解　題

はじめに.　これは「岡潔先生遺稿集第七集」に収録された仏文の未完の論文草稿

Sur les ensembles de points à 4 dimensions engendrés analytiquement.

の日本語訳および日本語の論文草稿

Sur un type d'ensemble de points dans l'espace de deux variables complexes trouvé par M. Hartogs.

と, 二つの断片

Complémentaire.

II.　Ensembles condensable, non condensable.

を集めたものである. 仏文の草稿は不連続な三つの部分, Chap. I, II と II と Chap. IV∼VI よりなっている.

これらの草稿の残されていた状況は次の通りである. 先ず日本文の草稿は A4 版より縦だけが少し短い, 点線で卦の入ったルーズリーフ 42 枚の表だけに書かれており, 時々裏面に次の頁に関する註が書かれている. 仏文の草稿は普通の A4 版のルーズリーフに手書きされており, Vue générale から Chap. II 迄は 1∼111, 孤立した II は 36∼47, Chap. IV∼VI は 69∼146 と頁が打たれている.

1.　研究の概要.

1.　この論文は岡先生の多変数函数論の分野における最初の研究である.[1] 先生は 1929 年, G. Julia 先生を訪ねて渡仏され, それ迄 3 年位は続けておられた 1 変数函数論の分野の研究 – イテレーションの研究[2] – への未練を断ち切って, 生涯の研究分野と想い定められた多変数函数論の分野の研究を始められた.

フランス滞在中になされたその研究の成果は二つある. 一つはパリ郊外のサン・ジェルマン・アンレイでなされた固有面の正規族に関するものであり, もう一つはスイス, ジェネバ湖畔のトノンでなされた Hartogs の定理の拡張である. 一見異なるテーマと思えるこの二つの研究は, 1926 年の G. Julia の論文[3]に触発されたものであり, Weierstrass, Stieltjes, Vitali と続く 1 変数正則函数の収束に関する一連の研究を, 多価解析函数に迄拡げ, それを 2 変数函数論の立場から研究しようとしたものである. ここに

[1] この研究の過程については, "春の想い出" (岡潔先生遺稿集第四集収録) に詳しく回顧されている.

[2] 岡潔先生遺稿集第六集収録.

[3] G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, Acta Math. 47

まとめれている幾つかの資料からその研究の全貌は明らかであるが, 論文としては完成されず, その要約[4]が公表されただけであった.

2. 岡先生の業績が紹介されるとき, よく「Behnke–Thullen の著書から三つの問題を得られた」と述べられており, 先生自身もその様に述べておられる. 三つの問題とは, Cousin の問題, 展開の問題および Hartogs の逆問題のことである. ところでこの論文に書かれている固有面の正規族に関する研究は Cousin 問題, それも Cousin の第 2 問題の解法のある種の精密化が基礎になっている. このことについて岡先生は,『双円筒内に与えられた解析面を零に持つ正則函数を作ろうと思ったが, その手段が全く分からず, Cousin の研究があるのを知って, 早速図書館にそれを見に行った』と語っておられた. Cousin の研究の重要さは在仏中に十分知っておられたのである.

さらにこの論文の序文の最初には,

『私はこの論文で, 複素 2 変数の解析函数の理論に現われる一連の興味あるイデーに付いて述べようと思う. その主要な駅亭は次の如くである.』

とあり, E. Fabry, F. Hartogs, E. E. Levi, G. Julia, および H. Cartan et P. Thullen の論文が紹介されている. さらに,

『これらの研究から, 中心的なイデーとして, 次の基本的な概念を抽出することができる.』

とあって, (H) 集合 (局所的に擬凸状領域の余集合となるもの) の定義が書かれている.

このような書き方は, Hartogs の逆問題が解決された第 VI 論文の序文や, それを一般次元の不分岐多葉域に拡張された第 IX 論文の第 II 章の始まりと殆ど同じ雰囲気である. この研究がなされた 1931 年頃には, 未だ『擬凸状領域』の概念はなかった. 1934 年に出版された Behnke–Thullen の教科書でも,『擬凸状』という言葉は E. E. Levi の条件を満たす超曲面に対して使われているだけである. この序文に書かれている定義は, 擬凸状領域の定義としては, 第 IX 論文で A 型と言われているものであるが, この論文の本文中には 第 IX 論文で B 型および C 型と言われているものもすでに書かれている.

