Sur un type d'ensemble de points dans l'espace
de deux variables complexes trouvé par M. Hartogs.

I. Généralisation du théorème de M. Hartogs[1].

I. Définition, exemples, Théorème connus.

1. Définition. $x=x_1+ix_2$, $y=y_1+iy_2$ を二つの complex variables とし, 四次元の空間 (x_1, x_2, y_1, y_2) を考へよう. 此の空間に於ける点の集合 E が次の三つの條件をみたすとき, 之を domain Δ に於ける Hartogs 氏の集合或は簡単に集合 (H) と呼ばう. 三つの條件とは

1° E は closed である.

2° E は pts. isolés をもたない. 更にくわしく云へば (de telle manière que) (x_0, y_0) を Δ 内の E の点とするとき, 若し (x_0, y) にぞくする E の点が (x_0, y_0) の附近に於て上の点以外にないならば, $\eta > 0$ を如何程小なる pos. no. とするも, 之に対し $\varepsilon > 0$ [を] correspond せしめ, $|x-x_0| < \varepsilon$ なる任意の x に対し, [$|y-y_0| <$] η なる適当なる y をえらび, (x, y) が E の点なる [如くするこ][2]とが出来る.

3° Δ_1 を Δ 内の任意の domain とするとき, Δ_1 に於て analytique biunivoque な transformation が Δ_1 を Δ_1' にうつし, Δ_1 内にある E の部分 E_1 を E_1' に移すならば, E_1' は Δ_1' に於て上の二つの性質をもつ — 簡単に云ふならば上の性質は E の各点の voisinage に於ける analytique biunivoque な transformation によって失はれない.

2. Exemples.

次に集合 (H) の exemples を挙げよう.

(1) Δ 内に boundary の点をもたない様な characteristic surface を考へると, 之は condition (H) をみたす.

(2) Δ 内に於ける analytic continuation によって fn. $f(x, y)$ を考へる. E を其の任意の一点のあるきまった voisinage (branch に indep. な) に於て $f(x, y)$ のすべての branch が holomorphic である様な集合とし, $F=\Delta–E$ とすれば F は集合 (H) である.

(3) (2) に於て E を其の任意の一点のあるきまった voisinage に於て $f(x, y)$ のすべての branch が meromorphic である様な集合とすれば, F は集合 (H) である.

[1][編注：表紙には下記の表題が書かれ, その裏面にこの表題が書かれている. 本文は次の I. $\cdots$ から始まっている.]

Sur une catégorie des ensembles de points dans l'espace de 2 variables complelxes.
I. Généralisation d'un théorème de M. Hartogs.

[2][ ] 内は虫穴の為不明な部分. 意味の通るように推定した.

(4)　Δ に於て holomorphic な fns. よりなる family の (J) 点の集合は condition (H) をみたす.
(5)　Δ 内に boundary の点をもたない様な characteristic surfaces の family を考へると, 其の limiting pts. の集合は condition (H) をみたす.

(2) は Hartogs 氏によって, (3) は E. E. Levi によって, (4),(5) は Julia 氏によって見出された. 尚自分は後に次の二種類の集合を添加するであらう.

(6)　Δ 内に boundary の点をもたない様な characteristic surfaces の family $(\mathcal{F})$ を考へるとき, 其の voisinage に於てかかる surface の area が family 全体として bounded でなくなる様な点 — i.e. $(\mathcal{F})$ が normal でなくなる様な点の集合.
(7)　Δ に於て meromorphic な fns. よりなる family の (J) 点の集合.

3.　Propriétés descriptives.

E を Δ に於て condition (H) を満足する集合とするとき E は次の諸性質をもつ：

(1)　O を space (x, y) に於ける任意の点とするとき, E が Δ 内に於て一点 P_0 を含み O より E の任意の点 P に到る distance が P_0 に於て maximum relatif au sens large をもつことはあり得ない i.e.

$$\overline{OP} \lneq \overline{OP_0}$$

(我々は勿論 points à l'infinie を考へていない.)

(2)　Δ に完全に含まれる一つの domaine dicylindrique $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ に関し E が次の條件をみたすとする：C, C' を夫々domaines plans $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ の boundary とするとき, 次の如き点はいずれも E の点でない.

1°　x が closed domain $\mathfrak{D}$ に, $y = \eta$ が C' にぞくする如き点 (x, η).

2°　$x = x_0$ (dans $\mathfrak{D}$) であり, y が closed domain $\mathfrak{D}'$ にぞくする如き点 (x_0, y).

然るときは domaine dicylindrique fermé $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ に E の点はない. (ここに $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ は共に multiply connected であってよい. 尚 point à l'infini を含んでもよい.)

自分は之等について証明をしないが人は Julia 氏の pp. 77–82 に於て之等が condition (H) のみより derive せられることを見るであらう.

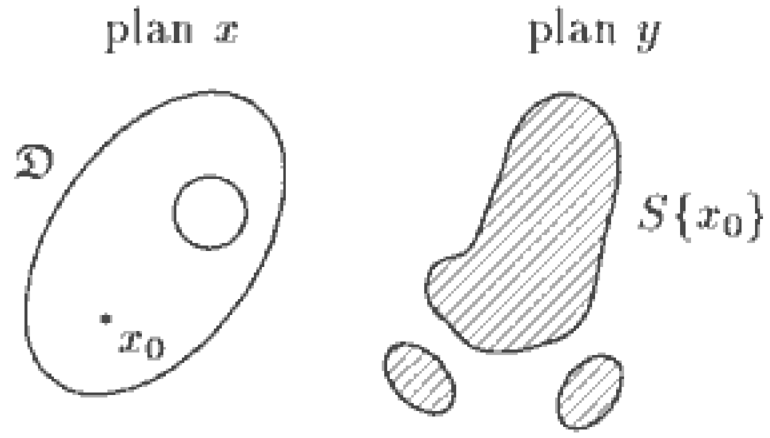
更にくはしく云ふならば第二の性質は直接第一の性質から導き出される. 尚一つの集合 E が fermé であって, 之が任意の domaine dicylindrique $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ に関して第二の性質をもつならば E は必然 condition (H) の第二の條件をみたす. 夫故之等の三つの條件は全く equivalent である. 我々は

上の二つの性質の一つをとり，之に此の性質が analytique biunivoque な transformation に対して不変なること，及び集合 E が clesed なることの二つの條件を添加し，之を以て集合 (H) を定義することが出来る．

4. Principe de module maximum.

我々は以下特別の場合として x dans $\mathfrak{D}$ なる如きすべての点について condition (H) がみたされる様な集合 E について考へる．

