# 多変数解析函数に就て

## VII — 正則函数の合同に関する二つの補助問題

第一報告の冒頭で申しました諸問題は, 第六報告までで一通り解決しました[1]. 然し, 之は云はば瀬踏みの意味でありましたから, 有限でない領域や単葉でない領域の入って来ることを避け, 其の或るものは二変数の場合のみに就て考察しました. 多変数解析函数に関して, 実に様々な問題が数へられる様に思ひますが, 差し当っては之等の制限を順次に取り去ることを研究の主題とします. 此の論文では其の準備をします.

イデアル, 合同等の代数的諸概念を, 有理整函数の分野から一般解析函数のそれに移しますと, 函数は, 変数空間の一部分で存在しても, 最早や全体では存在しなくなりますから, 此処から, 当然色々新しい問題が出て来る筈です.

其の中先づ目につきますのは, 被覆的に定義せられたものを全域的に求める型のものです[2]. 合同に関する, 此の種の問題の或る二つ[3] を, 補助問題として研究した結果について御話しします.

≪ 此の論文では, 引き続き, 専ら有限単葉領域について御話しします. それで簡単の為, 此の 有限単葉 と云ふ条件は一切明記しないことにします.≫

1 — $n$ 複素変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の空間に領域 $\mathfrak{D}$ を考へ, $f(x), \varphi(x)$ を $\mathfrak{D}$ に於て正則な二つの函数とし[4], $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ を $\mathfrak{D}$ に於て正則な函数系とします. 之等の間に

$$f - \varphi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p,$$

$\alpha_i(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$ は $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数, なる関係があるとき, $f$ と $\varphi$ とは $\mathfrak{D}$ に於て, 函数系 $(F)$ に関して 合同 であると云ひ, これを

$$f \equiv \varphi \quad (\mathrm{mod.}\ F_1, F_2, \cdots, F_p)$$

を以て表はします.

領域 $\mathfrak{D}$ の一点を $P$ とします. 点 $P$ に於て合同 であると云へば, $P$ の近傍で然うであると云ふ意味です. $\mathfrak{D}$ の各点で合同であると云ふことと, $\mathfrak{D}$ に於

[1] 此の研究は H. Behnke, P. Thullen の下記の著書を背景として始めたのでした.

H. Behnke–P.Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 1934, (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete).

此の報告に先だつ諸報告: I, 1936; II, 1937; III, 1939, (Journal of Science of the Hiroshima University). IV, 1940; V, 1940, (Japanese Journal of Mathematics). VI, 1942, (The Tôhoku Mathematical Journal).

[2] 此の種の問題に始めて着眼したのは H. Cartan です. 下記論文参照.

H. Cartan: Sur les matrices holomorphes de n variables complexes,1940, (Journal de Mathématiques).

[3] 第一及び第二節参照.

[4] $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を今後は主として $f(x)$ と略記します. 尚, 一般に空間 $(x)$ の開集合 $\mathcal{D}$ に於て正則な函数と云へば, $\mathcal{D}$ の各連結 (連続) 成分に於て, 一価正則な, 変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の解析函数と云ふ意味です.

て然うである云ふこことは同じではありません. 此の点を明確に区別したい場合には, 後者を 全域的 に然うであると云ひましょう.

此のことから直ちに次の問題が出ます: 上述の $f(x), \varphi(x)$ が $\mathfrak{D}$ の各点で函数系 $(F)$ に関して合同であるとして, 之等が $\mathfrak{D}$ に於て全域的に合同であるか否かを調べること. 或は, 次の様に云ひ換へても同じです.

問題 I — 空間 $(x)$ の有界閉領域 $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍[5] に於て正則な函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ と函数 $\Phi(x)$ とが与へられ, $\overline{\mathfrak{D}}$ の各点 $P$ に於て $\Phi(x) \equiv 0 \pmod{F}$ であったとする. 此の時 $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則な函数 $A_i(x)$ を

$$\Phi(x) = A_1(x)F_1(x) + A_2(x)F_2(x) + \cdots + A_p(x)F_p(x)$$

となる様に撰ぶこと.

上の問題は表現に関するものです. 函数自身に就て次の問題があります.

問題 II — $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ を $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則な函数系とする. 閉領域 $\overline{\mathfrak{D}}$ の各点 P に対し, 之を中心とする多円筒 $(\gamma)$ と, $(\gamma)$ に於て正則な函数 $\varphi(x)$ とが対応し, $(\gamma_1), (\gamma_2)$ を共通部分 $(\delta)$ を持つ様な任意の一対の $(\gamma)$ とするとき, 之等に対応する $\varphi(x)$ を夫々 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ とすれば, $(\delta)$ の各点に於て

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \pmod{F_1, F_2, \cdots, F_p}$$

となって居るものとする. (合同条件). 此の時 $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則な函数 $\Phi(x)$ を求め, $\overline{\mathfrak{D}}$ の各点 $P$ に於て

$$\Phi(x) \equiv \varphi(x) \pmod{F}$$

ならしめること.

我々は, 上に申した様に, 少くとも此の度は, 之等の問題によって代表せられる現象自体を研究しようと云ふのではありません. 始めに御話しました研究に備へる為, 之等を補助問題として, 前以て調べて置かうと云ふのであります.

2 — 空間 $(x)$ の領域 $\mathfrak{D}$ に於て正則な函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ が次の性質を持ったとします: $F_1(x)$ は恒等的に $0$ ではなく, $q$ を $2, 3, \cdots, p$ の任意の一つとし, $P$ を $\mathfrak{D}$ の任意の一点とするとき, 若し $P$ の近傍に於て

$$\alpha_1(x)F_1(x) + \alpha_2(x)F_2(x) + \cdots + \alpha_q(x)F_q(x) = 0,$$

$\alpha_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ は $P$ の近傍で正則な函数, の形の恒等式が成立するならば, $P$ に於て常に

$$\alpha_q(x) \equiv 0 \pmod{F_1, F_2, \cdots, F_{q-1}}$$

[5] 有界集合 $E$ の近傍である現象が起ると云へば, $E$ を其の集積点と共に含む一つの開集合が存在して, 其処で然うなると云ふ意味です.

である. 函数系 $(F)$ の領域 $\mathfrak{D}$ に於ける此の性質を $(A)$ と名づけましょう.

此の $(A)$ の次の性質に注意しましょう:

$1^\circ$. 函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ が性質 $(A)$ を持つか否かは其の順序に関係します.

$2^\circ$. $\mathfrak{D}$ で正則な函数系 $(F)$ が, $\mathfrak{D}$ の各点で性質 $(A)$ を持つならば, $\mathfrak{D}$ で其の通りです.

$3^\circ$. $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ が $\mathfrak{D}$ で性質 $(A)$ を持つならば, 函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_q), (q < p)$ に就ても同じです.

我々が欲しいのは, 実際に問題 I, II が解ける特別の場合なのであります. 其の為, 性質 $(A)$ を持つ函数系を中心として, 之等の問題を調べて行かうと云ふのです.

性質 $(A)$ の許容せられる最も簡単な場合として, 次の定理があります.

補助定理 1 — $f_j(x)$ を空間 $(x)$ の領域 $X$ に於て正則な函数とすれば, 函数系 $F_j(x, y) = y_j - f_j(x)$ $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$ は空間 $(x, y)$ の領域 $(x) \in X$ に於て性質 $(A)$ を持つ.

証明　先づ, $F_1(x, y) = y_1 - f_1(x)$ は恒等的に $0$ ではありません.

次に, $q$ を $1, 2, \cdots, \nu - 1$ の任意の一数とし, 固有集合体 $F_1 = F_2 = \cdots = F_q = 0$ の領域 $(x) \in X$ 内の部分を $\sigma$ としますと, $(F)$ は次の性質を持って居ます.

$1^\circ$. $\sigma$ 上で $F_{q+1} = y_{q+1} - f_{q+1}(x)$ は恒等的に $0$ ではありません.

$2^\circ$. $\sigma$ の任意の一点を $P$ とし, $P$ の近傍で正則であって, $\sigma$ 上で $0$ となる様な函数を $f(x, y)$ としますと, $f(x, y)$ は $P$ に於て

$$f(x, y) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ F_1, F_2, \cdots, F_q)$$

です. 之を証明します. $q = 1$ としますと此の命題は真です. 故に, 命題は, $1, 2, \cdots, q-1$ のとき真であると仮定して, $q$ のときも亦真であることを云へばよろしい. 今,

$$\varphi(x, y) = f[(x), y_1, \cdots, y_{q-1}, f_q(x), y_{q+1}, \cdots, y_\nu]$$

を考へますと, $P$ の近傍で, 固有集合体 $F_1 = F_2 = \cdots F_{q-1} = 0$ 上で $\varphi$ は $0$ です. 故に, 仮定に依て, $P$ で

$$\varphi \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ F_1, F_2, \cdots, F_{q-1})$$

です. 他方,

$$\psi(x, y) = f(x, y) - \varphi(x, y)$$

を考へますと, $P$ の近傍で, $F_q = 0$ 上で $\psi$ は $0$ です. 故に, $P$ に於て

$$\psi \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ F_q)$$

です. 此の二つから, $P$ に於て

$$f = \varphi + \psi \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ F_1, F_2, \cdots, F_q)$$

となります. 故に, 命題は真です.