3. ところが, この序文には, 続いて,

『この論文の目的は, この (H) 集合を複素 1 変数の解析函数論の観点から研究することである.』

[4]K. Oka, Note sur les fonctions analytiques multiformes etc., J. of Science of the Hiroshima Univ. (1934).

と書かれている．ここで言われている観点とは，複素 2 変数 x, y の空間における (H) 集合の，$x = \text{const.}$ による切り口を，独立変数 x の集合値函数とみなし，その解析的な性格に着目して，これを 1 変数多価解析函数の一般化されたものとみなす立場を意味している．この観点から Hartogs の定理 (第 V 章 56 節) が可能な限り拡張される．しかしここには『擬凸状領域は正則域か ?』という問題は未だ表面には現われてきていない．しかもその問題は岡先生が多変数函数論の研究を決意されたときにはすでに先生の脳裏にあったはずである．この論文が未完に終わった理由はこのあたりにあるのだろうか？ しかし (H) 集合に対する詳細な研究は第 I 論文以後の研究に大いに役立っているように思える．

2.　論文に現われる諸概念と結果.

ここで，この論文に現われる諸概念と主な結果を概観しておこう．

1.　固有面.　現在解析面と呼ばれている “正則函数の定数面” は当時一般に “固有面 (Surface caractéristique)” と呼ばれていた．Behnke–Thullen の教科書でも Analytische (charakteristische) Fläche と書かれている．

この研究で，岡先生は “固有面” を多価解析函数のグラフと考えておられるため，それは随分一般な概念となっている．序文にも書かれているが：

$f(x)$ を複素変数 x の平面における或る解析函数とし，複素 2 変数 x, y の空間に

$$\Sigma \ : \ y = f(x)$$

によって実 2 次元の曲面を描く．このとき $f(x)$ は可能な限り解析接続されたものと考える．(勿論 $x = \text{const.}$ は固有面と考える.) このように考えるとき，当然，Σ は閉集合とは限らない．例えば $f(x)$ を，単位円を正則域とする，有界な正則函数とすると，円周 $|x| = 1$ 上には Σ の境界点が現われる．また複素数 a, b, c と α, β, γ を適当に取って解析函数

$$y = \alpha \log(x - a) + \beta \log(x - b) + \gamma \log(x - c)$$

を考えると，Σ の閉包は複素直線が付け加わったり，実 3 次元の超平面になったり，さらに全空間になったりする．

それで Σ の点を，その近傍では 2 変数の正則函数の零面として表せるかどうかによって第 1 種と第 2 種に分類する．そうすると，或る領域内に描かれた固有面で，相対的に閉集合であり，さらに第 2 種の点を持たないと仮定すると現在解析面と呼ばれているものになる．(この解題ではこの条件の下で “解析面” という言葉を使っている.)

固有面をこのように一般なものと考えるのは, それを多価函数のグラフと見るからだけではなく, 或る場合, 例えば上記の二つ目の例の場合, その閉包を (H) 集合として捉えらえることができるからであろう.

2. 解析面の正規族. 空間 x, y の或る領域 $\mathfrak{D}$ に解析面の族 $\mathfrak{S} = \{S\}$ が与えられているとし, P を $\mathfrak{D}$ の或る点, δ を P の或る近傍とする. このとき, $\mathfrak{S}$ に属する各解析面 S に対して $S \cap \delta$ を表す正則函数の族 $\mathfrak{F}$ を考え, それを P で正規であって, 極限函数としては恒等的零を含まないように作れるなら, $\mathfrak{S}$ は P で正規であると定義する. そうすると, もし $\mathfrak{S}$ が P で正規なら, そこから取り出された解析面の任意の無限列から P の近傍で或る解析面に収束するような部分列を取り出すことができる. この収束は単なる点集合の列の収束よりは強い意味を持っている. 岡先生はこれを多価解析函数の解析的な収束と考えておられる.

このような概念の下に, 解析面の族について次の二つの定理が得られている.