$\mathfrak{D}$ 内にある任意の点 x_0 をとり analytical plane $x=x_0$ による E の section を考へ，之を $S\{x_0\}$ を以て表はさう．$S\{x_0\}$ は y 平面に於ける点の集合であって，parameter x_0 が変れば $S\{x_0\}$ も亦之に従って変る．之は函数の概念の自然なる一つの拡張である．さて $S\{x_0\}$ の任意の点を η とすれば (x_0, η) はすべて E に含まれる．x_0 をして $\mathfrak{D}$ を描かしむれば，かくの如き点の全体は E と一致する．夫故 multiforme analytic fn. $f(x)$ の surface caractéristique を $y=f(x)$ によって表はすと全く analogous に我々のもとの集合 E を



$$y=S\{x\}$$

によって表はすことに約束しよう．

扨て我々の $S\{x\}$ は次の三つの性質をもつ．

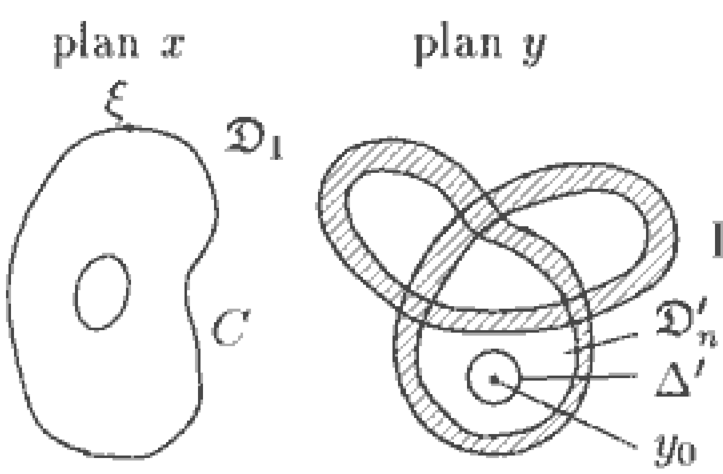
1° $S\{x\}$ は fermé である．

今 x_0 を $\mathfrak{D}$ 内の任意の点とし之を中心として描いた circular domain を (γ) とする．x が domain (γ) を描くとき $S\{x\}$ によって描かれる y 平面の点の全体からなる集合を $S\{(\gamma)\}$ を以て notate しよう．然るときは

$$\lim_{(\gamma)\to x_0} S\{(\gamma)\} = S\{x_0\}$$

之は集合 $y=S\{x\}$ が closed であると云ふのと全く同じである．

2° $\mathfrak{D}_1$ を完全に $\mathfrak{D}$ 内にある一つの domain とし其の boundary を C を以て，C 上の variable pt. を ξ を以て表はす．ξ が C を描くとき $S\{\xi\}$ は一つの closed point set Γ' を描く．y 平面の Γ' 外の部分は一個又は数個の domains $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2, \mathfrak{D}'_3, \cdots, \mathfrak{D}'_n, \cdots$ に分たれる．其の任意の一つ $\mathfrak{D}'_n$ について次の二つの場合しか起り得ない．



x が $\mathfrak{D}_1$ を描くとき $S\{x\}$ は $\mathfrak{D}'_n$ の如何なる portion をも描かないか又は $\mathfrak{D}'_n$ 全体が cover せられるか.

証明. $\mathfrak{D}'_n$ の内部にある任意の closed domain を Δ' とし, 其の任意の一点を y_0 とする. 然るときは (1) $[C, \Delta']$, (2) $[\mathfrak{D}_1 + C, y_0]$ にぞくする如何なる点も E に含まれない. 故に closed domain $[\mathfrak{D}_1 + C, \Delta']$ に E の点はない. C. Q. F. D.

3° $\mathfrak{D}$ の内にある任意の closed domain を (F) とし $f(x)$ をここに於て holomorphic かつ vanish しない fn. とすれば $S_1\{x\} = f(x) \cdot S\{x\}$ は (F) に於て (2) の性質をもつ. ここに $S_1\{x_0\}$ とは $f(x_0) \cdot \eta\ [\eta < S\{x_0\}]$ [3] なる点の集合を意味する.

$$\because \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = f(x)y \end{cases}$$

なる analytic transformation は x が closed domain (F) にぞくする限り biunivoque であるから.

我々の fn. au sens générale $S\{x\}$ のもつ上の性質は fn. analytique に於て "Principe de module maximum" と稱せられるものに外ならない.

5. x が $\mathfrak{D}$ 内にあるとき, すべての $S\{x\}$ が $y = \infty$ をふくまないとし, y 平面の有限の位置に於ける一点 y_0 より $S\{x\}$ の点に到る distance の maximum を $M(x)$ を以て表はす. 然るときは

(1). $M(x)$ は semi-continue supérieurement である.

(2). $\mathfrak{D}_1$ を $\mathfrak{D}$ の完全に内部にある任意の domain とし其の boundary を C_1 とする. $H(x)$ を closed domain $\mathfrak{D}$ に於て continuous fn., open domain $\mathfrak{D}$ に於て x_1, x_2 の harmonic fn. とし C_1 上に於て $M(x) \leq e^{H(x)}$ をみたすとすれば, closed domain $\mathfrak{D}$ に於て $M(x) \leq e^{H(x)}$.

証明. 第一の性質については明瞭である. 第二の性質は $\mathfrak{D}_1$ が simply connected であるときには No. 4 の第二第三の性質より直ちに follow する. 之より $\mathfrak{D}_1$ が multiply connected のときにも亦眞なることを知る.

之より analytic fn. の module maximum に関する諸種の不等式, たとへば Carleman, Hadamard の不等式, Lindelöf の principle, Théorème de 2 constantes etc. が我々の $M(x)$ に対して其の儘成立する. (Voir M. Julia, Principe géométrique d'analyse, Vol.2.)

尚たとへば Carleman の不等式より次のことが言ひ得られる.

[3] 編注　$\eta \in S\{x_0\}$ の意味である.

(2) に於て等号が内部の一点に対して成立するならば全体について成立する[4].

x が $\mathfrak{D}$ 内にあるとき, すべての $S\{x\}$ が $y=y_0$ を含まないとし y_0 より $S\{x\}$ に到る distance を $m(x)$ とすれば $\dfrac{1}{m(x)}$ は上にのべた $M(x)$ と全く同じ性質をもつ. 此の $m(x)$ は Hartogs の fn. と呼ばれて居る.

6. $M(x)$ が $\mathfrak{D}$ 内に於て ∞ とならないときについて考へる. $\log M(x)$ が "près infinie" とならないとき, i.e. $M(x)=0$ なる点が $\mathfrak{D}$ の如何なる portion に於ても partout dense でないとき $\log M(x)$ は M. Riesz の意味に於ける fn. subharmonique である.

更に $M(x)$ 自身は必ず subharmonique である.

$\because$ No. 5 の第二の性質に於て $V(x)$ を closed domain $\mathfrak{D}_1$ に於て continuous, open domain $\mathfrak{D}_1$ に於て (x_1, x_2) の harmonic fn. かつ C_1 上に於て $V(x)=e^{H(x)}$ とすれば $e^{H(x)}$ は fn. subharmonique であるから $V(x)\geq e^{H(x)}$ dans $\mathfrak{D}_1$. $\therefore M(x)\leq V(x)$. C. Q. F. D.

故に $M(x)$ に関して Hartogs 氏の不等式が成立する.

[5] 7. Hartogs 氏の定理 : x_0 が $\mathfrak{D}$ 内にあるとき集合 $S\{x_0\}$ が常に只一点からなるならば, i.e. $S\{x\}$ が one valued fn. ならば $S\{x\}$ は meromorphic fn. である.

