多変数解析函数に関する研究の
断片的報告　其の一

私は多変数解析函数論の一部, つまり或る一系の問題[1] について一通り研究したのでありますが[2], 之は云はば, 瀬踏みの意味でありましたから, 有限でない領域や, 単葉でない領域の入って来ることを避け, 又其の或るものについては, 二変数の場合のみについて述べました.

之等の制限を取り去って, 一般の場合を研究しようとして視野を広げますと, 色々新しい困難が目につきますが, 之は大体二種類に区分することが出来るかと思ひます. 其の区別は, 一方を地勢的, 他方を技術的と云へば, やや当てはまるかと考へます. 但し, 煩雑さ夫自体, 勿論一つの困難ではありますが, 順序として之を除外してのことであります.

最初先づ, 地勢的困難の一片を取り出し, 夫に対処する方法を述べようと思ひます.

1. 之まで取り扱って来た問題は, 擬凸状域は正則域かと云ふことと, 正則域内でどう云ふ定理が成立するかと云ふこととでありました. 後者に対して, H. Cartan–P. Thullen の定理 (Hauptsatz über die gleichzeitige Fortsetzbarkeit, Behnke–Thullen p. 71) は最も重要なものの一つでした. 私は此の定理から出発したのです.

所で, 此の定理は多葉領域についても, 夫が分岐点を持たない様な有限領域である限り, 成立することは成立しますが, 最早や単葉領域の時の様に重要なものではなくなります.

全く同じことが擬凸状域についても起りますから, 重複を避ける為, 説明を省いて次へ移ります.

2. 以下, 二複素変数 x, y の描く有限空間に於ける, 分岐点を持たない様な領域のみについて御話しします. (一々断ると長くなりますから, 明記しません. 反対の場合には明記します. 領域の定義については Behnke–Thullen 参照.)

先づ, 擬凸状域の定義ですが, 解析函数 $f(x, y)$ を解析接続によって定義しますと, 其の存在域, つまり正則域は常に F. Hartogs の条件をみたします. 夫で之から函数を抽出し去れば, 擬凸状域を抽象的に定義しうるわけです. 前の単葉領域の時と比較して見ますと, 今度は領域の補集合 E を考へることが出

[1] H. Behnke–P. Thullen; Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 1934 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.) 特に其の 54, 68, 79 頁参照.

[2] Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, I–Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles 1936, II–Domaines d'holomorphie 1937, III–Deuxième problème de Cousin 1939 (以上 Journal of Science of the Hiroshima University), IV–Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes 1940, V–L'intégrale de Cauchy 1940 (以上 Japanese Journal of Mathematics), Note sur les domaines pseudoconvexes 1941 (Proc. Imp. Acad. Tokyo), VI–Domaines pseudoconvexes (未刊) 参照.

来ませんから, 定義の仕方を少し変へなければなりませんが, 夫だけの事の様に思はれますから, 先へ進みます.

３．擬凸状域について, 上の Cartan–Thullen の定理に相当するものは次の定理でした (Mémoire VI).

≪$\mathfrak{D}$ を単葉な擬凸状域とし, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ の内部にある (つまり $\mathfrak{D}_0$ の境点も亦 $\mathfrak{D}$ に含まれる) 様な任意の有界単葉領域としますと, $\mathfrak{D}$ に含まれ $\mathfrak{D}_0$ を含む様な第三の単葉領域 $\mathfrak{D}'$ が存在して, この $\mathfrak{D}'$ に次の様な函数 $\varphi_0(x, y)$ が存在すると云ふのです.

1°　$\varphi_0(x, y)$ は連続な一価実数値函数であって, $x = x_1 + i\,x_2$, $y = y_1 + i\,y_2$ (i 虚単位) としますと, x_1, x_2, y_1, y_2 に関する第二階までの連続な偏微係数を持って居て,

$$A(\varphi_0) = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_2^2}, \qquad D(\varphi_0) = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y_2^2},$$

$$B(\varphi_0) = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_2 \partial y_2}, \qquad C(\varphi_0) = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_2 \partial y_1}$$

としますと,

$$A(\varphi_0) > 0$$

$$V(\varphi_0) = A(\varphi_0)D(\varphi_0) - B^2(\varphi_0) - C^2(\varphi_0) > 0$$

であること.

