解析的に生成される 4 次元の点集合について.[1]

岡　潔

概　観.

1. 私はこの論文で, 複素 2 変数の解析函数の理論から引き出される一連の興味あるイデーについて述べようと思う. その主要な駅亭 (étape) は次の如くである.

1902.— E. Fabry : Sur les rayons de convergence d'une série double. (C. R. Acad. Sc. de Paris, t. 134, p. 1190.)

1906.— F. Hartogs : Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreinten. (Math. Annalen, t. 62.)

1909.— F. Hartogs : Über die aus den singulären Stellen einer analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen bestehenden Gebilde. (Acta Mathematica, t. 32.)

1910, 1911.— E. E. Levi : Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse. (Annali di Mathematica, tt. 17 et 18, série III.)

1926.— G. Julia : Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables. (Acta Mathematica, t 47.)

1932.— H. Cartan et P. Thullen : Zur theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. (Math. Annalen, t. 106)

これらの研究から, 中心的なイデーとして, 次の基本的な概念を抽出することができる.

定義. — $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ $(i = \sqrt{-1})$ を二つの複素変数とする. (x_1, x_2, y_1, y_2) を直交座標系とする 4 次元の空間を考え, それを単に (x, y) と表す. E をこの空間の領域[2] Δ 内に定義された点集合とするとき, もしそれが次の性質を持つなら, それを発見した F. Hartogs 氏の名前に因んで, クラス (H) に属すると言うか, またはもっと直接に (H) 集合と名づける :

[1] この論文において, "Sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc." なる表題のノートに私が予告したことの全てを導く.

[2] "領域" という言葉で常に開で連結な集合を意味する.

1°. E は閉集合である.[3]

2°. O を任意に取られた空間の点とする. E の任意の点 P_0 の任意の近傍内に,

$$\underline{\text{Distance}}\ \ OP_0 < \underline{\text{Distance}}\ \ OP$$

を満たすような, E の点 P を見つけることができる. (点 O と P_0 は有限の位置にあると考えている.)

3°. 上記の性質はすべての 1 対 1 解析的な写像によって保たれる.

より正確には, もし Δ に含まれる或る領域 (ω) が (ω) で定義された 1 対 1 解析的な写像によって E の部分と共に移されたなら, その移された部分もまた新しい領域に対して上記の性質を保つ.

上記の諸論文で, この概念が次々と一般な形を取り, また多様化していく姿が伺えるであろう.

2. この論文の目的は, この (H) 集合を複素 1 変数の解析函数論の観点から研究することである. この観点の下で上記の諸研究を観察するため, 先ずそれらに立ち戻ろう. そうすれば自然に研究するべき問題に導かれるであろう.

A. — (H) 集合の例.

1°. $f(x,y)$ を空間 (x,y) の領域 Δ における解析函数の或る分枝とする. Δ の点に対し, その点を中心とする十分小さい超球を, $f(x,y)$ のすべての分枝がその中で正則となるように描けるかどうかによって, その点を 2 種類に分類する. この後者の点集合は領域 Δ に対する (H) 集合を作る. (Hartogs 氏.) [訳注. Hartogs は多価函数を考えていない. 次の Levi も同様である.]

2°. 上記の結論は "正則" という言葉を "有理型" に置き換えても成り立つ. (E. E. Levi.)

3°. 領域内に複素 2 変数の正則函数の族が与えられたとき, その族の (J) 点 [訳注. その族が正規でなくなる点] の集合はその領域に対する (H) 集合を作る. (Julia 氏.)

ごく最近, Cartan と Thullen の両氏は, 前掲の論文で, 最後のカテゴリーの集合は最初の二つのカテゴリーに含まれることを示した. 彼らはそれを $\mathfrak{K}$–凸状の概念を導入する事でなし遂げた. このように二つの相反する傾向, すなわち (H) 集合の多様性とその同一性を与える傾向が存在す

[3] ここで, Δ の境界上にある E の部分は問題外である.

る．ここで, 私に興味があるのは, 種々のカテゴリーの独立性を示すような例および性質は発見されていないことである．さらに Julia 氏以外のすべての著者によって採用された方法がローラン級数に限られていることもまた興味あることである．

B. — (H) 集合の性質. (H) 集合の主要な性質は Hartogs 氏と E. E. Levi 氏によって発見された．特に Hartogs 氏のそれは我々の観点から非常に注目すべきものである．それを次のように理解することができる：

$\mathfrak{H}(x)$ を或る (H) 集合の $x = \text{constante}$ なる形の固有平面による切り口とする． この $\mathfrak{H}(x)$ は x に依存して定まる y 平面上の可変な集合 (ensemble variable) として表される．ここで, Hartogs 氏は $\mathfrak{H}(x)$ が或る点で解析函数 $f(x)$ と全く同様の振る舞いをすることを示したのである．

C. — Cartan–Thullen 両氏の研究に関する注意. 上記の研究群の中で (H) 集合の果たす役割は実に基本的である．実際先に定式化した三つの性質から他の殆どすべての性質が導かれる．しかし唯一の例外が Cartan と Thullen 両氏の研究にある．そこには "解析函数の種々のクラスに関する凸性" の全く新しい性質がある．このクラスという言葉には特別な意味が込められている．この概念が特に興味あるのは, それがクラス (H) の或る重要な部分クラスを定義する可能性をほのめかしていることである．それにも関わらず, それが大域的な条件であることを考慮して, 私はこの研究の基礎としてそれを採用することはしない．(切り口 $\mathfrak{H}(x)$ のような解析函数 $f(x)$ に対する条件は局所的である.)

3. 以上, 我々は (H) 集合に対し, それがどのように生成され, それらがどのような性質を持つかを見てきた．これはまた私が研究しようとしている二つの点でもある．

すでに注意したように, (H) 集合が出てくる既知のソースはローラン級数であった．さらに Cartan と Thullen 両氏が $\mathfrak{K}$–凸状の概念を抽出したのも同じ級数である．しかし他のソースは存在しないのか．これに対し, 私は第 I 章で Cousin (Acta, 1895) の一意化 (uniformisation) の方法による全く新しい原理を与えようと思う．ここでは "固有面の面積" という唯一の量しか使っていない．この原理によって (H) 集合の新しいカテゴリーを付け加える．すなわち,

固有面の族[4]が与えられたとき, 曲面の面積が全体として有界でなくなる点は (H) 集合を作る．

この基本原理のお陰で, 固有面の族または有理型函数 $f(x, y)$ の族に関する特異点 (points irréguliers) の, クラス (H) に属するような, 種々の集

[4]ごく自然な或る条件を満たしている．

合を見出すだろう. それらは殆どすべて上記のカテゴリーに属する. それらの中に Julia 氏のカテゴリーも見られる.

新しいカテゴリーはまた $\mathfrak{K}$–凸状の概念に結びつくだろうか. ここでそれに的確に答えることは, 私にはできない. しかし, 例え結びつくとしても, 証明の道筋は直接的なものではないと私は思う.

4. (H) 集合の, $x=0$ に平行な平面によるセクション $\mathfrak{H}(x)$ は, すでに見たように, x に依存する y 平面上の可変な集合である. $\mathfrak{H}(x)$ のメトリカルな性質は何か? これこそ私を非常に引き付けた問題である. 何よりも先ず それはどのような具体的な形で捕らえられるか? 第 III 章はこの問題を研究することから始まる. 私はそこで E. E. Levi の研究に基づく一般的な原理を確立し, さらに, そこから他のメトリカルな性質を導く. しかしそれらはすべてすでに知られた結果からそれほど遠い訳ではない. 他の何かもっと高度に精密なメトリカルな原理はないだろうか? また逆に, それに対して先ずクラス (H) の何か適当な部分クラスの研究が必要なのではないか? 私はもう一度ここに戻ってくる機会のあることを願っている.

今は上記の問題の或る特別な場合, しかし十分顕著な場合に留まる事にしよう. Hartogs 氏は (Acta, t. 32 の中で) もしセクション $\mathfrak{H}(x)$ が一価函数であれば, それは解析函数であることを示した. この定理は $\mathfrak{H}(x)$ を解析函数 $f(x)$ の一般化と考えるとき, 特に大切である. ところで上記の条件は次の点で重過ぎる事に気付くだろう :

1°. ここでは $\mathfrak{H}(x)$ が一価であると仮定されている.

2°. さらに, その条件が x 平面上の $\mathfrak{H}(x)$ の存在域全体で仮定されている.

これらの点でこの条件を軽減することはできないか? これに対して私は第 III 章で同じ章の初めに得られる結果を使って, Hartogs 氏の定理の一連の一般化を与えるであろう. もっと一般な場合における $\mathfrak{H}(x)$ の振る舞いを調べるためには, 上記のメトリカルな性質はまだ十分詳しくはないと私は思う.

第 II 章は第 III 章のための準備である.

5. 上の研究に深く関係した別の問題がある. 多価性について何の制限も置かない場合, 解析函数 $f(x)$ の族はどのように振る舞うか? 私は Julia 氏がこの問題を提起した最初の人であり, しかも彼はそれを研究した唯一の人であると思う. (前掲) ところで, 一価函数の場合から多価函の場合に移ると, 全く新しい状況, すなわち 本質的に異なる二つの収束様式 : 言わば解析的な収束と非解析的な収束が存在することに遭遇する.

第一の解析的な収束は第 I 章で研究されるが, そこでは $f(x)$ の族が正規であるための定義と判定条件および, (J) 点の集合が上に定式化したカ

テゴリーに属するという事実が見られる. これらの全ては基本原理の直接的な結果である.

収束の第二の様式は, 第 III 章の結果を使って第 IV 章で研究される. ここではなににもまして Stieltjès 氏の古典的な定理および元のものよりも格段に拡げられた形の定理を再発見するだろう. この章の結果の全てはこの場合のみではなく, (H) 集合のセクション $\mathfrak{H}(x)$ に対しても成り立つ.

ここで, 私のフランス滞在期間中における研究に対する助言に対して Gaston Julia 氏に感謝の意を捧げる.

要　約

第 I 章. — 1 変数多価解析函数の正規族.

1. Cousin 氏の方法に負う基本原理.
2. 解析的収束.

第 II 章. — 予備.

1. 劣調和函数に関する予備的研究.
2. 容量零又は正の集合に関する概念. (定義 — 1 変数解析函数の理論におけるこの分類の位置 — 例)

第 III 章. — (H) 集合の諸性質.

1. 一般的性質.
2. Hartogs 氏 の定理の最初の一般化.
3. 可算無限多価の場合への移行.

第 IV 章. — セクション $\mathfrak{H}(x)$ の列

1. 予備的研究.
2. Stieltjès 氏の定理の一般な形.

第 I 章.

1 変数多価解析函数の正規族.

固有面の基本概念.

序文で述べた様に, 私は複素 1 変数の解析函数を, 一般な多価性のもとで研究しようと思う. そうすると変数の中で特別な一つを独立変数に選ぶ理由は何も無いから, 私は函数それ自身よりも 4 次元空間における函数の軌跡 (trace) を考える方が良いと思う. そうすればさらに空間の任意の領域を考えることができる. 何よりも先ずそれらの軌跡を調べよう.

6. — 定義. $f(x)$ を複素変数 x の解析函数とする. それの Riemann 面 $\mathfrak{R}$ 上の任意の点に対して, 空間における $y = f(x)$ なる点 (x, y) が対応する. x が $\mathfrak{R}$ を描くと, その点 (x, y) は 2 次元の曲面 (variété) S を描く. それを固有面 (surface caractérisque) と呼ぶ. [訳注. 現在解析面と言われているものよりは, 随分広いものが考えられている.] この種の面の中に $x = \text{constante}$ の形の平面を含める.

函数 $f(x)$ は $\mathfrak{R}$ 上の解析接続の道によって繋がった, 正則, 極および代数的な要素から成っていると考える. したがって固有面 S 上には固有面要素 (élément caractériatique) と呼ばれるものと解析接続の道が存在する. 空間 (x, y) の無限遠点は 2 次元と仮定されており通常のものである. [訳注. 複素変数 x と y の Riemann 球面の直積を考えている.]

固有面要素. — 解析要素は, 定義により, べき級数と収束円からなるのだから, 或る不都合が生じる. すなわち上のように定義された固有面要素は独立変数の選び方に依存する. それをなくすため, 中心の同じ二つの固有面要素は中心の近傍に無限個の共通点があるとき同等であるとみなすという約束を付け加える. “中心” とは $\mathfrak{R}$ 上の解析要素の中心に対応する S 上の点のことである.

面 S の, 有限にある, 点 (x_0, y_0) は, その点を中心に持つ固有面要素が

$$y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots ,$$
$$x - x_0 = b_1(y - y_0) + b_2(y - y_0)^2 + \cdots$$

なる形のどちらか一つの式によって表せるとき, 通常 (ordinaire) または 正常 (régulier) と言う. そうでないとき, (x_0, y_0) は代数的危点 (point critique algébrique) である. この命名法に従うと, S 上の同じ点が同時に二種類 (deux sortes) の点として表現されうることを注意しなければならない. [訳注. 不明. 局所的に可約な場合のことであろうか ?]

固有面の点とその極限点よりなるすべての集合を 閉固有面 と呼ぶ.

領域における固有面. — Δ を空間 (x,y) における或る領域とする. 領域 Δ における固有面という言葉で, どの二つも領域内に含まれる道に沿って一方から他方へ解析的に延長できるような, Δ に含まれる固有面要素の全体よりなる 2 次元の曲面 (variété) を表すこととする. もし何か紛らわしいことがあればこの曲面を解析的に一続きであると言うこととする.

7. — 例. 全く一般な固有面の振る舞いは大変複雑である. それはこの論文の範囲からはみ出る. 次のような例がある.

例 1. — α を正の無理数とし, 全空間で, $y=x^{\alpha}$ によって表される固有面 S を考えよ. Σ をその閉固有面とする. そうすると S に属さない Σ の点の全体は Σ 上で稠密である.

それにもかかわらず Σ はクラス (H) に含まれる.

例 2. — $\mathfrak{D}'$ を y 平面上の領域であって, 重複点のない, いたるところ非解析的な Jordan 閉曲線によって囲まれたものとする. $\mathfrak{D}'$ を関係 $y=f(x)$ によって $|x|<1$ へ等角に写像する. この方程式に対応する閉固有面 Σ は有界な部分に留まる. しかしそれは全空間に対してクラス (H) には属さない.

もし第 III 章の定理を認めるなら, 次の興味ある事実が得られる : $\mathfrak{D}$ を x 平面の $|x|\leqq 1$ を含む領域とする. 領域 ($x\in\mathfrak{D}$, y は任意) に対し, 元の領域 ($|x|<1$, y は任意) で Σ と一致するクラス (H) の集合は, $|x|=1$ であるような点 (x,y) のすべてを含む自明なものを除いて, 存在しない. それを次のように言い表すことができる :

函数 $f(x)$ は我々の意味においても[5]単位円を越えて延長することはできない.

上記の例から, 我々は次の定義に導かれる.

定義. — 領域 Δ に固有面 S が与えられたとき, Δ に含まれる領域 V における複素 2 変数 x, y の正則函数 $F(x,y)$ が存在して, S の V 内の部分が方程式 $F(x,y)=0$ によって与えられるなら, $F(x,y)$ を S の V に対する随伴函数と呼ぶ. それは常に一つの 正則函数 としなければならない.

我々はこの概念によって S 上の点を 2 種類に分ける : S の点は, もしその点を中心とする超球を, それに対する随伴函数が存在するように描けるなら, それを 第 1 種 と呼ぶ. 逆の場合は, その点は 第 2 種 である.

例 1 における固有面は第 1 種の点を全く含まない. この章では第 2 種の点を含まないような固有面に限る. そうするとそれは明かにクラス (H) に属する.

[5]すなわち, 先に述べたセクション $\mathfrak{H}(x)$ で考えても

8. — 固有面の面積.

この量が本章で占める位置の重要さについてはすでに述べた．先ず次の素朴な性質がある：

(e) を空間の有限部分における固有面要素とする．それは常にパラメータ表示による方程式

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t)$$

によって表される．$\varphi(t)$, $\psi(t)$ は $|t|<1$ における, 複素変数 t の正則函数であり, t がこの円板を一度描くと, 点 (x,y) は要素 (e) を一度描く．

x, y, t の実部と虚部を

$$x=u_1+i\,u_2, \qquad y=u_3+i\,u_4,$$

$$t=t_1+i\,t_2$$

と表す．ここで $i=\sqrt{-1}$ である．空間 (u_1,u_2,u_3,u_4) は定義によって直交座標だから, 面 (e) の面積要素は

$$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,dt_1dt_2$$

で与えられる．ここで

$$E=\sum\left(\frac{\partial u_j}{\partial t_1}\right)^2, \quad G=\sum\left(\frac{\partial u_j}{\partial t_2}\right)^2, \quad F=\sum\frac{\partial u_j}{\partial t_1}\frac{\partial u_j}{\partial t_2}$$

$j=1,2,3,4,$ である．これは Cauchy–Riemann の条件によって,

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left[\left|\frac{dx}{dt}\right|^2+\left|\frac{dy}{dt}\right|^2\right]dt_1dt_2 \\ &= d\sigma_x+d\sigma_y \end{aligned}$$

に帰着する．

このように, <u>固有面上の任意の部分の面積は, それの x, y 平面への射影の面積の和で与えられる</u>.

I. Cousin 氏の方法に負う基本原理.

最初に出会う問題は固有面を一意化 (uniformsée) することである．そのためには幾つかの古典的な方法を想起するであろう．私はそれらの中で前掲の Cousin 氏の方法が我々の目的に対して最適であると思う．ところで Cousin 氏の方法にはある任意性を含んでいるため, その最も適した

(favorable) 方法を定め, そこで生じる量の幾何学的な意味を明らかにすることから始めよう.

9. — 切り取られた Riemann 面. S を空間 (x, y) の或る領域における, 第2種の点を全く含んでいない固有面とする. (C), (C') をそれぞれ平面 x, y 上の円板とし, その領域の完全内部に含まれる双円筒 $[(C), (C')]$[6]内にある S の部分を正確に記述しよう. その部分の x 平面への射影は図のように切り取られた Riemann 面である. それを $\mathfrak{R}_x$ と表す. ここで簡単のため, 固有面 S は $x = \text{constante}$ の形や $y = \text{constante}$ の形の平面ではないとし, 双円筒は円 $|x| < R$ と $|y| < R'$ で構成されていると仮定する.

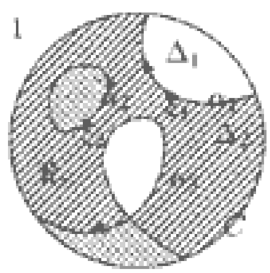
境界 α. — $|\xi| < R$ かつ $|\eta| = R'$ なる S 上の点 (ξ, η) の軌跡は一つ, 又は幾つかの有限個の曲線である.

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_p,$$

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j, \ldots, \beta_p$$

をそれぞれその曲線の x 平面および y 平面への射影とする. α_j, β_j は S 上の同じ曲線に由来する. ここでこれらの β は円周 C', $|y| = R'$ 上にあり, これらの α は, 前の仮定により, 実際に (x 平面上の) 曲線を表す. $\mathfrak{R}_x$ の境界は曲線 α と円周 C, $|x| = R$ よりなることがわかる. ここで α の正の方向を定義しておこう. x' が曲線 α を或る方向に動いたとき, 点 (x', y') が S 上にあるような点 y' が, C' を正の方向に動くなら, それを曲線 α の正の方向とする.

Fig. 1



領域 Δ. — ここで次の約束をする：厳密には α は Riemann 面上に定義されているだけだから, それらの x 平面への射影は, それらの一つが他のものの真上に落ちることがある. しかし, 無用な複雑さを避けるため, 常に α の異なる二つは, 同じ座標を持つ点を高々有限個しか含んでいないような書き方をする.

x 平面上でこのように考えられたこれらの α は円 (C) を幾つかの領域

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_q$$

に分割する. 各 Δ_j に対し, $\mathfrak{R}_x$ の葉数はいたるところ同じである. それを j' と表す. 二つの領域 Δ_j, Δ_k はそれらの境界の一部分を共通に持っ

[6] これは双円筒がその境界と共に存在域の中に含まれていることを意味する. 同様の言い方は常に同じ意味でしばしば用いられる.

ているとき, 隣接していると言う. いま Δ_j, Δ_k は α_l で分けられて隣接しているとする. そうすると

$$k' = j' \pm 1$$

である. k' は $\mathfrak{R}_x$ の Δ_k 上の葉数であり, ± 1 は α_l の方向によって決まる. 例えば, 図の中で $2' = 1' + 1$ である.

<u>Δ と α に付随する函数</u>. — Δ_j の中のすべての x には, 点 (x, y_{j_ν}) が S 上の点であるような (C') 内の j' 個の点

$$y_{j1},\, y_{j2},\, \ldots\, ,\, y_{j\nu},\, \ldots\, ,\, y_{jj'}$$

が対応する. x を元の位置の近傍における変数と考えると, それらの $y_{j\nu}$ は x の, 一般には [訳注. 分岐点を除いてという意味] 正則な函数を表す. それで, 領域 Δ_j に

$$\begin{aligned} &\varphi_j(x, y) = (y - y_{j1})(y - y_{j2}) \cdots (y - y_{jj'}) && j' \neq 0 \ \text{なら} \\ &\varphi_j(x, y) = 1 && j' = 0 \ \text{なら} \end{aligned}$$

なる複素 2 変数 x, y の正則函数 $\varphi(x, y)$ を対応させる.

次に, x を Riemann 面上で考えた曲線 α_j 上の任意の点とする. そうするとそれに β_j 上のただ一つの点 y_j が対応する. それは α_j に付随する函数 $y_j(x)$ を定める. ここで これらの函数 $y_j(x)$, $j = 1, \ldots, p$ は Riemann 面上の曲線 α のすべての点で, 逆函数と共に正則であるという仮定を置く. これは半径 R' をごくわずか適当に縮めるだけで常に実現することができる.

最後に, 図の中では

$$\varphi_2 = (y - y_1)\varphi_1$$

が得られる. この事は隣接した領域のすべての対に対してそうである.

10. — Cousin 氏の方法 Riemann 面 $\mathfrak{R}_x$ に表題の方法を応用しよう. ここでは証明のディテールの大部分を原論文にゆだねることで満足する.

<u>曲線 α に付随する積分 I</u>. — 我々の目的は随伴函数 $F(x, y)$ を, 或る意味で, $\log |F(x, y)|$ が S の面積に対して両側から<u>線形的</u>に評価できるように作ることである. そのために曲線 α を次のように弧 δ に細分しよう.

α_μ を開曲線とする. この曲線の始点 ξ_μ には C' 上のただ一つの点 η_μ が対応している. y が η_μ から出発して円周 C' を正の方向に一周すると,

それが可能なら, 点 x は弧 $\delta_1^{(\mu)}$ を描く. その終点を $a_1^{(\mu)}$ と表す. y がその過程を繰り返すと, x は点 $a_1^{(\mu)}$ から点 $a_2^{(\mu)}$ までの新たな弧 $\delta_2^{(\mu)}$ を描く. 以下同様. [訳注. y が一周できないときはその部分を一つの弧としておけばよい.]

閉曲線 α_ν に対しては, 出発点として曲線上の点 ξ_ν を勝手に定めれば, 同様の方法で分点 $a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \ldots$ によって α_ν は弧 $\delta_1^{(\nu)}, \delta_2^{(\nu)}, \ldots$ へ分割される. ただこの場合, α_ν の始点 ξ_ν も分点とみなさなければならない.

弧 δ_j 上で, 正の方向に, 次の積分を考える：

$$(2) \qquad I_j(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_j} \frac{\log[y-y_j(t)]}{t-x}dt,$$

i は $\sqrt{-1}$ であり, $\log[y-y_j(t)]$ の分枝は次のように取る[7]：y が (C') 内に留まり, t が Riemann 面上で考えられた δ_j から出ない限り, この函数のすべての分枝は一価であるから, ただ一つの任意性, すなわち t が δ_j の始点にあり, y が原点にあるときの初期値 l_0 があるだけである. それでその初期値を, $\log R'$ を実数として

$$(3) \qquad l_0 = \log R' + i\,\theta_0 \qquad -2\pi < \theta_0 \leqq 0$$

と定める.

そうすると積分 $I_j(x,y)$ は曖昧さなく定まり, x が δ_j の外にあり, y が (C') の中に留まっている限り, 有限である.

<u>積分 I の性質</u>. — 1°. $\mathfrak{D}$ を δ_j とは交わらない (C) 内の領域とすると, $I_j(x,y)$ は $[\mathfrak{D},(C')]$ 内で, 変数 x, y の正則函数である.

2°. ξ を端点ではない δ_j の点とする. ξ を境界点とするような領域 $\mathfrak{D}$ 内で $I_j(x,y)$ によって定義される函数はすべて δ_j を越えて ξ の近傍へ解析接続される. y は (C') から出ないと仮定されている.

解析接続のあり方をもっと正確に見るため, 図 1 に戻って, そこの部分 $(\Delta_1, \alpha_1 = \delta_1, \Delta_2)$ を見よう. 点 ξ には $I_1(x,y)$ によって作られる二つの解析函数があり, その一つは Δ_1 から, 他の一つは Δ_2 から来る. その始めの方を $I_{1,1}(x,y)$, 後の方を $I_{1,2}(x,y)$ と表すと, $|y| < R'$ に対して容易に

$$(4) \qquad I_{1,2}(x,y) = I_{1,1}(x,y) + \log[y - y_1(x)]$$

であることが分かる. この関係は任意の隣接した二つの領域に対して成り立つ.

3° 積分 I を分点 a_j において考えよう. a_j を δ_μ の終点で, δ_ν の始点であるとする. $|y| < R'' < R'$ で与えられる円 (C'') を描く. R'' は R' の十

[7] ここで $y_j(t)$ は δ_j がその部分であるような曲線 α に付随した函数である.

分近くに取る. (C'') に対応して a_j を中心とする円 (γ) を, $\log[y-y_k(x)]$ のすべての分枝が $[(\gamma),(C'')]$ で正則になるように描くことができる. k は問題の曲線 α のインデックスである. t_1, t_2 をそれぞれ (γ) 内の δ_μ, δ_ν の点とする. 積分を次のように分割する：

$$I_\mu(x,y)+I_\nu(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{t_1}^{a_j}\frac{\log[y-y_\mu(t)]}{t-x}dt \\ -\frac{1}{2\pi i}\int_{t_2}^{a_j}\frac{\log[y-y_\nu(t)]}{t-x}dt+\chi(x,y).$$

そうすると函数 $\chi(x,y)$ は, (1°) により, $[(\gamma),(C'')]$ で正則である.[8]

さて, I の定義により, $[(\gamma),(C'')]$ 内で関係式

$$\log[y-y_\mu(t)]-\log[y-y_\nu(t)]=2\pi i$$

が得られる. i は $\sqrt{-1}$ である. このことから

$$(5)\qquad I_\mu(x,y)+I_\nu(x,y)-\log(a_j-x)$$

はこの双円筒内の正則函数であることが導かれる.[9]

S に付随する函数 $F(x,y)$. — さてすべての領域 $[\Delta_n,(C')]$, $n=1,2,\ldots,q$ に対して函数

$$(6)\qquad F_n(x,y)=\varphi_n\cdot e^{-\sum I_j}\cdot\prod(a_k-x)$$

を考える. ここで $\sum$ はすべての弧 δ_j にわたり, $\prod$ はすべての分点 a_k にわたる. 先ず $[(C),(C'')]$ の中で考える. (C'') は (C') と同心の円で, その半径は (C') の半径より小さい. 積分 I の性質 (1°) により, すべての函数 $F_n(x,y)$ は $[\Delta_n,(C'')]$ で正則である. そして (2°) と (3°) により, Δ_n の境界 α 上でもそうである. Δ_m, Δ_n を境界 α_j を共有する二つの隣接した領域とする. ここで 式 (1) と (4) を同時に思い出すなら, 直ちに, α_j 上のすべての x で

$$F_m(x,y)=F_n(x,y)$$

であることが分かる. このように 函数 $F_n(x,y)$ は寄り集まって $[(C),(C'')]$ 内の, 従って双円筒 $[(C),(C')]$ 内の正則函数 $F(x,y)$ を定義する.

さて, 式 (6) に対し, 因子 $e^{-\sum I}\prod(a-x)$ は $[(C),(C')]$ 内で決して 0 にはならない. 従ってすべての領域 $[\Delta_n,(C')]$ 内で方程式 $F_n(x,y)=0$ と $\varphi_n(x,y)=0$ は同等である. それは C 以外の Δ_n の境界でもそうである.

[8] ここではインプリシットに a_j は平面上で α_k の通常点と仮定されている. そうでない場合の補正は明らかである.

[9] Cousin 氏の論文 (Acta. 1895) の I 章の終わりを見よ.

このようにして，函数 $F(x,y)=F_n(x,y)$ は固有面 S の，双円筒 $[(C),(C')]$ に対する随伴函数を与えることが分かる．

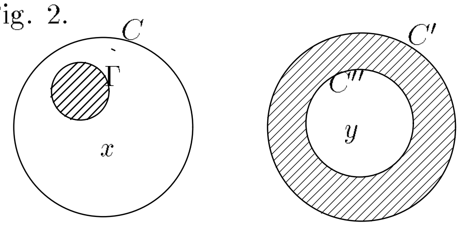
函数 $F(x,y)$ は，固有面 S と双円筒 $[(C),(C')]$ を与えるなら，閉曲線 α の始点も込めて完全に定まる．函数 $\varphi_n(x,y)$，積分 I_j および点 a_k の個数の幾何学的な意味は明白である．

注意 1. — 容易に分かるように，上の結論は，曲線の射影 α で，一つが他に重なるときも，細部に到るまで成り立つ．それを簡単に見たいなら，曲線 C' が円周であることは使われていないので，この複雑さを避ける一番簡単な方法は C' を少し変形することである．

注意 2. — 我々は筒状域 $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ の中で双円筒を選んだ．しかしこれは簡単のためだけである．本質的な条件は $\mathfrak{D}'$ が単連結なことである．[10]

11.　基本補題. — x 平面上に円 (C) と (Γ) を描き，(Γ) は (C) の内部にあるとする．そして y 平面上に同心円 (C')，(C'') を描く．(C') は (C'') を含む．S を双円筒 $[(C),(C')]$ およびその境界を含むある領域に定義された第 2 種の点を含まない固有面とする．この状況のもとで，S の面積が次のように制限されているとする：

Fig. 2.



1°　x が (C) 内にあり，y が円環 (C'',C') 内にあるような筒状域において，それは Ω より小さく，

2°　双円筒 $[(\Gamma),(C')]$ に対しても同様であるとする．

そうすると固有面 S は双円筒 $[(C),(C'')]$ に対して次のように両側から制限される随伴函数 $F(x,y)$ を持つ：

1°　$[(C),(C'')]$ の内部に勝手に取られた領域内で

$$\log|F(x,y)| < A\Omega, \tag{1}$$

であり，さらに

2°　$[(\Gamma),(C'')]$ の内部に任意に描れた双円筒 $[(\gamma),(\gamma')]$ に対して

$$m_{(\gamma)}m_{(\gamma')}\cdot\log|F(x,y)| > -B\Omega \tag{2}$$

である．ここで $m_{(\gamma)}$ は円 (γ) に対する平均を表し，$m_{(\gamma')}$ は (γ') に対するそれである．そして A, B は或る正の数である．

[10] W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, II-1 を見よ．

実際, 円 (C), (C') は $|x|<R$, $|y|<R'$ で与えられていると考えてよい. さらに, 一般性を失うことなく $R \leqq 1/2$, $R' \leqq 1/2$ と仮定することができる. そうでない場合は, R_0 を (C), (C') の半径の大きい方として,

$$x' = \frac{1}{2R_0}x, \qquad y' = \frac{1}{2R_0}y$$

なる変換を施せばよい. この変換で S の面積は増大しない.

$\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$ をそれぞれ S の $[(C),(C'',C')]$ 内の部分に対応する x 平面上および y 平面上の Riemann 面とする. それらの面積を A_x, A_y と表すと,

$$A_y = \int_{\mathfrak{R}_y} d\sigma, \qquad A_x = \int_{\mathfrak{R}_y} \left|\frac{dx}{dy}\right|^2 d\sigma$$

が得られる. ここで $d\sigma$ は Riemann 面 $\mathfrak{R}_y$ の面積要素であり, $x(y)$ は S の上記の部分を定義する $\mathfrak{R}_y$ 上の函数を表す.

さて $A_x + A_y < \Omega$ であり, X を任意の正の実数とするとき $1+X^2 \geqq 2X$ である. これらのことから,

$$\int_{\mathfrak{R}_y} \left(1 + \left|\frac{dx}{dy}\right|\right) d\sigma < \frac{3}{2}\,\Omega$$

が導かれる.

$R'' < R_1 < R'$ として, 前のように S 上に $|\xi|<R$, $|\eta| = R_1$ なる点 (ξ, η) で描かれる曲線を考える. S が固有平面になるときは除かれている. その場合, 我々の命題の成り立つことは明らかである. 上記の曲線の x, y 平面への射影を同じ記号 α_j, β_j で表し, その長さをそれぞれ s_j, s'_j で表す. それらは全て半径 R_1 によって定まることに留意しておこう. そうすると上記の不等式から, 実数の区間 (R'', R') 内で

$$\sum (s_j + s'_j) < \frac{3\Omega}{2(R' - R'')} = K\Omega \tag{7}$$

を満たすような R_1 の値は連続体をなすことが導かれる. その中で α, β が Riemann 面上で特異点を持たないものを R_1 としてそれを固定する.

(C_1) は円 $|y|<R_1$ であるとして, 得られる双円筒 $[(C),(C_1)]$ に対して S に付随する函数 $F(x,y)$ を得るために前節で述べた方法を適用する. 以下, そこでと同じ記号を使う.

<u>$F(x,y)$ の上限</u>. —

$$\log|F| = u = u_1 + u_2 + u_3$$

と置く. ここで

$$u_1 = \log|\varphi|, \quad u_2 = \sum \log|a_k - x|, \quad u_3 = \Re\left[-\sum I_j\right]$$

であり, 演算子 $\Re$ は実部を取ることを意味する (6 式). 仮定 $R \leqq 1/2$ と $R_1 \leqq 1/2$ により, まず

$$u_1 \leqq 0, \qquad u_2 \leqq 0$$

である.

$[(C), (C_1)]$ 内に双円筒 $|x| < R - r$, $|y| < R_1 - r'$ を描く. ここで $0 < r < R$, $0 < r' < R_1$ である. (ξ, η) を新しい双円筒の任意の点とする. (C) 内に円 (γ), $|x - \xi| < r$ を作る. ここで変数 x の函数[11] $u(x, \eta)$ は劣調和であることを注意する[12]. このことから

$$u(\xi, \eta) \leqq m_{(\gamma)} \cdot u(x, \eta) \leqq m_{(\gamma)} \cdot u_3(x, \eta)$$

が得られる.

積分 I の形 (2 式と 3 式) を思い出そう. ここで $\log[y - y_j(t)]$ の虚部 θ が問題である.

Fig. 3

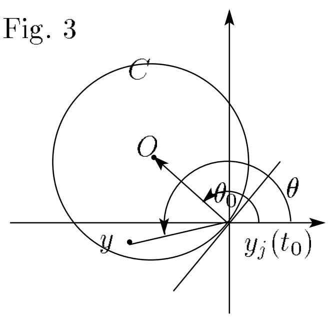
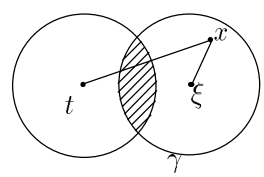


Fig. 4



1° 初期値 θ_0 は定義により $-2\pi < \theta_0 \leqq 0$ である.