証明. このとき $S\{x\}$ は Riemann sphere 上に於て continuous な fn. である. 我々は $S\{x\}$ が $\mathfrak{D}$ 内に於て値 ∞ をとらないとして, 之が holomorphic fn. なることを云へばよい. 今 (γ) を完全に $\mathfrak{D}$ 内にある任意の circular domain とする. $S\{x\}$ は domaine fermé (γ) に於て bounded である. i.e. $|S\{x\}|\leq M$. y_0 を $|y_0|>M$ なる一点とし y_0 より $S\{x\}$ に到る distance を $M(x)$ とする. 円周 γ 上に於いて $\log M(x)$ なる value をとり closed domaine (γ) に於て continuous であって open domain (γ) に於て (x_1, x_2) に関し harmonic なる如き fn. $U(x)$ をつくり[6] 其の一つの conjugate を $V(x)$ とし $f(x)=e^{-[U(x)+iV(x)]}$ を考へ, $S_1\{x\}=f(x)\cdot[S\{x\}-y_0]$ とすれば集合 $y=S_1\{x\}$ は domaine dicylindrique $[(\gamma)$, plan entier de $y]$ に於て condition (H) をみたす. 然るに γ 上に於て $|S_1\{x\}|=1$ かつ $S_1\{x\}$ は closed domaine (γ) に於て continuous

[4] Carleman の不等式より次のことが云ひ得られる.

domain $\mathfrak{D}$ に於て $M(x)\neq\infty$ であって, $\mathfrak{D}$ 内の一つの continuum 上で $M(x)=0$ ならば $M(x)$ は identically に zéro である.

[5] [欄外書き込み] これは Section II の冒頭におきかつ之を以て表題とするのが適当である.

[6] かかる fn. が exist すること. $\because$ S は continious fn.

である．故に closed domaine (γ) に於て上の等号が成立する．今 (γ) 内の一点 x_0 に於て $S_1\{x\}=y_1$ であったとする．次に y_2 を直線 $y_1 y_0$ 上にありかつ y_0 に関し y_1 と反対側にある様な一点とすれば $|S_1\{x\}-y_2|$ の domain (γ) に関する limite supérieure は (γ) 内の一点 x_0 に於て達せられる．$\therefore$ $|S_1\{x\}-y_2|=\text{const}=|y_1-y_2|$, $\therefore S_1\{x\}=\text{const}=y_1$ i.e. $S\{x\}=y_1\dfrac{1}{f(x)}+y_0$. 即ち $S\{x\}$ は (γ) に於て holomorphic である．然るに (γ) は $\mathfrak{D}$ 内にある任意の circular domain であって，$S\{x\}$ は $\mathfrak{D}$ に於て one valued であるから $S\{x\}$ は $\mathfrak{D}$ 内に於て holomorphic である．

C. Q. F. D.

[7]8. 我々は上に於て $y=S\{x\}$ の condition (H) をみたす domain が y については何等の制限を受けない場合について考へた．もし之がある domaine dicylindrique $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ についてのみ然るときは，之に然るべき modification をほどこさなければならない．次に其の最も重要なるものについてのべよう．

$y=S\{x\}$ が domaine dicylindrique $[\mathfrak{D},\ |y|>M>0]$ に於てのみ define せられ condition (H) をみたすとする．このとき $\mathfrak{D}$ に於て fn. $M(x)$ を次の如く define する．

1° x に対し $S\{x\}$が存在するときは origin より $S\{x\}$ に到る distance の maximum.

2° x に対し $S\{x\}$ が存在しないときは $M(x)=M$.

然るとき $\log M(x)$ は Riesz 氏の sens に於て fn. subharmonique である．

II

9. Diamètre de $S(x)$.

$S(x)$ の diamètre を $d(x)$ とすれば $\log d(x)$ は subharmonique である (au sens large)[8]

証明. 次の三つを証すればよい．

(1) $d(x)$ が semi-continue supérieurement なること．

(2) $d(x)$ の maximum au sens strict は boundary 上にしか存在しないこと．

(3) domain の各点の voisinage に於て $d(x)\,e^{H(x)}$ も亦 (2) の性質をもつこと．ここに $H(x)$ は harmonic かつ regular な任意の fn. である．

[7][欄外書き込み] ×省略

[8]$d(x)\neq\infty$ なる domain に於て.
$S(x)$: la section (de E)

先づ (1) の性質については明らかである. 依て (2) について見よう. $S(x)$ の existe する x 平面の domain を $\mathfrak{D}$ とし, 完全に $\mathfrak{D}$ 内にある任意の domain を Δ, 其の boundary を C とする. C 上の variable pt. を ξ を以て表す.

扨て Δ 内に一点 x_0 が存在し

$$d(x_0) > K d(\xi), \qquad K > 1.$$

と假定する. $S(x_0)$ の diamètre (多くあれば其の任意の一つ) を一方に延長し, 其の上に一点 y_0 をとり, y_0 より $S(x)$ の点に到る distances の maximum を $R(x)$ を以て, minimum を $r(x)$ を以て表はす.

y_0 を充分遠くにとり $r(x) > 0$ dans le domaine fermé Δ ならしめ, 更に x_1, x_2 を domaine fermé Δ の任意の二点とするとき

$$\frac{1}{K} < \frac{r(x_2)}{r(x_1)} < K$$

ならしめる.

然るときは $\log R(x)$, $-\log r(x)$ は共に subharmonic である. 故にある ξ_0 に対し

$$\frac{R(x_0)}{r(x_0)} \leq \frac{R(\xi_0)}{r(\xi_0)}.$$

然るに他方

$$R(x_0) = r(x_0) + d(x_0).$$

$$R(\xi_0) \leq r(\xi_0) + d(\xi_0).$$

$$\therefore \qquad \frac{d(x_0)}{r(x_0)} \leq \frac{d(\xi_0)}{r(\xi_0)}$$

更に

$$\frac{r(x_0)}{r(\xi_0)} < K.$$

$$\therefore \qquad d(x_0) < K \cdot d(\xi_0).$$

即ち我々の假定は矛盾を生ずる. 依て $d(x)$ は (2) の性質をもつ.

次に (3) の性質に移る. (γ) を $\mathfrak{D}$ 内の任意の circular domain とし $H(x)$ を (γ) に於て regular な任意の harmonic fn. とする. $V(x)$ を一つの conjugate とし $f(x) = e^{H(x)+iV(x)}$ を作る. $f(x)$ は (γ) に於て holomorphic である. 故に $S_1(x) = f(x)\,S(x)$ は (γ) に於て $S(x)$ と同じ性質をもつ. 其の diamètre を $d_1(x)$ とすれば

$$d_1(x) = |f(x)| \cdot d(x) = d(x) e^{H(x)}$$

即ち第三の性質も亦眞である. C. Q. F. D.

10. M. Hartogs の定理の拡張.

$S(x)$ が domain $\mathfrak{D}$ に於て $y=\infty$ を含まないとき, 若し $\mathfrak{D}$ 内の一つの continuum $\mathcal{L}$ 上で各 $S(x)$ が只一点からなるならば $\mathfrak{D}$ 全体に於て上のことが成立し, 従って $S(x)$ は holomorphic fn. である.

証明. 前半は diamètre $d(x)$ の logarithm が subharmonic であって, 従って Carleman 氏の不等式をみたすことから来る. 後半は Hartogs 氏の定理自身に外ならない.

11. 前節の定理に於て "一点" を "有限個の点" にまで拡張することが出来ないか? 自分は之が可能なることを示さう. 此の為に先づ数個の lemma を証明しよう.

第一のものは fn. subharmonique の continuity に関するものである.