次に, $p$ を $2, 3, \cdots \nu$ の一数とし, $P$ を領域 $(x) \in X$ の一点としたとき, $P$ の近傍で

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p = 0,$$

$\alpha_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ は $P$ の近傍で正則な函数, の形の恒等式が成立したとします. 此のとき $\alpha_p(x, y) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ F_1, F_2, \cdots, F_{p-1})$ であることを云はうと云ふのですが, 固有集合体 $F_1 = F_2 = \cdots = F_{p-1} = 0$ の領域 $(x) \in A$ 内の部分を $\sigma'$ としますと, 若し $P$ が $\sigma'$ 上になければこのことは明了です. 故に, $P$ を $\sigma'$ の一点と考へます. 然うしますと, 上述の $1°$ に依て, $\alpha_p(x, y)$ は $P$ の近傍で, $\sigma'$ 上で $0$ になります. 故に, $2°$ に依て, $\alpha_p(x, y) \equiv 0$ $(\mathrm{mod.}\ F_1, F_2, \cdots, F_{p-1})$ となります. か様に補助定理は成立します.

3 — 先づ, 問題 I に就て次の定理があります.

定理 1 — 問題 I は, 若し $\overline{\mathfrak{D}}$ が閉筒状域であって, 且つ若し函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ が $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で性質 $(A)$ を持つならば, 必ず解ける.

証明　$p = 1$ としますと, 函数系 $(F)$ は $F_1$ だけから成り立って居ることになりますから, 与へられた函数 $\Phi(x)$ は $\overline{\mathfrak{D}}$ の任意の点 $P$ の近傍で

$$\Phi(x) = \alpha_1(x) F_1(x),$$

$\alpha_1(x)$ は $P$ に於て正則な函数, の形でなければなりません. 所で, $F_1(x)$ は恒等的に $0$ ではないのですから, $\alpha_1(x)$ は $\Phi(x)$ と $F_1(x)$ とに依て一意に決定せられます. 故に, $\alpha_1(x)$ は $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則な函数です. 即ち定理は成立します. 故に, 命題は $p = 2, 3, \cdots, q-1$ のときに真であると仮定して, 然うすれば $p = q$ のときにも真であることを証明すればよろしい. 其の為, 此の仮定の下に, 次の命題を証明します.

補助定理 2 — 空間 $(x)$ の二つの有界閉筒状域を $\Delta_1$, $\Delta_2$ とし, $\Delta_1$ と $\Delta_2$ とは $n$ 個の (変数の平面上の) 成分の中, 一個を除いて, 他の全部を共有して居ると考へ, 其の和及び其の共通部分を夫々$\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta, \Delta_1 \cap \Delta_2 = \Delta_0$ とする.

$\Delta$ の近傍に於て正則函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_q)$ を考へ, $\Delta_0$ の近傍で性質 $(A)$ を持って居るとする. $\Phi(x)$ を $\Delta$ の近傍に於いて正則な函数とし, $\Delta_1$ の近傍で次の (1) の形に, 又 $\Delta_2$ の近傍で次の (2) の形に表はされて居るとする:

$$\Phi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_q F_q, \tag{1}$$

(2) $$\Phi = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots + \beta_q F_q,$$

此処に $\alpha_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ は $\Delta_1$ の近傍で正則な函数であって, $\beta_i(x)$ は $\Delta_2$ の近傍で正則な函数である. 然るときは, $\Delta$ の近傍に於て正則函数 $A_i(x)$ を

$$\Phi = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_q F_q$$

となる様に撰ぶことが出来る.

此の命題が ($q$ のときに) 真ならば, 定理は $q$ のときにも成立します. 其の証明は, 例へば Cousin の第一問題が筒状域に関して常に解けると云ふことの証明の一節と全然同じであって, 我々はか様な推理法には充分慣れて居ます. 故に省略します.

上の命題を証明しましょう. 今

$$\alpha_i(x) - \beta_i(x) = \gamma_i(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, q)$$

としますと, $\Delta_0$ の近傍で恒等的に

(3) $$\gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2 + \cdots + \gamma_q F_q = 0$$

となります. 故に, $\Delta_0$ の近傍で $(F_1, F_2, \cdots, F_q)$ は性質 $(A)$ を持ちますから, 其の各点で

$$\gamma_q(x) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ F_1, F_2, \cdots, F_{q-1})$$

です. 所で, 仮定に依て, 定理 1 は $q - 1$ のときには成立するのですから, $\Delta_0$ の近傍に於て, 正則函数 $c_i(x)$ を

$$\gamma_q = c_1 F_1 + c_2 F_2 + \cdots + c_{q-1} F_{q-1}$$

となる様に撰ぶことが出来ます.

$\Delta_1$ の近傍に於ける正則函数 $a_i(x)$ と, $\Delta_2$ の近傍に於ける正則函数 $b_i(x)$ とを, 恒等的に

$$a_i(x) - b_i(x) = c_i(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, q-1)$$

となる様に撰びます. か様な函数 $a_i, b_i$ の存在は, P. Cousin に依て, よく知られて居ます. 之等の函数に依て, $\Phi(x)$ の表現 (1), (2) を夫々次の (4), (5) の形に変へます:

(4) $$\Phi = (\alpha_1 + a_1 F_q)F_1 + \cdots + (\alpha_{q-1} + a_{q-1} F_q)F_{q-1}$$
$$+(\alpha_q - a_1 F_1 - \cdots - a_{q-1} F_{q-1})F_q,$$

(5) $$\Phi = (\beta_1 + b_1 F_q)F_1 + \cdots + (\beta_{q-1} + b_{q-1} F_q)F_{q-1}$$

$$+(\beta_q - b_1 F_1 - \cdots - b_{q-1}F_{q-1})F_q.$$

(4) は $\Delta_1$ の近傍に於て, (5) は $\Delta_2$ の近傍に於て成立します. (4) から (5) を引きますと,

$$d_1 F_1 + d_2 F_2 + \cdots + d_q F_q = 0$$

なる形の恒等式が, $\Delta_0$ の近傍に於て得られます. 所で,

$$d_q = \gamma_q - (c_1 F_1 + c_2 F_2 + \cdots + c_{q-1}F_{q-1}) = 0.$$

か様に (1), (2) を変形して, (夫々(4), (5) とし,) (3) に於ける $\gamma_q$ が恒等的に 0 である様に出来ます.

次に, (3) に於ける $\gamma_q$ が 0 であるとしますと, 全く同様にして, (1), (2) を変形して, $\gamma_{q-1}$ も 0 である様に出来ます. 此の操作を反覆して, (1), (2) を, 之に相当する (3) に於て, 恒等的に

$$\gamma_q = \gamma_{q-1} = \cdots = \gamma_2 = 0$$

となる様に変形することが出来ます. このとき (3) は次の形です:

$$\gamma_1 F_1 = 0$$

所で, $F_1(x)$ は恒等的に 0 ではありませんから, $\gamma_1$ も亦恒等的に 0 です. か様に, 上述の仮定の下に, 命題は真です. 故に, 定理 1 は成立します. 従って, 補助定理 2 も成立します.

4 — 問題 I, II の間には次の二つの関係があります.

補助定理 3 — 補助定理 2 の幾何学的状勢の下に, $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ を $\Delta$ の近傍に於て正則な函数系とし, 此の $(F)$ に関し, $\Delta_0$ の近傍で与へられた問題 I が常に解けるものとする. 然るときは, $\Delta_1$ の近傍に於ける正則函数 $f_1(x)$ と $\Delta_2$ の近傍に於ける正則函数 $f_2(x)$ とが, $\Delta_0$ の近傍の各点で, 函数系 $(F)$ に関して合同ならば, $\Delta$ の近傍で正則な函数 $\chi(x)$ を求め, $\Delta_1$ の近傍或は $\Delta_2$ の近傍の各点で, 夫々

$$\chi(x) \equiv f_1(x) \quad \text{或いは} \quad \chi(x) \equiv f_2(x) \quad (\text{mod. } F)$$

ならしめることが出来る.

証明 $$\psi(x) = f_1(x) - f_2(x)$$
としますと, $\psi(x)$ は $\Delta_0$ の近傍で正則な函数であって, 其の各点で

$$\psi(x) \equiv 0 \quad (\text{mod. } F)$$

ですから, 問題 I に関する仮定に依て,

$$\psi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p$$

となる様な正則函数 $\alpha_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,p)$ が $\Delta_0$ の近傍で存在します.

$\Delta_1$ の近傍で正則な函数 $a_i(x)$ と $\Delta_2$ の近傍で正則な函数 $b_i(x)$ とを, 恒等的に

$$a_i(x)-b_i(x)=\alpha_i(x) \quad (i=1,2,\cdots,p)$$

となる様に撰び, $\Delta_1$ の近傍及び $\Delta_2$ の近傍で, 夫々

$$\chi_1=f_1-(a_1F_1+a_2F_2+\cdots+a_pF_p),$$

$$\chi_2=f_2-(b_1F_1+b_2F_2+\cdots+b_pF_p)$$

を考えますと, $\Delta_0$ の近傍で恒等的に

$$\chi_1-\chi_2=\psi-(\alpha_1F_1+\alpha_2F_2+\cdots+\alpha_pF_p)=0$$

となりますから, 此の $\chi_1(x),\chi_2(x)$ は, $\Delta$ の近傍で正則な, 同じ一つの函数 $\chi(x)$ の二つの部分です. 此の $\chi(x)$ は, 函数系 $(F)$ に関して, $\Delta_1$ の近傍では $f_1$ と合同, $\Delta_2$ の近傍では $f_2$ と合同です. か様に補助定理は成立します.

此の補助定理 3 と定理 1 とから, 慣用の推理法に依て, 次の定理が得られます.

