数 Φ^0 を

$$|\Phi^0| < (n+1)NK'M$$

となるように求められる．そうすると，問題 (C_1) も量的評価付きで解けているから，所期の結果が得られる．

[**訳注．10**]　13 節に書かれている擬凸状函数の性質 3° により，容易に解決する．一応証明を書いておく．

$\mathfrak{D}$ は有界と考えておく．ε より小さい正の数 ε' を取って，φ と ε' に対する，$\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ における解をそれぞれ Φ_1, Φ_2 とする．そして

$$l(u_1) = \frac{4\varepsilon'}{b-a}\left(u_1 - \frac{a+b}{2}\right)$$

として，$\Phi_2^*(P) = \Phi_2(P) + l(u_1)$ と置く．$\Phi_2^*(P)$ は擬凸状函数であり，ε' さえ十分小さければ，不等式 $|\Phi_2^* - \varphi| < \varepsilon$ は成り立つ．ここで

$$\Phi(P) = \begin{cases} \Phi_1(P), & u_1 \leq a \text{ ならば} \\ \max[\Phi_1(P), \Phi_2^*(P)], & a \leq u_1 \leq b \text{ ならば} \\ \Phi_2^*(P), & b \leq u_1 \text{ならば} \end{cases}$$

と置くと，この $\Phi(P)$ が求める擬凸状函数である．

[**訳注．11**]　この命題の証明は 1943 年に書かれた日本語による一連の論文の一つ，多変数解析函数に就いて X–第二基礎的補助定理 (岡潔先生遺稿集 第一集) に『略々明らかですが，慥かめておきましょう』として書かれている．しかしそれはあまり綺麗な証明ではない．そのため，曲線の正規族という概念とその判定条件を考えられた．

本文中に『$\mathfrak{D}_0$ の $\mathfrak{D}$ に関する多円筒境界距離は零ではないので』とあるが，これは必要な条件である．例えば，複素変数 z の平面上で $\log z$ の Riemann 面を考えるとき，その $z=1$ 上の一点からの距離が 2 以下の点の全体はコンパクトではない．このため曲線の正規族の概念を使ってもなかなかエレガントな証明にはならない．以下に，私の証明を書いておく．

$\mathfrak{D}_0$ の $\mathfrak{D}$ に関する多円筒境界距離を ρ とする．Δ_α 内に可算無限個の点 $P_j\ (j=1,2,\ldots)$ を取り，O と P_j を $\mathfrak{D}_0$ 内で結ぶ，長さ 2α 以下の単純

な連続曲線 L_j を描く．そして, L_j の空間 (x) への射影を $\underline{L}_j$ とし, それらから一様収束する部分列 $\underline{L}_{p_j}$ を取り出す．このとき, 一般に $\underline{L}_{p_j}$ までの距離が $\rho/2$ 以下の点の全体を $\underline{V}_j$ とすれば, Cauchy の収束判定条件により, 番号 p_{j_0} を十分大きく取るとき, $p_j > p_{j_0}$ なる曲線 $\underline{L}_{p_j}$ はすべて $\underline{V}_{j_0}$ に含まれる．

ところで, $\mathfrak{D}$ 上には $L_{p_{j_0}}$ の近傍 V として, $L_{p_{j_0}}$ までの距離が $\rho/2$ 以下であるような点の全体を取ると, V は $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれ, その射影は $\underline{V}$ と一致する．しかも $p_j > p_{j_0}$ なる曲線 L_{p_j} はすべて V に含まれる．したがって 点列 P_{p_j} は $\mathfrak{D}$ の内部の点に収束する．

なお, 脚注に『我々はすでにこの概念を解析面に応用した』とあるのは,『解析面の族は, それに含まれる面の面積が有界なら正規族をなす』という命題の事であり, 1934 年の論文に書かれている．

[訳注. 12]　少し書き落としがあるので, 補っておく．

Σ の点 $M' : [x'_1, \dots, x'_n; f_1(P'), \dots, f_\nu(P')]$ に対して, 空間 (x, y) の円板

$$\Gamma_{M'} \ : \ x_i = x'_i \ (i = 1, 2, \dots, n) \quad |y_j - f_j(P')| < \rho \ (j = 1, \dots, \nu)$$

を考え,

$$V = \bigcup_{M' \in \Sigma} \Gamma_{M'}$$

と置いている．そして $\varphi(P)$ を Δ における正則函数とし, V で定義され, $\Gamma_{M'}$ の各点 (x', y') における値を $\varphi(P')$ とした函数が $\varphi(x, y)$ である．

[訳注. 13]　この補題中の Δ は, $\Sigma \cap (A^0, B^0)$ に対応する Δ の閉部分領域のことであり, Δ^0 と表すべきものである．

[訳注. 14]　擬凸状領域が正則凸状域であることの証明も, 局所的な解決, 不完全な解決, 完全な解決の三段階を経て成される．

局所的な解決は, 最初 E. E. Levi によってなされた．そのためか, ここに書かれている証明は簡略なので補っておく．命題は, 本文の記号のもとで, P_0 の $\mathfrak{D}$ における多円筒近傍 γ と $\mathfrak{D}_\alpha$ の共通部分は正則凸状である というのである．その理由は $\gamma \cap \mathfrak{D}_\alpha$ を含む最小の正則凸状域 Δ が $\gamma \cap \mathfrak{D}_\alpha$ と一致するから, というのである．実際, もし一致しなければ, Δ における $\varphi(P)$ の値の上限 β は α より大きくなり, $\varphi = \beta$ となる Δ の境界点 Q の近傍に Q を通り, Q 以外は $\varphi > \beta$ なる部分に留まる解析面が存在するから, Δ の最小性に反するというのである．

不完全な解決とは, ここでは $\mathfrak{D}_\alpha$ が正則凸状であるということである. これは局所的には正則凸状であることから始めて, Cousin 第 1 問題の解法のように, 命題 (β) を繰り返し使って達せられる.