2° 点 y が原点から現在の y に変り, t は最初の点 t_0 に留まると, θ の対応する変化量は, 3 図のように, 絶対値で $\pi/2$ を越えない.

3° y が固定されて, t が δ_j を正の方向に描くと, 偏角 θ は常に増大するが, I の定義から, その変化量は高々2π である.

このようにして,

$$|\theta| < \frac{5}{2}\pi$$

であることが確かめられる. したがって

$$L^2 = (-\log r')^2 + \left(\frac{5\pi}{2}\right)^2, \quad L > 0,$$

[11] この論文では複素 1 変数の函数という語は, 必ずしもそれが ” 解析的 “ であることを意味しない.

[12] 第 II 章を見よ.

と置き, δ_j の線素を ds として, 函数

$$v(x)=\frac{L}{2\pi}\sum\int_{\delta_j}\frac{1}{|t-x|}\,ds$$

を考えると

$$|u_3(x,y)|\leqq v(x)$$

が得られる.

さて, 4 図で明らかなように

$$m_{(\gamma)}\frac{1}{|x-t|}\leqq m_{(\gamma)}\frac{1}{|x-\xi|}=\frac{2}{r}$$

$$m_{(\gamma)}v(x)=\frac{L}{2\pi}\sum\int_{\delta}\left[m_{(\gamma)}\frac{1}{|t-x|}\right]ds\leqq\frac{L}{\pi r}\left[\sum s\right]$$

である.

このことから, 7 式を思い出して,

$$m_{(\gamma)}v(x)<\frac{KL}{\pi r}\Omega=A\Omega$$

が得られ, したがって $|\xi|<R-r,\ |\eta|<R_1-r'$ に対して

$$\log|F(\xi,\eta)|<A\Omega$$

が得られる.

平均の下界.— $[(\Gamma),(C_1)]$ の内部に双円筒 $[(\gamma),(\gamma')]$ を作る. (γ), (γ') はそれぞれ $|x-\xi|<r,\ |y-\eta|<r'$ で与えられる. ここで円周上の対数ポテンシャルの平均に関するよく知られた定理を思い出そう.

1° (x,y) が $[\Delta_n,(C_1)]$ の点のときには,

$$u_1(x,y)=\sum_{\nu=1}^{n'}\log|y-y_{n,\nu}(x)|$$

で与えられる函数 $u_1(x,y)$ に対し, まず

$$\pi\rho^2 m_{(\gamma)}n'<\Omega$$

であることを注意しよう. ところで

$$m_{(\gamma')}\cdot u_1(x,y)\geqq\frac{2n'}{r'^2}\int_0^{r'}\log\rho\,\rho\,d\rho=n'\left(\log r'-\frac{1}{2}\right)$$

である．したがって

$$m_{(\gamma)} \cdot m_{(\gamma')} \cdot u_1(x,y) \geqq \frac{\Omega}{\pi r^2}\left(\log r' - \frac{1}{2}\right) = -B_1\Omega$$

が得られる．

2° 函数 $u_2 = \sum \log|a_k - x|$ は y によらない．分点の個数 λ を計算することから始めよう．容易に

$$2\pi R_1 \lambda \leqq \sum s' < K\Omega,$$

であることが分かる．このことから

$$m_{(\gamma)} u_2 > \frac{K}{2\pi R_1}\left(\log r - \frac{1}{2}\right)\Omega = -B_2\Omega$$

である．

3° $u_3 = \Re[-\sum I]$ に関しては

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi}\sum \int_{\delta_j} \frac{\log|y - y_j(t)| - 5\pi/2}{|t-x|}\,ds$$

と置く．そうすると

$$u_3(x,y) > w(x,y)$$

である．

さてこの場合，すべての質量は (γ') の外にある円周 C_1 上に分布されているから，

$$m_{(\gamma')} w(x,y) \geqq \frac{1}{2\pi}\sum \int_{\delta} \frac{\log\alpha - 5\pi/2}{|t-x|}\,ds$$

が得られる．ここで $\alpha = R_1 - |\eta|$ である．このことから，積分の順序が交換できるので，

$$m_{(\gamma)} \cdot m_{(\gamma')} \cdot w(x,y) > \frac{K\Omega}{\pi r}\left(\log\alpha - \frac{5}{2}\pi\right) = -B_3\Omega$$

が導かれる．

このようにして，双円筒 $[(\Gamma),(C_1)]$ 内のすべての $[(\gamma),(\gamma')]$ に対して求めている不等式

$$m_{(\gamma)} \cdot m_{(\gamma')} \cdot \log|F(x,y)| > -B\Omega$$

に到達する．ここで $B = B_1 + B_2 + B_3 > 0$ である．(C_1) は与えられた円 (C'') を含んでいる． C. Q. F. D.

注意.— 上の定理は二つの部分を含んでいる.

1° 固有面の面積は或る性質を持つという事実,
2° 固有面の面積とその解析的な表現の間の関係.

この第1については次のより正確な命題がある.

S を双円筒 $[(C),(C')]$ における第2種の点を含まない固有面とし, この双円筒に対応する x, y 平面上の S に付随する Riemann 面をそれぞれ $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$ とする. Sが条件

1° $\mathfrak{R}_y$ の (C'', C') に対する面積は有界であり,
2° (Γ) 内の $\mathfrak{R}_x$ の面積も限られている

を満たしているなら, $[(C),(C')]$ 内の S の面積も上限を持つ.

これは私にはひどく興味ある性質であるが, それはこの研究の範囲外にあるので, 私はここでは証明をしないで, 定式化するだけで満足することとする. 証明は Cousin の方法とは独立に言い表すことができる. [訳注. 基本補題で (Γ) が設定されているのはこの命題のためであろう. この命題の証明は第 X 論文に書かれている.]

II. 解析的収束

12. — (H) **集合の新たなカテゴリー.** 有界領域 Δ に第2種の点を含まない固有面の族を考える. この族の面は, それが Δ 内で閉であるかぎり[13], Δ に対する (H) 集合を作ることは明らかである. ところで, そのような族の中で我々の観点からもっとも単純なのは, Δ の任意の完全内部で面積が有界なものである. (その振る舞いは次の節で研究する.) このことから次のようなカテゴリーの集合を抽出することができる.

4次元の有界な領域 Δ に対し, 第2種の点を含まない固有面 S の或る族が, S の面積において有界でなくなるような Δ の点 [訳注. その点の任意の近傍内で面積が有界でないような点] よりなる集合を Δ に対する $(\mathfrak{A})$ 集合と呼ぶ. ここで各 S は Δ 内で解析的に一続きでなくても構わない.

後にすべての $(\mathfrak{A})$ 集合はクラス (H) に属することを見るだろう. ところで, この概念は後の考察に対して実に基本的なものではあるが, それをもう少しモディファイして, 次のようなもう一つのカテゴリーを作る方が, 以下で生成される集合を記述するのにより便利である.

有界領域 Δ 内に閉集合 E が与えられたとき, E の点 P を次の2種類に分ける : もし, 集合 E が, P の近傍において, 第2種の点を含まない幾

[13] この言い方で, 常に境界と外部は問題外である.

つかの固有面 S よりなっており, それらの各 S の面積は全体として P で有界であるなら, その点 P を 第1類 (sorte) と呼び, そうではない E の点はすべて 第2類 と呼ぶ. [訳注. 1]

有界領域 Δ 内の閉集合 E に対し, もし E から第1類の点を適当に除くことによって, その領域の $(\mathfrak{A})$ 集合を作ることができるなら, それは Δ に対してカテゴリー $(\mathfrak{A}')$ であると呼ばれる.

すべての $(\mathfrak{A})$ 集合はクラス (H) に属するから $(\mathfrak{A}')$ 集合に対しても必然的にそうなる.

"解析的な収束" というタイトルのもとで, 先に確立した基本原理を使って, 固有面の族および有理型函数 $f(x,y)$ に対する族の振る舞いを解析し, $(\mathfrak{A})$ または $(\mathfrak{A}')$ に属する種々の集合を得ることを企てよう.

13. — 固有面の正規族.

定義. — 以下, 常に 有界 領域 Δ 内に定義された, 第2種の点を含まない固有面の族 $(\mathfrak{F})$ を考える.

P を Δ の点とするとき, もし P の近傍に次の条件を満たす正則函数 $F(x,y)$ の族が存在するなら, 族 $(\mathfrak{F})$ は P で正規と言われる.

1° すべての S に対し, S に付随する [訳注. その近傍に対して] 函数 $F(x,y)$ が少なくとも一つ存在する.

2° 函数 $F(x,y)$ の族は P で Julia 氏の意味で正規族を作る.

3° $F(x,y)$ の族は定数 0 を極限函数として持たない.

Δ' を Δ に含まれる領域とするとき, Δ' のすべての点で族 $(\mathfrak{F})$ が正規であれば, Δ' で正規であると言う.

領域 Δ の点であって, その点で族 $(\mathfrak{F})$ が正規でなくなるようなものをその族の (J) 点と言う.

ここで次の注意をする. もし Δ の点が, 面 S の族の極限点に含まれないなら [訳注. どの S もその点の或る近傍内に点を持たないなら], 定義により, $(\mathfrak{F})$ はその点で必然的に正規である.

注意.— ここで, 非常に簡単ではあるが, 以下でよく使われる補足を付け加える. 族 $(\mathfrak{F})$ は Δ の点 (x_0,y_0) で正規であると仮定する. そうするとこの族のすべての無限列 (Σ) から次の性質を持つ固有面の無限列

$$(A) \qquad S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_\nu,\ \ldots$$

を取り出すことができる. すなわち, 点 (x_0,y_0) を中心とする十分小さい超球 (ω) に対し, 列 (A) は (ω) 内で, 定数 0 ではない函数 $F_0(x,y)$ に一

様収束[14]するような随伴函数 $F_\nu(x,y)$ の列 (σ) を持つ．このような性質を持つ列 (A) に注目し，簡単のため，列 (A) は解析的且つ一様に収束すると言うことにする．

G. Julia 氏[15]にしたがって，先ず固有面の列 (A) の極限 S_0 は方程式 $F_0(x,y)=0$ で表されることが分かる．

収束の仕方をもっと正確に見よう．(ξ,η) を面 S_0 上の（超球内の）任意の点とする．それは実際に存在すると仮定する．簡単のため，S_0 は平面 $x=\xi$ を含まないと仮定する．これは一般性をなくすものではない．実際，そうでない場合は (ξ,η) を中心とする適当な解析的回転によって空間を回転させればよい．ここで Weierstrass と Rouché のよく知られた定理を思い出そう．それらにより，超球 (ω) の中に双円筒 (δ)，$|x-\xi|<r$，$|y-\eta|<r'$ を，次のように描くことができる．すなわち，或る番号から先の (A) のすべての固有面 S_ν $(\nu \geqq N)$ に対して，$a^\nu(x)$ を $|x-\xi|<r$ における正則函数，p を函数 $F_0(\xi,y)$ の，点 $y=\eta$ における零の位数として，

$$Q_\nu(x,y)=y^p+a_1^\nu(x)y^{p-1}+\cdots+a_p^\nu(x)$$

なる形の函数 $Q_\nu(x,y)$ を作り，$|x'-\xi|<r$ なるとき，y の方程式 $Q_\nu(x',y)=0$ は，$|y-\eta|<\eta$ なる条件のもとで，$F_\nu(x',y)=0$ と同等であるようにするとができる．これは殆ど明らかである．細部に対しては Julia 氏の論文を見て頂きたい．

上に述べた条件のもとで，列 (σ) の代わりに，随伴列

$$(B)\qquad Q_N(x,y),\ Q_{N+1}(x,y),\ \ldots,\ Q_\nu(x,y),\ \ldots$$

を取ることができる．この列 (B) は双円筒 (δ) の内部で一様収束することを言おう．

実際，先ず，函数 $Q_\nu(x,y)$ は全体で有界であるから，列 (B) は正規族に属する．他方，面 S_ν の列は S_0 に収束するから，この列も収束する．

正規族の判定． — 領域 Δ に第 2 種の点を含まない固有面の族 $(\mathfrak{F})$ が与えられたとき，Δ の点 P でこの族が正規であるための必要十分条件は $(\mathfrak{F})$ の面の面積が P において全体として有界なことである．

基本補題のお蔭で，この条件は明かに十分である．[訳注. 基本補題における Γ を C と取ればよい.] さらにこれは必要である．実際，そうでない

[14] この論文では "収束" という言葉はいつも広い意味で，すなわち従属変数の Riemann 球面上のそれで用いられる．"一様収束" についても同様である．

[15] 前掲の論文 62 頁

場合, P で正規であり, その点で面積が有界でない面 S の族 $(\mathfrak{F})$ を見つけることができる. そうするとその族から固有面の列

$$(\Sigma) \qquad S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_\nu, \ldots$$

を取り出し, 任意の ν に対して, P を中心とする半径 $1/\nu$ の超球内の S_ν の面積が ν より大きいようにすることができる. 他方, (Σ) は P において正規であるから, (Σ) の極限点 P, (ξ, η) を中心とする双円筒 $|x–\xi| < r$, $|y–\eta| < r'$ 内に, 上に示した性質を持つ標準な形の随伴函数の列

$$(B) \qquad Q_1(x,y),\ Q_2(x,y),\ \ldots,\ Q_\nu(x,y),\ \ldots$$

を持つ. そうすると, その双円筒内で S_ν の x 平面への射影の面積はすべての $\nu \geqq N$ に対して $p\pi r^2$ である. ここで p は ν によらない正の整数であり, N は十分大きく選ばれている. y 平面への射影についても本質的に差はない. この事から列 (Σ) の面 S_ν の面積は P で全体として有界であることが結論される. これは (Σ) の選び方に反する. したがってこの条件は必要である. C. Q. F. D.

14.— 固有面の族の (J) 点の集合. 有界領域 Δ 内に第 1 種の点しか含まない固有面 S の族 $(\mathfrak{F})$ を考える. 面 S の面積が全体として有界でない点の集合は 族の (J) 点の集合と一致することを見た. それを E と表す. この集合の性質を調べよう.

1° 集合 E は閉である : Δ の境界は常に問題外であると考えている. 実際, 族 $(\mathfrak{F})$ が正規であるような領域 Δ のすべての点は同じ性質を持つ点の集合の内点でなければならない.

2° 基本補題からの直接の結果として, 次の性質が見られる :

$[(C), (C')]$ を Δ の完全内部にある双円筒とする. もし, 1°, x が閉円 (C) に属し, y が円周 C' にあるようなすべての点 (x, y) は E に属さず, 2°, x_0 は (C) の固定された点を表し, y は閉円 (C') の任意の点を表すとき, すべての点 (x_0, y) も E に属さないなら, 集合 E は双円筒 $[(C), (C')]$ のどこにも現われない. [訳注. この命題には 11 節の終わりの注意に書かれている命題が必要であると思われる.]

3° 容易に分かるように, 集合 E の上記の性質は, 領域全体のであろうと Δ の一部のであろうと, 解析的な 1 対 1 写像に対して保たれる.

さて第 III 章の初めにこの三つの性質を持つすべての集合はクラス (H) の集合に属することを見るだろう. それでここではその命題を認めることにして, 今見たことを次のようにまとめる.

定理 1. — 領域 Δ に対するすべての $(\mathfrak{A})$ 集合または $(\mathfrak{A}')$ 集合は同じ領域の (H) 集合のクラスに含まれる.

定理 2. — 領域 Δ 内の第 2 種の点を含まない固有面の族の (J) 点の集合は Δ に対する $(\mathfrak{A})$ 集合であり, 逆も成り立つ.

15. — 有理型函数 $\mathbf{f(x,y)}$ の族.

基礎的諸概念. — 複素 2 変数 x, y の正則函数の族から有理型函数の族へ移ると, 最初に出会う事態は不定点の存在である. よく知られているように, 有理型函数 $f(x,y)$ はそのたぐいの点の近傍ですべての値を取る. 先ず次の例がある :

原点の近くで函数の列

$$(\Sigma) \qquad \frac{x}{2y},\ \frac{2x}{3y},\ \ldots,\ \frac{\nu x}{(\nu+1)y},\ \ldots$$

を見よう. この列は $(0,0)$ 以外のすべての点で (広い意味で au sens large) 一様収束することが分かる. このように (Σ) に対する特異点の集合はクラス (H) に属さない.

さらにここで原点は不定点の極限点であり, 極限函数 x/y は $(0,0)$ で有理型であることを注意する. (Observons)

定義. — 領域 Δ 内に有理型函数 $f(x,y)$ の族 $(\mathfrak{F})$ を考える. P を領域の点とするとき, もし $(\mathfrak{F})$ が P の或る近傍 (ω) 内に不定点を持つ函数を有限個しか含まず, さらに $(\mathfrak{F})$ のすべての無限列から (ω) 内で (広い意味で) 一様収束する新しい無限列を取り出すことができるなら, その族はその点 P で正規であるとする. Δ' を Δ に含まれる領域とするとき, もし族 $(\mathfrak{F})$ が Δ' のすべての点で正規なら, それをΔ' で正規であると言う. 族が正規でなくなる Δ の点を $(\mathfrak{F})$ の (J) 点と呼ぶ.

上の例で出会った事態に名前をつけよう.

(J) 点を 2 種類に区別する : もし (J) 点が $f(x,y)$ の不定点の極限点なら, それは第 2 種であり, そうでなければそれは第 1 種である.

族 $(\mathfrak{F})$ の (J) 点は, $(\mathfrak{F})$ の任意の無限列から, $(\mathfrak{F})$ のみによって決まるその点の或る近傍内で, 高々孤立した点を除いて, すべての点で一様収束する無限列を取り出せるとき, それを例外的 (exceptionnel) であると言う.

(J) 点を, 族のあり方 (allure) に従って, 二つの類, 真性 (essentiel) と非真性 (non-essentiel) にクラス分けする. P を $(\mathfrak{F})$ の (J) 点とし, P の

近傍に正則函数の対 $\psi(x,y)$, $\chi(x,y)$ の族が存在して次の条件を満たすとする．すなわち：

1° $(\mathfrak{F})$ のすべての函数 $f(x,y)$ は

$$f(x,y)=\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}$$

なる形に表される．ψ と χ は共通因子を持たない．

2° 函数 ψ と χ は P で正規族を成す．

3° (ψ,χ) の族の極限函数の対 (ψ_0,χ_0) は恒等的には $(0,0)$ でも無く，(∞,∞) でもない．

このとき P を非真性と言う．そして，そうではないとき，その点を真性と言う．

ここで次の事を注意する．族 $(\mathfrak{F})$ が真性 (J) 点を全く持たない場合は，1 変数の有理型函数に対する準正規族 (famille quasi normale) の特別な場合に対応する．1 変数のこの場合は P. Montel 氏によって詳しく研究された.[16] 後になって有理型函数 $f(x,y)$ の準正規族を一般的に研究するが，それはむしろ "非解析的収束" の問題である．第 IV 章を参照せよ．

真性 (J) 点が存在しないための判定法． — 有界領域 Δ における有理型函数 $f(x,y)$ の族 $(\mathfrak{F})$ が与えられたとき，もし異なる三つの値 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ が存在し，

$$f(x,y)=\alpha_j \qquad (j=1,2,3)$$

で定義される面の面積が Δ の任意の完全内部で全体として有界なら，族 $(\mathfrak{F})$ は Δ 内に真性 (J) 点を持たない．

実際，従属変数の平面の適当な正則変換によって，値 α_1,α_2 および α_3 を 0, ∞ および 1 へ持ってくることができる．その新しい函数を同じ記号 $f(x,y)$ で表す．函数のこの二つの族は領域 Δ の任意の点で同じように振る舞うから，新しい族について議論すればよい．

(x_0,y_0) を Δ の任意の点とする．Δ の内部にこの点を中心とする双円筒 (δ), $|x-x_0|<r$, $|y-y_0|<r'$ を描く．S_1, S_2, S_3 をそれぞれ $f(x,y)=0,\infty,1$ で与えられる面とする．基本補題によって，双円筒 (δ) 内で S_1 は方程式 $F_1(x,y)=0$ で表される．函数 $F_1(x,y)$ は (δ) で正則であり，M を族 $(\mathfrak{F})$ のみに依存する正の定数として，(δ) のすべての点に対して

$$|F_1(x,y)|<M$$

を満たし，さらに，双円筒 $|x-x_0|<r/2$, $|y-y_0|<r'/2$ 内の少なくとも一つの点 (x',y') で

$$|F_1(x',y')|=1$$

[16] 彼の著書 Leçon sur les familles normales を見よ．

となる. 面 S_2, S_3 に対してもそれぞれ $F_1(x,y)$ とまったく同様の性質を持つ函数 $F_2(x,y)$, $F_3(x,y)$ を付随さすことができる. ここで

$$f(x,y)=\frac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)}\,\varphi(x,y)$$

と置くと, F_1, F_2 は共通因子を持たず, 函数 $\varphi(x,y)$ は (δ) 内で正則であって 0 を取らない.

函数 F_1, F_2 の族は明かに (δ) 内で正規である. さらに $\varphi(x,y)$ に対しても (x_0,y_0) において同様であることを言おう. 実際, $\varphi(x,y)$ の族から任意に函数の無限列 (Σ) を取り出そう. 列 (Σ) の中に, 新しい函数の列

$$(\Sigma') \qquad \varphi_1(x,y),\, \varphi_2(x,y),\, \ldots\, ,\, \varphi_\nu(x,y),\, \ldots$$

を, 対応する函数 $F_j^\nu(x,y)$, $j=1,2,3$ の三つの列が (δ) の内部で一様収束するように選びだすことができる. それらの極限函数を $F_j^0(x,y)$ と表す.

$S_j^{(0)}$ を $F_j^0(x,y)=0$, $j=1,2,3$ で与えられる面とする. 簡単のため, 平面 $x=x_0$ はどの $S^{(0)}$ にも含まれていないと仮定する. 今のところ問題なのは点 (x_0,y_0) の近傍だけだから, 点の周りの適当な解析的回転によってこの仮定は常に実現される. そうすると, 方程式 $F_j^0(x_0,y)=0$, $j=1,2,3$ の根は $|y-y_0|<r'$ の中で孤立しているから, 円周 $|y-y_0|=r''$ $(0<r''<r')$ をそれらの点を避けて描くことができる. このことから, 面 $S_j^{(0)}$, $j=1,2,3$ は列 $S_j^{(\nu)}$ の極限であることを注意して, 筒状域

$$(\Gamma) \qquad |x-x_0|<\rho, \quad \rho''<|y-y_0|<\rho', \qquad 0<\rho<r, \quad 0<\rho''<\rho'<r'$$

を

$$f_\nu(x,y)=\frac{F_1^\nu(x,y)}{F_2^\nu(x,y)}\varphi_\nu(x,y)$$

と表される各函数 $f_\nu(x,y)$ が, 或る番号から先 $(\nu \geqq N)$ この領域で 0 も ∞ も 1 も取らないように描くことができる. そうすると, 函数 $f_\nu(x,y)$ の列はそこで正規族を作り, 明かに $\varphi_\nu(x,y)$ に対してもそうである.

列 (Σ') はこのように (Γ) 内で正規であるから, そこから (Γ) の完全内部で (広い意味で) 一様収束する新しい列 (Σ'') を取り出すことが出来る. さて (Σ'') のすべての函数 φ は $1/\varphi$ とともに $|x-x_0|<\rho$, $|y-y_0|<\rho'$ で正則であるから, Weierstrass[17] により, 列 (Σ'') はこの双円筒の完全内部で一様に収束する. 上記のことから, 函数 φ の族のすべての無限列から, 点 (x_0,y_0) で一様収束する無限列が取り出せる. 容易に分かるように, このようなことは (x_0,y_0) が正則函数 $\varphi(x,y)$ の族の (J) 点であるときには

[17] 前掲の Julia 氏の論文の p. 69.

おこり得ない. その証明は1変数の場合と全く同じなのでここでは繰り返さない. このようにして φ の族は (x_0, y_0) で正規である.

ここで (J) 点の真性, 非真性の定義を思い出そう. そして

$$|\varphi(x_0, y_0)| \leqq 1 \quad \text{または} \quad |\varphi(x_0, y_0)| > 1$$

にしたがって

$$\psi = F_1 \varphi \qquad \chi = F_2$$

または

$$\psi = F_1 \qquad \chi = F_2/\varphi$$

と置く. そうすると容易に分かるように, 族 $(\mathfrak{F})$ は (x_0, y_0) で真性 (J) 点を持たない. ところでこの点 (x_0, y_0) は Δ の任意の点であった. したがって, 領域 Δ 内に $(\mathfrak{F})$ の真性 (J) 点は存在しないことが証明された.

C. Q. F. D.

16. — 或る予備的研究. 今の目標は (H) 集合が実際に現われる仕方を明かにすることにあるので, 固有面の正規族または有理型函数 $f(x, y)$ の正規族に対し, その輪郭, すなわち定義と判定条件しか述べなかった. しかし, 当面の目的のためでさえ, 以下に必要なことがらに制限しながら, ここでしようとしているような, これらの族についての色々な側面からの予備的な幾つかの考察をするのも不必要な訳ではない.

A. 真性 (J) 点を持たない領域における有理型函数 $f(x, y)$ の族の振る舞い. — 有界領域 Δ に有理型函数 $f(x, y)$ の族 $(\mathfrak{F})$ が与えられたとし, Δ 内にこの族の真性 (J) 点を全く含まないような領域 $\mathfrak{D}$ を考える. P を領域 $\mathfrak{D}$ の任意の点とする. 定義にしたがって, P を中心とし, $\mathfrak{D}$ に含まれる超球 (ω) を次のように描く. すなわち, $(\mathfrak{F})$ のすべての無限列から新しい列

$$(A) \qquad f_1(x, y),\, f_2(x, y),\, \ldots,\, f_\nu(x, y),\, \ldots$$

を選びだすことができ, それらに対して, (ω) における正則函数 $\psi_\nu(x, y)$, $\chi_\nu(x, y)$ が存在し, (A) のすべての函数は

$$f_\nu(x, y) = \frac{\psi_\nu(x, y)}{\chi_\nu(x, y)}$$

のように表すことができ, ψ_ν と χ_ν は共通因子を持たず, さらに ψ_ν の列と χ_ν の列は (ω) の完全内部でそれぞれ $\psi_0(x, y)$, $\chi_0(x, y)$ に一様に収束する. しかも (ψ_0, χ_0) は恒等的に $(0, 0)$ でも (∞, ∞) でもない. 以下でこのような性質の帰結がしばしば現われるので, このようなとき, 単に, (A) は領域 (ω) 内で殆ど一様収束 (presque convergente uniformement) であ

ると言うことにする. このような列 (A) を領域 $\mathfrak{D}$ 内でよく見よう.

1° 先ず, 列 (A) は ψ_0, χ_0 の少なくとも一つが零にならないような (ω) のすべての点で一様収束する. 疑わしい点 (points douteux) が実際に存在すると仮定する. そうすると ψ_0 も χ_0 も ∞ ではないから, 二つの函数の内の一つ, 考えを固定するために ψ_0 がそうだとして, それは恒等的に零ではない. したがって $\psi_0(x,y)=0$ で与えられる面 S_0 は (ω) の内部で第 2 種の点を持たない有限個の固有面よりなる. すべての疑わしい点はそれに含まれる. したがって, 列 (A) に対する (ω) 内の一様収束域 (ω') は連結である. [訳注. 2]

領域 $\mathfrak{D}$ のすべての点を中心に, このような性質を持つ超球を描くことができるから, Borel–Lebesgue の補題により, $\mathfrak{D}$ の完全内部にある任意の領域はそのような超球の有限個で覆われる. この事から何時もの論法で次のことが言える.

族 $(\mathfrak{F})$ のすべての列は領域 $\mathfrak{D}$ のすべての点で殆ど一様収束であるか, またはいたる所そうではない. [訳注. 3]

2° 上記の超球の中で, $f_\nu(x,y)=\lambda$ で与えられる面, より正確には $\psi_\nu(x,y)-\lambda\chi_\nu(x,y)=0$ で与えられる面の列を考える. λ は有限または無限大の任意の値である.[18] ψ_ν と χ_ν は共通因子を持たないから, 上の二つの方程式は孤立点を除いて同等である. さて, 函数 $\psi_\nu-\lambda\chi_\nu$ の列は (ω) の完全内部で $\psi_0-\lambda\chi_0$ に一様収束するから, 13 節で見たことを思い出して, 恒等的には $\psi_0\neq\lambda\chi_0$ のとき, S_ν の面積は (ω) の内部で全体として有界である. 領域 $\mathfrak{D}$ 全体に対してもあきらかに同様である. すなわち :

列 (A) に対し, 高々一つを除いて, すべての有限または無限の値 λ に対し, 面 $f_\nu(x,y)=\lambda$ の面積は $\mathfrak{D}$ の任意の完全内部で全体として有界である.[19]

3° α, β を, 上に示した領域 (ω') で, 列 (Σ) が α にも β にも一様収束しないような二つの値とする. (ω) に含まれ, 連立方程式

$$\psi_0(x,y)-\alpha\chi_0(x,y)=0$$

$$\psi_0(x,y)-\beta\chi_0(x,y)=0$$

を満たす点 (x,y) よりなる集合 (σ) を考える. 明かに (σ) の外には列 (A) に対する (J) 点は存在しない. [訳注. 5] 逆に, (σ) の上のすべての点 Q は, Q が面 $\psi_\nu-\alpha\chi_\nu=0$ または $\psi_\nu-\beta\chi_\nu=0$ から取り出された無限列の極限点であるから, (A) の (J) 点である. したがって集合 (σ) は列 (A) に対す

[18] $\lambda=\infty$ のときは 上の方程式は $1/f_\nu=0$ であり, したがって $\chi_\nu=0$ を意味する.
[19] この除外値は実際に存在し得る. 例を与えるのは容易であろう. [訳注. 4]

る (ω) 内の (J) 点の集合を表す．このことから, 領域全体に対して次の結論が得られる：

列 (A) に対する (J) 点の集合は $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれるすべての領域の中で, 孤立点を除き, 第 2 種の点を持たない有限個の固有面よりなる.

B. 固有面の正規族. — 1°. 有界領域 Δ 内に第 2 種の点を持たない固有面 S の正規族 $(\mathfrak{F})$ を考える．Δ のすべての点で解析的且つ一様に収束するすべての列 (F) に対し 極限 S' はまた第 2 種の点を含まない固有面であることが分かっている．ここでは解析的に一続きであるかどうかは問題外である．このように生成された面に対して次の命題がある．

面 S' よりなる族 (F') はまた領域 Δ 内で正規である.

実際, 領域 Δ の点 P を任意に取り, その点を中心とし, 境界を込めて Δ に含まれる二つの双円筒 (δ) と (δ') を, (δ) が (δ') を含むように描く．族 (F) の面 S の面積は閉双円筒 (δ) のすべての点で有界でなければならないから, 基本補題により, M を S によらない正の数として, 各 S に対応して (δ) に対する随伴函数を, (δ) のいたるところで

$$|F(x,y)| < M,$$

となり, さらに (δ') 内での平均値に対して関係式

$$m_{(\delta')} \log|F(x,y)| = 0$$

を持つように見つけることができる．[訳注. $m_{(\delta')} \log|F(x,y)|$ は下に有界であったから, それを 0 にすることもできる.] したがって $F(x,y)$ の族の極限函数 $F_0(x,y)$ の族も (δ) 内で正規であることは明らかである．しかもそれ, すなわち F_0 の族は面の族に対し, (δ) に対する随伴函数 (F') の族を与えることも明らかである．したがって族 (F') は P で正規であり, P は Δ の任意の点であるから, Δ でそうである． C. Q. F. D.

上のことからもう一つ別の命題が導かれる．すなわち：

Δ の完全内部に任意に双円筒が与えられたとき, その双円筒内で正規な随伴函数の族は常に存在する.

2° $(\mathfrak{F})$ を有界領域 $\mathfrak{D}$ における真性 (J) 点を持たない有理型函数 $f(x,y)$ の族とする．$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n>1)$ なる値が与えられたとき, $(\mathfrak{F})$ の各函数に対し, α の中の $(n-1)$ 個の値 β_j, $j=1,2,\ldots,n-1$ を, $f(x,y)=\beta_j$ で表される面の族が $\mathfrak{D}$ で正規になるように選びだすことができる.

実際, $\mathfrak{D}$ の完全内部にある任意の領域 $\mathfrak{D}'$ を考える. $(\mathfrak{F})$ のすべての函数 $f(x,y)$ に対し, α の中で面 $f=\alpha$ の $\mathfrak{D}'$ 内の面積が最大になるものを捨てて, λ_j, $j=1,2,\ldots,n-1$ を選ぶ. この値 λ は f と $\mathfrak{D}'$ に依存する. それで可能な場合は二つしかない. すなわち：

その一つは, 或る領域 $\mathfrak{D}'$ があって, そこで面 $f=\lambda_j$ の面積が全体として有界ではない場合. そのときは, すべての正の整数 ν に対し, 少なくとも一つ $(\mathfrak{F})$ の函数 $f_\nu(x,y)$ が対応し, それに対して, $n-1$ 個の面 $f_\nu=\lambda_\nu$ の少なくとも一つの $\mathfrak{D}'$ 内の面積が ν を越える. [訳注. λ_ν は n 個の数のどれかだから, 同じものが無限回現われる. それで λ_ν を ν によらず, 一定に取れば分かりやすい.] さてこの函数列 f_ν から $\mathfrak{D}$ の点で殆ど一様収束する函数の列 φ_ν を取り出すことができる. それに対しては, すでに見たように, 一つを除いてすべての値 γ に対して面 $\varphi_\nu=\gamma$ の族は $\mathfrak{D}$ の完全内部で面積が有界である. これは矛盾である. [訳注. φ_ν に対して捨てられた α で無限回現われるものを α^* とすると, $\alpha^*\neq\lambda_\nu$ であり, $\varphi_\nu=\alpha^*$ で与えられる固有面の面積も仮定によって有界にならない.]

もう一つは, 面 $f=\lambda_j$ の面積がすべての $\mathfrak{D}'$ に対し, 全体で有界である場合. 上記のことからこれは最早仮定ではない. [訳注. 二つある場合の一つが否定されたのだから, 必ずこの場合になる.] $\mathfrak{D}$ の内部に一意的に $\mathfrak{D}$ に収束する領域の列 $\mathfrak{D}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,$ を作り, 函数 f を固定してそれを見る. すべての $\mathfrak{D}_\nu$ に対し, λ として $(n-1)$ 個の値 α が定まり, ν を限りなく大きくするとき, すべての α は, 高々一つを除いて無限回現われる. そのように除かれた値がもし存在するなら, それを除いて β_j, $j=1,2,\ldots,n-1$ を定める.

そうすると, 面 $f=\beta_j$ の族の面積は $\mathfrak{D}$ の任意の完全内部で有界である. したがって $\mathfrak{D}$ で正規である. C. Q. F. D.

C. 例外的 (J) 点の性質. — 有界領域 Δ に有理型函数 $f(x,y)$ の族 $(\mathfrak{F})$ を考える.

1° 族 $(\mathfrak{F})$ の或る (J) 点に対し, $(\mathfrak{F})$ の無限列で, その点がその列のすべての部分無限列に対して (J) 点であるようなものを, 族 $(\mathfrak{F})$ の, その点に対する例外的列 (suite exceptionnelle) と呼ぶ.

すべての (J) 点は例外的列を持つ.