<u>定理 2</u> — <u>問題 II は, 若し $\overline{\mathfrak{D}}$ が閉筒状域であって, 且つ若し函数系 $(F_1,F_2,\cdots,F_p)$ が $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で性質 $(A)$ を持つならば, 必ず解ける.</u>

<u>定理 3</u> — <u>問題 I, II に於て, 若し函数系 $(F_1,F_2,\cdots,F_p)$ が $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で性質 $(A)$ を持って居て, 且つ若し問題 II が ($\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で) 常に解けるならば, 問題 I についても其の通りである.</u>

<u>証明</u>　問題 I に於ける函数 $\Phi(x)$ は, $\overline{\mathfrak{D}}$ の各点で $\Phi(x)\equiv 0 \pmod{F}$ ですから, $\overline{\mathfrak{D}}$ の任意の一点を $P$ としますと, $P$ を中心とする多円筒 $(\gamma)$ と, $(\gamma)$ に於て正則な函数 $\alpha_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,p)$ とを撰び, $(\gamma)$ に於て恒等的に

$$\Phi=\alpha_1F_1+\alpha_2F_2+\cdots+\alpha_pF_p$$

となる様に出来ます. $(\gamma_1),(\gamma_2)$ を共通部分 $(\delta)$ を持つ様な任意の一対の $(\gamma)$ とし, 之に応ずる $\alpha_i(x)$ を夫々$\alpha_i'(x),\alpha_i''(x)$ としますと, $(\delta)$ に於て恒等的に

$$(\alpha_1'-\alpha_1'')F_1+(\alpha_2'-\alpha_2'')F_2+\cdots+(\alpha_p'-\alpha_p'')F_p=0$$

となります. 所で, 函数系 $(F_1,F_2,\cdots,F_p)$ は性質 $(A)$ を持って居ますから, $(\delta)$ の各点で

$$\alpha_p'\equiv\alpha_p'' \quad (\mathrm{mod.}\ F_1,F_2,\cdots,F_{p-1})$$

です. か様に, 函数族 $\{\alpha_p(x)\}$ は $(F_1,F_2,\cdots,F_{p-1})$ に関する合同条件を充たしますから, 問題 II に関する仮定に依て, $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則な函数 $A_p(x)$ を, $\overline{\mathfrak{D}}$ の各点 $P$ で

$$A_p\equiv\alpha_p \quad (\mathrm{mod.}\ F_1,F_2,\cdots,F_{p-1})$$

となる様に, 求めることが出来ます. 今,

$$\Phi_1 = \Phi - A_p F_p$$

としますと, $\Phi_1$ は $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則な函数であって, 其の各点で

$$\Phi_1(x) \equiv 0 \quad (\text{mod. } F_1, F_2, \cdots, F_{p-1})$$

となります. 定理が成立することを確かめるには, 此の推理法を繰り返せばよろしい.

空間 $(x)$ の領域 $\mathfrak{D}$ に於て正則な二つの函数系を

$$(f_1, f_2, \cdots, f_p), \quad (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_q)$$

とします. 此の時, 若し $\mathfrak{D}$ に於て (全域的に)

$$\varphi_i \equiv 0 \ (\text{mod. } f), \ f_j \equiv 0 \ (\text{mod. } \varphi) \quad (i = 1, 2, \cdots, q;\ j = 1, 2, \cdots, p)$$

ならば, $(f)$ と $(\varphi)$ とは $\mathfrak{D}$ に於て (全域的に, <u>イデアル基として) 同等</u> であると呼びましょう. $(f)$ と $(\varphi)$ とが $\mathfrak{D}$ の <u>一点 $P$ に於て同等</u> であると云へば, $P$ の近傍で然うであると云ふことです.

扨て, 問題 II は次の性質を持って居ますが, 問題 I にはか様な性質が無いことに注意して置きましょう:

問題 II に於て, $(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_q)$ を $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則であって, 其の各点で $(F)$ と同等な函数系とすれば, 問題 II は $(\Phi)$ に関するものと看做すことも出来る.

若し問題 II の一つ $(P)$ が, $(\Phi)$ について $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で解けるならば, $(F)$ に就ても同様である.

<u>5</u> — 第一報告の定理 II の拡張として, 問題 II に関する次の定理があります.

<u>定理 4</u> — <u>空間 $(x)$ に有界閉筒状域 $\overline{\mathfrak{D}}$ と, $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍に於ける正則函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ とを考へ, 固有集合体 $F_1 = F_2 = \cdots = F_p = 0$ の $\overline{\mathfrak{D}}$ 上の部分を $\Sigma$ とする. $\Sigma$ は実在するものと考へる. 此の時, $\Sigma$ の近傍で正則な函数 $\varphi(x)$ が与へられたならば, $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則な函数 $\Phi(x)$ を, $\Sigma$ 上の各点で $\Phi(x) \equiv \varphi(x)$ (mod. $F$) となる様に, 見出すことができる.</u>

<u>証明</u>　次の形の点集合,

$$(\Delta) \qquad (x) \in \overline{\mathfrak{D}}, \quad |F_j(x)| \leq \rho \quad (j = 1, 2, \cdots, p)$$

を考へます. 其の際, 正数 $\rho$ を充分小さく撰び, $\varphi(x)$ が此の $\Delta$ の近傍で正則である様にします. $y_j$ を複素変数とし, 空間 $(x, y)$ に固有集合体

$$y_j = F_j(x) \quad (j = 1, 2, \cdots, p)$$

を考へ, 閉筒状域

$$(\overline{C}) \qquad (x) \in \overline{\mathfrak{D}}, \quad |y_j| \le \rho \quad (j = 1, 2, \cdots, p)$$

上の部分を $S$ とします. $S$ を, 空間 $(y)$ に平行に, 空間 $(x)$ 上へ射影しますと, 其の像が丁度 $\Delta$ になります. 今,

$$G_j(x, y) = y_j - F_j(x)$$

と置きますと, 函数系 $(G_1, G_2, \cdots, G_p)$ は, 補助定理 1 に依て, 閉筒状域 $\overline{C}$ の近傍で性質 $(A)$ を持ちます.

$\varphi(x)$ は, $(x, y)$ の函数と看做しますと, $S$ の近傍で正則です. 故に, 定理 2 に依て, $\overline{C}$ の近傍で正則であって, $S$ 上の各点で $\Psi(x, y) \equiv \varphi(x)$ $(\mathrm{mod.}\ G_1, G_2, \cdots, G_p)$ となる様な函数, $\Psi(x, y)$ は存在します. これから,

$$\Phi(x) = \Psi(x, 0)$$

を考へますと, $\Phi(x)$ は $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則であって, $\Delta$ の近傍の各点で $\Phi(x) \equiv \varphi(x)$ $(\mathrm{mod.}\ F_1, F_2, \cdots, F_p)$ となります. か様に定理は成立します. (尚, $\Sigma$ が空集合である場合には, 問題は起り得ないことに注意しましょう.)

問題 I に関しては, 次の定理があります.

定理 5 — 定理 4 の状勢に於て, $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則な函数 $\Phi(x)$ と, $\Sigma$ の近傍で正則な函数 $\alpha_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ とが与へられ, 之等が

$$\Phi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p$$

なる恒等式を充たしたとすれば, $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則な函数 $A_i(x)$ を, 恒等的に

$$\Phi = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p$$

となる様に撰ぶことが出来る. 尚, ここに $\Sigma$ は空集合であってもよく, 其の場合には条件は要らない.

証明　前定理の証明の一部分を其の儘使ひます. 但し, $\Sigma$ が実在しない場合には, 正数 $\rho$ を充分小さく撰び, $\Delta$ も実在しない様にします. 然うしますと, $S$ も空集合となります.

先づ, $\Sigma$ が実在する場合を考へます. 前定理に依て, 閉筒状域 $\overline{C}$ の近傍で正則な函数 $a_i(x, y)$ を, $S$ 上の各点で,

$$a_i(x, y) \equiv \alpha_i(x) \quad (\mathrm{mod.}\ G)$$

となる様に, 求めることが出来ます. このことは, 補助定理 1 と定理 2 とからも分かります.

次に, $\Sigma$ が, 従って $S$ が実在しない場合には,

$$a_i(x, y) = 0$$

ととります.

か様にして,

$$\Psi(x,y)=\Phi(x)-(a_1F_1+a_2F_2+\cdots+a_pF_p)$$

を考へますと, $S$ 上の各点で, (か様な点が若し存在すれば, )

$$\Psi(x,y)\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ G)$$

となります. 所で, 函数系 $(G)$ は $\overline{C}$ の近傍で性質 $(A)$ を持ちますから, 定理 1 に依て, 此の合同は $\overline{C}$ の近傍で全域的に成立します. それで,

$$\psi(x)=\Psi(x,0)$$

を考へますと, $\psi(x)$ は $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則であって, 此処で全域的に

$$\psi(x)\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ F)$$

となります. 他方,

$$\beta_i(x)=a_i(x,0)$$

としますと, $\beta_i(x)$ は $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則であって, 恒等的に

$$\psi(x)=\Phi(x)-(\beta_1F_1+\beta_2F_2+\cdots+\beta_pF_p)$$

となります. 故に, $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で全域的に

$$\Phi(x)\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ F)$$

です. か様に定理は成立します.

6 — 定理 1, 2, 4, 5 を閉筒状域から, 次に説明します様な閉集合 $\Delta$ へ拡張します.

$A_i, B_j$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,\nu)$ を平面上の有界閉領域とし, 空間 $(x)$ に閉筒状域 $(A)$, $x_i\in A_i$ と, $(A)$ の近傍で正則な函数 $f_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,\nu)$ とを考へ, 之等によって次の形の閉集合

$$(\Delta) \qquad x_i\in A_i,\quad f_j(x)\in B_j \quad (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,\nu)$$

を作ります. 上に申しましたのは, 此の形の $\Delta$ のことです.