2°　ある (充分大きな) 実数 α が存在して, 開集合

$$\varphi_0(x, y) < \alpha$$

は与へられた領域 $\mathfrak{D}_0$ を含むこと.≫

上の二つの条件の内, 第一のものは $\varphi_0(x, y)$ がある特種な擬凸状函数 (fonction pseudoconvexe) つまり, そう云ふ名の一価実数値函数であると考へて下されば大体よろしいのです. ただ要点は, か様な函数 $\varphi_0(x, y)$ について, 任意の実数 β をとって

$$\varphi_0(x, y) < \beta$$

で定義せられる点集合を考へますと, 之は若し存在するならば, 必ず開集合であって, それを構成する各領域 (其の各 composante connexe) は $\mathfrak{D}'$ に関して擬凸状になりますから, 上の定理は丁度正則域に関する Cartan–Thullen の定理に相当するのです.

所で上の定理自身は, $\mathfrak{D}$ が単葉でなくなっても其の儘成立するだろうと考へられます. 然し, 多葉領域に対しては夫だけでは足りないのでして, 次の問題が新しく起るのです.

$\ll \mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ の内部に含まれる様な有界な $\mathfrak{D}$ の部分領域 (Teilbereich, Behnke–Thullen 参照) とし, 更に有限葉とします. このとき, 第一の条件をみたす $\varphi_0(x,y)$ を, 実数 α_0 を適当に撰べば $\varphi_0(x,y) < \alpha_0$ が $\mathfrak{D}_0$ を含み, 更に有限葉となる様に撰ぶことが出来るか. $\gg$

つまり此の場合には, 二種類の問題が交り合って居るのです. 其の第一は, 単葉の時とほぼ変わりがないと考へられますから, 第二の, つまり有限葉と云ふことが新しい問題です. 所で夫ならば, 之等は分離出来るかどうかと云ふに, 夫は分離出来ます. 何故なれば, 二つの擬凸状域の共通部分 (Durchschnitt) は擬凸状だからです. 或は同じことを, 二つの擬凸状函数 $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ が同じ一つの領域で与へられたならば,

$$\varphi_3(x,y) = \max[\,\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)\,]$$

も亦, 擬凸状函数だからとも云へます. 夫で問題を分離します.

4. 今 ((x,y) 有限空間に分岐点を持たない様な) 領域 $\mathfrak{D}$ を考へ, 其の任意の点を P とします. ($\mathfrak{D}$ は擬凸状でなくてもよろしい.)　 P は多葉領域の点ですから, 勿論其の座標 (x,y) だけでは決まりません. 夫で時としては空間の点 (x,y) と, 領域の点 P とは, 明確に区別して考へなければならない場合もあります. 次に $\mathfrak{D}$ の部分領域 $\mathfrak{D}_0$ を, 有界であって, その任意の点から $\mathfrak{D}$ の境界への距離 (ユークリッド幾何学的距離) が正数 r_0 より大きくなる様に撰びます. 勿論 r_0 は充分小さくとって $\mathfrak{D}_0$ が実在する様にします. か様にして得られた $\mathfrak{D}_0$ は尚, 一般には, 無限多葉領域です. 問題は,

$\ll$ か様な $\mathfrak{D}_0$ が与へられたとき, 次の二つの条件をみたす様な x, y に関する擬凸状函数 $\alpha_0(P)$ がここに於て常に存在するかと云ふのです. 条件は

1°　 $\alpha_0(P)$ は前節の第一条件をみたす様な特種擬凸状函数であること.

2°　任意の実数 γ に対し, 次の二つの条件

$$\alpha_0(P) < \gamma, \quad P \in \mathfrak{D}_0$$

を同時にみたす様な点集合 $\mathfrak{D}_\gamma$ は (若し存在すれば) 必ず有限葉であって, かつ

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \mathfrak{D}_\gamma = \mathfrak{D}_0$$

となること——この二つであります. $\gg$

之が取り出された問題です. 所で上の二つの条件ですが, 之等は, 之迄とは少し意味が違ひますが, 矢張り切り離して考へることが出来るのです. 第二の条件をみたす函数をさがすことから始めます.

5. 所で, か様な函数ならば, ごく素朴な概念の内に色々見出されそうに思はれます. 夫で取り敢えず其の内一番自然と思はれるものをとって考へて見ます.