『空間 x, y の或る領域 $\mathfrak{D}$ に解析面の族 $\mathfrak{S} = \{S\}$ が与えられているとき, $\mathfrak{D}$ の任意の完全内部における S の面積が一様有界なら $\mathfrak{S}$ は $\mathfrak{D}$ の各点で正規である.』

『上記の族の (J) 点, すなわちその族が正規ではなくなる点, の集合は領域 $\mathfrak{D}$ における (H) 集合である.』

これがサン・ジェルマン・アンレイで成された研究である. なおこの論文は完結していないためか, この二つ目の定理の証明は書かれていない. 別な証明法はあるが, 岡先生のアイデアに沿った証明は第 X 論文に書かれている.

3. 有理型函数の正規族. 空間 x, y の或る領域 $\mathfrak{D}$ における有理型函数の族 $\mathfrak{F} = \{f(x, y)\}$ を考えるとき, その族の正規性については, 1 変数の場合とは異なり, 不定点の存在を考慮しなければならない.

岡先生は有理型函数族の (J) 点 (正規にならない点) に対し, 先ずそれがその族に属する函数の不定点の極限点であるとき, それを第 2 種と定義し, そうでないとき, それを第 1 種と定義される. 次に (J) 点が孤立点であるときを例外的と定義される. そうすると例外的な (J) 点は不定点によって生じるものしかないことが分かる.

さらに有理型函数を各点の近傍で互いに素な二つの正則函数の比として表し, その分母分子が共にその点で正規族を成していて, $(0, 0)$ および (∞, ∞) を極限函数に持たないようにできるとき, その点を非真性 (J) 点と名づけ, そうはできないときに真性 (J) 点と名づけられる. この場合, 分

母分子の極限函数は必ずしも互いに素とはならないことを注意しなければならない.

これらの定義のもとで, 主に次の二つの定理が得られる.

『空間 x, y の或る領域 $\mathfrak{D}$ に有理型函数の族 $\mathfrak{F}=\{f(x,y)\}$ が与えられているとき, 異なる三つの値 α, β, γ があって, 各 $f(x,y)$ に対して

$$f(x,y)=\alpha,\ \beta,\ \gamma$$

で与えられる解析面の族を考え, それらの解析面の面積が $\mathfrak{D}$ の任意の完全内部で一様有界なら $\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{D}$ 内に真性 (J) 点を持たない.』

『真性 (J) 点の集合は或る解析面族の (J) 点集合と一致し, したがって (H) 集合である.』

なお, 本文には「殆ど一様収束」と呼ばれる概念が定義されており, それについて, 族 $(\mathfrak{F})$ が $\mathfrak{D}$ に真性 (J) を持たない場合,

『$(\mathfrak{F})$ から取り出された函数列は $\mathfrak{D}$ の一点で「殆ど一様収束」ならすべての点でそうである.』

と言う命題が書かれている. しかし, 訳注. 3 に示したように, この命題は定義通りには成り立たない. これは「或る領域 $\mathfrak{D}$ における正則函数の正規族から取り出された函数列が, その領域の一点で一様収束すればすべての点でそうなる」と言う命題の一般化である. したがって上記のことは, 命題が間違っているというより,「殆ど一様収束」の定義が不備であると思われる.

岡先生は常に『定義は最後にできる』と言っておられた. 創造的な研究は先ず言葉以前の数学的自然の状勢を見あきらめるのであり, 定義はその状勢を正しく言い表せるようになされるのだというのである. この論文が未完のものであることから, その真相を垣間見ることができたのかもしれない.

4. (H) 集合. (H) 集合はこの論文の最も主要な概念である.

1909 年 Hartogs[5] は次のような定理を示した：

「空間 (x,y) の双円筒 $\Delta=(\Delta_1,\Delta_2)$ 内に或る閉集合 E があり, さらに E のすべての点を特異点とする $\Delta-E$ における正則函数 $f(x,y)$ があるとする. このとき Δ_1 のすべての点 x' に対して E の $x=x'$ による切り口 $E(x')$ が常にただ 1 点よりなるなら, E は Δ_1 における x の或る正則函数のグラフである.」

[5] F. Hartogs, Über die aus den singulären Stellen einer analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen bestehenden Gebilde, Acta Math., 32, 1909.