$y_j$ を複素変数とし, 空間 $(x,y)$ に於て固有集合体

$$y_j-f_j(x)=0 \quad (j=1,2,\cdots,\nu)$$

を考へ, 閉筒状域 $(A,B)$, $x_i\in A_i$, $y_j\in B_j$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,\nu)$ 上の部分を $\Sigma$ とします. $\Sigma$ を空間 $(y)$ に平行に, 空間 $(x)$ 上へ射影しますと, 其の像は $\Delta$ になります. $F_j(x,y)=y_j-f_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,\nu)$ とします.

補助定理 4 — 此の状勢に於て, $\Phi_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,p)$ を $\Delta$ の近傍に於ける正則函数とすれば, $(A,\ B)$ の近傍で正則であって, $\Sigma$ 上の各点で函数系 $(F_1,F_2,\cdots,F_\nu)$ に関し, $\Phi_k(x)$ と合同となる様な函数, $\Psi_k(x,y)$ は存在する. 此の時, 若し函数系 $(\Phi)$ が $\Delta$ の近傍で性質 $(A)$ を持つならば, 函数系 $(F_1, F_2,\cdots,F_\nu,\Psi_1,\Psi_2,\cdots,\Psi_p)$ は $(A,B)$ の近傍で性質 $(A)$ を持つ.

証明　函数 $\Psi_k(x,y)$ $(k=1,2,\cdots,p)$ は定理 4 に依て存在します. このことは補助定理 1 と定理 2 とからも分かります. それで, $(\Phi)$ が $\Delta$ の近傍で性質 $(A)$ を持つと仮定して, $(F,\Psi)$ が $(A,B)$ の近傍で性質 $(A)$ を持つことを証明します. 所で, $q=1,2,\cdots,\nu$ としますと, 函数系 $(F_1,F_2,\cdots,F_q)$ は補助定理 1 に依て, $(A,B)$ の近傍で性質 $(A)$ を持ちます. 故に, $q=\nu+r, r=1,2,\cdots,p$ の場合を調べます.

今, 閉筒状域 $(A,B)$ の一点 $P$ の近傍で

$$\alpha_1(x,y)F_1(x,y)+\cdots+\alpha_\nu(x,y)F_\nu(x,y)+\alpha_{\nu+1}(x,y)\Psi_1(x,y)+\cdots$$
$$+\alpha_{\nu+r}(x,y)\Psi_r(x,y)=0,$$

$\alpha_i(x,y)$ $(i=1,2,\cdots,\nu+r)$ は $P$ で正則な函数, の形の恒等式が成立したとします. 此の時, 若し P が $\Sigma$ の点でなければ, 明らかに $\alpha_{\nu+r}(x,y)\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ F)$ ですから, それでよろしい.

$P$ が $\Sigma$ 上にあるとして, $\beta_i(x)=\alpha_{\nu+i}[x,f(x)]$ $(i=1,2,\cdots,r)$ としますと, $P$ を空間 $(y)$ に平行に, 空間 $(x)$ 上へ射影した像を $Q$ としますならば, $\beta_i(x)$ は $Q$ に於て正則な函数であって, 恒等的に

$$\beta_1\Phi_1+\beta_2\Phi_2+\cdots+\beta_r\Phi_r=0$$

となります. 先づ $r=1$ のときを調べます. 此のときは $\Phi_1(x)$ は, 仮定に依て, 恒等的に 0 ではありませんから, $\beta_1(x)$ が恒等的に 0 です. 故に, 補助定理 1 の証明で見ました様に, $P$ に於て

$$\alpha_{\nu+1}(x,y)\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ F)$$

です.

次に, $r>1$ とします. 此のときは, $(\Phi)$ は $\Delta$ の近傍で性質 $(A)$ を持ち, $Q$ は $\Delta$ の点ですから, $Q$ に於て

$$\beta_r(x)\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ \Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_{r-1})$$

です. 所で, $\alpha_{\nu+r}-\beta_r$ は $P$ の近傍で, $\Sigma$ 上で恒等的に 0 になりますから, 上に見ました様に, $P$ に於て,

$$\alpha_{\nu+r}(x,y)\equiv\beta_r(x) \quad (\mathrm{mod.}\ F)$$

です. 此の二つから,

$$\alpha_{\nu+r}(x,y)\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ F_1,\cdots,F_\nu,\Psi_1,\cdots,\Psi_{r-1})$$

です．か様に, 補助定理は成立します．

定理 6 — $(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ を上述の閉集合 $\Delta$ の近傍で性質 $(A)$ を持つ様な正則函数系とすれば, $(\Phi)$ に関し, $\Delta$ の近傍で与へられた問題 I, II は必ず解ける．

証明　定理 3 に依て, 上の定理が, 若し問題 II に就て成立するならば, 問題 I についても其の通りです．それで問題 II だけを調べます．

$\Delta$ の近傍の任意の点 $(x^0)$ に対し, 此の点の近傍で正則な函数 $\alpha(x)$ が与へられて居て, 之等の函数の全体が函数系 $(\Phi)$ に関して合同条件を充たしたとします．空間 $(x, y)$ の閉筒状域 $(A, B)$ の近傍の各点に対し, 函数 $\beta(x, y)$ を次の様に対応せしめます:

$\Sigma$ 及び其の解析的延長上の任意の点 $[x^0, f(x^0)]$ に対しては

$$\beta(x, y) = \alpha(x),$$

然うでない点 $(x^0, y^0)$ に対しては $\beta(x, y) = 0$.

然うしますと, 此の函数族 $\{\beta(x, y)\ \}$ は, 上の補助定理 4 の函数系 $(F, \Psi)$ に関して合同条件を充たします．

$(F, \Psi)$ は補助定理 4 に依て, $(A, B)$ の近傍で性質 $(A)$ を持ちますから, 定理 2 に依て, $(A, B)$ の近傍で正則な函数 $B(x, y)$ を撰び, 其の各点で

$$B(x, y) \equiv \beta(x, y) \quad (\mathrm{mod.}\ F, \Psi)$$

となる様にすることが出来ます．これから

$$A(x) = B[x, f(x)]$$

を考へますと, $A(x)$ は $\Delta$ の近傍で正則であって, 其の各点で

$$A(x) \equiv \alpha(x) \quad (\mathrm{mod.}\ \Phi)$$

となります．か様に $A(x)$ は所求の函数です．故に定理は成立します．

定理 7 — 上述の閉集合 $\Delta$ の近傍に於て, 正則函数系 $(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ に関し問題 I, II を考へ, 固有集合体 $\Phi_1 = \Phi_2 = \cdots = \Phi_p = 0$ の $\Delta$ 上の部分を $S$ とする．之等の問題の特定の一つ, $(P)$ は, 若し $S$ の近傍に於て解けるならば, $\Delta$ の近傍に於ても矢張り解ける．ここに $S$ は空集合でもよく, 其の際は条件は要らない．

証明　矢張り函数系 $(F, \Psi)$ を考へます．但し, 此の度は一般に性質 $(A)$ を持ちません．固有集合体

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_\nu = \Psi_1 = \cdots = \Psi_p = 0$$

の閉筒状域 $(A, B)$ 上の部分を $T$ とします．$S$ が空集合ならば, $T$ も空集合です．

問題 I を見ます．$\Delta$ の近傍で正則な函数 $G(x)$ が与へられて居て，$\Delta$ の各点で $G \equiv 0$ (mod. $\Phi$) であって，更に，若し $S$ が実在すれば，其の近傍で全域的に $G \equiv 0$ (mod. $\Phi$) であるとして，然うすれば，$\Delta$ の近傍で全域的に $G \equiv 0$ (mod. $\Phi$) であることを証明すればよろしい．

$(A, B)$ の近傍で正則な函数 $H(x, y)$ を，$\Sigma$ 及び其の解析的延長上の各点で

$$H(x, y) \equiv G(x) \quad (\mathrm{mod.}\ F)$$

となる様に撰びますと，$(A, B)$ の近傍の各点で，

$$H(x, y) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ F, \Psi)$$

となります．

$S$ が実在すると考へます．然うしますと，仮定に依て，$S$ の近傍で $G(x)$ は次の形に表はされます:

$$G = a_1\Phi_1 + a_2\Phi_2 + \cdots + a_p\Phi_p,$$

ここに $a_k(x)$ $(k = 1, 2, \cdots, p)$ は $S$ の近傍で正則な函数です．此の $a_k(x)$ は，$(x, y)$ の函数と看做しますと，$T$ の近傍で正則です．それで，

$$K(x, y) = H(x, y) - (a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2 + \cdots + a_p\Psi_p)$$

を考へますと，$K(x, y)$ は $T$ の近傍で正則です．又，$T$ の近傍の各点で $K \equiv 0$ (mod. $F$) です．所で，$T$ は此の節の始めに述べた $\Delta$ の形の閉集合の，$B_j$ $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$ がすべて原点となった極限の場合です．又，函数系 $(F)$ は $T$ の近傍で性質 $(A)$ を持ちます．故に，前の定理 6 に依て，$T$ の近傍で全域的に $K(x, y) \equiv 0$ (mod. $F$) です．従って，$T$ の近傍で全域的に

$$H(x, y) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ F, \Psi)$$

です．

か様に，$H(x, y)$ は $(A, B)$ の近傍で正則な函数であって，其の各点で $H \equiv 0$ (mod. $F, \Psi$) を充たし，更に，$T$ が実在する場合には，其の近傍で全域的に $H \equiv 0$ (mod. $F, \Psi$) となります．故に，定理 5 に依て，$(A, B)$ の近傍で全域的に此の合同が成立します．故に，

$$G(x) = H[x, f(x)] \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ \Phi)$$

が，$\Delta$ の近傍で全域的に成立します．

問題 II に移ります．此の場合には，若し $S$ が空集合ならば，たとへば常数 1 が解を与へます．故に，$S$ は実在すると仮定します．然うしまして，$\Delta$ の近傍の任意の点 $(x^0)$ に対し，此の点の近傍で正則な函数 $\alpha(x)$ が与へられて居

て, 其の全体が函数系 $(\Phi)$ に関して合同条件を充たし, 之に対して, $S$ の近傍で正則な函数 $a(x)$ が存在して, 其の各点で

$$a(x) = \alpha(x) \quad (\mathrm{mod.}\ \Phi)$$

を満足するとして, 然うすれば, $\Delta$ の近傍で正則な函数 $A(x)$ を, 其の各点で $A(x) \equiv \alpha(x)$ (mod. $\Phi$) となる様に, 求められることを証明します.