$h(x)$ を x 平面の domain Δ に於ける fn. subharmonique とする. x_0 を Δ の点とし, $\mathcal{L}$ を x_0 に tend する curve[9] とする. $\mathcal{L}$ 上の点の current coordinate を ξ とすれば $\overline{\lim_{\xi\to x_0}}\, h(\xi)=h(x_0)$.

証明. 我々は $x_0=0$ と考へ Δ を unit circle を含むと考へよう. 更に $e^{h(x)}=p(x)$ とし unit circle 内にて $p(x)<M$ と考へることが出来る. ($\because\Delta$ の内部に於て $p(x)$ は bounded である). 更に $\overline{\lim_{\xi\to x_0}}\ p(\xi)=m$ とする. $\mathcal{L}$ を $\xi=\xi(t)$ $0\le t<1$. $\lim_{t\to 1}\ \xi(t)=0$ とする. pos. no. a を 1 より小なりとし, $|x|\le a$ 内にある $\mathcal{L}$ の部分を $\mathcal{L}'$ とし $p(\xi)$ の $\mathcal{L}'$ に於ける borne supérieure を m' とする. 次に pos. no. b を a より小さくとり, $\mathcal{L}$ が $|x|=a$ を最後に切ってから $|x|=b$ を最初に切るまでの間の部分を $\mathcal{L}''$ とする. $|x|=a$ と $\mathcal{L}''$ とを boundary とする domain は simply connected である. 之を Δ' とする. 此の domain Δ' を z 平面の unit-circle に conformally に represent する一つの fn. を $x=f(z)$ とする. 但し $f(0)=0$ とする.[10] このとき circle $|z|=1$ 上に於て $\mathcal{L}''$ に応ずる点の集合を (e) とし, 其の mesure を $2\pi\mu$ とする. 我々は先づ次のことを証明しよう:

a を固定し b を充分 0 に接近せしむれば μ は如何程でも 1 に近づく

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}}\right|d\theta=\log|f'(0)|.$$
$$\therefore\quad \log|f'(0)|>[(1-\mu)\log a+\mu\log b]$$

[9] sufficiently regular.
[10] De la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue pp.28,29,30. intégral p.37,44.

i.e.

$$|f'(0)| > a^{(1-\mu)} \cdot b^{\mu}$$

然るに Koebe の定理により

$$b \geq K \cdot |f'(0)|$$

K はある constant

$$\therefore \quad b \geq K a^{(1-\mu)} \cdot b^{\mu}.$$

ここに於て a を fix し, $b \to 0$ ならしむれば $\mu \to 1$ となる. C. Q. F. D.

扨て $p[f(z)]=P(z)$ とすれば $\log P(z)$ は fn. subharmonique であって, (e) 上に於て $P(z)<m'$

$$\therefore \quad p(0) = P(0) < M^{(1-\mu)} (m')^{\mu}.$$

ここに於て $a \to 0$ なれば $m' \to m$.
次に a を fix したとき $b \to 0$ なれば $\mu \to 1$

$$\therefore \quad p(0) \leq m.$$

然るに, 他方 $p(x)$ は semi-continue supérieurement である.

$$\therefore \quad p(0) = m.$$

C. Q. F. D.

12. 第二はある特殊な analytic continuation に関する簡単な注意である：

Δ を x 平面に於ける circular domain $|x|<1$ に含まれる一つの domain とし, 其の boundary pts. の内 $|x|=1$ と一致しないものの集合を考へ, 其の derived point–set を (F) とする. 若し Δ 内に bounded な holomorphic fn. $f(x)$ があって, 次の cond. をみたすならば $f(x)$ は $|x|<1$ に於て holomorphic である. cond. とは：

ξ を (F) にぞくする任意の一点とするとき, 若し ξ に tend し Δ 内にある一つの continuous curve $\mathcal{L}$ があって $f(x)$ がこの上に於て unique な limiting vulue をもつならば, 其の値は zero である一と云ふのが条件である.

証明. Δ が simply connected なるか否かに従って二つの場合を区別する. 先づ前者から始める. $x=\lambda(z)$ により domain Δ を z 平面の unit circle 内に represent する. $|z|=1$ 上の点の current coordinate を ζ と

すれば Fatou 氏の意味に於て ζ の one valued fn. $\lambda(\zeta)$ を, 高々 mesure nulle の点を除いて考へることが出来る. $\lambda(\zeta)$ の値が (F) にぞくする如き点の集合を考へ, 之を (e) とし, 其の mesure を $2\pi\mu$[11] とすれば $\mu \neq 0$. 先づ之を証明しよう.

x 平面に於て ξ_0 を (F) にぞくし, $|z|=1$ にぞくせない一点とし, ξ_0 に充分近く, Δ 外にある一点 x_0 をとり, 其の (F) に到る distance を b, $|x|=1$ に到る distance を a とする. 勿論 $b<a$ である. 次に fn. $\dfrac{1}{x-x_0}$ を考へる. fn. $\varphi(z)=\dfrac{1}{\lambda(z)-x_0}$ は $|z|<1$ に於て holomorphic であって, 自身も其の inverse も共に bounded. 故にもし $\mu=0$ ならば

$$|\varphi(z)| \leqq \frac{1}{a}$$

之は不合理である. $\therefore \mu \neq 0$. C. Q. F. D.

扨て $f[\lambda(z)]=F(z)$ とすれば $F(z)$ は $|z|<1$ に於て bounded である. 故に其の radial limit が existe しない様な $|z|=1$ の点は mesure nulle である. 故に z が (e) の点に radially に近づけば, 高々 mesure nulle の点を除き limiting value をもつ. 同時に $\lambda(z)$ も limiting value をもつ. しかるに假定により, かかる値は zéro 以外にない. 故に Riesz の定理により $F(z) \equiv 0$. 勿論 $f(x)$ は $|x|<1$ に於て holomorphic である.

次に Δ が multiply connected のときについて考へる. このとき我々は Δ にふくまれる一つの domain Δ' を次の如くとることが出来る：Δ' の boundary は Jordan's simply closed curve C と, 完全に其の内にふくまれる (F) の partial point–set (G) とからなる様にとることが出来る. この Δ' を fn. $x=\lambda(z)$ により z 平面の unit circle $|z|<1$ に conformally に represent しよう. このとき前と同様に $|z|=1$ 上の (G) に応ずる点の集合を (e) とし, 其の mesure を $2\pi\mu$ としよう[12]. 扨て z が radially に unit circle に tend するとき $x=\lambda(z)$ がある一点に tend するならば, 其の点は Δ' 内の点ではあり得ない[13]. 故に C に応ずる $|z|=1$ 上の点の集合は mesure $2\pi(1-\mu)$ をもつ.

此處に於て $\mu \neq 0$ なるときと, $\mu=0$ なるときとの二つの場合に区別する. 前者に於ては Riesz 氏の定理により $F(z) \equiv 0$ $[F(z)=f[\lambda(z)].]$

故に $\mu=0$ なる場合について考ふればよい. $f(x)$ の real part を $u(x)$ とする. $v(x)$ を C 内に於て harmonic かつ regular であって C 上に於て $u(x)=v(x)$ なる如き fn. とする. $w(x)=u(x)-v(x)$. $w[\lambda(z)]=W(x)$

[11] 之はたしかに measurable.
[12] 之はたしかに measurable ($\because$ fermé から mesure nulle を引いたもの)
[13] 之は définition 自身に外ならない.