実際, P を与えられた (J) 点とする. すべての正の整数 ν に対して, P を中心とする半径 $1/\nu$ の超球の中で, $|z|<1$ 内の値を取り, 同時に $|z|>2$ の値も取るような $(\mathfrak{F})$ の函数 $f_\nu(x,y)$ $(=z)$ が存在する. 函数 f_ν の列は明かに P で例外的である. C. Q. F. D.

注意. 容易に分かるように, 固有面の族の (J) 点も同じ性質を持つ. さらに族 $(\mathfrak{F})$ に対し, 上に定義されたそれぞれの性格の (J) 点はそれらの

固有の例外的列を持つ. すなわちそれのすべての無限部分列はその点で同じ種類の (J) 点を持つ. [訳注. 5]

2° <u>どの例外的 (J) 点も真性ではない</u>.

これは次の節の定理 3 の直接の帰結として分かる. ここではそれを証明無しに認めることにする.

3° <u>例外的 (J) 点はすべて第 2 種でなければならない</u>.

実際, (ξ, η) を与えられた例外的 (J) 点とする. 上の二つの命題により, この点に対し, 例外的列を作ることができ, そこからその点を中心とする超球内で殆ど一様収束する列

$$(A) \qquad f_1,\ f_2,\ \ldots,f_\nu,\ \ldots$$

を取り出すことができる. ここで記号は元の意味だとして, A の第 3 命題を思い出そう. すなわち, (ω) 内の列 (A) の (J) 点の集合は二つの固有面

$$g(x,y) = \psi_0(x,y) - \alpha\chi_0(x,y) = 0$$
$$h(x,y) = \psi_0(x,y) - \beta\chi_0(x,y) = 0$$

の共通部分 (σ) で与えられる. ここで函数 $g(x,y)$, $h(x,y)$ は (ω) で正則で恒等的には零でない. さてこの場合, 点 (ξ,η) は孤立点でなければならないから, (ω) の半径を十分小さくして, (ξ,η) は (ω) 内で (σ) の唯一つの点であると仮定することができる.

函数 $g_\nu = \psi_\nu - \alpha\chi_\nu$ と $h_\nu = \psi_\nu - \beta\chi_\nu$ はそれぞれ極限 g と h に一様収束する. 収束の仕方は 13 節の補題で研究した.

その補題でのように y の函数 $g(\xi,y)$ と $h(\xi,y)$ は恒等的に零ではないと仮定しよう. そして, 点 η におけるそれらの零の位数をそれぞれ p と q で表す. そうすると (ω) 内に双円筒 (δ), $|x-\xi|<r$, $|y-\eta|<r'$ を, $|x-\xi|<r$ のとき, y の方程式 $g(x,y)=0$ は $|y-\eta|<r'$ 内に同じ個数の根 $y_j(x)$ を持ち, それは x の代数型函数である. $h(x,y)=0$ に対しても同じで, その根を $\eta_k(x)$ と表す. それで函数

$$d(x) = \prod[y_j(x) - \eta_k(x)]$$

を考える. $\prod$ は (j,k) $j=1,2,\ldots,p$, $k=1,2,\ldots,q$ のすべての組み合わせにわたる.

新たに双円筒 (δ'), $|x-\xi|<r/2$, $|y-\eta|<r'/2$ を作る. そうすると補題により函数 $g_\nu(x,y)$ と $h_\nu(x,y)$ とは, ある番号から先 $(\nu \geqq N)$, 上記と同じ性質を完全に備えていることは明らかである. そして d と同じように作られた函数 $d_\nu(x)$, $\nu \geqq N$ は明かに $d(x)$ に一様収束する.

さて, 函数 $f_\nu(x,y)$ は有限個のそれを除いて (δ') 内に不定点を持たないと仮定する. そうすると函数 $d_\nu(x)$ は或る番号から先 (δ') のどこでも零にならない. したがって極限 $d(x)$ に対して次の二つの場合しか起こらない. すなわち一つはそれが零を持たない場合である. これは不可能である. 実際, もしそうなら (ξ,η) は列 (A) の (J) 点であることはできない. もう一つは $d(x)$ が定数零である場合である. これも矛盾である. 実際, この場合列 (A) は非例外的 (J) 点を持たなければならない. したがって双円筒 (δ') 内で列 (A) の不定点の極限が存在する. (δ') はいくらでも小さく取ることができるので, (ξ,η) は第 2 種の (J) 点である. C. Q. F. D.

17. — $(\mathfrak{A})$ または $(\mathfrak{A}')$ に属する種々の特異点集合.

定理 3. — <u>有界領域 Δ に有理型函数 $f(x,y)$ の族 $(\mathfrak{F})$ が与えられたとき, $(\mathfrak{F})$ の真性 (J) 点は Δ に対する集合 $(\mathfrak{A})$ を作る</u>.

実際, E を族 $(\mathfrak{F})$ の真性 (J) 点の集合とする. 領域 Δ の, E 外の部分 (R) は一つ又は幾つか, もしくは可算無限個の領域 (連結)

$$(R) \qquad\qquad \mathfrak{D}_1,\ \mathfrak{D}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{D}_\nu,\ \ldots$$

よりなる.

E の任意の点 P を中心とし, 超球 (ω) を任意に描く. そうすると定義により, 族 $(\mathfrak{F})$ の列 (Σ) が対応し, (Σ) のすべての無限列は (ω) 内に少なくとも一つ真性 (J) 点を持つ. (Σ) から地域 (region) (R) のすべての点で殆ど一様収束する部分無限列 (Σ') を取り出す. それは常に可能である. 実際, すでに見たように, 各 $\mathfrak{D}$ に対し, ただ一つの点でそうであれば十分である. [訳注. そうでなくても, Borel–Lebesgue の補題により, そうできる.]

次に領域 $\mathfrak{D}$ のどれかの部分で, 列 (Σ') の極限として出てくるような定数は除いて, 三つの値 α_1, α_2 および α_3 を選び, f_ν を (Σ') の任意の函数として,

$$f_\nu(x,y) = \alpha_j \qquad j = 1, 2, 3$$

と表される面 S の列 (σ) を作る. そのように作られた列 (σ) は次の性質を持つ :

1° 列 (σ) の面 S の面積は (ω) 内で全体として有界ではない. なぜなら, そうでない場合は列 (Σ') は (ω) に真性 (J) 点を持たない.

2° S の面積は (R) のすべての点で全体として有界である. これは上に定式化した命題の一つに過ぎないことが分かるであろう.

このように, 集合 E の任意の点 P に対し, 上の性質を持つ固有面の列 (σ) が対応する. したがって, もし E の中で可算個の点 P_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$

を E 上稠密に選び, それらを中心とする半径 $1/\nu$ の超球 (ω_ν) を描き, 各 P_ν に上記のような固有面の列 (σ_ν) を対応させるなら, それらのすべての列 (σ_ν) の面 S で作られる族 (F) は所期の性質を持つことが分かる. すなわち, (F) の面の面積が全体として有界にならないような点の集合は E と一致する. C. Q. F. D.

このことから直ちに予告された命題が得られる. すなわち :

例外的 (J) 点はどれも真性ではない.

実際, P を族 $(\mathfrak{F})$ の例外的 (J) 点とする. そうすると P を中心とし Δ 内に含まれる超球 (ω) で, $(\mathfrak{F})$ から取り出されたすべての無限列 (Σ) が, 孤立点を除いて (ω) のすべての点で一様収束する無限列 (Σ_1) を生みだすようなものが存在する. さて前の定理により, 列 (Σ_1) に対する真性 (J) 点は $(\mathfrak{A})$ 集合を作り, 当然クラス (H) に属する. したがって, 列 (Σ_1) は (ω) 内に如何なる真性 (J) 点も持つことは出来ない. ここで, 列 (Σ) は $(\mathfrak{F})$ の任意のものであったから, そこから, 定義を思い出して, 族 $(\mathfrak{F})$ は (ω) 内に真性 (J) 点を持たないことが帰結される. C. Q. F. D.

定理 4. — $(\mathfrak{F})$ を有限領域 Δ 内の有理型函数 $f(x,y)$ の族とする. $(\mathfrak{F})$ の非例外的 (J) 点の集合は Δ に対する $(\mathfrak{A}')$ に属する.

実際, $\mathfrak{D}$ を Δ に含まれ, 族 $(\mathfrak{F})$ の真性 (J) 点を含まない任意の領域とする. 三つの値 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を取り, その中から二つの値 β_1, β_2 を, f を $(\mathfrak{F})$ の任意の函数として, 方程式 $f(x,y)=\beta_j\ j=1,2$ で与えられる面が正規族をなすように選ぶ. β は f に依存することを注意する. (F) をこのようにして作った族とする. これから 面 S' の族 (F') を次のように作る. すなわち各 S' に (F) の面の列 $S_1, S_2, \ldots$ が対応し, それは解析的且つ一様に $\mathfrak{D}$ のすべての点で極限 S' に収束する. 簡単のため, このような (F') を (F) の極限と言う. 族 (F) は $\mathfrak{D}$ で正規であるから (F') もそうである.

(e) を領域 $\mathfrak{D}$ における族 $(\mathfrak{F})$ の非例外的 (J) 点の集合とする. (e) の任意の点を中心に $\mathfrak{D}$ に含まれる超球 (ω) を描く. そうすると $(\mathfrak{F})$ の無限列 (Σ) を, (Σ) のすべての無限部分列が 超球 (ω) 内に非例外的 (J) 点を持つように見つけることができる. この (Σ) から $\mathfrak{D}$ のいたる所で殆ど一様に収束する列 (Σ_1) を取り出す. そうすると (Σ_1) の非例外的 (J) 点の集合 T は第 2 種の点を持たない固有面よりなる面である. 面 T は少なくとも一つ (ω) 内に点を持つ. さて, $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれる任意の領域 $\mathfrak{D}'$ の中で T の面積は族 $(\mathfrak{F})$ によらない上限 M を持つ. 何故なら, すでに見たように, 面 T は $\mathfrak{D}$ で正規な族 (F') に属する或る面 S' に含まれている.

ここで, 上記の性質の可算無限個の面 T よりなる族 (G) を, (G) の点が (e) 上いたるところ稠密であるように作る. それは明かに可能である.

族 (G) の極限 (G') は集合 (e) を作る. さて上のことより, (G) は明かに $\mathfrak{D}$ 内で正規であるから (G') に対してもそうである. ここで $\mathfrak{D}$ は Δ 内の任意の領域であり, $(\mathfrak{F})$ の真性 (J) 点を含まないのだから, 前の定理により, $(\mathfrak{F})$ の非例外的 (J) 点は Δ に対する集合 $(\mathfrak{A}')$ を作ることが分かる.

C. Q. F. D.

定理 5. — 有界領域 Δ 内に不定点を持たない有理型函数 $f(x, y)$ の族が与えられたとき, この族の (J) 点は Δ に対する $(\mathfrak{A}')$ 集合を作る.

実際, すべての例外的 (J) 点は第 2 種だから, この族は例外的 (J) 点を持たない.

第 II 章. 準 備

I. 劣調和函数に関する考察.

18. — 定義と簡単な文献目録. x 平面[20] $(x=x_1+ix_2,\ i=\sqrt{-1})$ の有界または非有界な領域 $\mathfrak{D}$ に, 一価で有限な実数又は無限大を値とする函数 $\varphi(x_1,x_2)=\varphi(x)$ が与えられているとき, もしそれが条件

1° $\mathfrak{D}$ の内部で正の極を持たない.

2° $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれるすべての領域 (δ) 内で (δ) の境界上の値の上限より大きい値を取らない.

3°. $\mathfrak{D}$ において上半連続である.

を満たすならそれを $\mathfrak{D}$ に対してクラス $(\mathfrak{C})$ に属すると言う. 第 3 の条件の中で, 函数 $\varphi(x)$ が領域の点 ξ で上半連続とは, すべての正の数 ε に対して, 点 ξ の近傍 (γ) が対応し, $\varphi(\xi)$ が有限であろうと $-\infty$ であろうと, (γ) のすべての点 x に対して

$$e^{\varphi(x)} < e^{\varphi(\xi)} + \varepsilon$$

となることである. このように定義されたクラス $(\mathfrak{C})$ は定数 $-\infty$ を含むことを注意しなければならない.

次のような, クラス $(\mathfrak{C})$ の, よく知られた, 或る種の変換を許容する, 二つのサブクラスがある. すなわち :

領域 $\mathfrak{D}$ に対するクラス $(\mathfrak{C})$ の函数 $\varphi(x)$ は, もし $\mathfrak{D}$ 内に与えられた領域 (δ) における任意の調和函数 $u(x_1,x_2)=u(x)$ に対し, 函数

$$\varphi_1(x)=\varphi(x)+u(x)$$

もまた (δ) に対してクラス $(\mathfrak{C})$ に属するなら, それを劣調和函数と呼ぶ.

我々の場合には, 定数 $-\infty$ が排除されていないという差はあるものの, このように定義された函数は, F. Riesz 氏が始めてこの名前を与えた函数と明かに同じものである. 劣調和函数の性質はその応用と共に多くの数学者によって研究された. その文献目録は G. Julia 氏の高著 Principes géométriques d'analyse, (第 2 部, 115 頁) に見られる.

クラス $(\mathfrak{C})$ の非負な函数 $\varphi(x)$ が, その存在域の内部に含まれる任意の領域 (δ) 内の x の正則函数 $f(x)$ のすべてに対して, 函数

$$\varphi_1(x)=|f(x)|\varphi(x)$$

[20] ここで x 平面の無限遠は通常通りただ一点よりなると仮定されている.

もまた (δ) に対するクラス $(\mathfrak{C})$ に含まれるなら, それを対数的劣調和函数と呼ぶ.

対数的劣調和函数 $\varphi(x)$ が与えられたとき, 実の分枝を考えた $\log\varphi(x)$ が劣調和函数であることは明らかであり, 逆も成り立つ. (H) 集合の理論の中でこのクラスの函数の占める位置の重要さは F. Hartogs 氏 によって発見された (Math. Ann., t. 62). 上の定義で定式化された性質は "最大絶対値原理" と呼ばれるが, これは正則函数の絶対値に関するよく知られた多くの不等式の源泉であることを注意しよう. この主題に対しては, Julia 氏の前掲の著書 (第 2 部, 第 I 章と第 II 章) を想起するに留める. これらのすべての不等式は対数的劣調和函数に適用することができる.

以下に幾つかの簡単な命題を挙げる :

1° すべての対数的劣調和函数は必ず劣調和函数である. 実際, $u(x)$ を調和とすると, $e^{u(x)}$ は対数的劣調和函数に対する優函数の役を果たすものであるが,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}e^u+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}e^u=e^u\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]\geqq 0$$

により, 函数 $e^{u(x)}$ は劣調和である.

しかし, 逆は成り立たない. すなわち非負の劣調和函数で対数的劣調和でないものを見つけ出すことができる. 実際, 存在域の或る部分で零になり, 領域全体ではそうではないような非負の劣調和函数 $\varphi(x)$ を作るのは容易である. そうすると Carleman の補題は $\varphi(x)$ に対して成り立たないから, これは対数的劣調和函数ではない.

それでこの $(\mathfrak{C})$ の二つのサブクラスの関係を調べよう.

2° $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ を二つの任意の対数的劣調和函数とする. 明かに積 $\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)$ もまたそうである. ここで 和

$$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$$

もまた対数的劣調和函数であることを言おう.

実際, 函数 $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ は明かに劣調和函数であるから, 勿論 $(\mathfrak{C})$ に属する. そして, $f(x)$ を任意の正則函数とするとき,

$$|f(x)|[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]$$

に対しても同様である. C. Q. F. D.

以下, 上記の各クラスの函数について, 幾つかの簡単な, しかし後に不可欠となる考察をしよう.

19. — 極限移行についての注意.[21]

領域 $\mathfrak{D}$ において一価な実函数 $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x)$ の族 $(\mathfrak{F})$ を考える. $\mathfrak{D}$ のすべての点 x' に対し, 値 $\varphi(x')$ の集合の上限を値 $\varphi_0(x')$ として持つ函数 $\varphi_0(x)$ を $(\mathfrak{F})$ の 上限 と呼ぶ. また, 次のように定義された函数 $\psi_0(x)$ を $(\mathfrak{F})$ の 上極限 と呼ぶ. すなわち,

すべての $\varepsilon > 0$ と有限個を除いた $(\mathfrak{F})$ のすべての函数 $\varphi(x)$ に対して常に不等式

$$\varphi(x) < \psi_0(x) + \varepsilon$$

を満たす. ここで函数の除外は ε と位置 x に依存する. さらに, $\mathfrak{D}$ 内に任意に与えられた点 x' に対し, すべての正の整数 n に対して, 不等式

$$\varphi_n(x') > \psi_0(x') - \frac{1}{n},$$

$$\varphi_n(x') > n$$

を満たす $(\mathfrak{F})$ の函数 $\varphi_n(x)$ を対応させることができる. ここで $n \neq m$ のときは φ_n と φ_m は異なる函数を表すものとする. [訳注. 二つ目の不等式は $\psi_0(x') = \infty$ の場合であろう.]

次に, 領域 $\mathfrak{D}$ で定義された一価な実函数 $\varphi(x)$ を考える. $M(\varphi, \Delta)$ により $\mathfrak{D}$ に含まれる領域 Δ におけるその函数の上限を表すこととする. $\mathfrak{D}$ の任意の点 x_0[22]を中心として, $\mathfrak{D}$ 内に, 半径 r_n が $1/n$ と共に零に収束するするような円の列 (γ_n), $n = 1, 2, \ldots$ を描く. このとき,

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} M[\varphi, (\gamma_n)] = M(\varphi, x_0)$$

を x_0 における函数 $\varphi(x)$ のマキシマムと呼ぶ. ところで $M(\varphi, x)$ はまた元の領域 $\mathfrak{D}$ 内の x の函数を表している. それを, 混乱を招かない限り, ときとして短く $\varphi(x)$ のマキシマムと呼ぶ.

函数 $M(\varphi, x)$ は上半連続であり, しかも $\mathfrak{D}$ における上半連続で, $\varphi(x)$ をマジョレートする上半連続な函数よりなる族の下限であることが分かる. ここで, “下限” とか “下極限” とかの定義 (dénomination) は上限や上極限と類似になされる.

さて, 容易に分かるように, $(\mathfrak{C})$ の函数の或る族の上限のマキシマムは, 函数が全体として有界であるとき, 同じクラスに属する. それでは, 上極限の場合はどうだろうか? それについては, 次の命題がある.

[21] 第 IV 章の初めに, 再び此処へ戻るであろう.

[22] 言外に $x_0 \neq \infty$ であると仮定されている.

領域 $\mathfrak{D}$ に全体として有界な無限個の劣調和函数よりなる族 $(\mathfrak{F})$ が与えられたとき, $(\mathfrak{F})$ の上極限を $\psi(x)$ と表すと, 函数

$$\chi(x) = M(\psi, x)$$

もまた $\mathfrak{D}$ において劣調和である.

実際, x_0 を $\mathfrak{D}$ の任意の有限点とする. この点を中心に半径 R の円 (C) を $\mathfrak{D}$ 内に描く. 円周 C 上の任意の点を x' と表し,

$$\alpha = \psi(x_0), \qquad p = \overline{\mathrm{borne}}\,[\psi(x')]$$

と置く. この第 2 の式は C 上の ψ の上限を表す. この状況の下で, 先ず関係式

$$\alpha \leqq p$$

を見きわめよう.

矛盾に導くため, $\alpha > p$ と仮定する. そうすると, α は有限でなければならないので, ε を

$$p < \alpha - 2\varepsilon$$

となるように選ぶことができる. さて, $\psi(x)$ は $(\mathfrak{F})$ の上極限であるから, この族から無限個の函数 $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ を

$$\varphi_n(x_0) > \alpha - \varepsilon$$

となるように見出すことができる. ここで $\varphi_n(x)$ は劣調和であるから, さらに

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(x')d\theta \geqq \varphi_n(x_0)$$

が得られる. x' は C 上にあり, 積分は Lebesgue 氏の仕方にしたがって取る. $\varphi_n(x)$ は上半連続で上限を持つから, それは可能である.

他方, 仮定により, 族 $(\mathfrak{F})$ のすべての函数に対し, $\mathfrak{D}$ のいたる所で

$$\varphi(x) < q$$

である. C 上で

$$\varphi_n(x') > \alpha - 2\varepsilon$$

となる点 x' よりなる集合 (e_n) を考え, (e_n) の測度を $2\pi R\mu$ と表す. そうすると

$$\mu q + (1-\mu)(\alpha - 2\varepsilon) > \alpha - \varepsilon$$

が得られる. $q - \alpha + 2\varepsilon > 0$ であるから, ここから

$$\mu > \frac{\varepsilon}{q - \alpha + 2\varepsilon}$$

が得られる．上の不等式で，右辺は n によらないから，C 上少なくとも一つ，無限個の (e_n) に属する点が存在する．したがって，

$$p > \alpha - 2\varepsilon$$

でなければならない．これは矛盾である．したがって求める不等式 $\alpha \leqq p$ が得られる．

さて，中心 x_0 に対する上の結果は (C) 内のすべての点 x に対して成り立つ．それを確かめるためには，(C) をそれ自身に写す x 平面の分数一次変換で，問題の点を原点に持ってきさえすればよい．この変換は劣調和函数 $\varphi(x)$ に対しては許される．この事から，円 (C) のすべての点 x に対して

$$\chi(x) \leqq \overline{\mathrm{borne}}\,[\chi(x')]$$

が得られる．x' は円周 C 上の任意の点である．

さらに $\chi(x)$ は正の極を持たないこと，および上半連続であること，さらに，δ を $\mathfrak{D}$ に含まれる領域とし，$u(x)$ を (δ) における正則な調和函数とするとき，今見た $\chi(x)$ のすべての性質が函数

$$\chi_1(x) = \chi(x) + u(x)$$

に受け継がれていることが分かる．この最後の性質は $\chi_1(x)$ が函数 $\varphi(x) + u(x)$ の族に関する上極限のマキシマムにほかならないことに起因する．ひとたびこれらの条件がすべて満たされたなら $\chi(x)$ が我々の意味の劣調和函数であるこは明らかである．　C. Q. F. D.

この事から次の結果が得られる：

<u>1°</u>　<u>対数的劣調和函数の族で，全体として上に有界なものが与えられれば，その上極限のマキシマムはまた対数的劣調和函数を表す</u>．

実際，問題の函数 $\chi(x)$ は定理により劣調和だから，勿論 $(\mathfrak{C})$ に属している．そのことは，$f(x)$ を任意の正則函数とするとき，この族のすべての函数 $\varphi(x)$ に対して $|f(x)|\varphi(x)$ はまた劣調和であるから，

$$\chi_1(x) = |f(x)|\chi(x)$$

の形の函数に対しても同じである．

<u>2°</u>　<u>(対数的) 劣調和函数の族で，全体として上に有界なものが与えられたとき，もし上極限 $\psi(x)$ が上半連続なら，それは (対数的) 劣調和函数である</u>．

何故なら，この場合 $\psi(x) = M(\psi, x)$ である．

この種のものとしては, 例えば (対数的) 劣調和函数の下降列や一様収束列の極限などが考えられる.

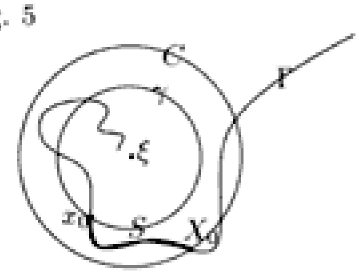
3° 上のすべての命題は 上極限を上限に置き換えても成り立つ. それを証明するためには問題の族 $(\mathfrak{F})$ から新しい族 $(\mathfrak{F}')$ を, $(\mathfrak{F})$ のすべての函数が $(\mathfrak{F}')$ の中に無限回含まれているように作りさえすればよい.

20. — 劣調和函数の上半連続のあり方. $\varphi(x)$ を領域 $\mathfrak{D}$ における劣調和函数とする. 領域に点 ξ を任意に取り, $\mathfrak{D}$ に含まれ, ξ を通ることなく ξ に収束する曲線 Γ を描く. この状況の下で, もし x' $(x' \neq \xi)$ を Γ に沿って ξ に収束させるならば,

$$\overline{\lim_{x' \to \xi}} \varphi(x') = \varphi(\xi)$$

が得られる. 短く言うと, 値 $\varphi(\xi)$ は任意の連続的な近似で到達できる.

Fig. 5



実際, 点 ξ を中心とし, $\mathfrak{D}$ の内部に十分小さい半径 R の円を描き, 曲線 Γ はそれの円周 C と交わるようにする. その交点の中で Γ に沿って一番 ξ に近い点を X_0 とする. もう一つ (C) と同心で, 半径 ρ が R より小さい他の円 (γ) を描く. そして, 曲線 Γ が ξ に近づくとき, 最初にそれと交わる点を x_0 とする. 曲線 Γ 上の点 X_0 と x_0 の間の弧 S は円 (C) を一つまたは幾つかの領域に分ける. それらの中で点 ξ を含む領域 Δ を選び, それを

$$x = f(z)$$

によって, $\xi = f(0)$ となるように, 円 $|z| < 1$ へ等角に写像する. ここで Δ が単連結であることは明らかである.

さて, ζ を円周 $|z| = 1$ 上の任意の点とする. Fatou 氏のよく知られた定理により, 円周上の測度零の集合の点を除いて, z が円 $|z| < 1$ の半径に沿って ζ に近づくとき, $f(z)$ は一定の極限値 $f(\zeta)$ に近づく. 函数 $|f(\zeta)|$ は明かに可測である. $2\pi\mu$ を

$$|f(\zeta) - \xi| < R$$

であるような点 ζ の集合 E の測度とする. この状勢の下で, 先ず次のことを示そう：

半径 ρ が限りなく小さくなるとき, 測度 $2\pi\mu$ は 2π に収束する.

実際, 1 より小さいすべての半径 r に対し, 等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f(re^{i\theta})-\xi}{r}\right|d\theta=\log|f'(0)|$$

が得られる. θ は z の偏角である. これは Lebesgue 氏のよく知られた定理によって $r=1$ に対しても成り立つ. したがって

$$|f'(0)|\geqq R^{(1-\mu)}\cdot\rho^{\mu}$$

が得られる.

他方, Koebe 氏によって

$$K|f'(0)|\leqq\rho$$

の形の制限が存在する. ここで K は或る正の数を表す. この二つの不等式から

$$\rho^{(1-\mu)}\geqq KR^{(1-\mu)}$$

が得られる. これは $1-\mu$ が ρ と共に零に近づくことを示している.

さて, 劣調和函数 $\varphi(x)$ を考える. $\varphi(x)$ が定数 $-\infty$ となる自明な場合は除外する. この函数は上半連続であるから, 閉円 (C) 上で上限 (有限) を持つ. それを M と表す. 弧 S 上の上限を m と表す.

$$\varphi[f(z)]=\Phi(z)$$

と置く. 函数 $\Phi(z)$ は上半連続で上に有界であるから, 円周 $|z|=r$ $(r<1)$ 上で Lebesgue 氏の意味で積分可能である. ここで

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(re^{i\theta})d\theta\geqq\Phi(0)$$

が得られる. $r=1$ への極限移行が問題である. そのため, 増大しながら 1 に収束する半径の列 $r_n,\ n=1,2,\ldots$ を取り,

$$\Phi(r_ne^{i\theta})=\Phi_n(e^{i\theta})$$

および

$$\overline{\mathrm{borne}}(\Phi_n,\Phi_{n+1},\ldots)=\Psi_n(e^{i\theta})$$

と置く. 函数 Ψ_n は Lebesgue の意味で積分可能であり, n を限りなく大きくすると一定の極限 Ψ_0 に収束する. さて, 上の不等式から

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_n(re^{i\theta})d\theta\geqq\Phi(0)$$

が得られる．したがって Lebesgue により，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_0(e^{i\theta})d\theta \geqq \Phi(0)$$

が得られる．

さて，$\varphi(x)$ は上半連続であるということから，弧 S の x' に対応する，集合 E 上のすべての点 $e^{i\theta'}$ に対し，

$$\Psi_0(e^{i\theta'}) \leqq \overline{\mathrm{Lim}}_{r\to 1}\Phi(re^{i\theta'}) \leqq \varphi(x') \leqq m$$

が得られる．このことから，上の不等式によって

$$(1-\mu)M + \mu m \geqq \Phi(0)$$

が導かれる．ここで ρ を限りなく小さくして

$$m \geqq \Phi(0)$$

が分かる．このことから半径 R を零に収束さして，

$$\overline{\mathrm{Lim}}_{x'\to\xi}\varphi(x') \geqq \varphi(\xi)$$

が得られる．x' は曲線 Γ 上にある．$\varphi(x)$ は上半連続であるから，このようにして得られた関係式の中で，実際に起こるのは 等しいことだけである． C. Q. F. D.

II. 容量零または正の集合に関する概念.

21. — 序文. 劣調和函数は準解析的 (quasi analytique) な性質は持たない．しかし，幸いただ一つの例外がある：定数 $-\infty$ ではないこの種のすべての函数は或る制限を越えて，例えば或る連続体が含まれるような集合で，負の極を持つことはできない．これは以後の研究で非常に重要な事実である．そうだとすると，その正確な制限は何であろうか？

以下で，2 次元集合の外容量という量を導入する．そしてそれを用いて，外容量が零か零でないかによってすべての集合を 2 種類にクラス分けする．ここで採用されたアイデアは C. De La Vallée Poussin 氏に負う.[23] ただ，彼は 3 次元の閉集合しか扱っていないので，或る修正が要る．その結果この種の函数の負の極の集合はその外容量が零であるという事実によって特徴付けられることを見るであろう．

[23]論文の Note II：掃散法の拡張等, Annale de L'institut H. Poincaré, 1932, ここにはまた容量に関する文献目録がある．

しかし, もしここに留まるなら, 同じ問題の異なる表現を持つだけになる. このようにクラス分けされた集合の 2 種類について, ある具体的な概念を与える. そのために先ず 1 変数の解析函数の理論の中でのそれらの占める位置を観察し, さらに各々の類に属する幾つかの例を考える.

A — 定義.

22. — 一般な定義. 対数ポテンシャルと劣調和函数.

1° $\mu(e)$ を非負で, 或る円 (C) の外のすべての集合 e に対しては零であるような完全加法的集合函数とする. このとき Stieltjès 積分

$$U(x) = \int_{(\Gamma)} \log \frac{1}{r}\, d\mu(e)$$

を正の質量分布 $\mu(e)$ によって生成された対数ポテンシャルと言う. ここで $d\mu(e)$ は半径無限小の集合 (de) 上の全質量を表し, r は点 x から (de) の点迄の距離を表し, (Γ) は閉円 (C) を含む円 (開) である.

ポテンシャル $U(x)$ は無限遠点を除いて優調和函数 (すなわち, $-U(x)$ が劣調和) であり, 質量の分布されていないすべての有限部分では, 変数 x_1, x_2 の正則な調和函数となる (se comporte) ことはよく知られている.

2° 次のような, F. Riesz 氏によって述べられた, 逆命題がある.

$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x)$ を領域 $\mathfrak{D}$ における, 恒等的には $\varphi(x) \neq -\infty$ なる, 変数 x_1, x_2 の劣調和函数とする. そうすると, 境界を込めて領域 (開) $\mathfrak{D}$ に含まれるすべての開集合 Δ に対し, 負の質量による対数ポテンシャル $U(x)$ が対応し, $\varphi(x)$ は

$$\varphi(x) = U(x) + v(x)$$

と表される. ここで $v(x)$ は Δ における正則な調和函数を表す. [24]

特別な場合として, もし函数 $\varphi(x)$ が無限遠点を除いて劣調和で, その周りで正則な調和函数であり, α を或る実の定数として, $x = \infty$ で,

$$\operatorname*{Lim}_{x \to \infty} [\varphi(x) - \alpha \log |x|] = 0$$

なる性質の極を持ならば, 容易に $\varphi(x) = U(x)$ であることが分かる. この注意は後に使われる.

[24] 論文の II 部 : Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, Acta, 1930.

外容量等. — E を x 平面上の直径 <2 の集合とする. E 上のすべての点 x で $U(x) \leqq 1$ となるような対数ポテンシャル $U(x)$ が作られる正の質量分布を考え, それらの全質量の下限を E の外容量 $\overline{\mathfrak{C}}\cdot E$ と呼ぶ.

1 を越える対数ポテンシャルを作りださないように, E 上に分布することのできる正の質量の上限を集合 E の内容量 $\underline{\mathfrak{C}}\cdot E$ と呼ぶ.[25]

E の直径は 2 以下であるから, 量 $\overline{\mathfrak{C}}\cdot E$ と $\underline{\mathfrak{C}}\cdot E$ は共に存在し, 有限である. さらに

$$\overline{\mathfrak{C}}\cdot E \geqq \underline{\mathfrak{C}}\cdot E$$

である.

もし $\overline{\mathfrak{C}}\cdot E = \underline{\mathfrak{C}}\cdot E$ なら, それを集合 E の容量と呼び, 新たに $\mathfrak{C}\cdot E$ と表す.

特別な場合として, 直径 <2 の十分正則な地域 (region) (開) (R) を考える. 例えば (R) を, 距離をおいて互いに外にある, 或る有限個の領域よりなり, 各領域 $\mathfrak{D}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ の外境界は単純な Jordan 閉曲線よりなるとする. この場合, 閉地域 (R) 上で恒等的に値 1 を取り, (R) の外のすべての有限の点で正則な調和函数となるような正の質量のポテンシャル $U_0(x)$ が唯一つ存在することはよく知られている. $U_0(x)$ の持つ正の質量は明かに $\mathfrak{C}\cdot(R)$ と一致する.

外容量の簡単な性質.[26]— 1° 直径が <2 の二つの集合 E_1 と E_2 に対し, もし $E_1 \leqq E_2$ なら $\overline{\mathfrak{C}}\cdot E_1 \leqq \overline{\mathfrak{C}}\cdot E_2$ である.

何故なら, E_2 上 $U(x) \geqq 1$ となるすべてのポテンシャル $U(x)$ は E_1 に対してもそうである.

2° 直径 1 の円の中に有限個または無限個の集合 $E_1, E_2, \ldots,$ が与えられたとき,

$$\overline{\mathfrak{C}}\cdot(E_1 + E_2 + \cdots) \leqq \overline{\mathfrak{C}}\cdot E_1 + \overline{\mathfrak{C}}\cdot E_1 + \cdots$$

が得られる.

何故なら, 円の直径は 1 なので, 円内の正の質量のすべての分布はそこで正のポテンシャルを生成する.

23. — 開または閉なる集合について. 表題の集合について少し特別な注意を払おう. この部分は後に不可欠となる. 開集合から始める.

[25] De La Vallée Poussin 氏が E の容量と呼んだものはこれである.

[26] 集合の演算については, 例えば, De La Vallée Poussin : Intégrale de Lebesgue etc. を見よ.