$\mathfrak{D}_0$ 内に一点 O を定め, O から $\mathfrak{D}_0$ の任意の一点 P へ $\mathfrak{D}_0$ 内のみを通って行く径路の長さの最小 (la borne inférieure) を $\alpha(P)$ とします. この函数 $\alpha(P)$ について, R を任意の正数として

$$\alpha(P) < R$$

をみたす $\mathfrak{D}_0$ の点の集合 E を考へますと, 之は多葉領域に依て構成せられた開集合です. 其の葉数の最大 (la borne supérieure) を N としますと,

$$N < N_0(r_0, R)$$

となる様な r_0 と R とだけで決まる常数 N_0 が計算出来ます. 之は始めからほぼ分かって居ることです. 尚,

$$\lim_{R\to\infty} E = \mathfrak{D}_0$$

となることも云ふ迄もありません.

夫で究極の問題は, 此の第二条件を充す函数 $\alpha(P)$ を少し補正して[3] 第一条件をもみたさしめ得るかどうかと云ふ点にあります. か様にして, 問題のありかが漸く明らかになりました.

所で此の問題は其の性質上やって見なければ所詮分らないのでありまして, 若し一度で巧く行けば, 夫は全く偶然と云はなければならないかと考へます. 夫で若し巧く行かなければ, 出来るだけ其の理由から学んだ後, 他の更に適当と思はれるものを探すことにします.

6. 此処で暫く主題を離れます. 第一条件は矢張り二つの部分から成り立って居ます. 前半は連続性 (積分可能, 連続, 各階偏微係数の存在等) に関するものであって, 後半が特別な条件です. 之等について,

1° 与へられた函数を少し変形して, 其の連続度を高める方法は色々あると思ひます. そして目的によって適, 不適があるでしょう.

2° 所で, 擬凸性と云ふ条件は additive, つまり此の条件を充す二つの函数を加へても変わらないような性質のものです. 第三節で述べた条件についても同じです.

所で, 若し函数をある additive な性質を保存しつつ変形して, 其の連続度を高めようと云ふのが目標ならば, ここに極めて適切な方法があります. 一口に云へば平均値をとることです[4]. 之は一応説明しないと次へ進みにくいのです.

今, 複素変数 z の平面上に領域 $\mathfrak{D}$ を考へ, 仮に之を有界単葉とし, $\mathfrak{D}$ 内に一価実数値函数 $\varphi(z)$ を考へ, 仮に連続とします. $\mathfrak{D}$ 内の一点 z_0 を中心として,

[3] 正確に云へば, N を正の常数とするとき $|\alpha(P) - \alpha_0(P)| < N$ が $\mathcal{D}_0$ でみたされるならば, $\alpha(P)$ の代りに $\alpha_0(P)$ をとっても上のことは変わりがないと云ふ意味です.

[4] T. Radó, Remarques sur les fonctions subharmoniques, C. R. t. 186, 1928, pp. 346-348 及び F. Riesz, Sur les fonctions subharmoniques, Partie II, Acta, t. 54, 1930, pp. 342-345 参照. 尚其の応用については Mémoire VI, Partie III (未刊) 参照.

きまった半径 r の円 $(\gamma_0) : |z - z_0| < r$ を描き, (γ_0) は $\mathfrak{D}$ の内部に含まれると考へます. かくして (γ_0) に関する $\varphi(z)$ の平均値

$$\varphi_1(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{(\gamma_0)} \varphi(z)\, dx dy \quad (z = x + iy)$$

を考へます. (γ_0) が $\mathfrak{D}$ の内部に含まれる様な点 z_0 の集合を

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}^{(r)}$$

としますと, $\varphi_1(z)$ は開集合 $\mathfrak{D}_1$ で定義せられた函数です. 此の函数 $\varphi_1(z)$ は連続であって, x, y に関する第一階の連続な偏微係数を持って居ます.

か様に $\mathfrak{D}$ で定義せられた函数 $\varphi(z)$ から $\mathfrak{D}_1$ $(= \mathfrak{D}^{(r)})$ で定義せられた函数 $\varphi_1(z)$ を作りました. 此の操作を,

$$\varphi_1(z) = A_r[\varphi(z)]$$

で表はします. 之によって, 云はば連続度が一階だけ高まりました.