を考へると fn. $W(x)$ は $|z|<1$ に於て harmonic かつ regular. 其の absolute value は bounded であって, $|z|=1$ 上に於て mesure zéro の点を除き vanish する. $\therefore W(z)=0$ identically i.e. $u(x)=v(x)$. 即ち $u(x)$ は C 内の domain にて harmonic かつ regular. 故に $f(z)$ はここに於て holomorphic. 即ち前の場合に帰する. 故に $f(x)$ は $|x|<1$ に於て holomorphic でなければならない. C. Q. F. D.

13. 定理. $\mathfrak{D}$ を plan x の一つの domain, $\mathcal{L}$ を $\mathfrak{D}$ にふくまれる一つの contimuum とする. 若し $S(x)$ が $\mathfrak{D}$ に於て決して $y=\infty$ を含まず, かつ $\mathcal{L}$ 上の任意の点 ξ に対し集合 $S(\xi)$ が有限個の点からなるならば $S(x)$ は有限個の algebroïdes system よりなる.

証明. 1° $S(\xi)$ が n 個又は夫より少ない点からなる如き $\mathcal{L}$ の点 ξ の集合を E_n を以て表はす. 然るとき E_n は (若し存在するとすれば) fermé であって $E_n \leq E_{n+1}$ なること明らかである.

さて $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ を考へると, 之はある所から向ふ必ず存在する. 之等が決して continuum を含まないと假定し, 其の矛盾なることを云はう. 然るときは $\mathcal{L}$ は E_1 外の点 ξ_1 をもつ. E_1 は fermé であるから ξ_1 を中心として circular domain (γ_1) を描き其の内に E_1 の点がない様に出来る. 更に (γ_1) 内のみについて見るとき $\mathcal{L}$ は E_2 外の点 ξ_2 をもつ. ξ_2 を中心として (γ_1) にふくまれる円 (γ_2) を描き (γ_2) 内に E_2 の点がない様に出来る. 以下同様に suite infinie de domaines cerculaires $(\gamma_1), (\gamma_2), (\gamma_3), \cdots$ を作ることが出来る. 之等の円の中心の limiting pt. を ξ_0 とする. 然るときは ξ_0 は $\mathcal{L}$ の点でなければならない. 故に $S(\xi_0)$ は有限個の点からなる. 其の数を m とする. 然るときは ξ_0 は E_m の点である. 然るに他方 ξ_0 は cercle (γ_m) 内の点である故に E_m の点ではあり得ない. 之は矛盾である. 故に我々は次の如く假定して généralité を失はない. $S(\xi)$ (ここに $\xi<\mathcal{L}$) は正かくに N 個 の点からなる.

2° $\mathcal{L}$ 上の一点 ξ_0 に於て $S(\xi_0)$ が実さい N 個の点 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ からなるとしよう. ξ_0 を中心とし極めて小さな circular domain(γ_0) を作れば (γ_0) 内の任意の x に対し $S(x)$ は $S_1(x), S_2(x), \cdots, S_N(x)$ なる N 個の相ことなる集合の和に分つことが出来る. ここに y_i より $S_i(x)$ の点に到る distance の maximum は δ より小. 所で domaine dicylindrique $[(\gamma_0), \text{plan entier}]$ に於て $y=S_i(x)$ は condition (H) をみたす. かつ (γ_0) 内にある $\mathcal{L}$ の portion に於て $S_i(x)$ は只一個の点からなる. 勿論如何なる $S_i(x)$ も無窮遠点を含まない. 故に $S_i(x)$ は (γ_0) に於て holomorphic fn. である. 之を混雑をさける爲 $y_i(x)$ を以て示さう.

か様に $S(x)$ は (γ_0) 内全体に於て exactement に N 個の点からなる.

次に x_1 を γ_0 上の一点とし $S(x_1)$ が少くとも N 個の continuum[14]からなったとしよう. 然るときは前と全く同様に x_1 を中心として $\mathfrak{D}$ 内にある様な一つの circular domain (γ_1) を描き, x がこの内にあるとき $S(x)$ が正かくに N 個の点からなる様に出来る. 以下之を如何程でも反覆することが出来る. 最後に次の如き domain (ω) に達する.

1° $(\omega) \leq$[15]$\mathfrak{D}$.

2° (ω) の boundary pt. であって $\mathfrak{D}$ の夫でない様な点 ξ がもしあるならば $S(\xi)$ は高々 $N-1$ 個の continuum からなる.

かかる domain (ω) の任意の点の voisinage に於て $S(x)$ は N 個の holomorphic fns. の system $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_N(x)\}$ によって組立てられて居る.

3° 今 $\mathfrak{D}$ 内に (ω) の boundary の点の limiting pt. があったとして, 之を ξ_0 とする. 我々はか様な点が存在し得ないことを云はうと云ふのであって其の爲には $\mathfrak{D}$ を circular domain であると考へて支差ない.

所で (ω) の内部から boundary の一点 ξ に tend する curve $\mathcal{L}$ があって, 其の上に於て $S(x)$ が N 個の相異なる点からなる一つの集合 E_0 に tend することはあり得ない $\because$ 然りとすれば No. 11 に於て証明した補助定理によって $S(\xi) = E_0$ でなければならないから. 扨て $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ の elementary symmetric fns. を $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,N)$ とし $f(x) = \Pi[y_i(x) - y_j(x)]$ $(i \neq j$, production はすべての permutation に及ぶ) を考へる. ここに於て No. 12 の補助定理を思ひ起さう. $f(x)$ 及び $\varphi_i(x)$ は domain (ω) に於て holomorphic かつ bounded, かつ若し x が一つの path に沿ふて boundary に tend するとき, 之等の fns. がいずれもある limiting values に tend するならば $f(x)$ のとる limiting value は zéro でなければならない. か様にこの場合には $\varphi_i(x)$ もすべてある limiting values に tend するならばと云ふ additional な條件が入って居るが, 其の影響の及ぶ所は z 平面の unit circle 上に於て高々 mesure nulle の点に過ぎない. 故に同一の結論に達する. i.e. $f(x)$ は circular domain $\mathfrak{D}$ 全体に於て holomorphic である. 更に (ω) 内に於て $f(x) \neq 0$ 故に (ω) は multiply connected であって, 其の $|z| = 1$ 上の (G) に応ずる点 (e) の mesure μ は zéro でなければならない. 故に No. 12 に於ける推論法は $\varphi_i(x)$ がすべて Δ' 内にて holomorphic なることを示す. 故に (G) の任意の点に於て $f(x) = 0$. 所で我々は (G) が点 ξ_0 を含むと考へてよい. かくて $f(x)$ が ξ_0 を limiting pt. としてもつ無限個の点に於て vanish しなければならない. 之は矛盾である. 故に $\mathfrak{D}$ 内にある (ω) の boundary の点はすべて isolate である. ここに $\mathfrak{D}$ はもはや circular domain と考へな

[14] 編注. 実際には点である.

[15] Notaion ? [編注. $(\omega) \subsetneqq \mathfrak{D}$ の意味]

くてよい.