$\underline{1}^\circ$　<u>直径 <2 のすべての開集合 O に対し, 外容量 $\overline{\mathfrak{C}}\cdot O$ は実現される.</u>

実際, O 内に増大しながら O に収束する上記の性質の正則な地域の列

$$R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_n,\ \ldots$$

を作る. O はこれらの地域の境界も含むとする. そしてそれに正の質量の対数ポテンシャルの列

$$U_1(x),\ U_2(x),\ \ldots,\ U_n(x),\ \ldots$$

を, $U_n(x)$ は容量 $\mathfrak{C}\cdot R_n$ を実現しているように対応させる. この函数列を観察しよう. それはすべての有限領域 Δ に対して, 零に収束する正の数の列 ε_n, $n=1,2,\ldots$ を, 領域 Δ 内で $U_{n+1}(x)>U_n(x)-\varepsilon_n$ となるように対応さすことができる. これは容易に確かめられる. この事から, この列は下半連続で, O の外のすべての有限部分で正則な調和函数を表す一定の極限 $U_0(x)$ に収束することが導かれる. したがって劣調和函数についてすでに見たことを思い出して, $U_0(x)$ は $x=\infty$ を除いて優調和であることが分かる. 他方,

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \mathfrak{C}\cdot R_n = \alpha$$

と置けば,

$$\operatorname*{Lim}_{x\to\infty}[U_0(x)+\alpha\log|x|]=0$$

が得られる. このことから, 前に注意したことにより, $U_0(x)$ は和が α に等しい正の質量の対数ポテンシャルを表すことが分かる. O 上 $U_0(x)=1$ だから

$$\overline{\mathfrak{C}}\cdot O \leqq \alpha$$

が結論される. 他方 $O>R_n$ なので, すべての n に対して $\overline{\mathfrak{C}}O>\overline{\mathfrak{C}}R_n=\mathfrak{C}R_n$ だから, ここで実際に起こるのは等号だけである.　　C.Q.F.D.

量 α についての考察を続けよう. $O>R_n$ だから, 内容量の定義により

$$\underline{\mathfrak{C}}\cdot O \geqq \underline{\mathfrak{C}}\cdot R_n = \mathfrak{C}\cdot R_n$$

$$\underline{\mathfrak{C}}\cdot O \geqq \alpha = \overline{\mathfrak{C}}\cdot O$$

となり, ここで等式だけが起こる. それで次のことが分かった.

$\underline{2}^\circ$.　<u>直径 <2 のすべての開集合は容量 $\mathfrak{C}\cdot O$ を持つ</u>.

<u>閉集合</u>. — $\underline{1}^\circ$.　<u>直径 <2 のすべての閉集合 F に対し内容量 $\underline{\mathfrak{C}}\cdot F$ は実際に到達し得る</u>.[27]

[27] これは De La Vallée Pousin 氏によって述べられた定理に対応する.

これは前の場合と全く同様に確かめることができる．実際, 減少しながら F に収束する正則な地域の列 $R_n,\ n=1,2,\ldots$ を作る．そしてそれに正の質量の対数ポテンシャルの列

$$U_1(x),\ U_2(x),\ \ldots,\ U_n(x),\ \ldots$$

を容量 $\mathfrak{C}{\cdot}R_n$ が $U_n(x)$ で到達されているように対応させる．今度は, 零に収束する正の数の列 ε_n を

$$U_n(x) > U_{n+1} - \varepsilon_n$$

となるように対応させることができる．このことは列 $U_n(x)$ が一定の極限 $\varphi(x)$ に収束し, $\varphi(x)$ は F の外のすべての有限部分で正則な調和函数を表す. しかし半連続ではない. それで マキシマム

$$U_0(x) = -M(-\varphi, x)$$

を取っておく. そうすると 函数 $U_0(x)$ は $x=\infty$ を除いて優調和函数であり, その点で

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}[U_0(x) + \beta\log|x|] = 0$$

が得られる．ここで,

$$\beta = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \mathfrak{C}\cdot R_n$$

である．このように $U_0(x)$ は F 上に分布された, 和が β の, 正の質量により生成されたポテンシャルであり, x 平面全体で $U_0(x) \leqq 1$ である．したがって

$$\beta \leqq \underline{\mathfrak{C}}\cdot F$$

が得られる.

他方, $R_n > F$ だから $\mathfrak{C}{\cdot}R_n \geqq \underline{\mathfrak{C}}{\cdot}F$ であることが分かり, 極限移行で $\beta \geqq \underline{\mathfrak{C}}{\cdot}F$ であることが分かる. したがって $\beta = \underline{\mathfrak{C}}{\cdot}F$ である.　C.Q.F.D.

さらに $\mathfrak{C}{\cdot}R_n \geqq \overline{\mathfrak{C}}{\cdot}F$ が得られ, したがって $\beta \geqq \overline{\mathfrak{C}}{\cdot}F$ である．このことから

$$\overline{\mathfrak{C}}\cdot F = \underline{\mathfrak{C}}\cdot F$$

が得られる.

このようにして, 2°.　直径 <2 なるすべての閉集合 F は容量 $\mathfrak{C}{\cdot}F$ を持つ.

注意 — 上の事から次のことが分かる：

ε を予め与えられた正の数とするとき, 直径 <2 のすべての開集合 O は $\mathfrak{C}{\cdot}F>\mathfrak{C}{\cdot}O-\varepsilon$ となるような閉集合 F を含む. これは後に使われる.

24. — 集合の 2 種類のクラス分け. x 平面上に集合 E を考える. x_0 を平面の任意の点 (E 上であってもなくてもよい) とする. 先ず $x_0\neq\infty$ と仮定する.

もし x_0 を中心とする十分小さい円 (γ) を描くとき, E の (γ) に含まれる部分の外容量が零になるなら, 集合 E は x_0 で容量零と言われる. そうでなければ E は x_0 で容量正と言われる. [28]

$x=\infty$ のときは, 慣用の変換 $x'=1/x$ によってそれを 原点へ持ってきて, 写像された集合に関して, 点 $x'=0$ の近傍を上記のように分類すればよい.

<u>集合 E は, それが平面のすべての点で容量零のとき容量零と言い, そうでないとき容量正と言う</u>.

特別な場合として, 直径 <1 の集合 E を考える. もし $\overline{\mathfrak{C}}{\cdot}E=0$ なら, 定義により E は容量零であることが帰結される.

逆に, もし集合 E が容量零なら Borel–Lebesgue の補題により, E を有限個の円 (γ_ν), $\nu=1,2,\ldots,n$ で覆い, E の (γ_ν) 内の部分を E_ν とするとき, $\overline{\mathfrak{C}}{\cdot}E_\nu=0$ となるようにすることができる. このことから

$$\overline{\mathfrak{C}}\cdot E \leqq \overline{\mathfrak{C}}\cdot E_1+\overline{\mathfrak{C}}\cdot E_2+\cdots+\overline{\mathfrak{C}}\cdot E_n=0$$

であることが分かる.

B — 解析函数の理論におけるこの分類の位置.

25. — 劣調和函数の負の極の分布.

<u>1°</u>　<u>定数 $-\infty$ ではないすべての劣調和函数に対し, 負の極の集合は容量零である</u>.

実際, $\varphi(x)$ を領域 $\mathfrak{D}$ における恒等的には $-\infty$ でない劣調和函数とする. 矛盾に導くため, $\mathfrak{D}$ の点 x_0 に対して, この函数の負の極の集合 E が容量正であったと仮定する. この点を中心に, 半径がそれぞれ R と ρ の二つの円 (Γ) と (γ) を $\mathfrak{D}$ 内に描く. ここで $x_0=0$ と仮定し, さらに

$$\rho<1, \qquad R-\rho>1$$

[28] 私は ≪ 可容 (capable)≫ と言う言葉の採用を避けた. それによって容量の存在を誤解するおそれがあるからである.

と仮定する. [訳注. この仮定は $0<\rho<R$, $\rho+R<1$ でなければならない.] これは ρ を十分小さく選べば, x 平面に 1 次変換を施すことで常に実現することができる.

任意の正の数 p に対し, 不等式

$$\varphi(x) < -p$$

を満たす (γ) の点よりなる集合 $\mathfrak{E}$ を考える. $\varphi(x)$ は上半連続だから, この集合は開である. (γ) 内で $\mathfrak{E}>E$ だから, (γ) に含まれる E の部分の外容量を α とすると, $\alpha>0$ であって, さらに $\mathfrak{C}{\cdot}\mathfrak{E}>\alpha$ が得られる. さて, $\mathfrak{E}$ の境界における $\varphi(x)$ の値は知られていないから, さらに $\mathfrak{E}$ に含まれる閉集合 $\mathfrak{F}$ を

$$\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{F} > \alpha$$

となるように作る. これの可能なことは先に注意した.

$\mathfrak{F}$ 上に総質量の絶対値が (αp) であるような適当な負の質量分布を, それによる対数ポテンシャル $U(x)$ がいたる所 $U(x)\geqq -p$ となるように作る. $\mathfrak{C}{\cdot}\mathfrak{F}>\alpha$ なのだから, このようなポテンシャルは確かに存在する. そうすると $\rho<r<R$ なるすべての r に対して

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\frac{\partial}{\partial r}U(re^{i\theta})d\theta = \alpha p$$

が得られる. θ は x の偏角である. このことから, ρ と R に与えた仮定を思い出して,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})d\theta < \alpha p \log\frac{r}{R}$$

であることが分かる.

さて, $\varphi(x)$ は閉円 (Γ) 上で上半連続であるから, $\varphi(x)$ を上から抑える正の数 M が存在する. この状況の下で, $\varphi(x)$ は劣調和だから, 容易に

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta})d\theta < \alpha p \log\frac{r}{R} + M$$

が確かめられる. ここで積分は Lebesgue 氏の意味で取っている. したがって,

$$\int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta})d\theta = -\infty$$

である. r は $\rho<r<R$ の任意の数である. このことは円 (Γ) 内で, したがって $\mathfrak{D}$ で恒等的に $\varphi(x)=-\infty$ であることを示している. これは矛盾である. したがって E は容量零である. C. Q. F. D.

2° 次の逆命題がある :

容量零の有界な集合 E が与えられたとき, $x=\infty$ を除いて劣調和な函数 $\varphi(x)$ で, E のすべての点で負の極を持ち, 恒等的には $-\infty$ でないものが存在する.

これは定義から直接導かれる. 実際, E の直径は 2 より小さいと仮定する. これによって一般性は失われない. $\overline{\mathfrak{C}}\cdot E=0$ だからすべての正の整数 n に対し, 質量 $1/n^2$ を持ち, E 上いたる所 1 を越える正の質量の対数ポテンシャル $U_n(x)$ を作ることができる. ここで

$$-\varphi(x)=U_1(x)+U_2(x)+\cdots+U_n(x)+\cdots$$

と置けば, この函数 $\varphi(x)$ は命題を満たすことが分かる. C. Q. F. D.

上の命題により, 1 変数の解析函数に関する多くの定理の中で $\ll$ 点, 連続体 $\gg$ という語をそれぞれ $\ll$ 容量零の集合, 容量正の集合 $\gg$ に置き換えることができる.

26. — 等角写像への効果.

a. — 二つの領域 $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ が与えられており, その境界はどれも連続体を含み, その連結度は何でもよいとして, 一方を他方へ等角に写像する. よく知られているように, その対応の一価性を問題にしなければ, これは常に可能である. E を $\mathfrak{D}$ 内の任意の点集合とし, $\mathfrak{E}$ を $\mathfrak{D}'$ 内のその像とする. この二つの集合 E と $\mathfrak{E}$ は容量の零または正を共にする.

このことは劣調和函数はすべての等角写像を許すことを思い出せば, いま確立したばかりの二つの命題によって直ちに証明される.

b. — もし閉集合に限るなら, 別に次の事実がある : E を x 平面の有界な領域 $\mathfrak{D}$ 内の閉集合とする. そしてそれらから $\mathfrak{D}$ の境界と E の外境界とで囲まれた新しい領域 Δ を作り, Δ を $x=f(t)$ によって円 $|t|<1$ へ等角写像する. (e) を $|t|=1$ 上で E の点に対応する点の集合とする. すなわち (e) の任意の点 $e^{i\theta}$ は, r を 1 に収束させるとき, 点 $x=f(re^{i\theta})$ が集合 E 上のただ一点に収束するようなものである.

このような状況の下で, 集合 (e) は明かに可測であり, E の容量が零か正かによって, 零または正の測度を持つ.

実際, E は閉集合で有界だから, 1° もし E が容量正なら E の外境界上の負の質量分布によって生成され, 全 x 平面で下に有界な対数ポテンシャル $U(x)$ が存在する. そして, 2° もし E が容量零なら, 恒等的に $-\infty$ ではなく, E のすべての点を負の極とする負の質量の対数ポテンシャル $V(x)$ を見出すことができる. この二つの命題により, 問題への対応は次のように容易である.

集合 (e) が可測であることを見ることから始めよう．実際, $\tau=e^{i\theta}$ を円周 $|t|=1$ 上の点で, $\operatorname*{Lim}_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ が定まるようなものとすると, Fatou 氏により, この種の点の集合 $\mathfrak{E}$ の測度は 2π である．$\mathfrak{E}$ に定義された函数 $f(\tau)$ は可測函数の列の極限であるから, $f(\tau)$ はそれ自身可測である．さて, E は有界で閉だから, Borel–Lebesgue の補題により, $\mathfrak{D}$ に含まれ,

$$|x-a_\nu|<\rho_\nu$$

で定義される有限個の円 (γ_ν), $\nu=1,2,\ldots,n$ でそれを覆うことができる．(e_ν) を, 円周 $|t|=1$ 上の点集合で, その点で $f(\tau)$ は定義されていて,

$$|f(\tau)-a_\nu|<\rho_\nu$$

を満たすようなものとする．そうすると, これらの集合 (e_ν) は可測であり, それらの和は (e) に一致する．したがって, 集合 (e) も可測である．

先ず, E は容量正と仮定する．上記の性質の函数 $U(x)$ を考え, $U(x)$ の E の外境界上と $\mathfrak{D}$ の境界上での下限をそれぞれ α, β と表す．明かに $\alpha<\beta$ である．ここで

$$U[f(t)]=U_1(t)$$

と置くと, t が半径に沿って $[\mathfrak{E}-(e)]$ 上の任意の点 τ に近づいたときの極限値 $U_1(\tau)$ は β によって下から抑えられる．このことより, (e) の測度を零と仮定すると, $U_1(t)$ は $|t|<1$ で調和で有界だから, 円内で $U_1(t)>\beta$ となり, 矛盾となる．したがって (e) の測度はこの場合正でなければならない．

E が容量零のときは, 上記の函数 $V(x)$ を選び,

$$V[f(t)]=V_1(t)$$

と置く．この函数 $V_1(t)$ は $|t|<1$ で劣調和で, 上に有界であり, 定数 $-\infty$ ではない. そして t が円の半径に沿って (e) の任意の点に限りなく近づくと $V_1(t)$ は $-\infty$ に一意的に収束する．この条件で (e) の測度は零でなければならないことが容易に分かる．　　　　C. Q. F. D.

27. — 種々の集合　1 変数解析函数の理論に現われるもの.

a. — 特異点の集合.　複素変数 x の解析函数 $f(x)$ の特異点の集合または (H) 集合の切り口 $\mathfrak{H}(x)$ を研究するため, 次の原理がある：

領域 $\mathfrak{D}$ に, $\mathfrak{D}$ に含まれる或る閉集合 E を除いて劣調和な函数 $\varphi(x)$ が与えられ, E ではその函数は定義されていないとする. もし E は容量零

で, $\varphi(x)$ は上に有界なら, $\mathfrak{D}$ における劣調和函数 $\psi(x)$ で, $\varphi(x)$ の存在域では $\psi(x)=\varphi(x)$ となるようなものが存在する.

実際, E は容量零だから, いたるところ不連続である. これは後に確認される. したがって
$$\psi(x) = M(\varphi, x)$$
で与えられる函数 $\psi(x)$ が領域 $\mathfrak{D}$ の全体で定義される. これは明かに上半連続である. $\mathfrak{D}$ 内に E の点は通らないように任意に単純閉 Jordan 曲線 Γ を描く. Γ と Γ 内の E の部分で囲まれた領域 Δ を $x = \chi(t)$ によって $|t| < 1$ へ等角写像し
$$\Psi(t) = \psi[\chi(x)]$$
と置く. もし曲線 Γ 上の $\psi(x)$ の上限を α とするなら, 円周 $|t| = 1$ 上のすべての点 τ に対し, 高々測度零の集合を除いて,
$$\Psi(\tau) \leqq \alpha$$
であることが分かる. このことから, $\Psi(t)$ が $|t| < 1$ が劣調和かつ上に有界であることを注意すると, 円内のいたるところ
$$\Psi(t) \leqq \alpha$$
であることがわかる. このことから, $\psi(x)$ は上半連続だから, 直ちに $\mathfrak{D}$ の完全内部のすべての円の中で $\psi(x)$ は円周上の上限を越えないことが分かる. さらにこの $\psi(x)$ の性質は, $u(x)$ を正則な調和函数とするとき
$$\psi_1(x) = \psi(x) + u(x)$$
なる形の変換を許す. したがって函数 $\psi(x)$ は領域 $\mathfrak{D}$ の中で劣調和函数である. C. Q. F. D.

優調和函数に対しても全く同様であるから, このことから, 一価で両側に有界な調和函数の特異点の集合は容量正でなければならないことが再発見された. 勿論, 一価で有界な解析函数に対しても同様である.

しかし, この命題に関して, Painlevé に負う定理, すなわち上の性質の函数の特異点の集合は点的不連続 (ponctuellement discontinu) であることはできないという定理を思い出すであろう. このことは上の命題よりもっと正確なのである. 何故なら, 後に見るように, 点的不連続ではない閉集合は常に容量正なのである.

b. — 除外値の集合. この表題の下に, Fatou 氏のよく知られた定理を次のように一般化する：

$f(x)$ を複素変数 x の円 $|x|<1$ における正則函数とする. もし函数の取らない値の集合 E が容量正なら, x が半径に沿って $|x|=1$ 上の点に近づくとき, 高々測度零の点を除いて, 円周上のすべての点に対し, $f(x)$ は一意的な極限値に近づく.

実際, 除外値の集合は閉でなければならないことが分かる. さらに, E は仮定により容量正だから, 共通点を持たない容量正の二つの部分集合 E_1, E_2 を取ることができる. それらは共に y 平面にあると考え, $y=y_1+iy_2$ として, 実変数 y_1, y_2 の函数 $u_j(y_1, y_2)=u_j(y)$, $j=1, 2$ を $u_j(y)$ は E_j の外のすべての点で正則な調和函数で, 両側に有界であり, 共に定数でないように作る. これは明かに可能である.

$$u_j[f(x)] = U_j(x)$$

と置き, 二つの函数 $U_j(x)$ をそれぞれ実部とする正則函数 $\Phi_j(x)$ を考える.

X を円周 $|x|=1$ 上の点で, X 上の任意の点 $e^{i\theta}$ に対し, r, $0<r<1$ が 1 に近づくと $\Phi_j(re^{i\theta})$ の値は一定の値に収束するようなものとする. Fatou 氏の定理により, 集合 X は高々測度零の集合を除いて円周の全体と一致する.

α を実数とし, $\xi=e^{i\alpha}$ を X の任意の点とする.

$$\operatorname*{Lim}_{r\to 1} f(re^{i\alpha}), \qquad 0<r<1$$

で与えられる極限値の集合 Y は少なくとも二つの値を持つと仮定する. そうすると, 容易に分かるように, Y は y 平面上 (正確には y 平面に付随する Riemann 球面上) の連続体を表す. Y 上に点 η を取り, 考えを固定するために, η は E_1 の外にあると仮定する. そうすると調和函数 $u_1(y)$ は η で正則である. このことから直ちに値 $U_1(re^{i\alpha})$ は一意的な極限に収束することはできないことになる. これは矛盾である. したがって集合 Y は一点しか含まない. そしてそれは X 上のすべての点 ξ に対してである. C. Q. F. D.

C — 例

28. **単純な例.** —

1° すべての可算集合は容量零である.

実際, 可算で有界の集合 E に対し, 全有限平面における劣調和函数で, E のすべての点で負の極を持ち, 定数 $-\infty$ ではないものを作ることができる.

2° すべての連続体は容量正である.

実際, もしそうでないなら, 全有限平面での対数的劣調和函数で, 恒等的に零ではないにも拘らず, 連続体で零になるものを作ることができる. しかし, これは Carleman 氏の補題により不可能である.

3° 長さのある単純 Jordan 曲線 C 上に集合 E が与えられたとき, もし E の外測度 (一次元的) が正なら E は容量正である.

実際, 矛盾に導くため, 集合 E は容量零と仮定する. そうすると, 無限遠点を除いて劣調和な函数 $\varphi(x)$ で E のすべての点を負の極として持ち, 定数 $-\infty$ ではないものが存在する. 曲線 C の端点を他の曲線でつないで, 長さのある単純な Jordan 閉曲線 Γ を作り, Γ で囲まれた領域 $\mathfrak{D}$ を $x = f(t)$ によって円 $|t| < 1$ へ等角に写像する. これはよく知られているように, 閉領域上で 1 対 1 両連続である. さらに E に対応する円周 $|t| = 1$ 上の点集合 (e) は, 次の N. Lusin 氏の定理により, 測度零ではない. その定理とは：

円から長さのある曲線を境界とする領域への等角写像は円周上の測度零の集合をその曲線上にある, 或る測度零の集合に対応させる.[29]

さて, 函数 $\varphi[f(t)] = \Phi(t)$ は閉円 $|t| \leqq 1$ 上, 上半連続であり, $\Phi(t)$ の $|t| = 1$ 上の負の極の集合 $\mathfrak{E}$ は可測である. $\mathfrak{E}$ の測度は, $\mathfrak{E} \geqq (e)$ だから正である. この事からさらに $\Phi(t)$ は劣調和で上に有界であることを注意すると, 恒等的に $\Phi(t) = -\infty$ と結論しなければならない. これは矛盾である. したがって E は容量正である. C. Q. F. D.

Painlevé のアイデアとその一般化. — 我々の分類をより視覚的にするためには, 閉集合に限定するのがよいと思われる. ここで, 複素 1 変数の一価で有界な解析函数に現われる特異点の集合を研究する過程で Painlevé によって導入されたアイデアについて語ろう：

E を x 平面の有界な閉集合とする. E に対し, E の外に描れていて, 全体で E を取り囲んでいるような, 長さのある有限個の単純 Jordan 閉曲線 C_p の系

$$(\alpha) \qquad C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_p,\ \ldots,\ C_\nu$$

を考える. その状況の下で, Painlevé は, 系 (α) を色々変えたときの各曲線の長さの和の下限が零であるかどうかにしたがって, E を 2 種類に分け, よく知られているように, 零の場合, E を点的集合 (ensemble ponctuel) と呼んだ.

ところで, 後に見るように, non ponctuel な集合はすべて容量正である. それで点的集合をよく見ることが問題である. それを成すため, 長さ

[29] Bull. de i'Inst. Pol. à Ivanovo–Vosn., 1919.

それ自身の代わりに, 次のような増幅された長さ (longueur agrandie) を考える.

$0<t<\infty$ で定義された実変数 t の実函数 $\chi(t)$ を考え, それは非増加で常に

$$1 \leqq \chi(t) < \infty$$

であるとする. この函数を使って, 長さのある, 長さ s の曲線 C に対して

$$s' = s \cdot \chi(s)$$

で与えられる増幅された長さ s' を与える. さらに増幅函数 $\chi(t)$ を, 広義の積分

$$\int_0^1 \chi(t) dt$$

が存在するかしないかにしたがって 2 種に分ける.

29. — 或る容量正の閉集合. E を有界な閉集合とする. それに上記のような曲線の系

$$(\alpha) \qquad C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_p,\ \ldots,\ C_\nu$$

のすべてを付随させる. さらに上記の函数 $\chi(t)$ の任意の一つを考え, 系 (α) の各々に増幅された長さ

$$\sigma = s'_1 + s'_2 + \cdots + s'_p + \cdots + s'_\nu$$

を与える. ただし

$$s'_p = s_p \cdot \chi(s_p)$$

であり, s_p は C_p の長さである.

この状況の下で, もし

$$(\text{borne inf.} =)\ \underline{\text{borne}}\ \sigma > 0$$

であり, 同時に広義の積分 $\int_0^1 \chi(t)\, dt$ が存在するような増幅函数 $\chi(t)$ を E が持つなら, E は容量正である.

この命題を証明するため, 次の補題を使って, E 上に正の質量を, それに対応する対数ポテンシャルが上に有界となるように, 分布しよう.

$U(x)$ を, 半径 ρ の円内の, 全質量 m が

$$m \leqq A\, \rho\, \chi(A\rho)$$

と制限されているような, 正の質量分布による対数ポテンシャルとする. [訳注. 任意の点を中心とする任意の半径 ρ の円という意味らしい.] ここで A は正の定数を表し, $\chi(t)$ は証明すべき命題の中で与えられた函数である. そうすると, $U(x)$ は全 x 平面で上に有界である.

実際, x_0 を有限の距離にある任意の点とする. 都合のよい質量分布で, それによる対数ポテンシャル $V(x)$ が $U(x)$ を上から抑えるようなものを作ろう. 先ず $V(x)$ は $|x-x_0| \geqq 1$ 上には質量分布を持たないとする. 次に, 円 $|x-x_0|<1$ を

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqq |x-x_0| < \frac{1}{2^n}$$

によって与えられる円環 Γ_n, $n=0,1,2,\ldots$ に分割する. 円環 Γ_n に対して与えられるポテンシャルをよく見よう. $U(x)$ は円 $|x-x_0|<1/2^n$ の中で, 全質量 $(A/2^n)\cdot\chi(A/2^n)$ を越える正の質量を持つことはできない. そしてその内, 円 $|x-x_0|<1/2^{n+1}$ 内には全質量 $(A/2^{n+1})\cdot\chi(A/2^{n+1})$ の質量のみが存在している. それで, $V_n(x)$ は, 円環 Γ_n 内では, $|x-x_0|=1/2^{n+1}$ 上に均一に分布された全質量が

$$\frac{A}{2^n}\,\chi\left(\frac{A}{2^n}\right) - \frac{A}{2^{n+1}}\,\chi\left(\frac{A}{2^{n+1}}\right)$$

の正の質量のみを持つと考える. ここで, もしこの値が負なら, ポテンシャル $V(x)$ はそこで負の質量を持ことになる. しかしそれは $V(x)$ が x_0 で $U(x)$ を上から抑えることを妨げない. [訳注. 7] それで

$$U(x_0) \leqq V(x_0)$$

であることがわかる. ところで, ここで

$$\begin{aligned} V(x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{A}{2^n}\chi\left(\frac{A}{2^n}\right) - \frac{A}{2^{n+1}}\chi\left(\frac{A}{2^{n+1}}\right)\right] \log 2^{n+1} \\ &= \log 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n}\chi\left(\frac{A}{2^n}\right) \\ &\leqq 2\log 2 \int_0^A \chi(t)\,dt \end{aligned}$$

である. このようにして補題は証明された.

E 上の正の質量を所期のように分布するため, $x=x_1+ix_2$ とおいて,

$$0<x_1<1, \qquad 0<x_2<1$$

で与えられる開正方形 R_0 によって E を閉じ込める (enfermons). R_0 を直線

$$x_1 = \frac{g}{2^n}, \qquad x_2 = \frac{h}{2^n}$$

によって分割して, n 階の正方形 $R_{n,k},\ k=1,2,\dots,4^n$ を作る. n は任意の正の整数であり, $g,\ h=1,2,\dots,(2^n-1)$ である. そして次のように考える.

$R_{n,k}$ を正方形の任意の一つとし, それは $a<x_1<b,\ c<x_2<d$ で与えられていると仮定する. 以後, 正方形 $R_{n,k}$ と言う言葉で,

$$a \leqq x_1 < b, \qquad c \leqq x_2 < d$$

で与えられた点集合と考える.

そうしたとき, すべての階数 n に対して, E の点を含む正方形のすべてを選び, それを改めて

$$(\beta_n) \qquad \omega_{n,1},\ \omega_{n,2},\ \dots,\ \omega_{n,p},\ \dots,\ \omega_{n,\nu}$$

と表す. $E_{n,p}$ を E の $\omega_{n,p}$ 内または周にある部分とする. 曲線の系 (α) の増幅された長さ σ の下限を δ_0 と表し, $E_{n,p}$ に対するそれを $\delta_{n,p}$ と表す. そうすると

$$(1) \qquad \delta_0 \leqq \delta_{n,1} + \delta_{n,2} + \cdots + \delta_{n,\nu}$$

が得られる.

この状況の下で, 正方形 (β_n) のすべての系上に δ_0 に等しい正の質量を次のように分布し, その分布の集合函数を $\mu_n(e)$ と表す :

(β_0) に対し, 正の質量 δ_0 を ω_0 上に均一に分布する. [訳注. ω_0 は R_0 のことである.] それが $\mu_0(e)$ を与える. すべての分布を定義するには帰納法のルールを決めればよい. 分布 $\mu_{n-1}(e)$ は既知と仮定する. $\omega_{n-1,p}$ を系 (β_{n-1}) の任意の正方形とし, それは正の質量 $m_{n-1,p}$ を支えているとする. (β_n) から $\omega_{n-1,p}$ に属するすべての正方形を取り出して,

$$(2) \qquad \omega_{n,r},\ \omega_{n,r+1},\ \dots,\ \omega_{n,q},\ \dots,\ \omega_{n,s}$$

とする. 各 $\omega_{n,q}$ に質量 $m_{n.q}$ を

$$m_{m,q} = \lambda\delta_{n,q}$$

$$(3) \qquad m_{n-1,p} = m_{n,r} + m_{n,p+1} + \cdots + m_{n,s}$$

となるように割り当てる. λ は q によらない. [訳注. λ は上の 2 式が成り立つように決めるのである.] 次いで, 質量 $m_{n,q}$ を $\omega_{n,q}$ 上に均一に配分する.

このようにして得られた正の質量の分布の列

$$\mu_0(e), \mu_1(e), \ldots, \mu_n(e), \ldots$$

は次の性質を満たす：

1° 正方形 $\omega_{n,p}$ 上に配分された正の質量の総和は, すべての分布 $\mu_j(e)$, $(n \leqq j)$ に対して常に $m_{n,p}$ である. これは明らかである.

2° 常に

$$m_{n,p} \leqq \delta_{n,p}$$

である.

これを確かめるためには, これは $n=0$ に対しては正しいので, $n-1$ までは正しいとして, n に対してもそうであることを確かめればよい. そのため, 正方形の系 (2) に戻り, 帰納法の規則 (3) および関係式 (1) を思い出そう. そうすると $\lambda \leqq 1$ であることが分かる. すなわち $m_{n,q} \leqq \delta_{n,q}$ である.

今,

$$U_n(x) = \int_{R_0} \log \frac{1}{r} \, d\mu_n(e)$$

と置く. ここで $r = |x - x'|$ であり, x' は de 上にある. n を限りなく大きくすると $U_n(x)$ は明かに一定の極限 $\varphi(x)$ に収束する. ここで

$$-U(x) = M(-\varphi, x)$$

と置けば, 函数 $U(x)$ は閉集合 E 上の正の質量によって生成された対数ポテンシャルであり, その全質量 δ_0 は仮定により正である. 質量分布の仕方については, すべての正方形 $\omega_{n,p}$ 内での総和は $m_{n,p}$ を越えない. ここで

$$m_{n,p} \leqq \delta_{n,p} < \theta s \chi(\theta s)$$

である. ここで s は $\omega_{n,p}$ の周の長さを表し, θ は 1 より大きい実数の任意の一つを表す. これにより所期の条件が整う. C. Q. F. D.

特別な場合として, もし 恒等的に $\chi(t) = 1$ と置けば, 有界閉集合の中で, すべての非点的集合 (ensemble non ponctuel) は容量正であることが分かる.

30. — 容量零の或る閉集合.

今度はある種の逆命題を調べることが問題である. この場合, 基本的な役割を演じるのは増幅された長さ σ の上限である. したがってもし E を

閉じ込める曲線の形と位置を制限しなければ無意味になる．それで次のように進める：

E を有界閉集合とする．$\chi(x)$ を先に定めた条件を満たす任意の増幅函数とし, E に関して, 丁度 E を覆う閉正方形の系

$$(\alpha') \qquad \Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_p,\ \ldots,\ \Delta_\nu$$

を考える．正確には, 集合 E は閉正方形の系 (α') の和に含まれ, どの部分和にも含まれない．すべての 系 (α') に増幅された長さ

$$\sigma = s'_1 + s'_2 + \cdots + s'_p + \cdots + s'_\nu$$

$$s'_p = s_p \cdot \chi(s_p)$$

を与える．s_p は Δ_p の周の長さである．s_0 を長さ s_p の最大とする．

この状況の下で, もし集合 E が,

$$\int_0^1 \chi(t)dt = +\infty$$

であって, 同時に

$$\operatorname*{Lim}_{s_0 \to 0} \sigma = 0$$

であるような増幅函数を持てば, E は容量零である．

証明法は全く前と同様である．先ず, 次の補題がある．

$U(x)$ を円 $|x|<R$ 内の, 全質量が M の正の質量により生成される対数ポテンシャルとする．そして $U(x)$ が或る点 x_0 ($x_0 \neq \infty$) で次の性質を満たすとする：すなわち, ρ_0 を <1 なる正の数として, すべての半径 $\rho<\rho_0$ に対し, 閉円 $|x-x_0| \leqq \rho$ 上の全質量 m が, 問題の函数 $\chi(t)$ によって

$$m \geqq A\rho \cdot \chi(A\rho)$$

のように下からおさえられるとする．A は或る正の定数である．そうすると $U(x)$ は x_0 を正の極に持つ．

証明には次のような質量分布を考える．R' を二つの量, 1 と $R+|x_0|$ の大きい方とする．$|x-x_0|=R'$ 上に正の質量 M を均一に分布する．これは円 $|x-x_0|<\rho_0$ に対する唯一の外質量である．そしてこの閉円に対し, 各円周 $|x-x_0|=\rho_0/2^n$, $n=0,1,2,\ldots$ 上に均一に質量

$$\frac{A\rho_0}{2^n}\chi\left(\frac{A\rho_0}{2^n}\right) - \frac{A\rho_0}{2^{n+1}}\chi\left(\frac{A\rho_0}{2^{n+1}}\right)$$

を分布する．これは明かに

$$U(x_0) \geqq V(x_0)$$

を満たす対数ポテンシャル $V(x)$ を生成する質量分布である．しかし

$$\begin{aligned} V(x_0) &\geqq M \log \frac{1}{R'} + A\rho_0 \chi(A\rho_0) \log \frac{1}{\rho_0} + \log 2 \int_0^{A\rho_0} \chi(t) dt \\ &= +\infty \end{aligned}$$

であることが分かる．

補題はこのように証明されたので，E 上に適当な正の質量分布を考える．そのため，前のような正方形 $R_{n,p}$ の族をもう一度考える．

$$(\alpha'') \qquad R_{n_1,p_1},\ R_{n_2,p_2},\ \ldots,\ R_{n_\nu,p_\nu}$$

は E を丁度覆う族の正方形の系で，それ以外は任意のものとし，

$$\sigma = s_1\chi(s_1) + s_2\chi(s_2) + \cdots + s_\nu\chi(s_\nu)$$

とする．s_j, $j = 1, 2, \ldots, n_\nu$ は R_{n_j,p_j} の周の長さである．階数 $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ の最大の数 n_0 を 系 (α'') の階数とする．仮定により，

$$\operatorname*{Lim}_{n_0 \to \infty} \sigma = 0$$

である．

次に同じ階数の正方形のすべての系

$$(\beta) \qquad \omega_{n,1},\ \omega_{n,2},\ \ldots,\ \omega_{n,p},\ \ldots,\ \omega_{n,\nu}$$

を考え，前のような正方形 $\omega_{n,p}$ 内の E の部分を考えて，それを $\mathfrak{E}_{n,p}$ と表す．(α'') に割り当てられたすべての σ の上限を Σ_0 と表し，階数が n より先の系 (α'') に関する $\mathfrak{E}_{n,p}$ のそれを $\Sigma_{n,p}$ と表す．そうすると，

$$(1) \qquad \Sigma_0 \geqq \Sigma_{n,1} + \Sigma_{n,2} + \cdots + \Sigma_{n,\nu}$$

であることが分かる．ここで，$\operatorname{Lim} \sigma = 0$ だから，量 Σ_0 は有限である．

このように修正することによって，後は不等号の向きを変えて同じ道を進むだけである．それを簡単に述べよう．正の質量の分布の列

$$\mu_0(e),\ \mu_1(e),\ \ldots,\ \mu_n(e),\ \ldots,$$

を次のように定義する．

1° $\mu_0(e)$ としては, ω_0 上に正の質量 Σ_0 を均一に分布する.