$(A, B)$ の近傍の各点に, $\beta(x, y)$ を次の様に対応させます: $\Sigma$ 及び其の延長上の任意の点 $[x^0, f(x^0)]$ に対しては $\beta(x, y) = \alpha(x)$, それ以外の点に対しては $\beta(x, y) = 0$ . 此の函数族 $\{\beta(x, y)\}$ は $(F, \Psi)$ に関して合同条件を充たします. 又, $a(x)$ は, $(x, y)$ の函数と看做しますと, $T$ の近傍で正則であって, 其の各点で $a \equiv \alpha$ (mod. $F, \Psi$) となります. 故に, 定理 4 に依て, $(A, B)$ の近傍で正則な函数 $B(x, y)$ を, 其の各点で

$$B(x, y) \equiv \beta(x, y) \quad (\mathrm{mod.}\ F, \Psi)$$

となる様に, 見出すことが出来ます. これから

$$A(x) = B[x, f(x)]$$

を考へますと, $A(x)$ は $\Delta$ の近傍で正則であって, 其の各点で $A(x) \equiv \alpha(x)$ (mod. $\Phi$) となります. か様に定理は成立します.

定理 6, 7 から直ちに次の定理が得られます.

定理 8 — 上述の閉集合 $\Delta$ の近傍に於て, 正則函数系 $(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ に関する問題 I, II を考へ, 固有集合体 $\Phi_1 = \Phi_2 = \cdots = \Phi_p = 0$ の $\Delta$ 上の部分を $S$ とする. 然るときは, 之等の問題が常に解ける為の充分条件の一つは, 夫々次の通りである: 問題 II に対しては, $S$ の近傍に於て性質 $(A)$ を持つ正則函数系 $(\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_q)$ が存在して, S の近傍の各点で $(\Phi)$ と同等となること. 問題 I に対しては, か様な $(\Psi)$ が存在して, $S$ の近傍に於て全域的に $(\Phi)$ と同等となること. ここに $S$ は空集合でもよく, 其の時は条件は要らない.

7 — 今少し複雑な場合に対して, 多少の準備をして置きましょう.

函数値の平面上に, Jordan の単純閉曲線, 又は両翼が無制限に延びて居る様な, 重複点を持たない連続曲線を描き, $L$ で表はします. $L$ は平面を二つの部分に分ちます. 其の各と $L$ との和を $Z_1, Z_2$ とします. 空間 $(x)$ に, 前節で述べた閉集合 $\Delta$ を描き, $\varphi(x)$ を 閉筒状域 $(A)$ の近傍で正則 な函数とし, 之に依て, $\Delta$ を次の様に, 二つの閉集合 $\Delta_1, \Delta_2$ に分かちます: 共通部分 $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \Gamma$ としますと, $\Gamma$ の点に対しては $\varphi(x) \in L, \Gamma$ の近傍の $\Delta_1$ の点に対しては $\varphi(x) \in Z_1, \Gamma$ の近傍の $\Delta_2$ の点に対しては $\varphi(x) \in Z_2$ となり, $\Gamma$ の近傍には, $\Gamma$ の点以外に, $(x) \in \Delta, \varphi(x) \in L$ を同時に充たす点がないこと.

補助定理 5 — 此の状勢に於て, $\Gamma$ の近傍で正則な函数 $\psi(x)$ が与へられたとき, $\Delta_1$ の近傍で正則な函数 $\psi_1(x)$ と, $\Delta_2$ の近傍で正則な函数 $\psi_2(x)$ とを, $\Gamma$ の近傍に於て $\psi_1 - \psi_2 = \psi$ となる様に撰ぶことが出来る.

証明　点集合 $(x) \in \Delta, \varphi(x) \in L$ に関する $\Gamma$ の補集合を $\Gamma'$ とします. 仮定に依て, $\Gamma$ , $\Gamma'$ の距離は 0 ではありません. $\Gamma \cup \Gamma'$ の近傍に於て, 正則函数 $g(x)$ を次の様に定義します: $\Gamma$ の近傍では

$$g(x) = \psi(x),$$

$\Gamma'$ の近傍では

$$g(x) = 0.$$

$L$ が閉曲線でない場合を考へます. $\varphi(x)$ は閉筒状域 $(A)$ の近傍に於ける正則函数ですから, 正数 $R$ を充分大きく撰べば, $(A)$ の近傍で

$$|\varphi(x)| < R$$

となります. 複素変数 $z$ の平面上に円周 $|z| = R$ を描きますと, $L$ は必ず此の円周と交はります. $L$ を, $Z_1$ を左方に見る様に描いたとき, 最初に円周と交はる点を $a$, 最後に円周と交はる点を $b$ とし, $L$ の弧 $a, b$ を $L_0$ で表はします.

平面上に閉領域 $C$ を, 閉曲線 $L$ 又は弧 $L_0$ に充分近く, 其の任意の点を内点として持つ様に描き, 閉集合

$$(\Delta_0) \quad x_i \in A_i,\ f_j(x) \in B_j,\ \varphi(x) \in C \quad (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, \nu)$$

を考へますと, $g(x)$ は $\Delta_0$ の近傍で正則です. 空間 $(x, y, z)$ に固有集合体

$$y_j = f_j(x),\ z = \varphi(x) \quad (j = 1, 2, \cdots, \nu)$$

を考へ, 閉筒状域 $(A, B, C)$, $x_i \in A_i,\ y_j \in B_j,\ z \in C \quad (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, \nu)$ 上の部分を $S$ とします. $S$ を, 空間 $(y, z)$ に平行に, 空間 $(x)$ 上へ射影した像は $\Delta_0$ です.

定理 4 (又は補助定理 1 と定理 2 と) に依て, $(A, B, C)$ の近傍で正則であって, $S$ 及び其の解析的延長上で $g(x)$ となる様な函数は存在します. 其の一つを $h(x, y, z)$ とします.

$L$ 又は $L_0$ を少し変形します. $C$ の内点の集合を $C_0$ として, $L$ が閉曲線である場合には, $L$ を $C_0$ 外に出ない様に連続的に変形して, 求長可能な Jordan の単純閉曲線 $L'$ に移します. 然うでない場合には, 弧 $L_0$ の両端 $a, b$ を固定して上と同様の変形を行ひ, $L_0$ を求長可能な Jordan の単純弧に移し, 之を矢張り $L'$ で表はします. $Z_1$ を左方に見る方向を $L$ の正の方向とし, 之に応ずる方向を $L'$ の正の方向とします. か様にして, 次の P. Cousin の積分 を考へます:

$$k(x, y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{h(x, y, t)}{t - z}\, dt,$$

$i$ は虚単位であって, 積分は $L'$ の方向に行ひます. (たとへば $L'$ が両端を持つ場合には $a$ から $b$ へ.) か様な積分が次の性質を持つことはよく知られて居ます. 此の積分 $k(x,y,z)$ から解析接続に依て $z\in Z_1$ の近傍で正則な函数 $k_1(x,y,z)$, 及び $z\in Z_2$ の近傍で正則な函数 $k_2(x,y,z)$ が出て来ます. 但し, 若し $L'$ が端点 $a,b$ を持つならば, $z=a$ 及び $z=b$ は例外です. 之等の函数の間には次の関係があります:

$$k_1(x,y,z)-k_2(x,y,z)=h(x,y,z).$$

これから,

$$\chi_1(x)=k_1[x,f(x),\varphi(x)],\quad \chi_2(x)=k_2[x,f(x),\varphi(x)]$$

を作ります. $\chi_1(x)$ は点集合 $(x)\in\Delta$, $\varphi(x)\in Z_1$ の近傍で正則であって, $\chi_2(x)$ は $(x)\in\Delta$, $\varphi(x)\in Z_2$ の近傍で正則です. 又 $\Gamma'$ 上では

$$\chi_1(x)-\chi_2(x)=g(x)=0$$

ですから, 之等は $\Gamma'$ の両側では, 同じ一つの解析函数の二つの部分に過ぎません. 次に, $\Gamma$ 上では

$$\chi_1(x)-\chi_2(x)=g(x)=\psi(x)$$

です. 故に, 所求の函数 $\psi_1(x),\psi_2(x)$ は確かに存在します.

<u>定理 9</u> — <u>上述の幾何学的状勢に於て, $\Delta$ の近傍で正則な函数系 $(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_p)$ に関して, 問題 I の一つ, $(P)$ が与へられて居て, $\Delta_1$ の近傍に於ても, $\Delta_2$ の近傍に於ても既に解けて居ると考へる. 此の時, $(P)$ が $\Delta$ の近傍に於て解ける為の充分条件の一つは, $\Delta$ の近傍に於て正則な函数系 $(\Psi_1,\Psi_2,\cdots,\Psi_q)$ が存在し, $\Delta$ の近傍で全域的に $(\Phi)$ と同等であって, $\Gamma$ の近傍で性質 $(A)$ を持つことである.</u>

<u>証明</u>　函数系 $(\Phi)$ 自身が $\Gamma$ の近傍で性質 $(A)$ を持つと仮定して支差ありません. 然うしますと, 定理 6 と補助定理 5 とがありますから, 補助定理 2 の証明法を其の儘反覆すれば, 此の定理 9 が得られます.