更に $\varphi_i(x)$ はすべてかかる点の voisinage に於て holomorphic である. 故に system $\{y_i(x)\}$ は $\mathfrak{D}$ に於て有限個の algébroïde よりなる. 之と $S(x)$ とは高々 isolated pts. を除いて一致する. 故に $S(x)$ の contimuité の有様より $\mathfrak{D}$ 全体に於て一致することを知る. 依て我々の定理は証明せられた. C. Q. F. D.

III

14. (E) を domaine spatiale Δ に於て condition (H) をみたす如き集合とする. (E) の点を二種類に区別しよう.

其の点の (あるきまった) voisinage に於て (E) が有限個の surfaces caractéristiques の pts. intérieurs のみからなる場合と然らざる場合と. 後者の集合 (E') を考へることは analytically に (E) の derivative を求むることである. (E') を (E) の dérivé analytique と呼ばう.

定理. Δ 内に於ける集合 (H) の dérivé analytique は矢張り Δ 内に於ける集合 (H) である.

証明. (E) の dérivé analytique (E') が fermé なることは云ふ迄もない.

次に $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ を完全に Δ 内にある一つの dicylindrical domain とする. $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ の boundary を夫々 C, C'[16] とするとき

1° $(\mathfrak{D}+C,\ C')$ 2° $(x_0,\ \mathfrak{D}'+C')$ (ここに $x_0 < \mathfrak{D}$)

に (E') の点がなかったと假定し, $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ に (E') の点がないことを証明しよう. (E') は closed である故に y 平面に C' を含む一つの band 状の domain (Γ') を $(\mathfrak{D}{+}C,\ \Gamma')$ に (E') の点がない如くえらびうる. $(\mathfrak{D}{+}C,\ \Gamma')$ に於て (E) は有限個の surfaces caractéristiques にぞくする pts. intérieurs からなる. 故に C' を Γ' 内に於て少し動かして (E) にぞくする $y=$const. なる形の surface caractéristique が C' を pass しない様に出来る. さて (E) の $y=\text{const.}=y_0$ による section を $Q(y_0)$ とすれば, y_0 が C' を描くとき $Q(y_0)$ は之に応じて closed domain $\mathfrak{D}$ 内に system of curves α を描く. α は assez régulieres である. 更に α 上に点 x_0 がないと考へてよい. α は domain $\mathfrak{D}$ を数個の domains に分つ. 其の x_0 をふくむものを $\mathfrak{D}_1$ とし其の boudary を C_1 とする. 我々は $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}')$ に (E') の点がないことを云へば充分であらう. $\because$ 之が云へたとき, 次に疑問となるのは $(C_1, \mathfrak{D}')$ の点のみである. かかる場所に (E') の点がないことをたしかめるためには curve C' を再び少しずらせばよい. 之より $\mathfrak{D}_1$ に接する任意の domain $\mathfrak{D}_2$ についても $(\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}')$ に (E') の点のないことがたしかめうる. 以下同様.

[16] C, C' は sufficiently regular と考へてよい.

さて $x=\text{const.}$ による (E) の section の内, $\mathfrak{D}'$ 内にある部分を $S(x)$ とすれば $(\mathfrak{D}_1, C')$ には (E) の点がないから, ensemble spatial $y=S(x)$ は $(\mathfrak{D}_1$, plan entier) に於て condition (H) をみたす. 勿論 $S(x)$ は $\mathfrak{D}_1$ に於て borné である. さらに点 x_0 の voisinage に於て集合 $S(x)$ は有限個の点より組立てられて居る. 夫故前定理により $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}')$ に E の点はない.

C. Q. F. D.

最後に analytique biunivoque な transformation によって 2° の性質が失はれることはない. $\because$ (E') の transformé は (E) の transformé の dérivé analytique であるから. 即ち (E') は集合 (H) である. C. Q. F. D.

15. (E) を domain Δ にぞくする集合 (H) とすれば, 其の dérivé analytique (E') も亦同様である. 従って (E') の dérivé analytique (E'') を考へることが出来る. 一般に (E) の n-th ordre の dérivé analytique $(E^{(n)})$ は集合 (H) である. 之より進んで ordre transfini の dérivé analytique を考へようと云ふのであるが, 其の前に次の定理を establish しなければならない.

定理. domain Δ に於ける集合 (H) よりなる family $(\mathcal{F})$ の limiting pts. よりなる集合[17]は (若し存在するとすれば) 矢張り Δ に於て condition (H) をみたす.

証明. Δ に於て $(\mathcal{F})$ の limiting pts. が存在するとし, 其の集合を (E_0) を以て示す.

1° 明らかに (E_0) は closed である.

2° dicylindrical domain $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ を Δ の完全に内部に於て考へ, $\mathfrak{D}$ の boundary を C, $\mathfrak{D}'$ の夫を C' とする. このとき若し $(\mathfrak{D}+C,\, C')$ 及び $(x_0,\, \mathfrak{D}'+C')$, ここに $x_0<\mathfrak{D}$, に E_0 の点がないならば $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ に E_0 の点はない. 之を証明するため $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ 内に E_0 の点があると假定しよう. 然るときは $(\mathcal{F})$ より一つの infinite sequence $(E_1), (E_2), \cdots, (E_n), \cdots$ をえらび出し, いずれも $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ に少くとも一点をもつ様に出来る. 所で $(\mathfrak{D}+C,\, C')$ 及び $(x_0,\, \mathfrak{D}'+C')$ に E_0 の点がないのだから, 上の sequence はある ranking から向ふ (x_0, C') に於て点をもたない. 故に $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ に於て少なくとも一点をもち, $(\mathfrak{D}+C,\, C')$ 及び (x_0, C') に点をもたない様な集合 (E_n) が存在しなければならない. 之は不可能である.

3° (E_0) の上にのべた性質は analytique biunivoque な transformation によって失はれない $\because$ (E_0) の transformé は $(\mathcal{F})$ の transformée の limiting pts. よりなるから. C. Q. F. D.

[17] 此の云ひ方で正確か. 其の点の voisinage に $(\mathcal{F})$ にぞくする無限個の相異なる集合の点がある様な点の集合.

16.　上の定理によって (E) の transfinite order の derivative をたとへば平面上に於ける点の集合の derivative[18] と全く analogous に define することが出来る.

(E) の finite order の analytique derivatives はいずれも closed であって

$$(E) \geq (E^{(1)}) \geq (E^{(2)}) \geq \cdots .$$

故に $(E^{(n)})$ のすべてにぞくする点の集合を考へることが出来る. かかる集合が存在するとして, 之を $(E^{(\omega)})$ を以て表はし, ordre (ω) の dérivé analytique とよぶ. ここに ω は nombres ordinals transfinis 中最小のものである.

扨て $(E^{(\omega)})$ は Δ に於る集合 (H) である. $\because E^{(\omega)}$ は sequence $\{E^{(n)}\}$ の limiting pts. の集合であるから.

之より更に higher order の analytic derivative $E^{(\omega+1)}, E^{(\omega+2)}, \cdots$ を考へることが出来る. 之等はいずれも condition (H) をみたす. かつ $\alpha_1 < \alpha_2$ とすれば $E^{(\alpha_1)} \geq E^{(\alpha_2)}$ である.