2° $\mu_{n-1}(e)$ が決まれば, それから $\mu_n(e)$ を次の法則で求める：$\omega_{n-1,p}$ を (β_{n-1}) の任意の正方形とする. その正方形上に分布されている質量 $m_{n-1,p}$ を $\omega_{n-1,p}$ に含まれている正方形 $\omega_{n,q}$ のすべてに, 量 $\Sigma_{n,p}$ に比例して配分し, そのように割り当てられた質量 $m_{n,q}$ を $\omega_{n,q}$ 上に均一に分布する.

分布の列 (2) は次の性質を持つ：

1° 或る番号から先の質量分布 $\mu_j(e)$ のすべてに対し, 正方形 $\omega_{n,p}$ は同じ全質量 $m_{n,p}$ を持つ.

2° 常に

$$m_{n,p} \geqq \Sigma_{n,p}$$

である. これは関係式 (1) により容易に確かめられる.

$$U_n(x) = \int_{R_0} \log \frac{1}{r}\, d\mu_n(e)$$

と置く. r は x から (de) の点迄の距離である. n を限りなく大きくすると, $U_n(x)$ は有限または有限でない $\varphi(x)$ に収束する. これから

$$-U(x) = M(-\varphi, x)$$

と置いて, E 上に分布された正の質量 Σ_0 によって生成される対数ポテンシャル $U(x)$ が得られる.

x_0 を E の任意の点とする. 点 x_0 に各 ω_{n,p_n} が x_0 を含むようなただ一つの正方形の列

$$\omega_{1,p_1},\ \omega_{2,p_2},\ \ldots,\ \omega_{n,p_n},\ \ldots$$

が対応する. ここで

$$m_{n,p_n} \geqq \Sigma_{n,p_n} \geqq s\chi(s)$$

であることが分かる. s は ω_{n,p_n} の周の長さである. このことから 補題の条件が導かれる. C. Q. F. D.

注意 — さらに上述の構造を持つすべての有界閉集合 E は, 全有限平面で下から有界な調和函数の正の極の集合となり得ることが分かる.

II. クラス (H) の集合

A. 基本的な性質.

24. "Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables"[30] という表題の, 非常に興味ある論文で, G. Julia 氏は正則函数の族の (J) 点よりなる集合 E の性質を次のような仕方で述べている：彼は先ず (Nos. 16–23) で基本定理を確立している. 一見した所それはこの論文の第 1 部の終わりに与えた (H) 集合の第 2 条件より制限が少ない. 次いでそこから彼の論文の (Nos. 24–44) で (H) 集合の第 1 条件と第 3 条件を使って, 他は使わず, 集合 E の色々な性質を導いている. したがって彼が展開したすべてのものは (H) 集合のものとして受け入れられる. 以下でそれらの主要なものを思い起こそう. 彼の証明法については, そこで採用されている議論が言葉上の或る修正のみで我々の場合に応用できるので, 読者には Julia 氏の前掲の論文を参照して頂くこととする.

25. — (H) **集合の新しい定義.** — 考えを整理するため, 再度 (H) 集合を定義することから始めよう.

空間 (x, y) の点集合 E が次の条件を満たすとき, それを領域 Δ に対するクラス (H) の集合と言う.

1°. 集合 E は領域 Δ の内部で閉である.

2°. もし Δ 内の有限の点 (x_0, y_0) が E に属しており, y_0 の近傍のすべての点 $x = x_0$, $y \neq y_0$ はそうでないとき, 半径 r' がいかに小さくとも, それに或る半径 r が対応し, 円 $|x - x_0| < r$ 内のすべての点 x' に対して, 少なくとも一つ円 $|y - y_0| < r'$ 内の点 y' で, 空間の点 (x', y') が E の点であるようなものが存在する.

3°. (1° と 2°) の性質は 1 対 1 解析的なすべての変換に対して保存される.

この第 2 の性質は Julia 氏の (No. 16, F.F.P) の基本定理に述べられているものである.

26. — **第 2 の性質の異なる形.** — (H) 集合に対する第 2 の条件としては, 全く異なる型 (a), (b), (c) および (d) を置くことができる. (a) は上に与えたものであり, (b) は私のノートの中の型, そして (d) は第 1 部の終わりに与えたものである. これから述べるのが (c) 型である. [訳注. この条件 (a), (b), (c) は一般次元に拡張されて第 IX 論文に書かれている条件 (A), (B), (C) に丁度対応している. しかし条件 (d) は不明である.]

[30] Acta, 1926. この論文を F. F. P. と書くことにする.

性質 (2,c). $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ を領域 Δ の完全内部にある筒状域とする. もし集合 E が次の形の点 (ξ, η) :

1°. ξ は $\mathfrak{D}$ に属し, η は $\mathfrak{D}'$ の境界上にあるか, または

2°. $\xi = x_0$ は $\mathfrak{D}$ 内にあり, η は閉領域 $\mathfrak{D}'$ に属す.

を決して持たないなら, $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ 内に E の点は存在しない.

もし空間 (x, y) における領域 Δ の完全内部で閉集合 E が条件 $(2, c)$ を満たせば, それは条件 $(2, d)$ を満たし, そのことからまた条件 $(2, a)$ を満たす. [訳注. 条件 (c) から条件 (a) は容易に導かれる.]

この簡単な注意だけで, (H) 集合のこれらの定義 (a), (b), (c) および (d) が全て同等であることの証明を (Nos. 29–32, F.F.P) に委ねてもよいであろう.

注意. (H) 集合の (a) または (b) の型の定義から次のことが導かれる.

1°. 点集合が空間の領域に対するクラス (H) の集合に属するためには, その領域の任意の点の近傍でそうであることが必要十分である.

2°. もし (H) 集合が二つの分離した部分からなるなら, その各々も又クラス (H) に属する.

3°. 空間領域に対する二つの (H) 集合 E_1, E_2 が与えられているとき, 和集合[31] $E_1 + E_2$ もまたそうである.

27. – E. E. Levi の結果. – Julia 氏は (Nos. 41–44, F.F.P) で, E. E. Levi によって得られた結果に関して述べている. 以下にそれを紹介する.

$\varphi(x, y)$ を実変数 $x_1, x_2, y_1, y_2, (x = x_1 + ix_2,\ y = y_1 + iy_2)$ の実函数で, 有限の点 $P\ (\xi, \eta)$ で連続であり, 連続な 2 階までの偏導関数を許すとし, その 4 つの偏導関数

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}$$

は点 P で同時には零にならないとする. そして $\varphi(\xi, \eta) = \alpha_0$ とする. 次に点 P を通り, P で正則な固有面の要素 Σ の族を考える. 正則とはすべての要素 Σ が

$$y - \eta = a_1(x - \xi) + a_2(x - \xi)^2 + \cdots$$

または

$$x - \xi = b_1(y - \eta) + b_2(y - \eta)^2 + \cdots$$

なる形の表現を持つことである. $\varphi(x, y) = \alpha_0$ と表される超曲面 S とこの族の面 Σ との間の関係に関して次の二つの命題がある :

[31] 証明は C. de la Vallée Poussin : Intégrales de Lebesgue etc. を見よ.

1° 点 P の近傍において, もし超曲面 S のすべての点がクラス (H) の集合 E に属しており, さらに $\varphi > \alpha_0$ なる部分のすべての点は E の外にあるとすると, P の近傍で P 以外のすべての点は $\varphi > \alpha_0$ なる部分に含まれような固有面 Σ は存在することができない.

ここで, Julia 氏の証明法にしたがって, 容易に分かるように, この命題は P の近傍の S の全ての点が E に属するという条件をもっと制限の小さい, 点 P は E に属するという条件に置き換えても成り立つ.

2° もし点 P で $C[\varphi] > 0$ なら, 族の少なくとも一つの固有面 Σ で P の周りのすべての点が $\varphi > \alpha_0$ に含まれるものが存在する. ここで

$$\begin{aligned} C[\varphi] = &\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right]\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\right] \\ &+ \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right]\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right] \\ &- 2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right] \\ &- 2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right] \end{aligned}$$

である.

B. — (H) 集合に付随する或る距離系.

28. — セクションの定義. — この論文の要約であるノートで述べたように, 空間 (x, y) の点集合 E が与えられたとき, y 平面上の集合 $\mathfrak{E}(x)$ で, x と共に変動し, $\mathfrak{E}(x)$ の任意の点を η と書くとき, 空間の点 (x, η) は E に属するというようなものが対応する. この可変な集合 (ensemble variable) $\mathfrak{E}(x)$ を集合 E に対応する変数 x のセクションと呼ぶ. このセクションは変数 x の一種の函数と考えることができる.

もとの集合 E は解析函数の理論における習慣にしたがって方程式 $y = \mathfrak{E}(x)$ と表される. さらに $\mathfrak{E}_1(x)$ と $\mathfrak{E}_2(x)$ が二つのセクションであり, η_1, η_2 をそれぞれそれらの任意の点とするとき,

$$\mathfrak{E}_1(x) \pm \mathfrak{E}_2(x) \qquad \mathfrak{E}_1(x)\mathfrak{E}_2(x)$$

をそれぞれ可変の点 (points variables)

$$\eta_1 \pm \eta_2 \qquad \eta_1\eta_2$$

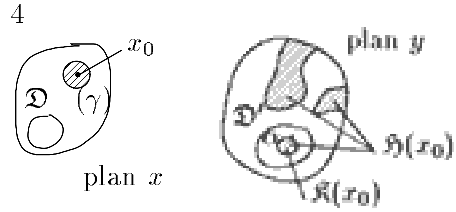
よりなるセクションと考える.

29. — クラス (H) の集合のセクションの初等的概念.

E を空間領域 Δ に対するクラス (H) の集合とする. それの, 変数 x によるセクションを $\mathfrak{H}(x)$ と表す. セクション $\mathfrak{H}(x)$ は領域 Δ でクラス (H) に属すると言う. もし Δ が ($x \in \mathfrak{D}$, y は任意) の形のときは領域 $\mathfrak{D}$ においてクラス (H) に属し, 完全 (complète) であると言い, そうでないとき, 不完全であると言う.

No. 24 で述べた E. E. Levi の結果によって, 完全な (H) セクションに対して或る距離系 (système métrique) を確立しよう. そのテーマについて, 次の簡単な注意をすることから始める. それらについての証明は殆ど不必要であろう :

Fig. 4



1°. $\mathfrak{H}(x)$ を $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ に対する, 変数 x の (H) セクションとする. $\mathfrak{D}$ の点 x_0 ($x_0 \neq \infty$) に対して点集合 $\mathfrak{H}(x_0)$ が, 図のように $\mathfrak{D}'$ の完全内部にある, 分離した部分 $\mathfrak{K}(x_0)$ を持つなら, 集合 $\mathfrak{H}(x_0)$ は $\mathfrak{D}'$ の中で閉だから, $\mathfrak{D}'$ 内の $\mathfrak{H}(x_0)$ の外に単純閉曲線 α を描き, α によって囲まれた領域が集合 $\mathfrak{K}(x_0)$ を完全に含み, 他の $\mathfrak{H}(x_0)$ の点を含まないようにすることができる. $y = \mathfrak{H}(x)$ によって与えられる集合 E は筒状域 $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ の内部で閉だから, x_0 を中心とする円 (γ) を十分小さく取って, $\mathfrak{H}[(\gamma)]$ は曲線 α 上に点を持たないようにできる. $\mathfrak{H}[(\gamma)]$ は x が (γ) を動いたときに $\mathfrak{H}(x)$ によって描かれる y 平面の部分を表す.

もし $\mathfrak{K}(x)$ ($x \in (\gamma)$) が曲線 α で囲まれた $\mathfrak{H}(x)$ の部分を表すなら, セクション $\mathfrak{K}(x)$ は完全 (H) セクションのクラスに属する.

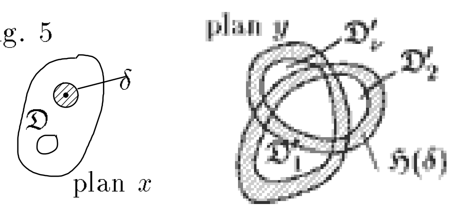
2° $\mathfrak{H}(x)$ を領域 $\mathfrak{D}$ 内の完全 (H) セクションとする. もし $\mathfrak{D}$ 内に, 領域の任意の点 x_0 を中心とする半径 r の円 (γ) 描き, r を零に収束させると

$$\operatorname*{Lim}_{r \to 0} \mathfrak{H}[(\gamma)] = \mathfrak{H}(x_0)$$

が得られる. ここで $\mathfrak{H}[(\gamma)]$ は上記のものと考えている.

これは $y = \mathfrak{H}(x)$ で与えられる集合 E が閉であることから直ちに分かる. この事を切り口 $\mathfrak{H}(x)$ は上半連続であると言い表す.

Fig. 5



3° $\mathfrak{H}(x)$ を上記の表現とする. もし領域 $\mathfrak{D}$ 内に任意の領域 (δ) を描き, x が領域 (δ) の境界 δ を描くとき, 対応する点 η は y 平面上の集合 $\mathfrak{H}(\delta)$ を描

き, それは $\mathfrak{H}(\delta)$ の外の平面部分を領域 $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2, \ldots, \mathfrak{D}'_\nu, \ldots$ に分かつとする. これらに対し, (H) 集合の性質 $(2, c)$ により, 次のことが言える.

各領域 $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2, \ldots, \mathfrak{D}'_\nu, \ldots$ に対し, すべての点が集合 $\mathfrak{H}[(\delta)]$ に属するかそうでないかの二つの場合だけが可能である.

30. — **基本定理.** $\mathfrak{H}(x)$ を領域 $\mathfrak{D}$ 内の完全 (H) セクションであり, 有界であって, $|\mathfrak{H}(x)| < R'$ とする.[32] これに, 筒状領域 $(\mathfrak{D}, |y| < R')$ で連続で,2 階までの連続な導関数を持ち,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^2 \neq 0$$

なる, 実変数 x_1, x_2, y_1, y_2 $(x = x_1 + ix_2,\ y = y_1 + iy_2)$ の一価な実函数 $\varphi(x, y)$ を対応させ,

$$\lambda(x) = \text{Maximum}\ \varphi(x, \eta), \qquad \eta \in \mathfrak{H}(x)$$

なる函数 $\lambda(x)$ を考える. もし, $(\mathfrak{D}, |y| < R')$ で $C[\varphi] > 0$ なら, 函数 $\lambda(x)$ は領域 $\mathfrak{D}$ でクラス $(\mathfrak{C})$ に属する.

これを証明するためには, No. 24 で定式化した E. E. Levi の命題を思い出せば十分である. 実際, 定理が正しくないとすると, $\lambda(x)$ が上半連続であることについては何の疑問もないので, $\mathfrak{D}$ 内に領域 (δ) が存在し, それに対して, 函数 $\lambda(x)$ はその内点で最大値 α_0 に到達する. η_0 を $\mathfrak{H}(x_0)$ 上の $\varphi(x_0, \eta_0) = \alpha_0$ となる点とする. $y = \mathfrak{H}(x)$ で与えられる集合 E はクラス (H) に属しており, 超曲面 $\varphi(x, y) = \alpha_0$ 上に点 (x_0, η_0) を持ち, (x_0, η_0) の近傍では, 地域 $\varphi(x, y) > \alpha_0$ には点を持たない. したがって, 前述の性質の固有面 Σ の要素は存在することができない. これは $C[\varphi] > 0$ の条件の二つ目の性質により, 矛盾である. このようにして定理は確かめられた. C. Q. F. D.

31. この基本定理から次の定理を導こう.

定理. 基本定理と同じ条件の下で, もし $\varphi(x, y)$ が実変数 x_1, x_2, y_1, y_2 の正則な二重調和函数 (biharmonique)[33]であって, 双筒状域 $(\mathfrak{D}, |y| < R')$ で

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^2 \neq 0$$

[32] これは集合 $\mathfrak{H}(\mathfrak{D})$ の全体が円 $|y| < R'$ に含まれることを意味する.

[33] これは, $\varphi(x, y)$ が領域のすべての点で複素 2 変数 x, y の或る正則函数の実部となるような函数であることを意味する.

とすると, 対応する函数 $\lambda(x)$ は $\mathfrak{D}$ 内で劣調和函数である.

実際, $C[\varphi]=0$ だから, 予備函数

$$\psi(x,y)=\varphi(x,y)+\varepsilon x_1^2, \qquad \varepsilon>0$$

を考える.

$$C[\varphi]=2\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\right]>0$$

である. 函数 $\psi(x,y)$ は基本定理の条件をすべて満たす. そしてそれに対して η を $\mathfrak{H}(x)$ 上の点とすれば

$$\operatorname{Max}\psi(x,y)=\lambda(x)+\varepsilon x_1^2$$

である. したがって, ε がいかに小さくとも, 函数 $\lambda(x)+\varepsilon x_1^2$ は領域 $\mathfrak{D}$ 内でクラス $(\mathfrak{C})$ に属する. このことから極限移行をして, $\lambda(x)$ もクラス $(\mathfrak{C})$ に属することがわかる.[34]

さて, $\mathfrak{D}$ 内の任意の領域 (δ) 内のすべての正則な調和函数 $u(x)$ に対し, $\chi(x,y)=\varphi(x,y)+u(x)$ は前の条件を満たす. そして, この函数に対して $\operatorname{Max}\chi(x,\eta)=\lambda(x)+u(x)$ である. このことから, 函数 $\lambda(x)+u(x)$ も領域 (δ) に対してクラス $(\mathfrak{C})$ に属することが分かる. したがって函数 $\lambda(x)$ は $\mathfrak{D}$ 内で劣調和である. C. Q. F. D.

注意. 1°　全く同様に

$$\mu(x)=\operatorname{Min}\varphi(x,\eta), \qquad \eta\in\mathfrak{H}(x)$$

は領域 $\mathfrak{D}$ における優調和函数である.

2°　もし $(\mathfrak{D}, |y|<R')$ において, 複素変数 x, y の正則函数 $f(x,y)$ で, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$ なるものを考えるなら, 対応する函数

$$\lambda(x)=\operatorname{Max}|f(x,\eta)|, \qquad \eta\in\mathfrak{H}(x)$$

は領域 $\mathfrak{D}$ における 対数的劣調和函数である.

32. – 特別な場合. – 1°　距離 $\mathbf{r(x)}$.

y_0 を y 平面上に任意に与えられた有限の点とするとき,

$$\varphi(x,y)=|f(x,y)|=|y-y_0|$$

[34] 私はここで暗黙の内に領域 $\mathfrak{D}$ は無限遠点を含んでいないと仮定している. しかしこれは一般性を損なうものではない.

に対応する函数 $\lambda(x)$ を考える. これは $[\mathfrak{H}(x)-y_0]$ 上の η の絶対値の最大 $M(x)$ を表す. 上の注意から函数 $M(x)$ は対数的劣調和函数である.

もし y_0 を集合 $\mathfrak{H}(x)$ の外に取るなら, y_0 から集合 $\mathfrak{H}(x)$ 迄の距離 $r(x)$ を考えると, 函数 $1/r(x)$ は対数的劣調和函数である. Hartogs 氏[35]によって発見され, 非常に有効に応用されたのはこの函数 $r(x)$ である.

2° **直径 d(x).** α を実の定数とし, $ye^{i\alpha}$ の実部 $\rho(y;\alpha)$ に付随する函数を考え, η を $\mathfrak{H}(x)$ 上にあるとして

$$\rho_1(x;\alpha)=\mathrm{Max}\,\rho(\eta;\alpha),\qquad \rho_2(x;\alpha)=\mathrm{Min}\,\rho(\eta;\alpha)$$

を考える. 函数 $\rho_1(x;\alpha)$ は領域 $\mathfrak{D}$ で劣調和であり, $\rho_2(x;\alpha)$ はそこで優調和である. したがって, その差

$$l(x;\alpha)=\rho_1(x;\alpha)-\rho_2(x;\alpha)$$

は劣調和函数である. α を任意の実数とすると, $l(x;\alpha)$ の族の上限に対してもそうである. ところで, この上限は $\mathfrak{H}(x)$ の直径 $d(x)$[36]に他ならない. 何故なら, 函数 $d(x)$ は族の上限であり, さらに完全 (H) セクションの性質から, それは明かに上半連続である.

さらに $d(x)$ は対数的劣調和函数であることがわかる. 実際, $f(x)$ を $\mathfrak{D}$ 内の領域 (δ) における複素変数 x の正則函数として, セクション $\mathfrak{H}(x)$ に $\mathfrak{H}_1(x)=f(x)\,\mathfrak{H}(x)$ なる形の変換を施すと, 新しい セクション $\mathfrak{H}_1(x)$ は完全 (H) セクションで, 有界であり, その直径は $|f(x)|\,d(x)$ で与えられる. このことから $|f(x)|\,d(x)$ は領域 (δ) でクラス $(\mathfrak{C})$ に属することが導かれる. このようにして直径 $d(x)$ は $\mathfrak{D}$ で対数的劣調和函数である. これを次のように定式化しておこう：

有界で完全な (H) セクションの直径 $d(x)$ は対数的劣調和函数である.

[35]私はここで暗に領域 $\mathfrak{D}$ は無限遠点を含んでいないと仮定した. しかしこのことは一般性を損なうものではない.

[36]すなわち, $\mathfrak{H}(x)$ 上の任意の 2 点の間の距離の上限

第 IV 章

(H) 集合族の極限.

---

45. — **定義.** — 空間 (x,y) に点集合の族 $(\mathfrak{F})$ が与えられたとき, もし有限の点 (x_0,y_0) を中心に与えられた任意の超球に対し, この超球内に少なくとも一つ点を持つ集合がこの族内に無限個見出せるなら, その点 (x_0,y_0) を族 $(\mathfrak{F})$ の極限点と言う.

空間 (x,y) の無限遠点 (la portion infinie) を次のように考える : $x_0 \neq \infty$, $y_0 \neq \infty$ として, 組 (x_0,∞), (∞,y_0), (∞,∞) の各々は空間 (x,y) の唯一の点を表す. それで, 例えば点 $x'=x_0$, $y'=0$ が, 集合族 $\mathfrak{F}$ に変換 $x'=x$, $y'=1/y$ を施して得られる族に対する極限点なら, (x_0,∞), $x_0 \neq \infty$ の形の点は $(\mathfrak{F})$ の極限点である. 他の形の点 (∞,y_0), $y_0 \neq \infty$, (∞,∞) についても, それが極限点であるかどうかを同様に識別する.

集合族 $(\mathfrak{F})$ の極限とはその族の極限点の集合のことである.

複素平面 (その無限遠点は通常通りただ一点と考えている) 上の点集合の族に対してもまた極限点および極限という言葉を用いる. その定義は前と全く同様なので繰り返さない.

46. 空間 (x,y) に点集合 E よりなる族が与えられたとし, 25 節のような集合 E の切り口 $\mathfrak{E}(x)$ を考える. [訳注. この訳文では, II. B. 28.]

セクション $\mathfrak{E}(x)$ の族の極限 $\mathfrak{E}_0(x)$ とは, x に依存する y 平面上の可変な集合 (ensemble variable) で, すべての定値 x に対し, 点 y の集合 $\mathfrak{E}_0(x)$ は集合 $\mathfrak{E}(x)$ の族の極限であるようなもののことである.

空間 (x,y) の集合 E の族の極限 E_0 のセクション $\mathfrak{G}_0(x)$ を簡単にセクション $\mathfrak{E}(x)$ の空間的極限と呼ぶ.

この章ではクラス (H) の集合 E の族に関して, 族の極限がどうなるか, および E のセクションよりなる族に関する先の二つの極限の間の関係はどうなるかを見よう. 結果としてノートで予報した定理 3 と 4 が得られる.

47. — **空間における極限移行.** — **定理.** 空間領域における (H) 集合の族の極限はまたクラス (H) に属する.

実際, $(\mathfrak{F})$ を空間 (x,y) における領域 Δ に対するクラス (H) に属する集合 E の族で, E_0 をその族の極限とする. E_0 に関して三つの条件 (H) を順次確かめよう.

先ず集合 E_0 はその定義により閉である.

第 1 章の終わりに与えた (α) 型 [訳注. この訳文では, II. A. 25 の定義がこれに近い.] によって第 2 の条件を調べよう. 双円筒 $[(\gamma),(\gamma')]$ を Δ 内に任意に描き, 円 (γ), (γ') の周をそれぞれ γ,γ' と表す. そして E_0 は $[(\gamma)+\gamma,(\gamma')]$[37] の形の点も $[x_0,(\gamma')+\gamma']$ の形の点も持たないと仮定する. x_0 は円 (γ) 内の定点である.

ここで矛盾に導くため, 集合 E_0 は (開) 双円筒 $[(\gamma),(\gamma')]$ 内に点を持ったと仮定する. そうすると族 $(\mathfrak{F})$ から, この双円筒内に少なくとも一つ点を持つような集合の無限列 $E_\nu\ \nu=1,2,\ldots$ を取り出すことができる. 何故なら, もしそうでなければ, 高々有限個を除いて $(\mathfrak{F})$ の集合はこの双円筒内に点を持たないことになる. そうすると E_0 もそうなる.

さて, E_0 は閉集合 $[(\gamma)+\gamma,(\gamma')]$ と $[x_0,(\gamma')+\gamma']$ 上に点を持たないから, 高々有限個のものを除いて集合 E_ν も同様である. そうすると クラス (H) の集合 E で, 双円筒 $[(\gamma),(\gamma')]$ 内に点を持ち, $[(\gamma)+\gamma,(\gamma')]$ 上にも $[x_0,(\gamma')+\gamma']$ 上にも点を持たないものが存在することになる. これは矛盾である. したがって, 当初の条件のもとで集合 E_0 は開双円筒内に点を持たない. 条件 (α) はこのようにして確かめられた.

最後に, 集合 E_0 に対して上で確かめられた性質はすべての 1 対 1 解析的変換を許す. 実際, もし Δ 内に含まれる領域 (δ) で定義された 1 対 1 解析的な変換を上記のすべて系に施すと, 集合 E_0 の像は集合 E の像による新しい族の極限であることが分かる. 条件はまったく同じであるから, 領域 (δ) 内の新しい極限に関しても全く同じ結論を得ることは確かである.

C. Q. F. D.

48. — 調和優函数. — 次は第 2 の問題, (H) セクションに関する平面上の極限移行を調べることが問題である. そのため, 劣調和函数の列の上極限とそのマキシマムの間の関係を第 II 章で見たよりももっと詳しく見ることから始める. 正確に言うと, この問題を F. Riesz 氏[38]にしたがって, 最良調和優函数 (majorante harmonique) の概念を導入して調べ直そう.

領域 $\mathfrak{D}$ に複素変数 x の実一価函数 $f(x)$ が与えられたとき, もし $\mathfrak{D}$ に含まれる領域 (δ) 内に $u(x)\geqq f(x)$ を満たす正則な調和函数が存在するなら, それを簡潔に 領域 (δ) に対する函数 $f(x)$ の調和優函数と呼ぶ.

さらにもし調和優函数 $u(x)$ 全体の下限がまた領域 (δ) 内で正則な調和函数になるなら, それを最良調和優函数 (la meilleure majorante harmonique) と呼ぶ. 明かに最良調和優函数も元の函数 $f(x)$ をマジョレートする.

[37] これは x が円 (γ) またはその周 γ 上にあり, y は周 γ' にあることを意味する.
[38] 前掲の論文 (Acta, t. 48) の §2, Partie I.

x 平面上に領域 $\mathfrak{D}$ を考え, $\mathfrak{D}$ の完全内部に周 δ が長さのある単純閉 Jordan 曲線であるような領域 (δ) を描く. 領域 (δ) を $x=\varphi(t)$ によって円 (C) : $|t|<1$ へ等角に写像し, その逆写像を $t=\psi(x)$ と書く. 曲線 δ 上の任意の点を ξ と表し, 円周 C : $|t|=1$ 上の任意の点を τ と表す. 以下常にこの条件のもとで考える.

1° 対応 $x=\varphi(t)$ に関して次のことはよく知られている : 関係 $x=\varphi(t)$ は閉領域 $|t|\leqq 1$ と $(\delta)+\delta$ の間の 1 対 1 連続な対応を確立する. $|t|=1$ 上の測度零の集合の全てはまた δ 上の測度零の集合に写像され, 逆も成り立つ.

2° 変数 τ, $|\tau|=1$ の, 値が有限または無限大の実一価函数 $\mu(\tau)$ に対し, 対応するポアッソン積分

$$V(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\frac{1-|t|^2}{|\tau-t|^2}\,d\theta=\int_C\mu(\tau)\,K(\tau,t)\,ds$$

を考える. ここで, $\tau=e^{i\theta}$, $i=\sqrt{-1}$ であり, t は $|t|<1$ 内の任意の点を表し, さらに $ds=d\theta$ である.

この函数 $\mu(\tau)$ が Lebesgue 氏の意味で絶対可積分のとき, 積分 $V(t)$ は $|t|<1$ 内の正則な調和函数を表すことはよく知られている. そしてこの場合, もし円 (C) (開) 内の点 t を円周上の点 τ へ半径に沿って収束させると, 高々測度零の点を除いて, すべての点 τ に対し

$$\operatorname*{Lim}_{t\to\tau}V(t)=\mu(\tau)$$

となる.[39]

ポアッソン積分 $V(t)$ が存在するとき, $v[\varphi(t)]=V(t)$ となる函数 $v(x)$ は領域 δ 内の正則な調和函数で, 閉領域 $(\delta)+\delta$ 上で連続である. それは $\lambda(\xi)=\mu(\tau)$ で表される値の分布によって一意的に定まる. それで, 以下混乱のない限り, それを簡単に

$$v(x)=v(x,\lambda)$$

と表す.

49. — 劣調和函数の優函数. — 今度は, 領域 $\mathfrak{D}$ における, 正の極を持たない, したがって $\mathfrak{D}$ の任意の完全内部で上に有界な劣調和函数 $h(x)$ を考える.

3° $h[\varphi(t)]=H(t)$ と置く. これは円 $|t|<1$ における劣調和函数であり, 閉円 $|t|\leqq 1$ 上で上半連続である. このとき次の命題がある.

[39] Bieberbach : Lehrbuch der Funktionentheorie, II, 1927, p. 152.

もし領域 $\mathfrak{D}$ における劣調和函数 $h(x)$ が恒等的に $-\infty$ でないなら, ポアッソン積分 $V(t)=\int_C H(t)Kds$ は存在し, 円 $|t|<1$ で $H(t)$ に対する調和優函数を与える.

実際, 函数 $H(\tau)$, $|\tau|=1$ は上半連続だから, 可能な場合は二つしかない. その一つは $H(t)$ は Lebesgue 氏の意味で絶対可積分のときであり, もう一つは $\int_C |H(t)|ds=-\infty$ となるときである. しかしこの第 2 の場合は実際には起こらない. 何故なら, そうなるときは, 領域 (δ) 内で, したがって領域 $\mathfrak{D}$ でも $h(x)=-\infty$ とならなければならない. したがってポアッソン積分 $V(t)$ は存在し, $|t|<1$ 内で調和な函数を表す.

n を任意の正の整数とする. t 平面上に原点を中心とし, 半径 $r_n=1-1/2n$ の円 (C_n) を描く. t' を円周上の任意の点とするとき, 函数 $H(t')$ は円 (C_n) の周 C_n 上で上半連続だから, 円周 C_n 上で函数 $H(t')$ をマジョレートする実連続な函数 $\chi_n(t')$ を,

$$
\begin{aligned}
&|\chi_n - H| < \frac{1}{n}, && H > -n \ \text{なら}\\
&|\chi_n - (-n)| < \frac{1}{n}, && H \leqq -n \ \text{なら}
\end{aligned}
$$

となるように見出すことができる. C_n 上でこのように得られた函数 $\chi_n(t')$ によって円 (C_n) に対するポアッソン積分 $V_n(t)$ を作る. 明かに円 (C_n) 内で

$$H(t) \leqq V_n(t)$$

である. 他方函数 $H(t)$ は閉円 $|t|\leqq 1$ 上で上半連続だから

$$\overline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty}\, \chi_n(r_n e^{i\theta}) \leqq H(e^{i\theta})$$

が得られる. ここで θ は実で, $i=\sqrt{-1}$ である. このことから積分記号下の極限移行に対する Lebesgue の定理により, 円 $|t|<1$ 内のすべての点 t に対して,

$$\overline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty}\, V_n(t) \leqq V(t)$$

が得られる. したがって常に $H(t)\leqq V(t)$ である. C. Q. F. D.

4° 劣調和函数 $h(x)$ の最良調和優函数を求めるために, 証明無しに次の補題を認めよう. それは第 V 章で証明する. そこでそれは重要な役割をするだろう.

領域 $\mathfrak{D}$ 内に任意に点 x_0 をマークし, $\mathfrak{D}$ 内に, x_0 を通らず x_0 に収束する連続曲線 L を任意に描く. x' を道 L に沿って x_0 に近づけると常に

$$\overline{\mathrm{Lim}}_{x'\to x_0}\, h(x') = h(x_0), \qquad (x' \neq x_0)$$

が得られる.

今, $U(t)$ を円 $|t|<1$ における $H(t)$ の調和優函数とする. 函数 $H(t)$ は円内で恒等的に $H(t)=+\infty$ である場合を除いて, $H(t)$ は上に有界だから, 優函数 $U(t)$ もまた $|t|<1$ 上で有界と仮定する. そうすると Fatou 氏の古典的な定理により, 円 $|t|<1$ 内の点 t' が, この円の半径に沿って, 円周 $|\tau|=1$ 上の点 τ へ近づくと, 高々測度零の点を除いて, 円周上のすべての点 τ に対して $U(t')$ は一定の値 $U(\tau)$ に近づく.

一定の極限値 $U(\tau)$ が存在するような任意の点 τ を考える. t' を上記のように半径 $(0,\tau)$, $t'\neq\tau$ 上の任意の点とする. $H(t')\leqq U(t')$ である. したがって

$$\overline{\operatorname*{Lim}_{t'\to\tau}}\, H(t') = \overline{\operatorname*{Lim}_{t'\to\tau}}\, U(t') = U(\tau)$$

である. ところで, 上の補題によりさらに

$$\overline{\operatorname*{Lim}_{t'\to\tau}}\, H(t') = H(\tau)$$

である. このことから, 高々測度零の点を除いて, 円周 $|\tau|=1$ 上いたる所

$$H(\tau) \leqq U(\tau)$$

が得られる.

5° 上の命題により, 半径に沿った近似に関するポアッソン積分の性質を思い出して, 次のことが分かる.

領域 $\mathfrak{D}$ 内に正の極を持たず, $\mathfrak{D}$ の完全内部で下に有界な劣調和函数 $h(x)$ が与えられたとき, 函数 $v(x)=v[x;h(\xi)]$ は領域 δ に対する $h(x)$ の最良調和優函数を与える.