之を繰り返して, $\varphi_1(z)$ から $\mathfrak{D}_2$ $(= \mathfrak{D}_1^{(r)})$ [5] で定義せられた函数

$$\varphi_2(z) = A_r[\varphi_1(z)] = A_r^2[\varphi(z)]$$

を作りますと, 連続度は更に一階高まって, $\varphi_2(z)$ は $\mathfrak{D}_2$ で連続であって x, y に関する第二階までの連続な偏微係数を持つことになります.

明らかに,

$$\lim_{r \to 0} \varphi_1(z) = \lim_{r \to 0} \varphi_2(z) = \varphi(z),$$
$$\lim_{r \to 0} \mathfrak{D}_1 = \lim_{r \to 0} \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}$$

であります.

此の連続度を高める操作 A_r と additive と云ふ条件との間に密接な関係があることも云ふ迄もないかと思ひます.

7. 扨て, 我々に課せられた問題を見直して見ますと, 之はつまり擬凸性をつくり出せと云ふのであって, 擬凸性が与へられて居て夫を保存せよと云ふのではないのですから, 上に仮想した問題の様には行きません. しかも擬凸性がそれ程容易につくれるものならば, 擬凸状域が常に正則域になる筈は無いのです. 然し, 我々の場合には次の様な事実があるのです.

第五節の函数 $\alpha(P)$ にもどります. 今 $\mathfrak{D}'$ を $\mathfrak{D}$ に関して $\mathfrak{D}_0$ と同じ性質であって, $\mathfrak{D}_0$ を其の内部に含むような領域とし, $\alpha(P)$ を改めて ($\mathfrak{D}_0$ の代りに) $\mathfrak{D}'$ で定義せられたものと考へます. 此の $\alpha(P)$ に取り敢へず前節の方法を適用して見ます. P_0 を $\mathfrak{D}'$ の任意の定点とし, P_0 を中心として $\mathfrak{D}'$ 内にあるような四次元球 S を描きます. (正確に云へば, P_0 と同じ座標を持つような空間の

[5] 実際は $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}^{(2r)}$

点を中心として, 以下同様). S の任意の二点を P_1, P_2 とし, P_1, P_2 の (ユークリッド幾何学的) 距離[6] をかりに $|P_1-P_2|$ で表はしますと,

$$|\alpha(P_1)-\alpha(P_2)| \le |P_1-P_2| \tag{1}$$

となりますから, 先づ分かることは, $\alpha(P)$ は連続函数だと云ふことです. 夫故前節の方法が適用出来ます.

$\mathfrak{D}'$ の任意の一点 P_0 (座標 x_0, y_0) を中心として, きまった半径 r の双円筒

$$|x-x_0|<r, \quad |y-y_0|<r \tag{γ_0}$$

を描きます. 之は必ずしも双円筒でなくても, たとえば四次元球でもよいのですが, 仮に双円筒を撰びます. (γ_0) は $\mathfrak{D}'$ の内部に含まれて居るものとします. (γ_0) における $\alpha(P)$ の平均値を考へ,

$$\alpha_1(P_0)=A_r[\alpha(P_0)]=\frac{1}{\pi^2 r^4}\int_{(\gamma_0)}\alpha(P)\,dP$$

とします. (γ_0) が $\mathfrak{D}'$ の内部に含まれる様な P_0 の集合を $\mathfrak{D}_1$ としますと, $\alpha_1(P)$ は $\mathfrak{D}_1$ で定義せられた函数です. 此の函数は前節で述べたと全く同様に, x_1, x_2, y_1, y_2 に関する連続な第一階偏微係数を持って居ます. のみならず, $\alpha(P)$ は (1) なる関係を充すような特種な函数ですから,

$$\left|\frac{\partial \alpha_1}{\partial u}\right| \le K_1 \qquad (u=x_1,x_2,y_1,y_2) \tag{2}$$

をみたす様な常数 K_1 が存在します. ほぼ明らかと思ひますから, 計算は省略します[7].

此の操作を繰り返して, $\mathfrak{D}_1$ で定義せられた函数 $\alpha_1(P)$ から, $\mathfrak{D}_2$ で定義せられた函数

$$\alpha_2(P)=A_r[\alpha_1(P)]=A_r^2[\alpha(P)]$$

を作ります. $\mathfrak{D}_2$ については改めて説明するまでもないかと思ひます. 此の函数は, 前節に述べたと全く同様に, $\mathfrak{D}_2$ で連続であって, x_1, x_2, y_1, y_2 に関する第二階までの連続な偏微係数を持ち, 加ふるに (2) から,

$$\left|\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial u \partial v}\right| \le K_2 \qquad (u,v=x_1,x_2,y_1,y_2) \tag{3}$$

をみたす様な常数 K_2 が存在します. 之もほぼ明らかと思ひます [7].