<u>定理 10</u> — <u>上述の幾何学的状勢に於て, $\Delta$ の近傍で正則な函数系 $(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_p)$ に関して, 問題 II の一つ, $(P)$ が与へられて居て, $\Delta_1$ の近傍でも, $\Delta_2$ の近傍でも既に解けて居ると考へる. 此のとき, $(P)$ が $\Delta$ の近傍で解ける為の充分条件の一つは, $\Delta$ の近傍で正則な函数系 $(\Psi_1,\Psi_2,\cdots,\Psi_p)$ が存在し, $\Delta$ の近傍の各点で $(\Phi)$ と同等であって, $\Gamma$ の近傍に於ける, $(\Psi)$ に関する問題 I が常に解けることである.</u>

<u>証明</u>　函数系 $(\Phi)$ 自身に関する, $\Gamma$ の近傍に於ける問題 I が常に解けると仮定して支差ありません. 然うしますと, 補助定理 5 が用意せられて居ますから, 補助定理 3 の証明法を其の儘繰り返せば, 此の定理 10 が得られます.

8 — 次に 解の上界の存在 に就て少し考察しましょう.

空間 $(x)$ に於て, 開集合 $\mathfrak{D}$ と 有界集合 $E$ とを考へます. 此のとき 記号 $E \Subset \mathfrak{D}$ を以て, 有界集合 $E$ が $\mathfrak{D}$ の 完全内部に含まれる こと, 云ひ換へますと, $E$ が其の総ての集積点と共に $\mathfrak{D}$ に含まれることを表はします.

問題 $\mathrm{I}_0$ — 空間 $(x)$ に領域 $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_0$ を考へ, $\mathfrak{D}_0$ は有界であって, $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$ であるとします. $\mathfrak{D}$ に於て正則な, 函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ と有界函数 $\Phi(x)$ とが与へられ, $\mathfrak{D}$ の各点で $\Phi \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ F)$ であったとします. 此の時, $\mathfrak{D}$ に於て $|\Phi| < M$ としますと, $\mathfrak{D}_0$ に於て正則函数 $A_i(x)$ を次の様に撰ぶこと:

$$\Phi = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p,$$

$$|A_i(x)| < KM \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

ここに $K$ は $\Phi(x)$ に無関係な正数です. 之を問題 $\mathrm{I}_0$ と呼びましょう.

問題 $\mathrm{II}_0$ — $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ を $\mathfrak{D}$ に於て正則な函数系とし, $\rho_0$ を正の常数とします. $\mathfrak{D}$ の各点 $P$ に対し, 之を中心とする, 半徑が $\rho_0$ に等しいか又はそれより大きな多円筒 $(\gamma)$ と, $(\gamma)$ に於て正則であって, $P$ に無関係な上界を持つ様な函数 $\varphi(x)$ とが対応し, 其の全体が $(F)$ に関して合同条件を充たしたとします.

此の時, 各 $(\gamma)$ に於て $|\varphi(x)| < M$, $M$ は $(\gamma)$ に無関係な正数, としますと, $\mathfrak{D}_0$ に於て正則な函数 $\Phi(x)$ を, $\mathfrak{D}_0$ の各点に於て

$$\Phi(x) \equiv \varphi(x) \quad (\mathrm{mod.}\ F)$$

となり, $\mathfrak{D}_0$ に於て

$$|\Phi(x)| < KM$$

となる様に撰ぶこと. 此処に $K$ は $\{(\gamma), \varphi(x)\ \}$ に無関係な正数です. 之を問題 $\mathrm{II}_0$ と呼びましょう.

性質 $(B)$ — 空間 $(x)$ の領域 $\mathfrak{D}$ と, $\mathfrak{D}$ に於て正則な, 順序の決った函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ とに対して, $0 < t < +\infty$ に於て定義せられた, 実変数 $t$ の逓増せず, かつ 1 又はそれより大きな実数値をとる様な, 一価函数 $u(t)$ が対応し, 次の条件を充たしたとします: $q$ を $1, 2, \cdots, p$ の任意の一つとするとき, $\mathfrak{D}$ の一点 $(x^0)$ を中心とし, $r$ を半徑とする, $\mathfrak{D}$ に含まれる様な多円筒 $(\gamma)$ に於て正則な函数 $\varphi(x)$ が, $(\gamma)$ の各点で $\varphi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ F_1, F_2, \cdots, F_q)$ であって, $(\gamma)$ で $|\varphi(x)| < M$ ならば, $(x^0)$ を中心とし,

$$\frac{r}{u(r)}$$

を半徑とする多円筒 $(\gamma')$ に於て正則な函数 $A_i(x)$ を, 恒等的に

$$\varphi = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_q F_q$$

となり, かつ $(\gamma')$ に於て

$$|A_i(x)| < u(r) M \quad (i = 1, 2, \cdots, q)$$

となる様に, 見出すことが常に可能であること. 此のとき, 函数系 $(F)$ は領域 $\mathfrak{D}$ に於て性質 $(B)$ を持つと呼び, $u(t)$ を其の一つの限界函数 と名づけましょう.

補助定理 6 — $f_j(x)$ を空間 $(x)$ の有界領域 $A$ の近傍に於ける正則函数とすれば, 函数系 $F_j(x,y)=y_j-f_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,\nu)$ は, 空間 $(x,y)$ の領域 $(x)\in A$ に於て性質 $(B)$ を持つ.

証明 $q$ を $1,2,\cdots,\nu$ の一数とし, 空間 $(x,y)$ の領域 $(x)\in A$ の一点 $(x^0,y^0)$ を中心とする, 半径 $r$ の, 此の領域に含まれる様な多円筒を $(\gamma)$ とします. $(\gamma)$ で正則な函数 $\varphi(x,y)$ が, $(\gamma)$ の各点で $\varphi(x,y)\equiv 0$ $(\mathrm{mod.}\ F_1,F_2,\cdots,F_q)$ であって, $(\gamma)$ で $|\varphi(x,y)|<M$ であったとしましょう.

函数 $f_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,\nu)$ は領域 $A$ の近傍で正則であって, $A$ は有界ですから, 次の様な, 1 より小さな, 正の常数 $L$ が存在します:

$$|x_i-x_i^0|<Lr \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

ならば

$$|f_j(x)-f_j(x^0)|<r \quad (j=1,2,\cdots,\nu).$$

此のことは慣用の推理法に依て, 直ちに分ります.

二つの場合を区別します.

$1^\circ$ . $f_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,q)$ 中に少くとも一つ $f_p(x)$ があって,

$$|y_p^0-f_p(x^0)|\geq\frac{r}{2}$$

となるとき. $(x^0,y^0)$ を中心とし,

$$\frac{Lr}{8}$$

を半径とする多円筒を $(\gamma')$ とします. $(\gamma')$ の任意の点に対し, $|F_p(x,y)|>r/4$ です. 今,

$$\varphi(x,y)=A_p(x,y)F_p(x,y)$$

と置きますと, $A_p(x,y)$ は $(\gamma')$ で正則であって, ここに於て

$$|A_p(x,y)|<\frac{4M}{r}$$

となります.

$2^\circ$ .

$$|y_i^0-f_i(x^0)|<\frac{r}{2} \quad (i=1,2,\cdots,\nu)$$

のとき. 上と同じ $(\gamma')$ をとります. $k=0,1,2,\cdots,\nu$ とし,

$$\varphi_k(x,y)=\varphi[(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),y_{k+1},\cdots,y_\nu]$$

を考へます.

$$\varphi_0(x,y)=\varphi(x,y),\quad \varphi_\nu(x,y)=0$$

です. $\varphi_k(x,y)$ は何れも多円筒 $(\delta)$

$$|x_i-x_i^0|<\frac{Lr}{2},\quad |y_j-y_j^0|<r\quad (i=1,2,\cdots,n;\, j=1,2,\cdots,\nu)$$

に於ては, 確かに定義せられて居ます.

$$\psi_p(x,y)=\varphi_{p-1}(x,y)-\varphi_p(x,y)\quad (p=1,2,\cdots,\nu)$$

と置きますと,

$$\varphi=\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_\nu$$

となります.

$\psi_p(x,y)$ に就て, 多円筒 $(\delta)$ の各点で $\psi_p\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ F_p)$ ですから,

$$\psi_p(x,y)=A_p(x,y)F_p(x,y)$$

と置きますと, $A_p(x,y)$ は $(\delta)$ で正則です. 其の上界をしらべましょう. $(\gamma')$ の任意の点を $(\xi,\eta)$ とします. $y_p$ 平面上に円 $(C)$,

$$|y_p-y_p^0|<\frac{7}{8}r$$

を描きますと, 点 $\eta_p, f_p(\xi)$ は何れも円内に入ります. 更に, 点 $f_p(\xi)$ から円周 $C$ への距離は $r/4$ より大です. 故に, $C$ 上の任意の点を $y_p'$ としますと,

$$|A_p(\xi,\eta,\cdots,\eta_{p-1},y_p',\eta_{p+1},\cdots,\eta_\nu)|<\frac{8M}{r}$$

です. 従って $(\xi,\eta)$ に於ても同じ不等式が成立します.

それ故, 此の場合にも, $(\gamma')$ に於て正則な函数 $A_i(x,y)$ $(i=1,2,\cdots,q)$ が存在し, ここに於て

$$|A_i(x,y)|<\frac{8M}{r}$$

であって, 恒等的に

$$\varphi=A_1F_1+A_2F_2+\cdots+A_qF_q$$

となります. か様に補助定理は成立します. 尚,

$$u(t)=\max\left(\frac{8}{L},\ \frac{8}{t}\right)$$

が此の際一つの限界函数を与へます.