一般に $\{\alpha_n\}$ を finite 又は transfinite の ordinary nos. の infinite sequence とし, α_0 を其のすべてより大なる ordinary nos. の中最小のものとすれば, infinite sequence $\{E^{(\alpha_n)}\}$ のすべてに共通なる点の集合を以て ordre α_0 の dérivé analytique $E^{(\alpha_0)}$ と呼ぶ. $E^{(\alpha_0)}$ は condition (H) をみたし, $E^{(\alpha_n)} \geq E^{(\alpha_0)}$ である. かつ α_0 にのみ depend し sequence $\{\alpha_n\}$ の撰び方には independent である.

17.　E のすべての dérivés analytiques に共通なる点の集合を $E^{(\Omega)}$ を以て表はし, 之を E の noyau analytique と呼ぶ.

$E^{(\Omega)}$ は fermé である.

Δ 内に closed point set F を考へる. F に, α を何ととっても $E^{(\alpha)}$ の点が存在するならば, $E^{(\Omega)}$ の点が存在する[19]. 従って F にもし $E^{(\Omega)}$ の点がないならば, $E^{(\alpha)}$ の点が F にない様な α $(\alpha < \Omega)$ が存在する[20].

[21] $^*E^{(\Omega)}$ は (若し存在すれば) Δ に於ける集合 (H) である.

証明. この証明法は No.15 に於けるものと全く analogous である.

1°　$E^{(\Omega)}$ が fermé であることは既に云った.

2°　$(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ を Δ の完全に内部にある domaine dicylindrique ouvert とし $\mathfrak{D}$ の boundary を C, $\mathfrak{D}'$ の夫を C' とする. 若し $(\mathfrak{D}+C,\ C')$ 及び $(x_0, \mathfrak{D}'+C')$ (ここに $x_0 < \mathfrak{D}$) に $E^{(\Omega)}$ の点がないならば, $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ に $E^{(\Omega)}$

[18] Baire, No.16.17 は (1932 集の 1) に依る方綺麗である (5page).

[19] Baire, 64 p.

[20] かかる alternative が possible である.
(尚必要ならば open domain についても α のあることが云へる).

[21] *を打った二つは順序を変へた方がよい.

の点がない．何となれば $(\mathfrak{D}{+}C,\, C')$ 及び $(x_0,\, \mathfrak{D}'{+}C')$ に $E^{(\alpha)}$ の点がない様な $E^{(\alpha)}$ がある $(\alpha{<}\Omega)$．故に $(\mathfrak{D}{+}C,\, \mathfrak{D}'{+}C')$ に $E^{(\alpha)}$ の点がない．故にここに $E^{(\Omega)}$ の点がない．

3° $E^{(\Omega)}$ の上の性質は analytique biunivoque な transformation によって失はれない． $\because E^{(\Omega)}$ の transformé は E の transformé の noyau analytique であるから． C. Q. F. D.

* 高々 transfini 回の reduction によって E より $E^{(\Omega)}$ に達しうる．

証明． Δ の boundary 及び $E^{(\Omega)}$ を boubdary としてもつ一つの ensemble ouvert (O) を考へることが出来る． $\mathfrak{D}_n : (n=1,2,\cdots)$ を完全に (O) 内にある ensemble ouvert とし, $\mathfrak{D}_n{<}\mathfrak{D}_{n+1}$, かつ $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \mathfrak{D}_n = (O)$ ならしめることが出来る． $\mathfrak{D}_n$ (fermé) に於て $E^{(\alpha)}$ はある indices α に対し zéro である．其の最小のものを α_n とする．かかる α_n $n{=}1,2,\cdots$ のすべてより大なる nombre ordinal を α_0 とする．然るときは明らかに

$$E^{(\alpha_0)} = E^{(\Omega)}$$

C. Q. F. D.

之より $E^{(\Omega)}$ の次の性質をうる．

$E^{(\Omega)}$ の dérivé analytique は自身である．

[22] Δ 内の一つの domaine Δ' に $E^{(\Omega)}$ の点がなければ E はここに於て dénombrable[23] な surfaces caractéristiaues の pts. intérieurs よりなる[24]．

18. $y{=}S(x)$[25] を domaine dicylindrique $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ に於ける集合 (H) とする．若し $\mathfrak{D}$ 内にある一つの continuum $\mathcal{L}$ 上のすべての点 x に対し $S(x)$ が ensemble dénombrable ならば $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ 内に Noyau は存在しない．

証明． $y = S(x)$ を E で表はす． E の Noyau $E^{(\Omega)}$ が ensemble nul でなかったとして, 其の section を $S_\Omega(x)$ を以て表はさう． 明らかに $S_\Omega(x){\le}S(x)$ である．

$\mathcal{L}$ 上の任意の一点 ξ_1 をとり, $S_\Omega(\xi_1)$ の任意の一点を η_1 とする $(\eta_1{<}\mathfrak{D}')$． ξ_1 を中心として $\mathfrak{D}$ 内に circular domain (γ_1) を描き, η_1 を中心として $\mathfrak{D}'$ 内に circular domain (γ_1') を描く．若し (γ_1) 内の $\mathcal{L}$ にぞくするすべての点 x に対し $S_\Omega(x)$ が高々一個の点しかもたないならば $E^{(\Omega)}$ は点 (ξ_1,η_1)

[22] 66-67

[23] 名稱の撰擇と説明及び dénombrable なることの証明
$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots$ のすべてより大なる nomble ordinal は存在する
$(\because$ 之が dénombrable$))$ 之は mathematical induction によって真．

[24] このときには pts. frontière が Δ' 内にあり得る

[25] [欄外書き込み] 更に $S(x)$ が $\mathfrak{D}'$ と一致する case が起らないとする．かつ $\mathfrak{D}'$ は y 全平面と一致しなければならない．
又は $(\mathfrak{D},C')$ に $E^{(\Omega)}$ の点がないことを云はなければいけない．

の voisinage に於て有限個の surfaces analytiques の pts. intérieurs からならなければならない. $\because S_\Omega(\xi_1)$ は $\mathfrak{D}'$ 内に於て ensemble dénombrable である. 故に η_1 を内にふくみ, (γ_1') 内に simple closed curve Γ_1' を, 其の上に $S_\Omega(\xi_1)$ の点がない様に描くことが出来る. 故に γ_1 と concentric なる充分小さな円 Γ_1 を描き circular domain (Γ_1) 内のすべての x に対し $S_\Omega(x)$ が Γ_1' 上に点をもたない様に出来る. 今 $S_\Omega(x)$ の Γ_1' 内の domain (Γ_1') にあるもののみをとり, 之を $S_\Omega^*(x)$ とすれば $y=S_\Omega^*(x)$ は domaine dicylindrique $[(\Gamma_1), \text{plan entier}]$ に於て condition (H) をみたし, $S_\Omega^*(x)$ は borné であり, (Γ_1) にふくまれる continuum $\mathcal{L}$ の portion に対し, $S_\Omega^*(x)$ は只一点からなる. 故に $S_\Omega^*(x)$ は (Γ_1) に於て fn. holomorphe である.
C. Q. F. D.

然るに此のことは $E^{(\Omega)}$ が其の dérivé analytique と一致しないことを示す. 之は矛盾である. $\therefore (\gamma_1)$ 内にある $\mathcal{L}$ の portion の上に一点 ξ_2 をえらび $S_\Omega(\xi_2)$ が (γ_1') 内に於て少なくとも二点 $\eta_2^{(1)}, \eta_2^{(2)}$ をもつ如く撰ぶことが出来る.