50. — **劣調和函数の列の上限とそのマキシマム.** — 領域 $\mathfrak{D}$ に劣調和函数の列 $h_\nu(x)$, $\nu=1,2,\ldots$ が与えられており, それらは $\mathfrak{D}$ の任意の完全内部で全体として上に有界であり, 少なくとも一つ定数 $-\infty$ でないものが存在するとする. この列の上限を $b(x)$ と表すなら, 函数

$$v(x) = v[x; b(\xi)]$$

は存在し, 領域 (δ) 内で, 函数 $b(x)$ のマキシマム $c(x)$ に対する調和優函数を与える.

この命題を

$$h_\nu[\varphi(t)] = H_\nu(t), \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

$$b[\varphi(t)] = B(t), \quad \text{および} \quad c[\varphi(t)] = C(t)$$

と置いて, t 平面上で証明しよう. この列のすべての函数 $H_\nu(t)$ は, 閉円 $|t|\leqq 1$ で恒等的に $H_\nu(t)\neq-\infty$ であるかぎり, 円周 $|t|=1$ 上, Lebesgue 氏の意味で絶対可積分であり, さらにこの列の中に少なくとも一つ, 定数 $-\infty$ でないものが存在するれば, 上限 $B(t)$ はまた絶対可積分である. したがって, 対応するポアッソン積分

$$V(t)=\int_C B(\tau)K(\tau,t)ds$$

は存在し, 円 $|t|<1$ 内における正則な調和函数を表す.

この列から 定数 $-\infty$ とは異なる函数 $H_\nu(t)$ を任意に選び, 円 $|t|<1$ に対して対応するポアッソン積分

$$V_\nu(t)=\int_C H_\nu(\tau)K(\tau,t)ds$$

を作る. これはこの円の中で函数 $H_\nu(t)$ をマジョレートすることはすでに見た.

さて, 円周 $|\tau|=1$ 上のすべての点 τ に対して

$$H_\nu(\tau)\leqq B(\tau)$$

だから, 円 $|t|<1$ 内で, いたる所

$$V_\nu(t)\leqq V(t)$$

が得られ, したがって

$$H_\nu(t)\leqq V(t)$$

である. これはすべての ν に対して成り立つ. したがって

$$B(t)\leqq V(t)$$

であることが分かる. このことから両辺のマキシマムを取って, 最終的に $C(t)\leqq V(t)$ が得られる. ポアッソン積分 $V(t)$ はこのように, 円 (C) 内の $C(t)$ に対する調和優函数である. このことから函数 $v(x)=V[\varphi(x)]$ は, 領域 (δ) 内で, マキシマム $c(x)$ に対する調和優函数である. C. Q. F. D.

51. — 劣調和函数の列の上極限とそのマキシマム. — 領域 $\mathfrak{D}$ において, 完全内部で絶対値が有界な劣調和函数の列

$$(S)\qquad h_1(x),\ h_2(x),\ \ldots,\ h_\nu(x),\ \ldots$$

を考える. これに次の二つの函数列を付随させる：

$$(\Sigma),\qquad b_1(x),\ b_2(x),\ \ldots,\ b_\nu(x),\ \ldots,$$

$(\sigma),\qquad c_1(x),\ c_2(x),\ \ldots,\ c_\nu(x),\ \ldots,$

ここで $b_\nu(x)$ は函数列 $h_\nu(x), h_{n+1}(x), \ldots$ の上限を表し, $c_\nu(x)$ は $b_\nu(x)$ のマキシマムを表す.

(Σ) および (σ) は非増加であるから, それらは一意的な極限を持つ. それらをそれぞれ $b_0(x)$ および $c_0(x)$ とする. これらの極限の間の関係を見よう.

1° 殆ど自明な次の補題がある:

長さのある Jordan 曲線 Γ の上で定義された変数 x の函数の列 $f_\nu(x)$ $\nu = 1, 2, \ldots$ が与えられており, それは Γ 上一価な実可測函数で, 全体として両側に有界であり, 一意的な極限 $f_0(x)$ に収束しているとする. このとき, 任意の正の整数 n に対応して, Γ 上に次のような点集合 e_n を考える. すなわち, ε を予め与えられた正の数として, e_n のすべての点 ξ に対して少なくとも一つ

$$|f_0(\xi) - f_\nu(\xi)| \geqq \varepsilon$$

を満たす函数 $f_\nu(x),\ \nu \geqq n$ が存在する. そうすると, 測度 $m \cdot e_n$ は $\dfrac{1}{n}$ と共に零に収束する.

実際, いかなる n を取っても, $e_n > e_{n+1}$ だから, 列 e_n は一定の極限 e_0 を持つ. よく知られた定理により,

$$\mathrm{Lim}(m \cdot e_n) = m \cdot e_0$$

が得られる. したがってこの命題が正しくなければ, 集合 e_0 は実在する.

他方, Γ 上のすべての定点 x_0 に対し, 値 $f_\nu(x_0)$ は極限 $f_0(x_0)$ に一意的に収束するのだから, ある番号から先はすべての ν に対して

$$|f_0(x_0) - f_\nu(x_0)| < \varepsilon$$

である. これは集合 e_0 は点を持っていないことを意味する. したがって $\mathrm{Lim}(m \cdot e_n) = 0$ が得られる. C. Q. F. D.

2° <u>$V_0(t)$ を</u>

$$V_0(t) = \int_C b_0[\varphi(\tau)] K(\tau, t) ds$$

<u>とするとき, $v_0(x) = V_0[\psi(x)]$ であるような函数 $v_0(x)$ は存在し, 領域 (δ) 内で, 函数 $c_0(x)$ に対し最良調和優函数を与える.</u>

実際,

$$h_\nu[\varphi(t)] = H_\nu(t), \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

$$b_n[\varphi(t)] = B_n(t) \quad \text{および} \quad c_n[\varphi(t)] = C_n(t), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

とする. 円周 C 上, すべての函数 $B_\nu(\tau)$ は Lebesgue 氏の意味で絶対可積分 (積分 $\int_C |B_\nu(\tau)|ds$ は有限に留まる) だから極限 $B_0(\tau)$ も同じであることが分かる. したがってポアッソン積分

$$V_0(t) = \int_C B_0(\tau)K(\tau, t)ds$$

は存在し, 円 (C) の中で正則な調和函数を表す.

上の補題により, 曲線 δ 上で列 (Σ) の収束の仕方を観察しよう. (48 節の 1°) で注意した, $t = \psi(x)$ による δ と C の対応の仕方を思い出そう. そうすると容易に次の事が分かる. 予め与えられた正の数 ε に対し, 十分大きい正の整数 n を選ぶなら, $\nu \geqq n$ に対して (C) 内のいたるところで

$$H_\nu(t) < V_0(t) + \varepsilon$$

となる. したがって, すべての $\nu \geqq n$ に対して

$$B_\nu(t) \leqq V_0(t) + \varepsilon$$

が得られる. このことから両辺のマキシマムを取って

$$C_\nu(t) \leqq V_0(t) + \varepsilon$$

であることが分かる. したがって

$$C_0(t) \leqq V_0(t) + \varepsilon$$

である. 最後の不等式で ε を零に収束させることができるので, ポアッソン積分 $V_0(t)$ は函数 $C_0(t)$ をマジョレートする.

他方, 函数 $C_0(t)$ は非増加な劣調和函数の列の極限だから同じ性格を持つ. したがって ポアッソン積分

$$U_0(t) = \int_C C_0(\tau)K(\tau, t)ds$$

は 円 (C) 内で $C_0(t)$ に対する最良調和優函数である. 何故なら函数 $C_0(t)$ はここで両側に有界である. このことから C 上のすべての τ に対して, $B_0(\tau) \leqq C_0(\tau)$ であることを考慮して (C) 内で恒等的に

$$V_0(t) = U_0(t)$$

が結論される. このことは $V_0(t)$ が最良調和優函数であることを意味する. したがって $v_0(x)$ もそうである. C. Q. F. D.

3° 上の等式はさらに次のことを示している.

<u>領域 $\mathfrak{D}$ 内に勝手に描かれた長さのある単純 Jordan 曲線 Γ 上で $b_0(x) \neq c_0(x)$ であるような点の集合は高々測度零である</u>.

4° このことから容易に次のことが分かる.

<u>函数 $c_0(x)$ は $b_0(x)$ のマキシマムである</u>.

実際, $\mathfrak{D}$ 内のすべての x に対して, $c_0(x) \geqq b_0(x)$ であり, また $c_0(x)$ は上半連続だから, 両辺のマキシマムを取って

$$c_0(x) \geqq M(b_0, x)$$

が得られる. 右辺の記号は R. Baire によるもので, 点 x での $b_0(x)$ のマキシマムを意味する.
他方, 前の命題から, 逆の不等式も成り立つ. C. Q. F. D.

52. — 平面 y 上の極限移行. — 我々が研究しようとしていることは, (H) セクションの列の 2 種類の極限の間の関係を見ることである. セクションが完全であるような特殊な場合から始める.

$$\mathfrak{H}_1(x),\ \mathfrak{H}_2(x),\ \ldots,\ \mathfrak{H}_\nu(x),\ \ldots$$

を領域 $\mathfrak{D}$ における完全なセクション (H) の列とする. その極限と空間の極限をそれぞれ $\mathfrak{K}_0(x)$, $\mathfrak{H}_0(x)$ と表す.

$\mathfrak{D}$ に含まれる領域 (δ) 内のすべての点 x に対し, 固定された点 y_0 から集合 $\mathfrak{H}_\nu(x)$ 迄の距離 $r_\nu(x)$ は x にも ν にもよらない, 零でない下限 R を持つと仮定する. 点 y_0 から集合 $\mathfrak{H}_0(x)$ および $\mathfrak{K}_0(x)$ までの距離をそれぞれ $r_0(x)$ および $\rho_0(x)$ と表す.
$h_\nu(x) = 1/r_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ と置く. すべての函数 $h_\nu(x)$ は前節の条件を満たす. すなわちそれらは劣調和で, 領域 (δ) 内で全体として絶対有界 (bornées absolument) である. したがって 函数 $h_\nu(x)$ の列 (S) は前の性質をすべて満たす. 前と同じ記号を使って, 先ず極限 $b_0(x)$ と $c_0(x)$ の意味は何なのかを考える.
明かに (δ) 内で恒等的に $b_0(x) = 1/\rho_0(x)$ である.
さらに <u>(δ) 内のすべての x に対して</u>

$$c_0(x) = \frac{1}{r_0(x)}$$

<u>である</u>ことを見よう.

実際, $d_0(x)=1/r_0(x)$ と置くと, 領域 (δ) 内で

$$b_0(x) \leqq d_0(x)$$

である. ところで, 函数 $d_0(x)$ は上半連続であるからマキシマムを取って

$$c_0(x) \leqq d_0(x)$$

であることが分かる.

他方, ξ を領域 (δ) の任意の点, η を集合 $\mathfrak{H}_0(\xi)$ の点で, 距離 $|\eta-y_0|$ がその集合の中で最小のものとすると, 空間の点の列

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_\nu, y_\nu), \ldots$$

を点 (ξ, η) に一意的に収束するように選ぶことができる. ここで y_ν は $\mathfrak{H}_{p_\nu}(x_\nu)$ $\nu=1,2,\ldots,p_\nu$ の点で, p_ν は ν と共に増大する正の整数である. ここで

$$\mathfrak{H}_{p_\nu}(x_\nu) \geqq \frac{1}{|y_\nu - y_0|}$$

であることが分かる. したがって ν が何であっても常に

$$c_\nu(\xi) \geqq d_0(\xi)$$

したがって

$$c_0(\xi) \geqq d_0(\xi)$$

したがって領域 (δ) のすべての x に対して

$$c_0 = d_0(x)$$

である. C. Q. F. D.

53. 2°. $\mathfrak{H}_\nu(x)$, $\nu=1,2,\ldots$ を領域 $\mathfrak{D}$ 内の完全な (H) セクションの列とする. その極限を $\mathfrak{K}_0(x)$, その空間の極限を $\mathfrak{H}_0(x)$ と表す. もし任意に有限の点 y_0 を取って固定し, y_0 から集合 $\mathfrak{H}_0(x)$ および $\mathfrak{K}_0(x)$ までの距離をそれぞれ $r_0(x)$ および $\rho_0(x)$ とするなら, 領域 $\mathfrak{D}$ 内に勝手に描いた長さのある単純 Jordan 曲線 C 上で, $r_0(x)=\rho_0(x)$ でもなく $r_0(x)=0$ でもない点の集合 $\alpha(y_0)$ は測度零である.

実際, ξ を $r_0(\xi)\neq 0$ なる曲線 C 上の点とする. セクション $\mathfrak{H}_0(x)$ はクラス (H) に属しているから, それは上半連続である. したがって, $\mathfrak{D}$ 内に, 点 ξ を中心とし, 十分小さい半径の円 (γ) を, (γ) のすべての x に対して

$$r_0(x) > \frac{1}{2}\, r_0(\xi)$$

となるように描くことができる. $r_\nu(x)$ を点 y_0 から集合 $\mathfrak{H}_\nu(x)$, $\nu=1,2,\ldots$ までの距離とする. 正の整数 n を十分大きく選ぶと, $\nu \geqq n$ のとき, (γ) でいたるところ

$$r_\nu(x) > \frac{1}{4}\, r_0(\xi)$$

となる. 何故なら, もしそうでないとすると, $y=\mathfrak{H}_\nu(x)$ によって表される集合の列は少なくとも一つ (x', y') の形の極限点を持つ. ここで x' は (γ) 内または周上の点で, $y' \leqq \dfrac{1}{4}\, r_0(\xi)$ となるものを表す.

そうすると y' は $\mathfrak{H}_0(x')$ の点であるから, これは矛盾である.

このことから, 前に見たことにより, 円 (γ) 内の曲線 C の部分で $r_0(x) \neq \rho_0(x)$ となる点の集合は測度零である.

ところで, C 上の点の集合で, $r_0(x) \neq 0$ となるものは曲線上開である. したがって Borel–Lebesgue の補題で, この集合を可算個の円 (γ) で覆うことができる. したがって除外集合 $\alpha(y_0)$ は測度零である.　 C. Q. F. D.

3°　今度は座標が有理数の点全体よりなる列 η_ν, $\nu=1,2,\ldots$ を考え, 集合

$$\beta = \alpha(\eta_1) + \alpha(\eta_2) + \cdots + \alpha(\eta_\nu) + \cdots$$

を作る. 集合 β はまた測度零である. このことから次の命題が得られる.

曲線 C 上の点 x' で, $\mathfrak{H}_0(x')$ の境界が存在し, それが $\mathfrak{K}_0(x')$ の境界に含まれないようなものの集合は測度零である.

実際, x' を問題の集合の任意の点とする. そうすると, 集合 $\mathfrak{H}_0(x')$ の境界点 y' で, $\mathfrak{K}_0(x')$ の境界に含まれないものが少なくとも一つ存在する. 他方, 常に

$$\mathfrak{H}_0(x) > \mathfrak{K}_0(x)$$

だから, 点 y' は $\mathfrak{K}_0(x')$ の外にある. さらに $\mathfrak{K}_0(x')$ は閉集合であることを知っている. したがって点 y' を中心とする十分小さい円を描けば, その中に $\mathfrak{K}_0(x')$ の点は存在しない. この条件の下で容易に分かるように, 点 x' は集合 β に含まれる. このことと, 前のことからこの命題が得られる.

C. Q. F. D.

54.　定理. 筒状域 $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ 内に (H) セクションの列 $\mathfrak{H}_\nu(x)$, $\nu=1,2,\ldots$ を考え, その極限および空間の極限をそれぞれ $\mathfrak{K}_0(x)$ および $\mathfrak{H}_0(x)$ とする. もし領域 $\mathfrak{D}$ 内に長さのある単純 Jordan 曲線 C を勝手に描くなら, C 上の点 ξ で, 集合 $\mathfrak{H}_0(\xi)$ が領域 $\mathfrak{D}'$ 内で $\mathfrak{K}_0(\xi)$ の外に点をもつようなものの集合は測度零である.

実際, $A(\delta)$ を, x' は x 平面の任意の点を表し, y' は y 平面上の領域 (δ) の外または境界上の任意の点として, (x', y') の形の点集合を考える. 前の命題の証明を流用するためには, E を領域 $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ 内の (H) 集合として,

$$A(\mathfrak{D}') + E$$

なる形のすべての集合は筒状領域 ($x \in \mathfrak{D}$, y は任意) に対するクラス (H) に属することを見れば十分である. これは殆ど明らかであるが, 正確に証明しておこう.

$y = \text{constante}$ の形の固有平面はクラス (H) に属する. したがって 集合 $A(\delta)$ は, y' を領域 (δ) の外の任意の点とし, 固有平面 $y = y'$ の族の極限であるから, やはりクラス (H) に属する.

いま, 領域 (δ) は $\mathfrak{D}'$ の完全内部にあると仮定する. そうすると 集合

$$A(\delta) + E$$

は筒状域 ($x \in \mathfrak{D}$, y は任意) に対するクラス (H) に属する. 実際, (x', y') を問題の集合の任意の点 ($x' \in \mathfrak{D}$ とする) とすると, それは二つの場合に分けられる. もし y' が $\mathfrak{D}'$ (開) の中に落ちないなら (x', y') は問題の集合 $A(\delta)+E$ の内点である. したがってこの集合は点 (x', y') の近傍でクラス (H) に含まれる. もしそうでないなら y' は $\mathfrak{D}'$ 内にあるから (x', y') の適当な近傍内で $A(\delta)$ と E は共にクラス (H) に属し, したがってその和もそうである. 集合 $A(\delta)+E$ はこのようにして筒状域 ($x \in \mathfrak{D}$, y は任意) の各点に対するクラス (H) に属する. したがってその領域に対してもそうである.

(δ) を $\mathfrak{D}'$ に収束させる. $A(\delta)+E$ はそうすると一意的に $A(\mathfrak{D}')+E$ に収束する. したがってこの集合はクラス (H) に属する. C. Q. F. D.

第 V 章

Hartogs 氏の定理の最初の一般化.

I. 序文

55. さて主問題に戻り, x 平面の領域 $\mathfrak{D}$ における正則函数の列

$$(S) \qquad f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

を考える. 列 (S) の収束の様相は次々と明かにされてきた. その最も顕著な駅亭 (étapes) は次の如くである：

1° Weierstrass の定理. もし列 (S) が領域 $\mathfrak{D}$ の任意の完全内部で一様収束するなら, 極限は $\mathfrak{D}$ における正則函数である.

2° Stieltjes の定理. もし函数の $f_n(x)$ 絶対値が $\mathfrak{D}$ の任意の完全内部で全体として有界なら, $\mathfrak{D}$ 内の小さい部分 (δ) における列 (S) の一様収束が, 領域全体に対するそれを導く.

3° Vitali の定理. 上の定理は (δ) 内での一様収束を, $\mathfrak{D}$ 内に少なくとも一つ極限点を持つような無限個の点での収束に置き換えても同様に成り立つ.

それ以外に列 (S) の収束の様相を詳細にする多くの研究がある. にも拘らず, 多価函数については今日まで殆ど何も分かっていない. この状況で G. Julia 氏によって得られた次の結果は注目に値する：

もし領域 $\mathfrak{D}$ における代数型函数の列 $\varphi_n(x),\ n=1,2,\ldots$ が領域の任意の完全内部で一価函数 $\varphi_0(x)$[40]に一様収束すれば, この函数は $\mathfrak{D}$ で正則である.[41] ここで $\varphi_n(x)$ の分枝の数は n と共に無限に増大してもかまわない.[42]

この結果は各 $\varphi_n(x)$ に対して分枝の平均を考えれば直ちに証明できる. しかしそのことはこの命題が暗示的 (suggestif) であることを妨げるものではない. さらに Julia 氏はこの命題を複素 2 変数の解析函数の特異点の集合に関する F. Hartogs 氏の定理と同じ形の定理に対しても確立していることを指摘しておく.[43]

---

[40] ここで $\varphi_0(x)$ は有限と考えなければならない.
[41] Acta, 1926, p.113.
[42] Acta, t. 32.
[43] Acta, t. 32.

この章と次の章で (H) 集合の列に対して Weierstrass と Stieltjes 氏の定理を拡張しよう. Vitali の定理は代数型函数に対してすら成り立たないことが分かる. Hartogs の定理は抽象的に定義された (H) 集合に対しても成り立ち, そのことは我々に出発点を与えてくれる. 証明の原理は Hartogs 氏によって述べられたものと全く同様であるが, 定理の位置の重要さの故にそれを (H) 集合について証明することから始めよう.

56. Hartogs の定理. 筒状域 ($x \in \mathfrak{D}$, y は任意) にクラス (H) の集合 E が与えられたとき, もし $\mathfrak{D}$ のすべての定点 x' に対して, 固有面 $x=x'$ による E のセクションが y 平面上のただ一点 (一般に x と共に変化する) よりなるなら, そのセクションは領域 $\mathfrak{D}$ における複素変数 x の有理型函数を表す.

実際, E のセクションを $f(x)$ と表す. これは x の一価函数である. ξ を $\mathfrak{D}$ の任意の点とする. 一般性を失うことなく, 点 $f(\xi)$ は (y 平面上の) 無限遠点ではないと仮定することができる. 集合 E は閉だから, 点 ξ を中心とし, 境界も共に $\mathfrak{D}$ に含まれる円 (γ) を描き, 円 (γ) のすべての点 x に対して, y 平面上に予め描かれた, $f(\xi)$ を中心とする円 (γ') 内に $f(x)$ が留まるようにすることができる.

y_0 を (γ') の外に取られた有限の位置にある定点とし, $r(x)=|f(x)-y_0|$ とする. 第 II 章の終わり (32 節 1°) に確立した補題により, 函数 $\log r(x)$ は劣調和で同時に優調和である. したがってこの円 (γ) で調和である.

$\log r(x)$ に共役な調和函数 $v(x)$ を組み合わせて

$$\chi(x) = r(x)e^{iv(x)}$$
$$\varphi(x) = [f(x) - y_0]\,\frac{1}{\chi(x)}$$

と置く. $y=\varphi(x)$ で表される点の集合は, 初めの領域における 1 対 1 解析的な変換

$$x' = x, \qquad y' = (y - y_0)\,\frac{1}{\chi(x)}$$

を E に施して得られるものだから, それは筒状域 ($x \in (\gamma)$, y は任意) 内のクラス (H) に属する.

さらに (γ) 内のすべての x に対して点 $\varphi(x)$ は円周 $|y'|=1$ 上にある. したがって, 点 y_1 を

$$|y_1| > 1, \qquad \arg\, y_1 = \arg\, \varphi(\xi)$$

となるように取って, 距離 $\rho(x)=|\varphi(x)-y_1|$ を考えると, 函数 $\log\rho(x)$ は (γ) 内で正則な調和函数で, 最小値を中心 ξ で取る. したがってこれは円

内で定数でなければならない. これは恒等的に $\varphi(x)=\varphi(\xi)$ であることを意味する. このようにして函数 $f(x)$ は円 (γ) 内で正則であることが分かる. この中心 ξ は領域 $\mathfrak{D}$ の任意の点である. したがって $f(x)$ は $\mathfrak{D}$ で有理型である. C. Q. F. D.

57. — 前定理の一般化. — もし第 II 章の終わりに得られた完全な (H) セクションの直径の性質を思い出し, さらに 39 節に述べた劣調和函数の負の極に関する制限を思い出すなら, 設定された条件を弱めることで前節の定理を次のように一般化することができる.

定理. (e) を領域 $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれる容量正の点集合とする. 領域 $\mathfrak{D}$ 内にクラス (H) に属する完全なセクション $\mathfrak{H}(x)$ が与えられたとき, もしその領域の任意の点 x' に対して集合 $\mathfrak{H}(x')$ が全平面と一致しないなら, 函数 $\mathfrak{H}(x)$ の (e) 上の一価性は, それが領域 $\mathfrak{D}$ 内で有理型函数であることを保証するのに十分である.

実際, 一般性を失うことなく, x が領域 $\mathfrak{D}$ を動くとき, セクション $\mathfrak{H}(x)$ は無限遠点を覆わないと仮定することができる. その理由は前の証明におけるのと同じである. 他方, この条件のもとで $\mathfrak{H}(x)$ の直径 $d(x)$ は領域 $\mathfrak{D}$ における対数的劣調和函数であり, $\mathfrak{D}$ の内部にある容量正の集合 (e) で零になる. したがって $d(x)$ はこの領域で恒等的に零になる. 他の言葉で言えば $\mathfrak{H}(x)$ は一価である.

セクション $\mathfrak{H}(x)$ が有界であるという仮定を取り去る. Hartogs の定理により, $\mathfrak{H}(x)$ は $\mathfrak{D}$ 内で有理型であることが分かる. C. Q. F. D.

58. — Stieltjes の定理の拡張. — 今見たことと前章の二つの定理により, Stieltjes の定理を完全な (H) セクション に拡張することが許される.

定理. 領域 $\mathfrak{D}$ における完全で, $\mathfrak{D}$ の任意の完全内部で一様に有界な (H) セクションの列

$$(\Sigma) \qquad \mathfrak{H}_1(x),\ \mathfrak{H}_2(x),\ \ldots,\ \mathfrak{H}_\nu(x),\ \ldots$$

を考える. (e) を $\mathfrak{D}$ 内に描かれた長さのある単純 Jordan 曲線上の点集合で, 外測度が零ではなく, それ以外は任意のものとする. もしこの列の極限 $\mathfrak{K}_0(x)$ が (e) 上で一価函数なら, それは領域内で正則函数である.

実際, 列 (Σ) の空間における極限 $\mathfrak{H}(x)$ を考える. C を問題の曲線とする. すでに見たように C 上のすべての点 x' に対し, 高々測度零の点を除いて, 集合 $\mathfrak{H}_0(x')$ の境界は $\mathfrak{K}_0(x')$ のそれに含まれる. ところで今の場合 (e) の任意の点 ξ において集合 $\mathfrak{K}_0(\xi)$ はただ一点よりなる. したがって, 高々測度零の点を除いて $\mathfrak{H}_0(\xi)$ に対しても同様である.

さらにセクション $\mathfrak{H}_0(x)$ はまた領域 $\mathfrak{D}$ のクラス (H) に属する. 明かにそれは $\mathfrak{D}$ の内部で完全であり, $\mathfrak{D}$ の任意の完全内部で有界である. そして前のことから, $\mathfrak{H}_0(\xi)$ がただ一点よりなるような, 曲線 C 上の点 ξ の集合は測度正であり, したがってその容量も正である. これは 41 節で調べた. セクション $\mathfrak{H}(x)$ はこのように前の定理の条件をすべて満たす. したがってそれは $\mathfrak{D}$ 内で正則である.

$\mathfrak{H}_0(x)$ と $\mathfrak{K}_0(x)$ の間の関係をよく見よう. 先ず, $\mathfrak{D}$ 内の任意の点 x に対し, 集合 $\mathfrak{K}_0(x)$ は集合 $\mathfrak{H}_0(x)$ 内に含まれる. その後者はただ一点である. したがって, $\mathfrak{D}$ 内に勝手に点 x' を選ぶとき, 二つの可能性しかない. その一つは $\mathfrak{H}_0(x')=\mathfrak{K}_0(x')$ となるときで, もう一つは $\mathfrak{K}_0(x')$ が点をもたないときである. ところで, 列 (S) のすべてのセクション $\mathfrak{H}_\nu(x)$ はクラス (H) に属し, 完全で有界だから, $y=\mathfrak{H}_\nu(x)$ で表される空間の集合が少なくとも一つ点を持つ限り (このことは暗黙の中に仮定されている), 集合 $\mathfrak{H}_\nu(x')$ は少なくとも一つ点を含まなければならない.[44] このようにすべての集合 $\mathfrak{H}_\nu(x)$, $\nu=1,2,\ldots$ は実際に存在し, 極限点の集合 $\mathfrak{K}_0(x')$ も同様である. したがって $\mathfrak{D}$ 内のどの x' に対しても常に $\mathfrak{H}_0(x')=\mathfrak{K}_0(x')$ が得られる. したがって, $\mathfrak{K}_0(x)$ は領域 $\mathfrak{D}$ 内で正則函数である. C. Q. F. D.

59. — 一様収束についての注意. — 前節と同じ条件の下で, 列 (Σ) を考え, 一様収束についての或る反省 (reflexions) をしよう. 極限 $\mathfrak{K}_0(x)$ は $\mathfrak{D}$ 内で正則函数だから言葉の曖昧さをなくするため, それを改めて $f(x)$ と表す. x を固定して $f(x)$ から $\mathfrak{H}_\nu(x)$ までの最大距離を $M_\nu(x)$ とする. 函数 $M_\nu(x)$ は, $y=\mathfrak{H}_\nu(x)$ で表される空間の集合を 1 対 1 解析的な変換

$$x' = x, \qquad y' = y - f(x)$$

で写像し, 新しい集合の, 解析平面 $x'=\mathrm{constant}$ の族によるセクションへの $y'=0$ からの最大距離と考えられる. したがって函数 $M_\nu(x)$ は領域 $\mathfrak{D}$ 内の対数的劣調和函数である.

$\mathfrak{D}$ の内部に勝手に円 (C) を描き, そこで, 周 C 上の値 $\log M_\nu(x)$ によって定義されるポアッソン積分 $V_\nu(x)$ を作る. 予め与えられた正の数 ε に対し, C 上の $M_\nu(x)>\varepsilon$ となる点の集合は $1/\nu$ と共に測度零に収束する. このことから, 函数 $M_\mu(x)$ は C 上一様有界だから, 函数列 $V_\nu(x)$ は円 (C) の内部で一様に $-\infty$ に収束する. したがって, 列 $\log M_\nu(x)$ もそうである. このように函数 $M_\nu(x)$ の列は $\mathfrak{D}$ 内の任意の円の内部で零に一様収束する. 領域 $\mathfrak{D}$ に対してもそうである. 別の言葉で言うと :

前の定理で, 列 (Σ) の収束は領域 $\mathfrak{D}$ の任意の完全内部で一様である.

[44] 26 節の性質 (2,c) により.

しかし, 一様収束は極限が解析的であることの判定条件としてのみ重要であるように思われる. 他方これに対し, 考えを固定するため, 列 (Σ) を見ると, 空間の極限 $\mathfrak{H}(x)$ が一価函数であるような収束はもっと直接で, さらにそれはもっと制限が少ない (moins restrictive) ということができる. このような理由で, 以後この点には触れないこととする.

60. — Vitali の定理についての注意. — 多価解析函数より出発すると, Vitali の定理が成り立たないことは容易に分かる. 例えば, 有界領域 $\mathfrak{D}$ の完全内部に可算集合

$$(e) \qquad x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_\nu,\ \dots$$

を考え, その領域は, 境界共 (e) の外にあるような円 (γ) を含むと仮定する. すべての ν に対し, $\mathfrak{D}$ で正則で, 絶対値が 1 以下であり, $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ でのみ零になる函数 $f_\nu(x)$ を選ぶ. α_ν を $|f_\nu(x)|$ の (γ) 内の下限とする. 正の整数 p_ν を十分大きく取って

$$\sqrt[p_\nu]{\alpha_\nu} > \left(1 - \frac{1}{2\nu^2}\right)$$

となるようにできる.

$$\varphi_\nu = f_1^{\frac{1}{p_1}} \cdot f_2^{\frac{1}{p_2}} \cdot \cdots \cdot f_\nu^{\frac{1}{p_\nu}}$$

と置く. そうすると代数型函数の列

$$(\sigma) \qquad \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots\ \varphi_\nu(x),\ \dots$$

が得られる. これは 集合 (e) 上で零に収束する. しかしそれは領域 $\mathfrak{D}$ 内で恒等的にそうはならない. 実際, 円 (γ) のすべての点 x に対し, この列 (σ) の極限 $\mathfrak{K}_0(x)$ は y 平面の原点を含まない. したがって列 (σ) は問題の反例を与えている.

II. 主定理.

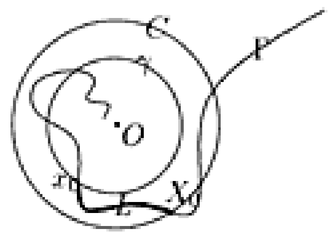
61. — 序文. — 我々の試みた幾つかの考察は, このように捉えられた収束の理論の核は何なのかを明らかにした. それは 57 節に得た結果, すなわち一般化された Hartogs の定理である. この章とこれに続く章で, そこで示した単独の (H) 集合の性質をさらに掘り下げることに専念する. それは (H) 集合を固有面と既約な核の構造物 (la construction du noyau d'irréductivité) に分離する研究に導かれる.

さて, その目標に対して, 前の定理は, セクション (H) の一価性を仮定している点において, 出発点としては特別過ぎる. 以下で現在の目的に

沿った基本定理を得るため, Hartogs の定理をもう一度一般化しよう. これはやはり直径 $d(x)$ の性質を基礎としている. しかし, 今度は前の場合のように直接的ではない. この二つの間の関係は解析要素と解析函数のそれに非常に似ている. そういう解析接続をなし遂げるために, 或る補題を確立することから始める.

62. x 平面上に, 原点を通らず, 原点に一意的に収束する連続曲線 Γ を考える. 原点を中心に十分小さい半径 R の円 (C) を, Γ が円周 C と交わるように描く. Γ と C の交点の中で, Γ に沿って測ったときに原点に一番近い点 X_0 を選ぶ.

Fig.



(C) と同心で半径 ρ が R より小さい他の円 (γ) を描き, 後に ρ を限りなく零に近づける. X_0 から出発して 曲線 Γ を原点に向かって進むとき, 円周 γ と最初に交わる点を x_0 とする. 曲線 Γ 上の点 X_0 と x_0 の間の弧 L は円 (C) を一つまたは幾つかの領域に分ける. それらの中で原点を含む領域 δ を選ぶ. これは単連結である.

領域 (δ) を変換 $x=f(z)$ によって, 原点が原点に移るように, 円 $|z|<1$ へ等角に写像する. ζ を円周 $|z|=1$ 上の任意の点とする. 半径に沿って ζ に到る $f(z)$ の極限は Fatou 氏の定理により, 円周上, 測度零の集合の点を除いて, 到る処一意的に定まる. それを $f(\zeta)$ と表す. 函数 $|f(\zeta)|$ は明かに可測である. $|f(\zeta)|<R$ となる円周上の点の集合の測度を $2\pi\mu$ とする. この状勢の下で次の事を示そう：

半径 ρ を限りなく小さくするとき, 測度 $2\pi\mu$ は 2π に収束する.

実際, 函数 $\log\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|$ は円 $|z|<1$ 内で調和で正則だから, 1 より小さいすべての r に対し,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f(re^{i\theta})}{r}\right|d\theta=\log|f'(0)|$$

が得られる. ここで $z=re^{i\theta}$ である. このことから, 極限 $r=1$ の場合として, Lebesgue 氏のよく知られた定理から

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\zeta)|d\theta=\log|f'(0)|$$

が得られる. たがって

$$|f'(0)|>R^{(1-\mu)}\cdot\rho^{\mu}$$

である.

他方, Koebe 氏によって

$$K|f'(0)| \leqq \rho$$

の形の制限が存在することが知られている. K は或る正の数を表す. この二つの不等式から

$$\rho^{(1-\mu)} > KR^{(1-\mu)}$$

が得られる. これは $1-\mu$ が ρ と共に零に近づくことを示している.

C. Q. F. D.

63. 補題 1. 領域 $\mathfrak{D}$ 内に劣調和函数 $h(x)$ を考え, その領域の点 ξ を選び, その領域内にその点は通らず, その点に一意的に収束するような連続曲線 Γ を描く. x を曲線 Γ に沿って ξ に収束させると,

$$\overline{\operatorname*{Lim}_{x\to\xi}}\, h(x) = h(\xi)$$

が得られる.