以下定理 1, 2, 4, 5 を再点検します.

9　定理 11 — 問題 $\mathrm{I}_0$ は, 若し $\mathfrak{D}$ が筒状域であって, 且つ若し函数系 $(F_1, F_2,\cdots,F_p)$ が $\mathfrak{D}$ に於て性質 $(A)$, $(B)$ を持つならば, 必ず解ける.

証明　$p=1$ としますと,

$$\Phi(x)=A_1(x)F_1(x)$$

となります. $A_1(x)$ は $\mathfrak{D}$ に於て正則な函数です. 問題は $\mathfrak{D}$ で $|\Phi|<M$ ならば, $\mathfrak{D}_0$ に於て

$$|A_1(x)|<KM$$

となる様に, $\Phi(x)$ に無関係な正数 $K$ を撰ぶことが出来るかと云ふのですが, 函数系 $(F_1)$ は性質 $(B)$ を持って居るのですから, このことは明らかに可能です.

か様に $p=1$ のときには命題は真ですから, 命題は $p=2,3,\cdots,q-1$ のとき真であると仮定すれば, $p=q$ のときにも真であることを証明すればよろしい.

其の為, 此の仮定の下に, 次の命題を証明します.

補助定理 7　空間 $(x)$ の二つの筒状域を $\Delta_1$, $\Delta_2$ とし, $\Delta_1$ と $\Delta_2$ とは $n$ 個の (変数の平面上の) 成分の中, 一個を除いて, 他の全部を共有して居ると考へ, 其の和及び其の共通部分を夫々 $\Delta_1\cup\Delta_2=\Delta$, $\Delta_1\cap\Delta_2=\Delta_0$ とする. $\Delta'$ を $\Delta'\Subset\Delta$ なる有界筒状域とする. $\Delta$ に於て正則函数系 $(F_1,F_2,\cdots,F_q)$ を考へ, $\Delta_0$ に於て性質 $(A)$, $(B)$ を持って居るとする. $\Phi(x)$ を $\Delta$ に於て正則な函数とし, $\Delta_1$ に於て次の (1) の形に, 又 $\Delta_2$ に於て次の (2) の形に表はされて居るとする:

$$\Phi=\alpha_1F_1+\alpha_2F_2+\cdots+\alpha_qF_q, \tag{1}$$

$$\Phi=\beta_1F_1+\beta_2F_2+\cdots+\beta_qF_q, \tag{2}$$

此処に $\alpha_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,q)$ は $\Delta_1$ で正則有界な函数であって, $\beta_i(x)$ は $\Delta_2$ で正則有界な函数である. 然るときは, $\Delta_1$ , $\Delta_2$ に於て夫々

$$|\alpha_i(x)|<M,\quad |\beta_i(x)|<M\quad (i=1,2,\cdots,q)$$

とすれば, $\Delta'$ に於て正則函数 $A_i(x)$ を

$$\Phi=A_1F_1+A_2F_2+\cdots+A_qF_q,$$

$$|A_i(x)|<KM\quad (i=1,2,\cdots,q)$$

となる様に撰ぶことが出来る. 此処に $K$ は $\Phi(x)$ に無関係な正数である.

此の命題が ($q$ のときに) 真ならば, 定理は $q$ のときにも成立します. 其の証明法は, 性質 $(B)$ が仮定されて居ますから, 定理 1 の場合と全く同様です.

上の命題を証明します. 今,

$$\alpha_i(x)-\beta_i(x)=\gamma_i(x)\quad (i=1,2,\cdots,q)$$

としますと, $\Delta_0$ に於て

$$\gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2 + \cdots + \gamma_q F_q = 0$$

となります. 故に, $(F_1, F_2, \cdots, F_q)$ は性質 $(A)$ を持って居ますから, $\Delta_0$ の各点で $\gamma_q \equiv 0$ (mod. $F_1, F_2, \cdots, F_{q-1}$) です. 又, $\Delta_0$ で $|\gamma_q| < 2M$ です. 今 $E$ を, $E \Subset \Delta_0$ なる有界筒状開集合としますと, 仮定に依て, 定理 11 は $q-1$ のときには成立しますから, $E$ に於て正則函数 $c_i(x)$ を,

$$\gamma_q = c_1 F_1 + c_2 F_2 + \cdots + c_{q-1} F_{q-1},$$

$$|c_i(x)| < K_1 M \quad (i = 1, 2, \cdots, q-1)$$

となる様に撰ぶことが出来ます. ここに $K_1$ は $\gamma_q(x)$ に無関係な正数です.

$x_1$ 平面上の $\Delta_1$ の成分と $\Delta_2$ の成分とが一致しないと考へましょう. 有界筒状域 $G_1, G_2$ を, 其の成分がすべて多辺形であって, $x_1$ 平面上のものを除いて, 他は全部同一であって, かつ

$$G_1 \Subset \Delta_1, \quad G_2 \Subset \Delta_2$$

となる様に撰び, $G_1 \cup G_2 = G, G_1 \cap G_2 = G_0$ とします. $\Delta''$ を, $\Delta' \Subset \Delta'' \Subset \Delta$ なる有界筒状域とし, $G_1, G_2$ を, $\Delta'' \Subset G$ となる様にとります. 又上の $E$ を, $G_0 \Subset E$ となる様に撰びます.

$x_1$ 平面上の $G_1$ の成分を $H_1, G_2$ の成分を $H_2$ とし, $H_1 \cup H_2 = H, H_1 \cap H_2 = H_0$ としましょう. 簡単の為, $H_1$ の境界と $H_2$ の境界とは点以外を共有しないとして, $H_0$ の境界の中, $H_1$ の境界に属する部分を $L_1, H_2$ の境界に属する部分を $L_2$ とします. 次の積分を考へます:

$$a_j(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{c_j(t, x_2, \cdots, x_n)}{t - x_1}\,dt,$$
$$b_j(x) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{c_j(t, x_2, \cdots, x_n)}{t - x_1}\,dt \quad (j = 1, 2, \cdots, q-1),$$

此処に $i$ は虚単位であって, 積分は $H_0$ に関して正の方向にとるのです. 然うしますと, $a_j(x)$ は $G_1$ で正則, $b_j(x)$ は $G_2$ で正則であって, $G_0$ で

$$a_j(x) - b_j(x) = \mathrm{c}_j(x)$$

となります.

$\Delta''$ に於て $a_j(x), b_j(x)$ を評価しましょう. $L_1, L_2$ は数個の曲線から成り立って居ますが, その端点は何れも $H$ の境界上にあります. それ故, $\Delta''$ の $x_1$ 平面上の成分と之等の点の集合との距離を $\rho'$ としますと, $\rho' > 0$ です. 又, $\mathrm{c}_j(x)$ は $E$ に於て正則有界です. $E$ の $x_1$ 平面上の成分の境界と $L_1 \cup L_2$ との距離を $\rho''$ としますと, $\rho''$ も $0$ ではありません. $\rho', \rho''$ の小さい方を $\rho$ とします.

然うしますと, $\Delta''\cap G_1$ の任意の点を $(x^0)$ としますと, $x_1^0$ から $L_1$ への距離が若し $\rho$ より小ならば, $L_1$ の円 $(C)$, $|x_1-x_1^0|<\rho$ 内の部分を, $x_1^0$ を通らない様に動かして, 円周 $C$ の一部分と一致せしめることに依て, 数値 $a_j(x^0)$ を変へないで, $x_1^0$ から $a_j(x)$ の新しい積分径路 $L_1'$ への距離が $\rho$ である様に出来ます. 此の変形に依て積分径路の長さがよし長くなったとしても, 其の差は $2\pi\rho$ を越えません. 故に $L_1, L_2$ の長い方のものの長さを $l$ としますと, $\Delta''\cap G_1$ に於て

$$|a_j(x)|<\frac{(l+2\pi\rho)K_1M}{2\pi\rho}=K_2M \quad (j=1,2,\cdots,q-1).$$

同様に,$\Delta''\cap G_2$ に於て

$$|b_j(x)|<K_2M.$$

之から次のことが容易に分かります (補助定理 2 の証明参照): (1), (2) を変形して, 夫々

$$\Phi=\alpha_1'F_1+\alpha_2'F_2+\cdots+\alpha_q'F_q,$$
$$\Phi=\beta_1'F_1+\beta_2'F_2+\cdots+\beta_q'F_q$$

とし,

$$\alpha_q'(x)=\beta_q'(x)$$

ならしめることが出来る. 此処に $\alpha_i'(x)$ $(i=1,2,\cdots,q)$ は $G$ に於て正則な函数, $\beta_i'(x)$ は $G_2$ に於て正則な函数であって, 夫々 $\Delta''\cap G_1$ 或は $\Delta''\cap G_2$ に於て

$$|\alpha_i'(x)|<K_3M, \quad |\beta_i'(x)|<K_3M,$$

$K_3$ は $\Phi(x)$ に無関係なある正数である.

$\Delta''$ は, $\Delta'\Subset\Delta''\Subset\Delta$ なる任意の有界筒状域ですから, 此の推理法を反覆することに依て, 始めに置いた仮定の下に, 命題は真であることが分ります. 故に定理 11 は成立します. 従って補助定理 7 も成立します.