この定理に対して, 岡先生は先ずこの Hartogs の定理は抽象的な (H) 集合に対する命題であると主張される. しかも, そう見ることによって証明も非常に簡潔になる. 次にこの Hartogs の定理は Δ_1 のすべての x' による切り口を一点と仮定していること, およびその切り口をただ一点と仮定していることの 2 点で条件が強過ぎると主張される. そして次の二つの定理を発見された：

『$E(x')$ が常に Δ_2 の完全内部に含まれる閉集合である場合, Δ_1 内に或る対数容量正の集合 e があって, e のすべての点 x' に対して $E(x')$ が一点であれば, 同様の結論が得られる.』

『同様の状勢のもとで, e のすべての点 x' に対して $E(x')$ が高々有限個の点であれば, E は代数型函数のグラフである.』

これがジェネバ湖の畔における研究である. ただし最初は条件として, 対数容量正の集合ではなく, 或る連続体と仮定されている.

5. (H) **集合の導集合.** この研究は在仏中にさらに進められ, (H) 集合の "解析的導集合" の概念が導入されて, 切り口が可算個の点より成る場合に迄一般化されている.

1930 年，René Baire の有名な著書

Leçons sur les fonctions discontinues, Paris Gauthier-Villars.

が出版されている. ここで Baire は連続函数の各点収束の極限函数がどの程度の不連続性を持つかと言う問題を研究しているのであるが, そのなかで超限順序数の概念を明らかにし, 任意の点集合の超限順序数階の導集合を考えている.

岡先生はこのアイデアを早速 (H) 集合の研究に応用された.

E を或る領域 $\mathfrak{D}$ における (H) 集合とするとき, E の点には, その点の或る近傍で E が解析面であるようなものがあるであらう. それで, そのような点を点集合の孤立点のようなものとみなし, E からそのような点をすべて除き去った集合 E' を E の解析的導集合と名づける.

(H) 集合の導集合が又 (H) 集合になることは容易に確かめられる. さらに (H) 集合の減少列の極限も又 (H) 集合になる. この二つのことから, Baire のアイデアに沿って, 任意の超限順序数 α に対して E の α 階の解析的導集合 $E^{(\alpha)}$ およびその核 $E^{(\Omega)}$ を定義することができる. このとき, もし $E^{(\Omega)}$ が空集合になるなら, E は高々可算個の解析面の和集合になる.

このような準備の下で, 前節の記号を使って, 次のような命題が得られる.

『$E(x')$ が常に Δ_2 の完全内部に含まれる閉集合である場合, Δ_1 内に或る対数容量正の集合 e があって, e のすべての点 x' に対して $E(x')$ が高々可算個の点よりなるなら, Δ_1 のすべての点に対してそうなる.』

y 平面の点集合 $E(x')$ の通常の導集合と E の解析的導集合の関係から, 命題の条件の下で E の核 $E^{(\Omega)}$ が空集合になるというのである.

6. 劣調和函数と対数容量. Hartogs の定理の最初の拡張 (切り口が一点の場合) は, 切り口 $E(x')$ の直径が x' の対数的劣調和函数であることと, 劣調和函数は "ある程度の集合" 上で $-\infty$ なら恒等的にそうであることから導かれている. 岡先生は劣調和函数のこの性質を非常に重要視され, 恒等的 $-\infty$ を劣調和函数に含めるべきだとされた.

劣調和函数に対するその "或る程度の集合" として連続体を考えれば, その性質は正則函数の絶対値に関する有名な Carleman の不等式[6]により直ちに導かれる. 岡先生は先ずそれを条件とされ, その後, その事が成り立つ最小の集合を求めて対数容量正の概念に達せられた. これは De la Vallée Pousin の研究を知らずに, すべて独力でなされたと言うことであった. 残されている日本語の草稿の断片では, 対数容量正の集合が condensable, 対数容量零の集合が non condensable と呼ばれているのがその名残であろう.

なお, 実際にどのような集合が対数容量零や正になるかという問題では, Painlevé に負う "点的集合 (ensemble ponctuel)" に付いての精密な考察が成されている.

劣調和函数の上半連続性について, 岡先生は, 或る点に連続的に近づいたときの値の上極限がその点における値になると言う性質を発見しておられ, Hartogs の定理の第 2 の拡張 (切り口有限個) で使われている. その証明には 1 変数の函数論で有名な Köbe の 4 分の 1 定理が使われていて興味深い. なおその命題は岡先生の第 II 論文にも書かれている.