短く言うと, 値 $h(\xi)$ はすべての連続的な近似で到達できる.

実際, 点 $\xi=0$ と仮定し, さらに前に考えた円 (C) はこの領域に含まれていると仮定する. 恒等的に $h(x)=+\infty$ または $h(x)=-\infty$ となるような自明な場合は除外する. そうすると 函数 $h(x)$ は $\mathfrak{D}$ の完全内部で上に有界であり, したがって当然閉円 (C)+C 上でそうである. M をその上限とし, m を弧 L 上の上限とする.

円 $|z|<1$ 内で考えて $h[f(z)]=H(z)$ と置く. 恒等的に $|h(x)|\neq\infty$ だから, 函数 $H(z)$ は $r<1$ のとき, すべての円周 $|z|=r$ 上で Lebesgue 氏の意味で積分可能である. そして

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(re^{i\theta})d\theta \geqq H(0)$$

が得られる. (ここで $z=re^{i\theta}$ である.)

ここで円周 $|\zeta|=1$ 上の点 ζ で, $f(\zeta)$ が 弧 L 上の点を表すようなものの集合 (e) は測度が $2\pi\mu$ であることを思い出そう. したがって, 集合 (e) のすべての点 ξ ($\xi = e^{i\theta}$) に対して, 円周 $|\zeta|=1$ への半径に沿った接近に関して

$$\overline{\operatorname*{Lim}_{r\to 1}}\, H(re^{i\theta}) \leqq m \qquad (\because\ \text{上半連続})$$

である. そして $|z|<1$ 内の如何なる z に対しても常に $H(z)\leqq M$ である. この注意から, 最初の不等式で r を 1 に収束させて,

$$H(0) \leqq (1-\mu)M + \mu m$$

が得られる．ここで数 μ はいくらでも 1 に近づく．したがって半径 R がいかに小さくとも $H(0) \leqq m$ である．このことは命題の言葉では

$$\overline{\operatorname*{Lim}_{x \to \xi}}\, h(x) \geqq h(\xi) \qquad x \neq \xi$$

であることを示している．

ところで，$h(x)$ は上半連続であるから，実際に起こるのは等号だけである． C. Q. F. D.

64. x 平面に領域 $\mathfrak{D}$ を描く．簡単のため，その直径は 1 より小さいと仮定する．その領域に任意に閉集合 F を考える．$\mathfrak{D}$ の境界 C と F のそれは一つ又は幾つかの有界な領域を取り囲む．その中から C の点を境界に持つものを選び，それを Δ と表す．Γ を Δ の境界に含まれる F の点よりなる集合とする．

よく知られているように，領域 Δ を円 $|z|<1$ 上に等角に写像することができる．正確に言うと，$|z|<1$ における正則函数 $\varphi(z)$ であって，z が円全体を動くとき，点 $\varphi(z)$ は x 平面上の領域 Δ を正確に描き，Δ のすべての点においてその逆関数 $\psi(x)$ の任意の分枝は正則で解析的であるようなものを見つけることができる．[訳注. Δ の普遍被覆面を単位円に等角写像する函数の逆函数である.]

円周 $|z|=1$ 上で函数 $\varphi(z)$ を見よう．$z=re^{i\theta}$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．$\varphi(z)$ は $|z|<1$ で有界だから，Fatou の定理により，高々測度零の集合を除いたすべての θ に対して

$$\operatorname*{Lim}_{r \to 1} \varphi(re^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$$

である．$\varphi(e^{i\theta})$ は定まった値であり，$r<1$ である．ここで，円周 $|z|=1$ の点で，$\varphi(e^{i\theta})$ が Γ の点を表すようなものの集合 (e) は可測であることを示そう．実際，ξ を Γ の任意の点とする．ξ を中心に十分小さい半径 ρ の円 (γ) を描く．円は領域 $\mathfrak{D}$ に含まれるようにする．さて，$|z|=1$ 上の点で，

$$|\varphi(e^{i\theta}) - \xi| < \rho$$

となる点の集合は明かに可測である．このことから慣用の論理で集合 (e) が可測なことが分かる．

この状況の下で，F の容量と (e) の測度の間の関係を調べよう．

65. 先ず F の容量は零であると仮定する．この場合，40 節で見たように，無限遠点を除いて劣調和な函数 $h(x)$ で，定数 $-\infty$ ではなく，F のすべての点が負の極になるものを作ることができる．$h[\varphi(z)] = H(z)$ と

置く. これは $|z|<1$ 内で劣調和である. θ を $e^{i\theta}$ が (e) に属するような任意の偏角とする. そうすると, $\varphi(re^{i\theta})$ は F の唯一の点に収束するので,

$$\operatorname*{Lim}_{r\to 1} H(re^{i\theta}) = -\infty$$

が得られる. このことから, 51 節の 1° の道に沿って, 予め与えられた正の数 N に対し, n を正の整数とし, $e^{i\theta}$ は (e) の任意の点を表すとして, $|z|=r_n=1-\dfrac{1}{2n}$ 上で

$$H(r_n e^{i\theta}) > -N$$

なる点の集合 α_n を考えると, α_n の測度は $1/n$ と共に限りなく小さくなることが分かる.

したがって, もし集合 (e) の測度が零でないなら, 函数 $H(z)$ は $|z|<1$ 内で上に有界だから, $|z|\leqq r_n$ でポアッソン積分を考えて, $|z|<1$ で恒等的に $H(z)=-\infty$ であることが分かる. これは矛盾であるから, 次の結論が得られる：

もし F が容量零なら (e) は測度零である.

66. 今度は F の外容量が零でない場合を考える. 前と同じ道を辿ろうとすると, 先ず前の函数 $h(x)$ と同様の役割をする劣調和函数を見つけなければならない. そのために De La Vallée Poussin が 3 次元空間で述べている証明法を繰り返す.[45]

$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ を $\mathfrak{D}$ 内の閉地域 (regions fermés) の列であって, 35 節に述べたカテゴリー (A) に属し, 閉集合 F を含み, F に収束するものとする. A_n 上に全質量が絶対値で $Ce{\cdot}A_n$ に等しい負の質量を, それから生成される対数ポテンシャル $-U_n(x)$ が -1 より小さくはならないように分布する. その分布を集合函数 $\mu_n(e)$ で表す.

さて, $\mu_n(e)$ は n によらず両側に有界であるから 列 $\mu_n(e)$ は領域 $\mathfrak{D}$ 内で正規である. したがって, 証明の一般性を失うことなく, 列 $\mu_n(e)$, $n=1,2,\ldots$ は収束すると仮定することが許される. その極限を $\mu(e)$ と表す. このように作られた集合函数 $\mu(e)$ は閉集合 F 上の負の質量分布を表し, その全質量 $-m$ は $m\geqq Ce{\cdot}F$ を満たす.

$$U(x) = \int_{\mathfrak{D}} \log\frac{1}{r}\, d\mu(e)$$

と置く. そうすると, 函数 $\log r$ は F の外で (無限遠点は除いて) 連続だから, F の外では到る処

$$U(x) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} U_n(x) < 1$$

[45] Annales de L'institut H. Poincaré, 1932, p.227. 証明法はまた (36 節の 3°) のそれと同様である. [訳注. 本文に引用されている 35 節およびこの 36 節はこの訳文には無い.]

であることが分かる.

函数 $U(x)$ が得られたので, $U[\varphi(z)]=V(z)$ と置いて, それを円 $|z|<1$ 内で考える. これは $|z|<1$ で正則な調和函数で, 絶対有界である. したがって, 測度零の点を除いて, 円周 $|z|=1$ の任意の点で半径に沿った接近による一意的な極限を持つ. M を, その一意的な極限の, 問題の集合 (e) の点を除いた $|z|=1$ 上の上限とする. $U(x)$ は全有限部分で劣調和で, それを生成する F 上に分布された負の質量のトータルは零ではないから, $|z|<1$ 内の点 z_0 で

$$V(z_0) > M$$

となるものがすくなくとも一つある. これは (e) の測度が零でないことを示している. このようにして次の結果が得られた :

補題 2. 64 節で述べた状勢の下で, 集合 (e) の測度は, 閉集合 F の外容量が零または正となるにしたがって, 零または正となる.

ここで領域 $\mathfrak{D}$ の直径がどうであれ, 領域 $\mathfrak{D}$ の境界が連続体を含むという条件でこの補題は成り立つことを注意しておく.

67. この補題を念頭にして, 当初の問題をよく見よう. $\mathfrak{H}(x)$ を領域 $\mathfrak{D}$ におけるクラス (H) の完全なセクションとし, 簡単のため領域内で有界と仮定する. (e) を $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれた容量正の集合とする. この状勢の下で, (e) の任意の点 ξ に対し, 集合 $\mathfrak{H}(\xi)$ は有限個の点 (勿論 ξ による) しか含んでいないと仮定する. そして領域 $\mathfrak{D}$ 内での $\mathfrak{H}(x)$ の振る舞い (allure) を観察する.

ξ を (e) の点とするとき, $\mathfrak{H}(\xi)$ の点の個数は一般に全体として有界という訳ではないことを注意しなければならない. 先ず ξ を (e) の任意の定点とすると, $\mathfrak{H}(\xi)$ は少なくとも一つの点を含む. 実際, 若しそうでないなら, セクション $\mathfrak{H}(x)$ は有界で完全なクラス (H) の集合だから, $y=\mathfrak{H}(x)$ で表される空間 (x,y) の集合は存在しなくなる. ξ を固定して考えたとき, $\mathfrak{H}(\xi)$ が丁度 n 個の点よりなるような点 ξ の集合 (α_n) を (e) から選びだす. このとき $\mathfrak{D}$ の直径は 1 より小さいと仮定しておく. 上の注意から集合 (e) は集合 (α_n), $n=1,2,\ldots$ の和集合である. この条件の下で, 37 節で見たように,

$$Ce\cdot(e) \leqq Ce\cdot(\alpha_1)+Ce\cdot(\alpha_2)+\cdots$$

である. したがって $C\,e\cdot(\alpha_n)>0$ となるような正の整数 n を見出すことができる. それで, 改めて, 集合 (e) の任意の点 ξ に対して $\mathfrak{H}(\xi)$ は丁度 n 個の点よりなると仮定することができる. この結果は $\mathfrak{D}$ の直径にはよらない.

ξ_0 を (e) の任意の点とする. 言葉を単純にするため, それは x 平面の有限の部分にあるとする. 何故ならもしそうでないなら, 慣用の変換 $x'=\dfrac{1}{x}$ で原点に持ってくればよい. y 平面の集合 $\mathfrak{H}(\xi_0)$ は n 個の点, すなわち $y_1, y_2, \ldots, y_n$ よりなる. それらを中心に, それぞれ互いに他の外に (円周が触れることないように) あるような円 $(\gamma'_1), (\gamma'_2), \ldots, (\gamma'_n)$ を描く. セクション $\mathfrak{H}(x)$ は上半連続だから, 点 ξ_0 を中心に円 (γ) を $\mathfrak{D}$ 内に十分小さく描き, x が円 (γ) を動くとき, 対応する y は円 (γ'_ν), $\nu=1, 2, \ldots, n$ の内部に留まるようにすることができる. この状勢の下で, (H) 集合の性質 $(2, c)$ により, (γ) 内の任意の点 x に対応する $\mathfrak{H}(x)$ は各 (γ'_ν) 内に少なくとも一つの点を含まなければならない. 特別な場合として, もし点 x が (e) 上にあれば, $\mathfrak{H}(x)$ は各円内に丁度一点を持つ.

ここで (e) の, 円 (γ) 内の部分は容量正であると仮定することは一般性を失わせるものではない. 実際, (e) の任意の点 ξ に対して (γ) のような性質を持つ円を描くことができ, さらに (e) をそのような円の有限個で覆うことができる. それらの円の中には, 少なくとも一つ (e) の容量正の部分を含むものが存在する. 元の円をその円と取り替えればよい.

この付加された仮定と共に, 57 節で一般化された Hartogs の定理を適用する. 例えば, 円 (γ'_1) を考える. $\mathfrak{H}(x)$ の点は (γ'_1) 内では (γ) における新たな完全 (H) セクションである. それは (e) 上で (その円内では) 一価函数である. したがって, 円 (γ) で正則な函数である. これはすべての他の (γ'_ν) に対してもそうである. このようにして次のことが分かった.

<u>領域 $\mathfrak{D}$ 内に, その中では $\mathfrak{H}(x)$ が n 個の正則函数よりなるような円 (γ) が存在する.</u>

68. 領域 $\mathfrak{D}$ 内に円 (γ) を含む他の単連結な領域 Δ を描く. 言葉を単純化するため, 有界とする. 得られた正則函数を (γ) から領域 Δ へ解析接続しよう.

セクション $\mathfrak{H}(x)$ は円 (γ) 内では丁度 n 個の値を取る. もし (γ) の境界上 (且つ Δ 内) の任意の点 x_1 において $\mathfrak{H}(x_1)$ が少なくとも n 個の互いに分離した部分よりなるなら, 前と同じ議論で点 x_1 を中心とする領域 Δ 内の円 (γ_1) を描けば, セクション $\mathfrak{H}(x)$ はこの円内で丁度 n 個の値を持つ. この過程を限りなく続ける. そうすると終いに<u>次のような性質を持つ, Δ 内の或る領域 (ω) に到達する</u>:

<u>1°. セクション $\mathfrak{H}(x)$ は領域 (ω) 内で丁度 n 個の値を持ち, したがって, (ω) のすべての点で n 個の正則函数, すなわち $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ よりなる.</u> [訳注. (ω) は単連結とは限らないことに注意.]

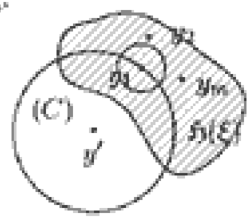
$\underline{2}^\circ$. α を (ω) の境界点で, Δ の境界点ではないものの集合とすると, α の任意の点 ξ に対し, 集合 $\mathfrak{H}(\xi)$ は高々 $(n-1)$ 個の連結成分よりなる.

境界 α をもっと正確に見るため, 補題 1 を思い出すと, 次の命題が得られる.

L を境界 α 上の点 ξ に一様に収束する (ω) 内の道とする. 点 x が L に沿って ξ に近づくとき, もし $\mathfrak{H}(x)$ の極限点の個数が有限なら, その個数は $n-1$ を越えない.

実際, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ を問題の極限点とする. 集合 $\mathfrak{H}(\xi)$ は有界だから, 平面 y の有限の部分の $\mathfrak{H}(\xi)$ の外に点 y' をマークする. $r(x)$ を y' から $\mathfrak{H}(x)$ への距離 (最短) とする. ξ の或る近傍では $r(x) \neq 0$ だから, $r(x)$ はその近傍で対数的優調和函数である, したがって, $1/r(x)$ は劣調和である. この状勢のもとで, もし y' を中心とする円 (C) を, その周上に点 y_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m$ の少なくとも一つを含み, それらの点を内部に含まないように描くなら, 補題 1 により, 円 (C) は $\mathfrak{H}(\xi)$ の点を含まない. 点 y' は $\mathfrak{H}(\xi)$ の外の任意の点だから, このことから, この過程を繰り返して, 集合 $\mathfrak{H}(\xi)$ は点 y_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m$ と一致することが分かる. したがって, α の一般的な性質から $m \leqq n-1$ であることが分かる. C. Q. F. D.

Fig.



69. 領域 (ω) の固有の境界 α の観察を続ける. 前の結果をもっと通常の言葉に言い直すことから始めよう.

$$F(x, y) = \prod (y - f_\nu) = y^n + \varphi_1(x) y^{n-1} + \cdots + \varphi_n(x)$$
$$\psi(x) = \prod (f_\mu - f_\nu)^2$$

と置く. 二つ目の式の積は (μ, ν), $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$ で $\mu \neq \nu$ なるすべての組み合わせにわたる.

函数 $f_\nu(x), \nu = 1, 2, \ldots, n$ は領域 (ω) 内で正則で有界だから, $\varphi_\nu(x), \nu = 1, 2, \ldots, n$ および $\psi(x)$ も同様である. さらに函数 $\psi(x)$ は恒等的には零でないことを注意する.

これらの用語を使って次のように定式化する.

x が (ω) 内の連続曲線に沿って α 上の点 ξ に限りなく近づくとき, もしすべての n 個の函数 $\varphi_\nu(x)$ が一意的な極限を持てば, 函数 $\psi(x)$ は零に収束する.

ここで, 領域 (ω) の連結度に従って次の二つの場合を区別する.

第 1 の場合. (ω) が単連結の場合. — (ω) を円 $|z|<1$ へ等角に写像する. $x=\lambda(z)$ をその写像函数とする. Fatou の定理により, ζ を $|z|=1$ 上の任意の点とし, z が半径に沿って ζ に近づいたときの $\lambda(z)$ の極限として定義される函数 $\lambda(\zeta)$ を考える. 函数 $\lambda(\zeta)$ は $|\zeta|=1$ 上の高々測度零の点を除いて, いたる所存在する. $\lambda(\zeta)$ によって表される x 平面の点が, 問題の境界 α に含まれるような点 ζ の集合 (e) を観察しよう. 先ず, 集合 (e) は可測である. これは補題 2 を得るために 64 節で述べたことと全く同様の理由による.

α が実際に存在する限り, (e) の測度は零ではない.

実際, x_0 を (ω) の外の点として, 函数

$$\chi(z)=\frac{1}{\lambda(z)-x_0}$$

を考える. これは $|z|<1$ で正則である. M を $1/|x-x_0|$ の α 上の上限とし, m' を α に属さない (ω) の境界におけるそれとする. x_0 は

$$M>m'$$

となるように α の十分近くに取る. この状勢の下で, $|\chi(z)|$ は $|z|<1$ 内で劣調和函数で, 有界であることを注意して, もし $m(e)=0$ なら $|z|<1$ で $|\chi(z)|\leqq m'$ であることが分かる. これは不可能である. したがって $m(e)>0$ でなければならない. C. Q. F. D.

$$\Phi_\nu(z)=\varphi_\nu[\lambda(z)],\quad \Psi(z)=\psi[\lambda(z)]\qquad \nu=1,2,\ldots,n$$

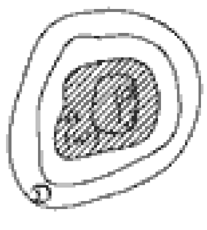
と置く. 函数 $\Phi_\nu(z)$, $\Psi(z)$ は $|z|<1$ 内で正則で有界だから, Fatou の定理を満たす. ここでこの節の初めの命題を思い出そう. そうすると $\Psi(z)$ の半径に沿った接近による一意的な極限 $\Psi(\zeta)$ は高々測度零の点を除いて, 集合 (e) 上で零である. したがって境界 α が点を持っているときは Riesz のよく知られた定理によって恒等的に $\Psi(z)=0$ である. これは矛盾である. それで次の結論を得る.

もし領域 (ω) が単連結なら, それは領域 Δ と一致する.

70. 第 2 の場合. (ω) が多重連結の場合. — この場合, (ω) 内に単純な閉 Jordan 曲線 δ を, α の或る部分が δ で囲まれた領域の完全内部に含まれるように描くことができる.[46] β をその部分とする. 領域 Δ は単連結で有界だから, 曲線 δ で囲まれた部分はすべて Δ 内に含まれる. このこと

[46] 例えば, P. Montel, Leçon sur les familles normales, 1927, p. 7 を見よ.

Fig.



から, 境界は $(\delta+\beta)$ に含まれ, その境界が少なくとも一つ δ の点を実際に含むような有界領域が一つ, しかもただ一つ存在する. この領域を (δ) と表す.

この状況のもとで, 補題 2 を思い出し, 領域 (δ) を $|z|<1$ 上へ等角に写像する. $x=\lambda(z)$ をそのような写像とする. Fatou の定理により, ζ を円周 $|\zeta|=1$ の点として, いつものように函数 $\lambda(\zeta)$ を考える. (e) を $\lambda(\zeta)$ が定まり, β を定める円周上の点の集合とする.

先ず, β は容量正とする. そうすると (e) の測度は零ではない. このことから, 前の場合の論法と同じ道筋に沿って, 恒等的に $\psi(z)=0$ という矛盾に到達する. したがって集合 β は容量零である. したがって前に見たように, 領域 (δ) 内で調和で絶対有界な函数はすべて曲線 δ で囲まれた領域で正則になる. 特にすべての函数 $\varphi_\nu(x)$, $\psi(x)$, $\nu=1,2,\ldots,n$ はこの領域で正則になる. さらに函数 $\psi(x)$ は恒等的に零ではないから, β は高々有限個の点しか含まないことが分かる. α を分離するすべての部分にこの結果を適用して, 次のことが分かる：

もし領域 (ω) が多重連結なら, その領域は外境界と孤立点よりなる. そしてさらにすべての函数 $\varphi_\nu(x)$, $\psi(x)$, $\nu=1,2,\ldots,n$ はその点でも正則になる.

我々が出発点とした命題を反省 (refléchir) するため, 68 節の終わりに戻ろう. そして道 L は (ω) 内にあるという条件を取り去ることができる. 実際それは証明の中で一度も現われなかった. このことから $\varphi_\nu(x)$, $\psi(x)$ は (ω) の外境界によって囲まれた単連結な領域 (ω') 内で正則だから, 前節で述べた結果が新しい領域 (ω') に対して得られた. したがって第 1 の場合に与えられた結果は成り立つ. すなわち：

領域 (ω) は Δ の内部の孤立した点を除いて Δ と一致する. そして $\varphi_\nu(x)$, $\nu=1,2,\ldots,n$ は Δ で正則である.

セクション $\mathfrak{H}(x)$ はこのように Δ 内の有限個の代数型函数によって構成されている. 他方 Δ は円 (γ) を含む領域で $\mathfrak{D}$ に含まれ, 単連結で有界であるが, それ以外は任意である. したがってセクション $\mathfrak{H}(x)$ は $\mathfrak{D}$ でそのようなものである. 何故なら $\mathfrak{H}(x)$ は有界であるから, 無限遠点は何も問題がない. 得られた結果をもう少し一般に次のように言い表す.

定理. 領域 $\mathfrak{D}$ にクラス (H) で完全なセクション $\mathfrak{H}(x)$ を考え, $\mathfrak{D}$ の定点 x のすべてに対し y 平面上の集合 $\mathfrak{H}(x)$ は外点を持つものとする.

もし $\mathfrak{D}$ の完全内部にある容量正の集合のすべての定点 ξ において, 集合 $\mathfrak{H}(\xi)$ は (ξ に依存する) 有限個の点しか含んでいないとすると, セクシ

ョン $\mathfrak{H}(x)$ はこの領域の有限個の代数型函数によって構成されている.

第 VI 章.

(H) 集合の固有面への分解.

既約な核の構造.

I. 導集合についての反省 (Réflexions).

71. 任意次元の空間における点集合に関して, 有限または超限の任意階の導集合およびその核がどのようなものかはよく知られている. これらは René Baire 氏の古典的な著書 Leçons sur les fonctions discontinues に詳しく述べられている.

この一連のアイデアを, 本来完全集合である, (H) 集合 に応用するため, そこから本質的なものを抽出しよう. E を空間 (x,y) の点集合とし, 考えを固定するため, 閉で有界とし, それ以外は任意とする. 或る操作 $\mathfrak{A}$ を考え, それによって (任意の) 集合 E から

$$\mathfrak{A}(E) = E^{(1)}$$

なる新たな集合 $E^{(1)}$ が

1° $E^{(1)}$ はまた閉である.

2° $E > E^{(1)}$ である[47].

となるように求まるとする.

この操作 $\mathfrak{A}$ によって, 導集合についてのすべての抽象的な結果を再構成することができる. 以下, 細部はすべて前掲の著書に委ねて, それを簡単に示そう.

72. — 縮退集合 (ensemble réduit).[48] — 先ず, 帰納法 (超限順序数にわたる) によってすべてのクラス I またはクラス II の順序数 α に対し, α 階の縮退集合 $E^{(\alpha)}$ を定義しよう.

$\alpha=1$ に対しては $E^{(1)}=\mathfrak{A}(E)$ とする. ここで $E^{(1)}$ は E に含まれる閉集合である.

そこで, α' を与えられた α より小さい任意の順序数として, すべての α' 階の導集合は知られていると仮定し, それらは閉集合で

$$E^{(\alpha')} > E^{(\alpha'')} \qquad \text{すべての } \alpha''<\alpha'<\alpha \text{に対し}$$

[47] この記号は二つの集合が一致することを妨げるものではない. すなわち Baire 氏の記号に依る $E \geqq E^{(1)}$ のことである.

[48] 前掲の著書の 50 頁と 64–66 頁

であるとする．この条件のもとで導集合 $E^{(\alpha)}$ を定義して, それが同じ性質を持つことを示せばよい．二つの場合に分ける：α が第 I 種の数なら, $E^{(\alpha-1)}$ が存在して閉であることを注意して,

$$E^{(\alpha)} = \mathfrak{A}(E^{(\alpha-1)})$$

と定義すればよい．この場合 $E^{(\alpha)}$ は明かに必要な条件を満たしている．

もし α が第 II 種なら, それは

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\nu < \cdots < \alpha$$

なる順序数の列の極限と考えられる．ところで, 仮定により, すべての集合 $E^{(\alpha_\nu)}$ は閉で,

$$E^{(\alpha_1)} > E^{(\alpha_2)} > \cdots > E^{(\alpha_\nu)} > \cdots$$

のように並んでいる．したがってこの列の一意的な極限が存在し, 必ず閉集合になる．これを $E^{(\alpha)}$ とする．この定義は明かに列 α_ν の取り方によらず, 明かに

$$E^{(\alpha)} < E^{(\alpha')} \qquad \text{すべての } \alpha' < \alpha \text{ に対し}$$

である．

1°．このように, 任意階の縮退集合を一意的に定義した. それらはすべて閉集合で

$$E^{(\alpha')} > E^{(\alpha)}, \qquad \text{もし } \alpha' < \alpha \text{ なら}$$

である.

73. — 既約な核.[49] — 2°．もし或る閉領域が, すべての α に対して, $E^{(\alpha)}$ の点を含んでいるなら, すべての $E^{(\alpha)}$ に属する点がその閉領域上に存在する.

証明は全く同じなので, 前掲の著書を引用するに留める．$E^{(\Omega)}$ によって, すべての $E^{(\alpha)}$ に含まれる点よりなる集合を表す．(それはときとして点を含まない)

3°．$E^{(\Omega)}$ の点を含まないような任意の領域 (開)Δ に対し, すべての $\beta > \alpha$ に対して Δ の中で $E^{(\beta)} = 0$ となるような $\alpha < \Omega$ が存在する.

実際, Δ の完全内部に含まれ, Δ に収束する領域の列

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\nu, \ldots$$

[49]前掲書 64–66 頁.

を考える. 前の命題により, すべての閉領域 Δ_n に対し, Δ_n で $E^{(\alpha_n)}=0$ となるような $\alpha_n<\Omega$ を選ぶことができる. このことから $\alpha_n<\beta<\Omega$ なるすべての β に対し $E^{(\beta)}=0$ であることが直ちに導かれる.

さて, このように得られたクラス I または II の順序数 α_n は集合として可算だから, 同じカテゴリーの所期の条件を満たす数 α が存在する.

C. Q. F. D.

領域 (開) Δ に対し, 上記の性質を持つ数 α の最小を見つけることすらできる.

4°. 任意の領域 (開)Δ 内で, そこでは $E^{(\alpha)}=E^{(\Omega)}$ となる最小の数 $\alpha<\Omega$ を見つけることができる.

実際, $E^{(\Omega)}$ は閉だから, Δ に属し $E^{(\Omega)}$ には属さない点よりなる集合は開である. この開集合は前のすべての命題を満たす可算有個の領域よりなるから, 問題の数 α は存在する. C. Q. F. D.

このことから次の結果が得られる.

5°. $\mathfrak{A}(E^{(\Omega)})=E^{(\Omega)}$ である.

このように, 縮約 (réduction) $\mathfrak{A}$ を高々超限数回繰り返すことで, さらなる操作 $\mathfrak{A}$ で不変な集合 $E^{(\Omega)}$ に到達する. それで $E^{(\Omega)}$ を既約な核 (noyau d'irréductibilité) と呼ぶ.

$E^{(\Omega)}$ が実際に存在するかどうかによって, 元の集合 E を既約または可約と言う.

6°. 集合 E を

$$E=\sum(E^{(\delta)}-E^{(\delta+1)})+E^{(\Omega)}$$

と表すことができる. ここで $\delta=0,1,\ldots<\Omega$ で, 且つ $E^{(0)}=E$ である.

記号の意味とここで使った論証の筋道は Baire 氏によってなされたものと全く同じである.

注意. 我々は, 集合 E は常に全空間 (x,y) で閉で有界と仮定した. しかし, これは言葉を簡単にするためだけである. すべての結果は, 空間の無限遠点または領域の境界に対して適当に考える必要はあるが, 有界でない集合 E の場合や, それが或る領域内にしか定義されていない場合にも適用される.

II. (H) 集合の解析的縮約.

74. — 操作 $\mathfrak{A}$ の定義. — 領域 Δ 内に限って定義された有界またはそうでない閉集合 E が与えられたとする. E 上の点を二種に分ける：P を E の点とするとき, もし P の或る近傍内で E が第 2 種の点を持たない有限個の固有面よりなるとき, それを第 1 種とする. この場合, P の或る近傍内で, $F(x,y)$ を或る正則函数として, E を $F(x,y)=0$ の形の方程式で表すことができる. 逆も成り立つ. E の点で, 第 1 種でないものはすべて第 2 種である.

E の第 2 種の点の集合を $E^{(1)}$とし, 操作 $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{A}(E)=E^{(1)}$ と定義して, これを解析的縮約 (réduction analytique) と言う.

集合 $E^{(1)}$ は領域 Δ 内で閉であり, $E^{(1)}<E$ である. そのように解析的縮約は必須の性質を満たすから, 任意階の解析的導集合 $E^{(\alpha)}$ および $E^{(\Omega)}$ を考えることができる. しかし閉集合 E が任意なら, 一般に $E^{(1)}=E$ である.

75. 以下, 領域 Δ 内に定義されたクラス (H) の集合 E を考える. 先ず, 何時もの仕方で, 次の基本定理を置く.

解析的導集合 $E^{(1)}$ はまた領域 Δ におけるクラス (H) に属する.

$E^{(1)}$ について 三つの条件 (H) を調べよう. 先ず, Δ に含まれる領域内の $E^{(1)}$ の部分は, 上に見たように, 閉である.

$E^{(1)}$ が 25 節で定義として採用した性質 $(2,a)$ を満たすかど うかを調べる. $E^{(1)}$ のセクションを $\mathfrak{H}_1(x)$ とする. x 平面の点 ξ に対し, y 平面上の集合 $\mathfrak{H}_1(\xi)$ は孤立点 η を持つと仮定する. ここで (ξ,η) は勿論空間領域 Δ 内の点を表す. 集合 $E^{(1)}$ は閉だから, Δ 内に $|x-\xi|<r$, $\rho_1<|y-\eta|<\rho_2$ なる形の筒状域 Γ を, $E^{(1)}$ の点を含まないように描くことができる. そうすると, 集合 E は, 領域 Γ のすべての点で, F を正則函数として, $F(x,y)=0$ の形の方程式によって与えられている. さらに領域 Γ は $x=\xi$ を除いて E の点を含まないと仮定することもできる. それは, 先の半径を適当に変えることで容易に実現できる. $x=\xi$ に対する例外の場合は E が固有面 $x=\xi$ を含むとき, 且つそのときにのみ生じる.

ここで, E の $0<|x-\xi|<r$, $|y-\eta|<\rho_2$ 内の部分 G を考える. $\mathfrak{H}(x)$ を E のセクションとする. さて, x が領域 $0<|x-\xi|<r$ の全体を動くとき, $\mathfrak{H}_1(x)$ の点は円環 $\rho_1<|y-\xi|<\rho_2$ には決して落ちない. したがって E は, $\mathfrak{H}(x)$ の, この円環の外に対応する部分と中に対応する部分の, 二つの分離された部分よりなる. その後者が G なのである. したがって G のセクション $\mathfrak{K}(x)$ は円環 $0<|x-\xi|<r$ における完全なクラス (H) の集合である.

いま, $0<|x-\xi|<r$ 内に点 x_0 があって, 集合 $\mathfrak{H}_1(x_0)$ が $|y-\eta|<\rho_2$ 内に点を持たないと仮定する. それは 完全なクラス (H) の集合 $\mathfrak{K}(x)$ が点 x_0 の近傍で有限個の値しか取らないと仮定したことと同じである. したがって基本定理により, $\mathfrak{K}(x)$ は $0<|x-\xi|<r$ 内で有限個の代数函数よりなる.

それで, 点 ξ を調べることだけが問題である. 先ず, $\mathfrak{K}(x)$ を構成する解析函数は有界であるから, 点 ξ においても代数型である. それでそのように延長されたセクションを同じ記号 $\mathfrak{K}(x)$ で表すこととし, $|y-\eta|<\rho_2$ 内で集合 $\mathfrak{H}(\xi)$ の点の分布がどのようなものかを考える. E は (H) 集合だから可能な場合は二つしかない. その一つは $|y-\eta|<\rho_2$ のすべての点が $\mathfrak{H}(\xi)$ に属するときで, もう一つは $\mathfrak{K}(\xi)$ 以外に点がないときである. 両者とも (ξ,η) は E の第 1 種の点を表す. これは矛盾である. このようにして上に置いた仮定は同時には成り立たない. すなわち集合 $E^{(1)}$ は性質 $(2,a)$ を満たす.

$E^{(1)}$ の上記の性質は 1 対 1 解析的な変換を許す. 実際, $E^{(1)}$ の像は E の像に関する解析的導集合である.

まとめると, 集合 $E^{(1)}$ は領域 Δ 内のクラス (H) に属する. C. Q. F. D.

76. 任意階の解析的導集合 $E^{(\alpha)}$ が領域 Δ 内の (H) 集合 であるかどうかが問題になる. $\alpha=1$ に対しては今見たことから答えは肯定的である. $\alpha'<\alpha$ なるすべての α' に対して $E^{(\alpha')}$ は領域に対するクラス (H) に属すると仮定する. 二つの場合を区別する. もし順序数 α が第 I 種なら, 上の命題から $E^{(\alpha)}$ はクラス (H) に属する. もし α が第 II 種なら, 階数が α より小さい解析的導集合の列の極限と考えられる. (H) 集合 は空間 (x,y) の極限移行を許すから, $E^{(\alpha)}$ は領域 Δ 内の (H) 集合である. したがって一般帰納法により, 任意の解析的導集合は Δ 内のクラス (H) に属する. 解析的核 $E(\Omega)$ については, 領域 Δ 全体で $E^{(\alpha)}=E^{(\Omega)}$ となる $\alpha<\Omega$ を見出すことができるから, $E^{(\Omega)}$ は必然的に (H) 集合である.

定理. 領域 Δ 内にクラス (H) の集合 E が与えられたとき, すべての解析的導集合 $E^{(\alpha)}$ および解析的核 $E^{(\Omega)}$ はまた領域 Δ に対するクラス (H) に属する.

77. — 核 $\mathbf{E}^{(\Omega)}$ の構造. — 核 $E^{(\Omega)}$ の構造をよく見るため, Δ の完全内部に筒状域 $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ を描く. ここで, 簡単のため, x, y の平面の領域 $\mathfrak{D},\mathfrak{D}'$ はそれぞれ有界で, $\mathfrak{D}$ の直径は 1 より小さいとする. $E^{(\Omega)}$ の $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ 内の部分のセクション $\mathfrak{H}_0(x)$ を考え, $\mathfrak{D}$ 内の任意の定点 x' に対し, 集合 $\mathfrak{H}(x')$ は領域 $\mathfrak{D}'$ 内に孤立点を持つかどうかを問題にする.