最後の完全な解決は, 命題 (α) そのものによって得られている.

[訳注. 15]　明らかと思えるが, 証明を付けておく.

同じ座標 (x^0) を持つ $\mathfrak{D}$ の 2 点 P', P'' における $F=F_1+cF_2$ の分枝 $F'(x)=F_1'(x)+cF_2'(x)$ と $F''(x)=F_1''(x)+cF_2''(x)$ が (x^0) の或る近傍 δ で一致するとすれば, その c は一意的に定まる. そのような c に δ 内の有理点の一つを対応させる. そうすると, そのような c の集合から可算集合への写像が作れ, 同じ点に対応する c は高々可算個である. したがって, そのような c は可算個である.

また, 二つの函数 $F'=F_1+c'F_2$ と $F''=F_1+c''F_2$ が共に $\mathfrak{D}$ の或る境界点の近傍 δ に解析接続されたとすると, $c'=c''$ でなければならない. したがって, 上記のことと同じ理由により, そのような c' も高々可算個しかない.

[訳注. 16]　明らかと思われるが, 証明を書いておく.

ρ_j $(j=1,2,\ldots,)$ を減少しながら零に収束する数列とし, 半径 ρ_j の等径多円筒を一般に $\underline{\delta}^{(j)}$ と表す. $\mathfrak{D}$ の境界点の, 空間 (x) への射影の全体を E と表す. j を決めると, E は高々可算個の $\underline{\delta}^{(j)}$ で覆える. それを $\underline{\delta}_k^{(j)}$ $(k=1,2,\ldots)$ と表す. 各 $\underline{\delta}_k^{(j)}$ 上の $\mathfrak{D}$ の部分のすべての連結成分を $\delta_{kh}^{(j)}$ $(h=1,2,\ldots)$ と表す. このようなものの全体 $\{\delta_{kh}^{(j)}\}$ は高々可算個である. このとき次の二つのことが言える：

1°　各 $\{\delta_{kh}^{(j)}\}$ 内に少なくとも一つの点 $\{Q_{kh}^{(j)}\}$ が含まれるような点列があれば, $\mathfrak{D}$ のすべての境界点はその部分列で表現することができる.

実際, $R=(P_1,P_2,\ldots)$ を $\mathfrak{D}$ の任意の境界点とし, その座標を $\underline{P}_0$ とする. $\underline{P}_0$ は E に含まれているから, 各 j にたいし, 少なくともひとつ $\underline{P}_0$ を含む $\underline{\delta}_k^{(j)}$ が存在する. その一つを $\underline{\delta}_{k_0}^{(j)}$ とする. そうすると, ある番号から先のすべての P_p を含む $\delta_{k_0h}^{(j)}$ がただ一つ存在する. それを $\{\delta_{k_0h_0}^{(j)}\}$ とすると, 点集合 $\{Q_{k_0h_0}^{(j)}\}$ は境界点 R を定める.

2°　本文の点列 Q_p は, 各 $\{\delta_{kh}^{(j)}\}$ 内に少なくとも一つは含まれているように取れる.

実際, 各 $\delta_{kh}^{(j)}$ に対し, ある番号から先の $\mathfrak{R}_p-\Delta_p$ はすべて $\delta_{kh}^{(j)}$ と交わる. それで $\delta_{kh}^{(j)}$ を一列に並べ, 改めてそれらを δ_q $(q=1,2,\ldots)$ と表し, 先ず δ_1 内に, それと交わる $\mathfrak{R}_{p_1}-\Delta_{p_1}$ の点 Q_{p_1} を取る. 次に δ_2 内に, それと交わる p_1 より大きい番号の $\mathfrak{R}_{p_2}-\Delta_{p_2}$ の点 Q_{p_2} を取る. これを続けて

所期の点列が得られる. (使わなかった番号は捨ててもよいし, 勝手な点を取っておいてもよい.)

したがってこの命題は成立する.

[**訳注. 17**]　明らかと思えるが, 証明を付けておく.

C の点で, Σ に含まれないものについては, H_k の中のどれかがそこで零ではないので, (2) の局所解は存在する. それで Σ の点 M を考える. P を M に対応する Δ の点とすると, 仮定により, P の近傍には (1) の解 A_j $(j=1,\ldots,p)$ が存在する. それを Σ 上の函数とみなし, M の近傍の正則函数 A_j^* $(j=1,\ldots,p)$ を, Σ 上で $A_j = A_j^*$ となるように求める. ((y) に関して定数とすればよい.) そして $\Psi_i^* = \Psi_i - \sum_j A_j G_{ij}$ と置くと, この函数は Σ 上で恒等的に零となるから, M で $\Psi_i^* \equiv 0 \mod (H)$ となり, (2) の M における局所解が求まる.