次に ξ_2 を中心とし circular domain (γ_2) を (γ_1) 内にあって其の rayon が (γ_1) の夫の半分よりも小なる如く描き, $\eta_2^{(1)}, \eta_2^{(2)}$ を中心として circular domains $(\gamma_2^{(1)}, \gamma_2^{(2)})$ を, いずれも (γ_1') 内にあり, 其の半径がいずれも (γ_1') の夫の半分よりも小さく, かつ common pt. をもたない様に描く. 前と同様の理由により (γ_2) 内にある $\mathcal{L}$ の上に一点 ξ_3 を, $S_\Omega(\xi_3)$ が $(\gamma_2^{(1)}), (\gamma_2^{(2)})$ の二つともの内に相異なる二点を含む様にえらぶことが出来る. 之を $\eta_3^{(1)}, \eta_3^{(2)}, \eta_3^{(3)}, \eta_3^{(4)}$ とする. 之等の点 $\xi_3, \eta_3^{(i)}$ を中心とし前と全く analogous な性質をもつ circular domains $(\gamma_3), (\gamma_3^{(i)})$ を描く. 以下同様に此の process を無限回 répéter する. suite d'ensembles $\{\eta_n^{(i)}\}$ の pts. limites の集合を (P) とする. (P) は明らかに parfait である.

他方 suite de pts. ξ_n は一点に conv. する. 之を ξ_0 とすれば ξ_0 は $\mathcal{L}$ 上の点でなければならない. 故に $S(\xi_0)$ は dénombrable. 従って $S_\Omega(\xi_0)$ は dénombrable である. 然るに $S_\Omega(\xi_0) \geq (P)$ でなければならない. 之は矛盾である. 故に $E^{(\Omega)}$ は ensemble nul[26]である. C. Q. F. D.

[26][書き込み] 之は $\mathcal{L}$ の附近で然り. しかし之が $\mathfrak{D}$ 全体について然ることを云ふためにはすべての $S(x)$ が $\mathfrak{D}'$ 内に pts. extérieurs をもたなければならない.

Complémentaire

1. Surface caractéristique fermé S dans un domaine Δ (space) とは éq. $f(x,y)=0$, ここに $f(x,y)$ は x,y の fn. analytique uniforme ou multiforme, をみたす点 (ξ,η) 及びかくの如き点の limiting pts. よりなる集合を云ふ.

$P_0(\xi_0,\eta_0)$ が Surface caractéristique S の pts. intérieurs であると云ふは P_0 の umgebung に於て S の portion が次の eq. の root と coïncide することを云ふ: $F(x,y)=0$, ここに F はその umgebung に於て holomorphic な x,y の fn. 上の eq. は reducible でも irreducible でもよい. 尚 P_0 は distance fini でも l'infini でもよい.

Surface caractéristique S の pts. intérieurs でない様なすべての点を surface caractéristique fermé S の pt. frontière と云ふ. 以上の名稱は勿論 domaine Δ 内の点についてである. たとへば α を incommensurable な pos. no. とすれば éq. $y=x^\alpha$ によって défine せられる surface caractéristique fermé S は pt. intérieur をもたない. $\because\ \xi$ を zéro 及び infini とことなる任意の点とすれば $\eta=|\xi|^{\alpha}$[27]なるすべての η に対し (ξ,η) は S の点であるから ($\because$ S fermé).

(ξ_0,η_0) を有限の位置にありとし, 一つの surface caractéristique fermé S の pt. intérieur とする. この umgebung に於ける S の defining eq. を $F(x,y)=0$ とする. ここに F は holomorphe, $F=0$ は一般に ξ_0 の umgebung (γ) に於て有限個の algébroïdes $y_i(x)$ よりなる. ここに $y_i(x)$ の内には constants があるかも知れない. 特別の場合として $x=\mathrm{const}$ なる形の solution をもつかも知れない. 然し之以外の場合は入って来ない. (このことは Weierstrass によりよく知れて居る).

surface caractéristique が domaine S 内に於て pts. frontière をもたなければ, 之はここに於て一つの ensemble (H) であることは前に注意した.

之より E' の définition につづく.

E の pts. régulier を先に云った方がよくはないか. (従って pts. singulier をも).

[27] $\eta=\rho e^{i\varphi}\quad \xi=re^{i\theta}\quad \rho=r^\alpha,\quad \varphi\equiv\alpha\cdot\theta\ (\mod 2\pi\alpha)$

[28] 「　II.　Ensemble condensable, non condensable.

9.　此の論文の目的は Stieltjes の定理を拡張せんとするにあること Introduntion に於てのべたが如くである．即ち其の対象を one valued な analytic fn. $f(x)$ より拡げて我々の $S\{x\}$ に及ぼさんとするにある．此の有様を簡単に erfassen して次の如く云ふことが出来る．“Fn. subharmonique[29]は勿論決して quasi-analytic ではない．然しながら negative poles の分布は全く任意ではない．たとへば一つの continuum に沿ふて negative pole をもつ様な Fn. subharmonique は identically に $-\infty$ となるもの以外にあり得ない．之が Stieltjes の定理の存在する所以である．” 夫故我々は本論に入るに先だって Fn. subharmonique の negative poles の可能なる分布の限界について研究しよう．

我々は其の研究の範囲を ensemble fermé に止める．其の結果は同時に analytique fn. の singular pts. exceptional values etc. に関し一つの自然なる分類をあとふるであらう．

10.　Définition. complex variable z の平面に ensemble fermé E をあたへる．之を harmonic fn. の coupure として考へたとき, 次の二つの場合が起る．

E 外のすべての点に於て harmonic かつ regular であって, しかも全体として bounded な one valued fn. が存在するか,
か様な fn. が存在し得ないか．

前者の場合に E を condensable, 後者の場合に non-condensable と呼ぶことにしよう．
E が一つの continuum を含むならば確かに condensable である．E が dénombrable な点からなるならば non-condensable である．

11.　我々は先づ上の点について大体の Aspect を得なければならない．先づ事態を整理しよう．E がもし E 外の portion を二つ以上の domain に分つ場合に於ては E は condensable にきまって居る．夫故以下 E 外の portion が只一つの domain なる場合について考察すれば充分である．此の domain を Δ を以て表はす．更に同じ理由により E は point frontière のみからなると制限しよう．今一つ E が point à l'infini を含まないと考へる．

さて全体として E を完全に cover する system of circular domains

$$(\alpha) \qquad\qquad (\gamma_1), (\gamma_2), \cdots, (\gamma_i), \cdots, (\gamma_p)$$

[28] [欄外書き込み] 後へまはす．「　$\cancel{\text{II}}$ ...
[29] au sens général

を考へる. circle γ_i の radius を r_i とする. 然るときは次の漸近的判定條件を得る.

若し次の如き real variable t の fn. $\lambda(t)$ が見出されるならば集合 E は condensable である.
(1) $\lambda(t)$ は $0<t$ に於て define せられ positive かつ $t \to 0$ のとき $\lambda(t)$ increasing であって
$$\lim_{t\to 0}\int_t^1 \lambda(t)|\log t|dt$$
は有限に止まる.

(2) $$\mu = \sum_{i=1}^{p} r_i\lambda(r_i)$$

が zéro と異なる borne inférieure をもつ.

証明. 」