要するに, 我々の場合には, (1) から (2) が云へますから, 第二階微係数がすべて有界となる様な $\alpha_2(P)$ が出て来るのです. 之は此の際注目すべき事実です.

---

[6] P_1 の座標を (x', y'), P_2 の夫を (x'', y'') としますと

$$|P_1-P_2|^2=|x'-x''|^2+|y'-y''|^2 \quad (\text{右辺は普通の絶対値})$$

[7] $K_1=\dfrac{4}{\pi}$, $K_2=\dfrac{16}{\pi^2 r}$ とすればよろしい.

8. 所で $\alpha(P)$ は $\mathfrak{D}'$ で存在し, $\mathfrak{D}'$ は $\mathfrak{D}_0$ を内部に含むような $\mathfrak{D}$ の部分領域でした. 夫で

$$\lim_{r\to 0}\mathfrak{D}_2=\mathfrak{D}'$$

ですから, r を充分小さくとることによって, $\alpha_2(P)$ を改めて $\mathfrak{D}'$ で存在するとみなすことが出来ます.

其の性質を今一度挙げますと, $\alpha_2(P)$ は連続であって, 第二階までの連続な偏微係数を持ち,

$$(1)\qquad \left|\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial u\partial v}\right|<N_1\quad (u,v=x_1,x_2,y_1,y_2)$$

(N_1 はある常数) です. 夫から

$$(2)\qquad |\alpha_2(P)-\alpha(P)|<N_2$$

(N_2 もある常数) です. 今, M を充分大きな正数として,

$$\alpha_0(P)=\alpha_2(P)+M\beta(x,y),$$

$$\beta(x,y)=x_1^2+y_1^2$$

を考へますと

$$A(\beta)=\frac{\partial^2\beta}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial x_2^2}=2,\quad D(\beta)=2,$$
$$B(\beta)=C(\beta)=0$$

となりますから, (第三節参照) 上の不等式 (1) から

$$A(\alpha_0)>0,\quad V(\alpha_0)=AD-B^2-C^2>0$$

となります. 夫で此の $\alpha_0(P)$ は第四節にのべた問題の第一条件をみたします.

次に $\alpha_0(P)$ は上の不等式 (2) から

$$|\alpha_0(P)-\alpha(P)|<N_3$$

(N_3 はある常数) となりますし, $\alpha(P)$ は問題の第二条件をみたしますから, $\alpha_0(P)$ についても其の通りです. か様に第四節の問題に対する肯定的な答えが得られました. 次の通りです

≪ 函数 $\alpha_0(P)$ は常に存在する.≫

9. 上に函数

$$\beta(x,y)=x_1^2+y_1^2$$

を考へました. 之はごく簡単な函数ですが擬凸性は実に此処から来たのでした.

所で若し $\mathfrak{D}$ が有限でなくなれば $\mathfrak{D}_0$ を有界と見ることは出来ませんから $\beta(x,y)$ も有界ではなくなります. 夫で, 有限でない様な領域に対しては, 次の問題のあることも同時に分かりました.

≪ 有限でない領域に対して, 上の $\beta(x, y)$ に代わる函数があるか.≫

無窮遠はまだ定義しませんでしたが (Behnke–Thullen 参照), 次の事だけは始めからほぼ明らかなようです.

≪ 有限でない領域に対しては, 上の β の役割をする函数は, 最早や空間には存在しない. 夫故, 与へられた領域内に於て探さなければならない.≫

之が第二の地勢的困難です. 何故上述のように見えるかと云ふ理由として, 先づ要点だけを申しますと, 一変数 x の空間で無窮遠点をも含めて全体で存在する様な劣調和函数 (fonction subharmonique) $\psi(x)$ があったとしますと, 劣調和函数の定義として, $\psi(x)$ は値 $+\infty$ をとれないのですが, 此の際 $\psi(x)$ は全体で存在するのであって, しかも此の種類の函数は其の性質上, 一口に云へば極大値をとることが出来ませんから, 帰する所

$$\psi(x) = c$$

(c は常数) となる外ないからです.

(此の報告終り 2： 8. 7 札幌に於て)