(e) を $\mathfrak{D}$ 内の点 x' で, 各 $\mathfrak{H}_0(x')$ が $\mathfrak{D}'$ 内に孤立点を持つようなものの集合とする.

$$Ce(e) > 0$$

と仮定する. x' を固定して, η を ($\mathfrak{D}'$ 内の) 集合 $\mathfrak{H}_0(x')$ の任意の点とし, $\mathfrak{D}'$ 内に各 η を中心とし, 中心以外に $\mathfrak{H}_0(x')$ の点を持たないように, 十分小さい半径の円を描く. これはもし η が孤立点でないなら点円になる. $\delta(x')$ を $\mathfrak{H}_0(x')$ に関するそのような円の半径の上限とする. n を任意の正の整数とし, (e) から

$$\delta(x') > \frac{1}{n}$$

となるような点の集合 (e_n) を選びだす. $(e)=(e_1)+(e_2)+\cdots$ だから

$$Ce(e) \leqq Ce(e_1) + Ce(e_2) + \cdots + Ce(e_n) + \cdots$$

が得られる. このことから $(e_n)<(e_{n+1})$ であることを注意して, 或る番号から先, すなわち $n \geqq \nu$ のとき, $Ce(e_n)>0$ となる.

y 平面を座標軸に平行で, 間隔が l の, 二組の直線族によって正方形 (ω) に分割する. そして l を適当に小さく, 例えば

$$l = \frac{1}{10\nu}$$

とする. さて, (e_ν) の任意の定点 x' に対し, 集合 $\mathfrak{H}_0(x')$ の点 η' で, η' を中心とする半径 $1/\nu$ の円は η' 以外に $\mathfrak{H}_0(x')$ の点を持たないようなものが少なくとも一つ存在する. それで, 任意の (ω) に対応して, (e_ν) の点 x' で, それに対応する集合 $\mathfrak{H}_0(x')$ が (ω) 内に点 η' を持つようなものの集合 (f) を選びだす. この集合 (f) は点を持たないこともある. 集合 (e_ν) はそのような (f) の和である.

改めて (f) を (ω) に対応するそのような集合の一つとする. $Ce(f) > 0$ と仮定することができる. (f) の任意の点 x' を中心に円 (γ) を, この円内のすべての点 x に対して $\mathfrak{H}_0(x)$ は (ω) と同心で一辺の長さが $2l$ の正方形 (ω') の境界上に点を持たないように描く. 容易に分かるように, これは常に可能である. 閉正方形 (ω') は $\mathfrak{D}'$ 内に含まれる. さて x' は (f) 上の任意の点だから, (f) のこの円 (γ) 内の部分 (g) の外容量が正であるような円 (γ) を見出すことができる. $\mathfrak{H}_0(x)$ の, 正方形 (ω') 内の部分 $\mathfrak{K}(x)$ は, この円 (γ) における完全な (H) セクションである. さらに容量正の集合 (g) 上でそれは一価函数である. したがって基本定理により, $\mathfrak{K}(x)$ は (γ) 内で正則函数である. これは $E^{(\Omega)}$ が既約でないことを意味する. この矛盾は仮定 $Ce(e) > 0$ に起因する. したがって $Ce(e)=0$ である. ここでこの結果は Δ の完全内部に含まれるどんな筒状領域 $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ に対しても常に正しい.

定理. 領域 Δ 内に (H) 集合を考える. もし Δ の完全内部に筒状域 $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ を任意に描くとき, 領域 $\mathfrak{D}$ の点で, 解析的核 $E^{(\Omega)}$ のセクションが $\mathfrak{D}'$ 内に少なくとも一つ孤立点をもつようなものの集合は容量零である.[50]

大雑把に言うと $E^{(\Omega)}$ のセクションは殆どいたるところ完全集合である.

78. — E. E. Levi の発見に関する注意. — 我々は可約な集合の構造を調べることに導かれた. しかしその前に一つの注意をしよう. もし二つの閉集合が或る領域の中で同じ解析的核を持つとき, それらは共に領域内のクラス (H) に属するためにはどちらか一方がそうであれば十分である. このことは, 一価函数に限ることで満足するなら, 複素 2 変数の解析函数の真性特異点の集合はそれを作りだすものとは独立な或る性質を満たすと言う Hartogs 氏の発見から E. E. Levi の発見へのごく自然な道に我々を導く. なお, 上記の制約は, 我々が言葉の複雑さを避けるため, 常に閉集合を考えているということに起因しており, それを取り除くことはたいして困難なことではない.

79. — 可約な集合の構造. — 以下, 常に領域 Δ 内の解析的に可約な閉集合 E を考える. そうすると, 集合 E はその領域のクラス (H) に属している.

先ず, Δ 内に筒状域 $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ を描き, 新たに集合 E は $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ 内にしか定義されていないと考える. そしてさらに言葉を簡単にするため E のセクション $\mathfrak{H}(x)$ は $\mathfrak{D}$ 内で完全であり, $\mathfrak{D}'$ は有界, したがって $\mathfrak{H}(x)$ は有界と仮定する.

E の α 階の解析的導集合 $E^{(\alpha)}$ を考える. α は常の如くクラス I 又は II の順序数である. ここで $E^{(\alpha)}$ は空集合 (他の言い方では点を持たない) であってもよい. $\mathfrak{H}_\alpha(x)$ を $E^{(\alpha)}$ のセクションとし, $\mathfrak{H}_\alpha^{(\beta)}(x)$ を $\mathfrak{H}_\alpha(x)$ の通常の意味の β 階の導集合とする. ここでは x を定点とみなしたときの導集合と考えている.

(ξ,η) を $E^{(\alpha)}$ の第 1 種の点とする. $\mathfrak{H}(x)$ は有界であるという仮定によって, $E^{(\alpha)}$ は $x=\text{constante}$ という形の固有面を含んでいないから, 集合 $\mathfrak{H}_\alpha(\xi)$ は η で孤立点である. 他の言葉では $\mathfrak{H}_{\alpha+1}(\xi)$ は η を含まない. したがって (x を固定して) $\mathfrak{D}$ のいたるところ

$$\mathfrak{H}_\alpha^{(1)}(x) < \mathfrak{H}_{\alpha+1}(x)$$

である. しかし一般に逆は正しくない.

[50] 問題となっている点 x' によって定まる集合の記号は各定点 x' に対してのものと理解しなければならない.

一般に, α をクラス I または II の順序数とするとき,

$$\mathfrak{H}^{(\alpha)}(x) < \mathfrak{H}_\alpha(x)$$

であることを言おう. 実際, $\alpha=1$ のときは正しいから, この不等式が α より小さい α' のすべてに対して成り立つと仮定して, α に対して調べればよい. 二つの場合を区別する：もし α が第 I 種なら不等式

$$\mathfrak{H}^{(\alpha-1)}(x) < \mathfrak{H}_{\alpha-1}(x)$$

から

$$\mathfrak{H}^{(\alpha)}(x) < \mathfrak{H}^{(1)}_{\alpha-1}(x) < \mathfrak{H}_\alpha(x)$$

が得られる. もし α が第 II 種なら α より小さい数の列 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ で, 増大しなが α にら収束するものを選ぶことができる. 二つの集合の列 $\mathfrak{H}^{(\alpha_\nu)}$ と $\mathfrak{H}_{\alpha_\nu}$ は非増加でそれぞれ $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$ と $\mathfrak{H}_\alpha$ に

$$\mathfrak{H}^{(\alpha_\nu)} < \mathfrak{H}_{\alpha_\nu}$$

なる関係を保ちながら収束する. したがって極限でも成り立つ. C. Q. F. D.

さて, $E^{(\Omega)}=0$ という仮定から, 双筒状域 $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ で $E^{(\beta)}=0$ となる $\beta<\Omega$ を定めることができる. その数 β に対し, 上のことから $\mathfrak{D}$ のいたるところ $\mathfrak{H}^{(\beta)}(x)=0$ である. それで次のことが言えた：

もし筒状域 $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ 内の閉集合 E が解析的核 $E^{(\Omega)}$ を持たず, さらにもし E が $x=\text{constante}$ の形の固有平面を含んでいないなら, $\mathfrak{D}$ の任意の点 x に対し, E のセクション $\mathfrak{H}(x)$ は常に可算個の点からなる. そして $\mathfrak{H}^{(\alpha)}(x)$ が点を持たないようなクラス I または II の順序数 α を x によらずに選ぶことができる. ここで $\mathfrak{H}^{(\alpha)}(x)$ は集合 $\mathfrak{H}(x)$ の, x を固定して考えたときの, α 階の導集合を意味する.

80. 引き続き, 領域 Δ 内に定義された解析的に可約な集合 E の構造を調べる. E が何であっても常に

$$E = \sum \left(E^{(\delta)} - E^{(\delta+1)}\right) + E^{(\Omega)}, \qquad \delta = 0, 1, 2, \ldots < \Omega$$

が得られることを思い出そう. そして今の場合, さらに $E^{(\Omega)}=0$ である.

$\alpha < \Omega$ の中で $E^{(\alpha)}=E^{(\Omega)}$ となる最小の数 β を見つけることができる. 明かに β は第 1 種である. 何故なら, 空でない無限個の集合の空間の極限は実際に存在する. $(\beta-1)$ を領域 Δ 内の可約な集合 E の階数と呼ぶ.

さらに E 上の点 P に対し, もしそれが $E^{(\delta)} - E^{(\delta+1)}$ に属するなら, それを δ 階と呼ぶ. この $E^{(\delta)} - E^{(\delta+1)}$ は $E^{(\delta)}$ の第 1 種の点よりなる.

E の任意の点は或る δ, $\delta=0,1,\ldots,<\beta$ 階の点である. 逆に $0\leqq\delta<\beta$ なる任意の δ に対し, δ 階の E の点が少なくとも一つ存在する.

E 上の任意の点 P を考える. もしそれが δ 階なら $E^{(\delta)}$ の第 1 種の点だから, その点を中心とする超球 (ω) を, その中で $E^{(\delta)}$ は (ω) 内で定義された第 2 種の点を含まない有限個の固有面 (S) と一致するように描くことができる. このことから, P を Δ 内の任意の点と考えられることを注意して, Borel–Lebesgue の補題により, 次のことが分かる :

<u>領域内に可約集合 E が与えられたとき, E を第 2 種の点を持たない可算個の固有面で覆うことができる</u>.

今度は固有面 (S) を領域 Δ 内で超球から外へ解析接続したときの振る舞いを考察することが問題である. 先ず次のことが分かる :

<u>領域 Δ に解析的に一続きの固有面 Σ が与えられたとき, Σ が集合 E に完全に含まれるか, Σ は高々可算個の点でしか E と交わらないかの二つの場合しかない</u>.

実際, もしこれがすべての Σ の正則または極の要素 σ に対して正しければこの命題は正しい. 言葉を簡単にするため, E は $x=0$ に平行な解析平面を含まず, 問題の要素 σ は $y=\varphi(x)$ と表されていると仮定する. $\varphi(x)$ は或る円 (C) 内の正則函数である. これは空間 (x,y) の非特異な線型変換でいつでも実現できる.

(e) を円 (C) 内の点集合で, それらに対して σ は E と交わるとする. σ の境界を考えない限り, σ と E の共通点の集合は閉だから, (C) の内部の任意の閉領域内にある (e) の部分は閉である.

いま, (e) は非可算と仮定する. (f) を (e) の任意の非可算部分集合とする. E の δ 階の任意の点 (ξ,η) を考える. $E^{(\delta)}$ はその点の近傍では $y=\psi(x)$ の形の方程式で表される固有面の有限個で覆うことができる. $\psi(x)$ は ξ を中心とする或る円 (γ) 内の代数型函数で, 解析的に一続きのものである.[51] (f) から $\varphi(x)=\psi(x)$ となる点集合 (g) を取り出す. E は上のような固有面の可算個で覆えるから, $\psi(x)$ を (g) が非可算個であるように選ぶことができる. この場合 (γ) と (C) の共通部分のすべての点で $\varphi(x)=\psi(x)$ でなければならない.

このように, (e) の非可算なすべての部分集合は少なくとも (e) の内点を含む. このことから, (e) は閉であることを思い出して, (e) は (C) と一致しなければならない. すなわち要素 σ は E に含まれる. C. Q. F. D.

いま, Δ 内で (S) の一つを解析接続した固有面 Σ を考える. 面 (S) は $E^{(\delta)}$ に完全に含まれている事を思えば, 上の命題から面 Σ のすべても $E^{(\delta)}$ 上にある. したがって次の命題が得られた :

[51] ξ が無限遠点なら, (γ) を原点を中心とする円の外を意味する.

領域 Δ 内の可約な集合 E は Δ 内における解析接続によって生成される固有面の可算個により成っている.

81. — 固有面成分の性質. — さらに, 可約集合 E の各成分 Σ は任意であることはできず, それはかなり特殊な制約の下にあることが分かる. 特別な場合の考察から始めよう：

x, y の整函数 $G(x,y)$ で $G(x,y)=0$ が既約なものを考える. Hartogs により, $1/G(x,y)$ の特異点の集合 E はクラス (H) に属する. さて, 集合 E は三つの部分, $G(x,y)=0$ によって表される固有面 S と $x=\infty$, $y=\infty$ よりなる. この S のすべての点は零階であり, 後の二つの平面の点は 1 階である.

S を x 平面に射影して, Riemann 面 $\mathfrak{R}$ が得られる. $\mathfrak{R}$ のあらわな境界 (frontière découverte) F を考えよう. すなわち, $\mathfrak{R}$ は正則, 極または代数型の函数要素の収束円によって構成さているとみなされるので, $\mathfrak{R}$ の分枝の少なくとも一つで覆われている部分の境界である. [訳注. 8.] $\mathfrak{R}$ の任意の要素の内点の集合は確かに開だから, 集合 F は閉である. ここで G. Julia 氏は Zoretti 氏と Gross 氏に負う定理によって, 集合 F は如何なる連続体も含むことはできないことを示した.[52]

先ず, これは任意の可約な (H) 集合の一般的な性質であることを確かめよう.

82. 筒状域 ($x \in \mathfrak{D}$, y は任意) における解析的に可約な集合 E が与えられ, E の成分中から解析面 Σ を勝手に選ぶ. 不要な複雑さを避けるため, E のセクション $\mathfrak{H}(x)$ は $\mathfrak{D}$ 内で有界と仮定する. 固有面 Σ は $y=\varphi(x)$ なる形の関係を満たす. ここで $\varphi(x)$ は $\mathfrak{D}$ 内の解析函数を表す. (正確に言うと, $\varphi(x)$ は初期要素から, 領域 $\mathfrak{D}$ 内で可能な限り解析接続して生成される.) $\varphi(x)$ に付随する Riemann 面の前述の意味のあらわな境界を F と表す. [訳注. 9.]

1°. $\mathfrak{D}$ 内に, 少なくともその一部がこの Riemann 面によって覆われているような円 (γ) を描く. この円内では $\varphi(x)$ も一続きではないかもしれないので, その分枝の中で任意の一つ $\psi(x)$ を考える. この状況の下で, 議論を単純にするため, 幾つかの言葉を導入しよう. 先ず, (γ) 内のあらわな境界 Γ のあり方によって分枝 $\psi(x)$ を次の二つに区別する：もし Γ が容量零なら $\psi(x)$ を第 1 種と呼ぶ. もし Γ が容量正ならその函数は第 2 種と呼ばれる. [訳注. 境界点を Riemann 面に付随するものと考えるなら, Γ の容量はその射影の集合の容量と考えるのであろう.]

[52] Bull. de la Société Math. de France, t. 192, ここに問題がある：問題の集合 F は不連続完全集合 (un ensemble parfait discontinu) を実際に含むことができるか.

この境界 Γ 上の任意の点 ξ に対し, 記号 $\psi(\xi)$ は, x があらゆる可能な方法で ξ へ近づいたときの極限値の集合を意味するものとする. [訳注. ξ を Riemann 面に付随するものと考えるなら, x はその Riemann 面上の点と考える.] $\psi(\xi) < \mathfrak{H}(\xi)$ であることは明らかである. $\psi(\xi)$ の任意の点 η には E 上の点 (ξ, η) が対応し, したがってその点の階数が対応する. さてこの階数のすべてはクラス I または II の順序数だから, その最小数 δ が存在する. この数 δ を $\psi(x)$ に関する点 ξ の階数と呼ぶ.

もし分枝 $\psi(x)$ が第 2 種なら (その円内の) 集合 Γ は容量正だから, 少なくとも一つの順序数 α があって, Γ 上の点 ξ の階数 [訳注. $\psi(x)$ に関する点 ξ の] が α となるものの集合が容量正となる. さらにそのような順序数 α の中の最小を見つけることができる. それを $\psi(x)$ の階数と呼ぶ. 分枝 [訳注. (γ) 上の $\varphi(x)$ の各分枝] の階数 α' には最小の順序数 α_0 がある. それを与えられた函数 $\varphi(x)$ の階数と呼ぶ.

2° ここで, 境界 [訳注. $\varphi(x)$ に付随する Riemann 面の] F の容量は零ではないと仮定する. 可算個の分枝のあらわな境界 Γ で F を覆うことができるのだから, この仮定から, 少なくとも一つ第 2 種の分枝が存在する. このことから, 円 (γ) 内の $\varphi(x)$ の分枝 $\psi(x)$ で, $\psi(x)$ の階数 α_0 が $\varphi(x)$ のそれと一致するようなものを見出すことができる. これの性質を 77 節の道に沿って処理しよう.

Γ を分枝 $\psi(x)$ のあらわな境界とする. ここで Γ は円 (開) (γ) 内に限定して考えていると理解しなければならない. Γ の点で, $\psi(x)$ に関する階数が α_0 であるようなものの集合 $\mathfrak{E}$ を考える. それは $\mathfrak{E}$ のすべての点 ξ に対して $\psi(\xi) < \mathfrak{H}_{\alpha_0}(\xi)$ であることを意味する. [訳注. 定義だけからでは, $\psi(\xi)$ は階数が α_0 より小さい点を含んでいるかも知れない.] ここで記号 $\mathfrak{H}_{\alpha_0}(x)$ は今までどおり $E^{(\alpha_0)}$ のセクションを意味する. $\mathfrak{E}$ から, 任意の整数 n に対して, 次のような集合 $\mathfrak{E}_n$ を抽出する. すなわち, $\mathfrak{E}_n$ のすべての点 ξ に対し, $\psi(\xi)$ は少なくとも一つ $\mathfrak{H}_{\alpha_0}(\xi)$ の孤立点 η を含み, η から残りの $\mathfrak{H}_{\alpha_0}(\xi)$ の部分迄の距離は $1/n$ より大きい. そうするとしばしば見たように, n を十分大きく取ると, $\mathfrak{E}_n$ の外容量は零でなくなる.[53]

y 平面に等間隔 $1/10n$ の平行線 (直線) の直交族を描き, y 平面を合同な正方形に分割する. そして, 集合 $\mathfrak{E}_n$ から容量正の部分集合 $\mathfrak{F}$ を次のように選びだす. すなわち, 或る一つの正方形 Δ があって, $\mathfrak{F}$ 上のどの点 ξ に対しても, $\psi(\xi)$ は上に示した性質を持つ少なくとも一つの点 η をその正方形 Δ 内に持つ. そうすると $(\mathfrak{F})$ 上のすべての点 ξ に対して $\mathfrak{H}_{\alpha_0}(\xi)$ は正方形 Δ 内に一つの, しかもただ一つの点を持つ.

[53] 例え $\mathfrak{E}_n$ の直径が 1 より大きくても意味は明白であろう.

この状勢の下で $\mathfrak{F}$ 上の任意の点 x' に対し, y 平面上の集合 $\mathfrak{H}_{\alpha_0}(x')$ を考える. 正方形 Δ 内に $\psi(x')$ の点 η_0 を中心に $\mathfrak{H}_{\alpha_0}(x')$ と交わらないように閉曲線 δ (重複点を持たない Jordan の) を描く. この集合は閉で可算だから, これは常に可能である. 次に (γ) 内に ξ を中心とする十分小さい円 (γ') を, 次のような性質を満たすように描く:

(a). 円 (γ') の任意の x に対し, セクション $\mathfrak{H}_{\alpha_0}(x)$ は曲線 δ と交わらない. これは常にできる. この条件で, $\mathfrak{H}_{\alpha_0}(x)$ の δ 内に閉じ込められた部分 $\mathfrak{K}(x)$ は (γ') 内の完全なクラス (H) の集合である. そして $\mathfrak{F}$ の (γ') 内の部分のすべての点 ξ に対し, $\mathfrak{K}(\xi)$ は高々一個の点よりなる. したがって, もしこの部分が容量正なら $\mathfrak{K}(x)$ は正則函数である. [訳注. $E^{(\alpha_0)}$ は, 空間の領域 $[x \in (\gamma'), |y| < \infty]$ 内に一価正則な函数 $\mathfrak{K}(x)$ によって $y = \mathfrak{K}(x)$ と表されるような固有面を含み, $y = \psi(x)$ で描かれる固有面は容量正の集合上でその固有面上に境界点を持つ.]

(b). 可変な集合 $\psi(x)$ は δ 上に決して点を持たない. これも疑いなく実現されている. $\psi(x') < \mathfrak{H}_{\alpha_0}(x')$ だから, それを確かめるためには $\psi(x')$ の定義を思い出すだけで十分である. そうすると, もし $\psi(x')$ から (γ') 内の分枝 $\chi(x)$ で δ 内に少なくとも一つの点を持つものを選べば, $\chi(x)$ は δ を越えて外にでることは決してない. ここで, (γ') 内の Γ の部分の上の, 高々容量零の点を除いたすべての点 ξ に対し, $\psi(\xi) < \mathfrak{H}_{\alpha_0}(\xi)$ であることを注意する. したがってこの点 ξ に対し常に $\chi(\xi) < \mathfrak{K}(\xi)$ である. ここで記号 $\chi(\xi)$ は $\psi(\xi)$ と同じ意味を採用している.

さて, (γ') 内の $\mathfrak{F}$ の部分は $\chi(x)$ のような分枝に対するあらわな境界の集合上にある. このことから, 何時もの議論の道にそって, (γ) 内の適当な円 (γ') 内で分枝 $\chi(x)$ を, $\chi(x)$ のあらわな境界上の $\mathfrak{F}$ の部分は容量正であるように見出すことが可能なことを確かめることができる.

記号の短縮のため, 我々は得られた結果を $\psi(x)$ に付随する分枝 $\psi(x)$ の付加された性質とみなす. これは次のように言い表すことができる.

円 (γ) 内に有界な解析函数 $\psi(x)$ が存在して, 次の性質を満たす: $\psi(x)$ のあらわな境界 Γ は容量正であり, この上で $\psi(x)$ の極限値の集合 $\psi(\xi)$ は高々容量零の集合を除いて常にただ一つの値 $\lambda(\xi)$ よりなる. ここで $\lambda(x)$ は (γ) 内の有界な正則函数を表す. 集合 Γ は (γ) の境界上では考えていないと理解する. [訳注. 10]

訳　注

[訳注. 1]　第 1 類の定義で, “いくつかの固有面” と訳した部分は原文では, “les surfaces caractéristiques” と書かれているだけである. 後に書かれていることからすると, この複数形は非可算個を許すと思われる.

[訳注. 2]　或る領域で一様収束 (広い意味で) する正則函数の列の極限がその領域の或る点で無限大になれば, その極限函数は恒等的に無限大である. さらに $\psi_0(x,y)$, $\chi_0(x,y)$ のどちらか一つが恒等的に無限大なら, 列 $f_\nu(x,y)$ は任意の点で一様収束する. (仮定により両方が恒等的無限大ということはない.) したがって問題になる点で $\psi_0(x,y)$, $\chi_0(x,y)$ は共に正則函数であると考えられる. 次に, 仮定から, $\psi_0(x,y)$, $\chi_0(x,y)$ が共に恒等的零ということはないので, どちらか一方が零でない点を考えると, その点で他方が零でない限り, 列 $f_\nu(x,y)$ はその点で一様収束する. それで 列 $f_\nu(x,y)$ が一様収束すると言えない ω の点は $\psi_0(x,y)$, $\chi_0(x,y)$ の共通零点, すなわち孤立点か, または固有面である. なお後者の場合は一方が恒等的零のこともある.

[訳注. 3]　本文の定義による “殆ど一様収束” の概念の下では, この命題は成立しない。

領域 $\mathfrak{D}: |x|<1, |y|<\infty$ における有理型函数の列

$$(N) \qquad x,\ \frac{x^2}{y},\ x^3,\ \frac{x^4}{y},\ \ldots,\ x^{2n-1},\ \frac{x^{2n}}{y},\ \ldots$$

は $y\neq 0$ なる点では “殆ど一様収束” であるが, $y=0$ なる点ではそうではない.

先ず, この命題がなくても以後の結果に影響がないことを注意しておく. 実際, この命題は定理 3 の証明の中で, 列 (Σ) の部分列 (Σ') をとり出すときに使われているが, それは Borel–Lebesgue の定理によって, この命題がなくても可能である.

ところで, 本文の定義による “殆ど一様収束” の概念は, 有理型函数の列 $f_j=\psi_j/\chi_j$ の収束を, 3 次元空間 (x,y,z) における固有面 $z\chi_j-\psi_j=0$ の列の収束で定義していることになっており, その云い方によると, 上記の列 (N) は, 奇数番目の函数列は $z=0$ に, 偶数番目の函数列は $yz=0$ に収束している. このような収束の概念も自然であり, 時には必要であろう.

これとは別に有理型函数 f を二つの正則函数の組 (ψ,χ) に通常の同値関係と演算を付加したものと考えると, $(0,1)$ と $(0,y)$ は同値であり, その意味では上記の列 (N) も同一の有理型函数に収束している. そのことを考慮して, “殆ど一様収束” を例えば次のように定義してみる.

有理型函数の無限列

$$(A) \qquad f_j(x,y)=\frac{\psi_j(x,y)}{\chi_j(x,y)} \qquad (j=1,2,\ldots)$$

が与えられたとき,

1. (A) の任意の無限部分列
$$f_{j_k}(x,y)=\frac{\psi_{j_k}(x,y)}{\chi_{j_k}(x,y)} \qquad (k=1,2,\ldots)$$
から, $(\psi_{j_{k_i}}(x,y),\chi_{j_{k_i}}(x,y))$ が一様収束し, その極限が $(0,0)$ でもなく (∞,∞) でもないような部分部分列
$$f_{j_{k_i}}(x,y)=\frac{\psi_{j_{k_i}}(x,y)}{\chi_{j_{k_i}}(x,y)} \qquad (i=1,2,\ldots)$$
が取り出せる.
2. (A) の異なる無限部分列から取り出された上記の部分部分列の極限は常に同値である.

となっているなら, 列 (A) は “殆ど一様収束” であると言う.

この定義の下では, 列 (N) も “殆ど一様収束” しており, 本文の命題も成り立つ.

なおこの命題は,「或る領域で正規な正則函数の族から取り出された函数列は, その領域の 1 点で一様収束するならすべての点で一様収束する」という命題を有理型函数の族に一般化したもので, この命題が成り立つような収束の概念も必要と思われる.

[訳注. 4] 双円筒 $|x|<1/2$, $|y|<1/2$ で考えるとし, 0 に収束する数列 a_j $(|a_j|<1/2\ j=1,2,\ldots)$ を考え,

$$f_\nu(x,y)=\frac{\varphi_\nu(x)}{y} \qquad \varphi_\nu(x)=\prod_{j=1}^{\nu}(x-a_j)$$

と置く. このとき, $S_\nu : f_\nu(x,y)=0$ の面積は ν と共に無限に大きくなる. この函数列 $f_\nu(x,y)$ は固有平面 $y=0$ 上のすべての点で一様収束しない.

[訳注. 5] 函数 $f_\nu(x,y)$ の代わりに

$$f_\nu^*(x,y)=\frac{f_\nu(x,y)-\alpha}{f_\nu(x,y)-\beta}$$

を考えればよい.

[**訳注. 6**]　自明でないのは, P が真性 (J) 点のときである. この場合は次のようにすればよい.

点 P を領域 $\mathfrak{D}$ における有理型函数族 $(\mathfrak{F})$ の真性 (J) 点とする. P を中心とする半径 $1/\nu$ の双円筒を γ_ν とする. 4 個の異なる複素数 α_j $(j=1,2,3,4)$ を任意に与える. $(\mathfrak{F})$ の任意の函数 f に対し, $f=\alpha_j$ で与えられる固有面の γ_ν 内の面積を考え, その最大を与えるものを α_f^ν, その次のものを β_f^ν とする. (同じ大きさでも構わない.) このとき, P は真性 (J) 点であるから, ν を止めて考えるとき, $f=\beta_f^\nu$ で与えられる固有面の γ_ν 内の面積 B_f^ν は全体として有界とはならない. それで, 各 ν に対して $B_f^\nu>\nu$ となるような $(\mathfrak{F})$ の函数を f_ν とする. さらに, 必要ならそれの部分列を取って, それらの f_ν に対応する組 $(\alpha_f^\nu, \beta_f^\nu)$ は ν によらず, 一定であるとする. それらの組は 4 個の数の中の二つだから, これは可能である. 容易に分かるように, この列は所期の性質を持っている.

[**訳注. 7**]　今の場合 $\lim_{t\to 0} t\chi(t)=0$ ではあるが, 函数 $t\chi(t)$ は単調増加とは言えない. ところで, ポテンシャル $U(x)$ を与える質量分布で, 円 $|x-x_0|<\dfrac{1}{2^n}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ 内の全質量を β_n とすると, 仮定により

$$\beta_n \leqq \frac{A}{2^n}\chi\left(\frac{A}{2^n}\right)$$

である. それで新たに各円周 $|x-x_0|=\dfrac{1}{2^{n+1}}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ 上だけに質量 $\beta_n-\beta_{n+1}$ を均一に分布し, その質量分布によるポテンシャルを $U^*(x)$ とすると, 不等式 $U(x_0)\leqq U^*(x_0)$ が得られ, しかも

$$U^*(x_0)=\log 2\sum \beta_n$$

である. したがって常に $U(x_0)\leqq V(x_0)$ である.

[**訳注. 8**]　本文の説明にも拘らず, あらわな境界 (frontière découverte) の意味はよく分からない. Riemann 面 $\mathfrak{R}$ の単葉な分枝を x 平面の領域と見たときの境界のことであろうか ? そのような仕方で多価函数の境界を捉える仕方としては Gross の定理がある. 引用されている Julia 氏の論文に定義があるのかもしれない.

[**訳注. 9**]　以後のことを考えると次のように考えておくこともできる.

考えている $\varphi(x)$ の Riemann 面の不変被覆面は複素変数 t の平面の単位円 $C:|t|<1$ に等角写像されるとし, その写像は $x=\tau(t)$ で与えられて

いるとする．このとき，高々測度零の θ $(0 \leqq t < 2\pi)$ を除いて

$$\lim_{r \to 1} \tau(re^{i\theta})$$

は極限値を持つ．その極限値が $\mathfrak{D}$ の内点であれば，それをその Riemann 面のあらわな境界と考える．そうするとその境界点は θ によって特定できることになるが，被覆変換で一致するような θ では同じ境界点を定義すると考えておく．本文のあらわな境界の容量に対しては，このあらわな境界に対応する θ の集合の測度を考える．

[**訳注. 10**]　最後の 82 節は完結していないこともあって分かりにくい．問題ははっきりしているので，解説を試みる．

1.　81 節に述べられている G. Julia の論文は資料が不明である．しかし本文に書かれていることから，その内容は現在 Gross の定理とか Iversen の定理と言われているもののことであろう．Iversen の定理は次のように言い表される．

$G(x,y)$ を複素 2 変数 x,y の整函数とし，その零面 $\Sigma : G(x,y)=0$ は $x=const.$ の形の直線を含まないとする．そうすると Σ は x 平面上の或る Riemann 面 $\mathfrak{R}$ と $\mathfrak{R}$ 上の正則函数 $\varphi(p)$ によって $y=\varphi(p)$ と表される．

x 平面に始点と終点をそれぞれ a,b とする単純な連続曲線 L を任意に描き，L の近傍 V を任意に定める．このとき，次のことが言える．

点 a 上に $\varphi(p)$ の函数要素 $\wp(x)$ があれば，それは V 内を通って点 b の幾ら近くにも解析接続することができる．

この表現では Riemann 面の境界点という概念は使われていない．

ところで，岡先生はこの節で次の二つの事を主張しようとしておられるらしい：

1°.　可約な (H) 集合の各成分を射影して得られる Riemann 面は任意ではなく，Iversen の定理のような性質を持つ．

2°.　さらに，その成分に対応する Riemann 面の境界は対数容量零の集合である．

ただしこのことは命題としては書かれていない．

2.　先ず 2° のことが複素 2 変数の零面 Σ について成り立つかどうかを考えよう．

x 平面に円板 (γ) を考え，領域 $[x \in (\gamma), |y| < \infty]$ 内の Σ の既約成分の一つを σ とする．σ には $\mathfrak{R}$ の γ 上の部分の或る連結成分 $\mathfrak{R}_0$ と $\varphi(p)$ をその部分に制限した函数 $\psi(p)$ が対応している．なお $|\psi(x)| > 1$ と仮定しておく．

ここで $\mathfrak{R}_0$ の不変被覆面を複素変数 t の平面の単位円 $C:|t|<1$ に等角写像して, その写像函数を $x=\tau(t)$ とし, $\Psi(t)=\psi(\tau(t))$ と置く. このとき

$$\lim_{r\to 1}\Psi(re^{i\theta})=\infty$$

となる $\theta\,(0\leqq\theta<2\pi)$ の集合は測度零である. その事は γ 内に基点を持つ $\mathfrak{R}_0$ の境界の基点の集合の対数容量は零であることを示している.

3. $\mathfrak{D}$ を x 平面の或る領域, E を領域 $[x\in\mathfrak{D}, |y|<\infty]$ における可約な, すなわち核 $E^{(\Omega)}$ が空集合であるような (H) 集合とし, そのセクション $\mathfrak{H}(x)\ (x\in\mathfrak{D})$ は $\mathfrak{D}$ で一様有界とする. 一般に,

$$E=\sum\,[E^{(\nu)}-E^{(\nu+1)}]$$

であり, 各 $E^{(\nu)}-E^{(\nu+1)}$ は $[x\in\mathfrak{D}, |y|<\infty]-E^{(\nu+1)}$ における固有面である. 本文で $y=\varphi(x)$ と書かれているのは, 或る $E^{(\nu)}-E^{(\nu+1)}$ の $[x\in\mathfrak{D}, |y|<\infty]-E^{(\nu+1)}$ における一つの既約成分のことである. それで $E^{(\nu)}$ をあらためて E と考えると考えやすい. そうすると整函数の零面を考えたときとの差は, そこで無限遠直線だったものがここでは $E^{(\nu+1)}$ となっているだけである.

ところで, $E^{(\nu+1)}$ は高々可算個の固有面よりなっており, 容量零の集合の高々可算個の和集合はまた容量零だから, 今の場合も整函数の場合と同様の状勢を持つような部分を選び出すことはできるであろう. 実際本文はそのことを証明しているが, その説明は, Riemann 面の多葉性を無視した書き方がなされているので分かりにくい. しかしその事を補って考えれば, 証明は完結していると思える.