第 II 論文は我々にとっては難解であるが, このような (H) 集合の研究をすでにされていた先生にとっては, それほど大変な研究ではなかったとのことであった.

7. (H) 集合の極限. 一般な (H) 集合は多価解析函数のグラフの閉包とみなす立場から, その族や列の極限が研究されている.

先ず, 空間 (x, y) の或る領域 $\mathfrak{D}$ における (H) 集合の族 $\mathfrak{E}=\{E\}$ に対し, 空間におけるその極限集合 E_0 が考えられる. 次いで $\mathfrak{E}$ の各集合 E お

[6]例えば
T. Carlement, Leçon sur les fonctions quasi analytiques, Gauthier–Villars, Paris.
を見よ. なお, Carlemant の不等式は
G. Julia, Principes géométriques d'analyse, Gauthier–Villars, Paris
にも紹介されている.

よび極限集合 E_0 の $x=x'$ による切り口 $E(x')$ および $\mathfrak{H}(x')$ が考えられ, さらに各 x' に対して y 平面における $E(x')$ の族の極限集合 $\mathfrak{K}(x')$ が考えられて, それらの間の関係が考察される. 得られた結果は次の二つである.

『E_0 も又 (H) 集合である.』

『$\mathfrak{H}(x')$ の方が $\mathfrak{K}(x')$ より実際に大きくなるような x' は, x 平面の長さのある任意の曲線上で高々メジャー零である.』

岡先生はこれらを多価解析函数の非解析的な収束と考えておられる. 実際, これらの結果を使って, Stieltjes の定理の多価函数への拡張が述べられている. なお Vitali の定理のそれは代数型函数ですら成り立たない例が挙げられている.

3. 論文草稿の続き具合

岡先生のこの研究は, 未来への発展の契機を秘めながら, 一応完結している. 然し書かれた論文は完結していない. それで最後にこの論文の続き具合と 1934 年に公表された Note の内容との対応を簡単に述べておく.

1°. 他の論文の序文もそうであるが, この論文の序文も岡先生の研究の主観的内容が詳しく書かれていて非常に興味深い. その後に Résumé として, 第 IV 章迄のタイトルと各章の節のタイトルが書かれている. 一度はその計画通りに論文を纏めるつもりでおられたのであろう. しかし, その計画通りに書かれているのは第 I 章と第 II 章だけであり, それ以後はこの計画通りには書かれていない. この二つの章は序文から続く小節の番号も 1 から 30 と続いている. Note の I は丁度この第 I 章に当たる. この第 II 章は Note では III の初めに要約されている.

2°. Résumé の第 III 章はタイトルが (H) 集合の性質 となっており, 節のタイトルから, ここに Hartogs の定理の拡張が書かれる予定になっていたらしい. しかし論文草稿に第 III 章はなく, 前後には繋がらない II があって, そこには (H) 集合の定義や基礎的な性質の解説が書かれている. この部分の小節の番号は 24 から 32 となっている. II の内容は Résumé の第 III 章の第 1 節に相当するのかもしれない. Note の III の補題はここに書かれている.

3°. 論文の第 IV 章, 第 V 章および第 VI 章は小節の番号が 45 から 82 と続いている. しかし内容は, 第 IV 章が Résumé の第 IV 章に当たる. Note でそれに当たるのは II である. そして第 V 章と第 VI 章が Résumé の第 III 章の 2 節と 3 節に当たると思われる. なお, 第 VI 章は途中で終わっており, Hartogs の定理の第 3 の拡張 (切り口が可算個の場合) は未だ書かれていない. それがこの続きに書かれたとすると, 第 V 章が Note

の III の定理 5 に対応し, 第 VI 章がその定理 6 に対応する. しかし実際には, 第 VI 章の内容は (H) 集合の解析的導集合の解説だけに終わっている. Note にはこの部分は書かれていない.『書き忘れたのだ』と言っておられた.

4°. 日本文の論文草稿の内容は (**H**) 集合の定義から始まり, Hartogs の定理の拡張が, 切り口が可算個の場合まで完全に書かれている. ただし対数容量の概念は使わず, 連続体を条件に使って書かれている. この部分はこれだけで完結しているので, 或いはフランスで書かれたのかもしれない.