<u>補助定理 8</u> — <u>補助定理 7 の幾何学的状勢に於て, $\Delta_1$ で正則有界な函数 $f_1(x)$ と $\Delta_2$ で正則有界な函数 $f_2(x)$ とが, $\Delta$ で正則な函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ に関し, $\Delta_0$ の各点で合同であったとする. 此の時, 若し $\Delta_0$ に於ける $(F)$ に関する問題 $\mathrm{I}_0$ が, $\Delta_0$ の完全内部に与へられた任意の有界筒状開集合に於て, 常に解けるならば, $\Delta_1$ に於て $|f_1(x)|<M, \Delta_2$ に於て $|f_2(x)|<M$ とすれば, $\Delta'$ に於て正則な函数 $\chi(x)$ を</u>

$$|\chi(x)|<KM$$

<u>となる様に求め, $\Delta_1$ 又は $\Delta_2$ の各点に於て, 夫々</u>

$$\chi(x)\equiv f_1(x) \qquad \underline{\text{又は}} \qquad \chi(x)\equiv f_2(x) \quad (\text{mod. } F)$$

<u>ならしめることが出来る. 此処に $K$ は $f_1(x), f_2(x)$ に無関係な正数である.</u>

証明　上に述べた筒状域 $G_1, G_2$ 及び $G, G_0$ を考へます. 仮定に依て, $\Delta_0$ に於ける $(F)$ に関する問題 $\mathrm{I}_0$ は $\Delta_0$ の完全内部に与へられた筒状開集合に於て常に解けます. 所で,

$$\psi(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

と置きますと, $\psi(x)$ は $\Delta_0$ で正則, $|\psi(x)| < 2M$ であって, 其の各点で $\psi(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ F)$ ですから, $E$ を, $G_0 \Subset E \Subset \Delta_0$ なる有界筒状開集合としますと, 正則函数 $\alpha_i(x)$ を, $E$ に於て

$$\psi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p,$$

$$|\alpha_i(x)| < K_1 M \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

となる様に, 見出すことが出来ます. 此処に $K_1$ は $\psi(x)$ に無関係な或る正数です. か様な $\alpha_i(x)$ に対し, 上に見ました様に, $G_1 \cap \Delta'$ で正則な函数 $a_i(x)$ と, $G_2 \cap \Delta'$ で正則な函数 $b_i(x)$ とを, 夫々$G_1 \cap \Delta'$, $G_2 \cap \Delta'$ で

$$|a_i(x)| < K_2 M, \quad |b_i(x)| < K_2 M \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

であって,

$$a_i(x) - b_i(x) = \alpha_i(x)$$

となる様に撰ぶことが出来ます. 此処に $K_2$ は $\alpha_i(x)$ に無関係なある正数です. 所求の函数 $\chi(x)$ の存在は之から直ぐに分かります (補助定理 3 の証明参照).

此の補助定理 8 と定理 11 とから, 慣用の推理法に依て, 容易に次の定理が得られます.

定理 12 — 問題 $\mathrm{II}_0$ は, 若し $\mathfrak{D}$ が筒状域であって, 且つ若し函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ が $\mathfrak{D}$ に於て性質 $(A)$, $(B)$ を持つならば, 必ず解ける.

10　定理 13 — 空間 $(x)$ の筒状域$\mathfrak{D}$ に於て正則な函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_p)$ を考へ, 固有集合体 $F_1 = F_2 = \cdots = F_p = 0$ の $\mathfrak{D}$ 内の部分を $\Sigma$ とする. $\Sigma$ を含む一つの開集合を $V$ とし, $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれる一つの有界筒状域を $\mathfrak{D}_0$ とする. 此の状勢に於て, $\Sigma$ が実在するものとして, $\varphi(x)$ を $V$ に於て正則有界な任意の函数とするとき, $V$ に於て $|\varphi(x)| < M$ とすれば, $\mathfrak{D}_0$ に於て正則な函数 $\Phi(x)$ を, $\mathfrak{D}_0 \cap V$ の各点で

$$\Phi(x) \equiv \varphi(x) \quad (\mathrm{mod.}\ F)$$

であって, $\mathfrak{D}_0$ で

$$|\Phi(x)| < KM$$

となる様に撰ぶことが出来る. ここに $K$ は $\varphi(x)$ に無関係な正数である.

証明　有界筒状域 $\mathfrak{D}'$ を, $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}' \Subset \mathfrak{D}$ となる様に撰び, 開集合,

$$(\Delta) \qquad x \in \mathfrak{D}', \quad |F_i(x)| < \rho \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

を考へます. 正数 $\rho$ を充分小さくとって, $\Delta \Subset V$ となる様にします. $y_j$ を複素変数とし, 空間 $(x, y)$ に固有集合体

$$y_i = F_i(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

を考へ, 筒状域

$$(C) \qquad (x) \in \mathfrak{D}', \quad |y_i| < \rho \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

内の部分を $S$ とします. 今,

$$G_i(x, y) = y_i - F_i(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

と置きますと, 函数系 $(G)$ は, 補助定理 1, 6 に依て, 筒状域 $(C)$ で性質 $(A), (B)$ を持ちます. $\varphi(x)$ は, $(x, y)$ の函数として考へますと, $S \Subset U$ なる, 或る $\varphi(x)$ に無関係な開集合 $U$ で正則であって, ここで $|\varphi| < M$ ですから, $\rho_0$ を $\rho_0 < \rho$ なる正数としますと, 定理 12 に依て,

$$(C_0) \qquad (x) \in \mathfrak{D}_0, \quad |y_i| < \rho_0 \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

で正則な函数 $\Psi(x, y)$ を, 此処で $|\Psi(x, y)| < KM$ であって, 特に $S$ 上の各点で $\Psi(x, y) \equiv \varphi(x) \pmod{G}$ となる様に撰ぶことが出来ます. 此処に $K$ は $\varphi(x)$ に無関係な正数です. これから

$$\Phi(x) = \Psi(x, 0)$$

を考へますと, $\Phi(x)$ は $\mathfrak{D}_0$ で正則であって, ここで $|\Phi(x)| < KM$ を充たし, 特に $\Sigma$ 上の各点で $\Phi(x) \equiv \varphi(x) \pmod{F}$ となります. か様に定理は成立します.

定理 14 — 定理 13 の状勢に於て, $\Phi(x)$ を $\mathfrak{D}$ に於て正則有界な函数とし, $\Sigma$ が実在する場合には, $V$ に於て正則有界な函数 $\alpha_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ が存在して, 恒等式

$$\Phi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p$$

を充たすものとする. ($\Sigma$ が空集合ならば, 条件は要らない.) 然るときは, $\mathfrak{D}$ 或は $V$ に於て, 夫々

$$|\Phi(x)| < M, \quad |\alpha_i(x)| < M$$

とすれば, 正則函数 $A_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ を, $\mathfrak{D}_0$ に於て

$$\Phi = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p, \quad |A_i(x)| < KM$$

<u>となる様に, 見出すことが出来る. 此処に $K$ は $\Phi(x)$ に無関係な正数である.</u>

<u>証明</u>　前定理の証明の一部を其儘使ひます. 但し, 此の度は $S$ は空集合かも知れませんが, 其の時は $\rho$ を充分小さくして, $\Delta$ も亦実在しない様にします.

先づ $S$ が実在する場合を考へます. $\alpha_i(x)$ は $(x, y)$ の函数と考へますと, $S \Subset U$ なる, 或る決まった開集合 $U$ で正則であって, ここで $|\alpha_i(x)| < M$ ですから, 空間 $(x)$ の有界筒状域 $\mathfrak{D}''$ 及び正数 $\rho'$ を, $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}'' \Subset \mathfrak{D}', \rho' < \rho$ となる様に撰び, 筒状域,

$$(C') \qquad (x) \in \mathfrak{D}'', \quad |y_i| < \rho' \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

を考へますと, 前定理に依て, 正則函数 $a_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ を $(C')$ に於て

$$|a_i(x, y)| < K_1 M$$

であって, $(C')$ 内の $\Sigma$ 上の各点で

$$a_i(x, y) \equiv \alpha_i(x) \pmod{G}$$

となる様に, 求めることが出来ます. 次に, $S$ が空集合ならば,

$$a_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

ととります. か様にして,

$$\Psi(x, y) = \Phi(x) - (a_1 F_1 + a_2 F_2 + \cdots + a_p F_p)$$

を考へますと, $\Psi(x, y)$ は $(C')$ で正則であって, 此処で

$$|\Psi(x, y)| < K_2 M,$$

$K_2$ は $\Phi(x)$ に無関係なある正数, の形の上界を持ち, 若し $\Sigma$ が実在すれば, $(C')$ 内の $\Sigma$ 上の各点で

$$\Psi(x, y) \equiv 0 \pmod{G}$$

です.

正数 $\rho_0$ を $\rho_0 < \rho'$ となる様に撰び, 筒状域,

$$(C_0) \qquad (x) \in \mathfrak{D}_0, \quad |y_i| < \rho_0 \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

を考へます. 函数系 $(G_1, G_2, \cdots, G_p)$ は筒状域 $(C')$ で性質 $(A), (B)$ を持ちますから, 定理 11 に依て, 正則函数 $B_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$ を $(C_0)$ で

$$\Psi = B_1 G_1 + B_2 G_2 + \cdots + B_p G_p, \quad |B_i(x, y)| < K_3 M,$$

$K_3$ は $\Phi(x)$ に無関係な或る正数, となる様に見出すことが出来ます. 今,

$$A_i(x) = a_i(x, 0) - B_i(x, 0) \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

と置きますと, $A_i(x)$ は $\mathfrak{D}_0$ で正則であって, ここで

$$|A_i(x)| < (K_1 + K_3)M = KM,$$

$$\Phi = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p$$

となります. か様に定理は成立します.

問題 I, II に就ては, 単に補助問題として見ましても, 研究すべきことが色々残されて居る様に思ひますが, 他日に譲ります.

(第七報告終り. 3. 9. 4)