多変数解析函数に就て

VIII — 分岐点を持たない有限領域に対する第一基礎的補助定理

第一次研究 (第一乃至第六報告) の結果を, 先づ分岐点を持たない有限領域へ拡張します. 此の論文では, 第一報告の定理 II の拡張及び補足に就て述べます.

1 — ≪此の論文に現はれる領域もすべて単葉有限です. 故に, 引き続き此の条件は, 一般には明示しません.≫

凸性に就て, 用語を説明します[1]. n 複素変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の空間に, 開集合 $\mathfrak{D}$ と $\mathfrak{D}$ に於て正則な函数からなる一つの函数族 $(\mathfrak{F})$ とを考へます.

$\mathfrak{D}$ が $(\mathfrak{F})$ に関して凸状であると云ひますと, それは, $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$ なる任意の有界開集合 $\mathfrak{D}_0$ に対し, $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}' \Subset \mathfrak{D}$ なる有界開集合 $\mathfrak{D}'$ が対応し, $\mathfrak{D}'$ に属しない $\mathfrak{D}$ の任意の点 P に対し, $(\mathfrak{F})$ に属する少くとも一つの函数 $f(x)$ が対応し,

$$|f(P)| > \max |f(\mathfrak{D}_0)|$$

となると云ふ意味です.

E を空間 (x) に於ける有界点集合とし, $(\mathfrak{F})$ を E の近傍に於て正則な函数からなる一つの函数族とします. E の如何程でも近くに, $E \Subset \mathfrak{D}$ であって, $\mathfrak{D}$ に於て正則な $(\mathfrak{F})$ の部分族 $(\mathfrak{F}')$ に関して凸状である様な開集合 $\mathfrak{D}$ を見出し得るとき, E は $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状 (extérieurement convexe) であると呼びましょう[2].

先づ第二報告の定理 I を拡張します. 将来の研究に備へて, 此の論文が必要とする程度を超えて拡張して置かうと思ひます[3]. 第二報告の第一節に於て, 次の定理と補助定理とを証明しました. 此の度も此処から出発します.

E を空間 (x) に於ける有界点集合とすれば, E を含み, (x) の有理整函数に関して外的凸状である様な閉集合中には, 最小のものが存在する.

補助定理 — E を空間 (x) に於ける有界点集合とし, H を E を含み, (x) の有理整函数に関して外的凸状である様な, 最小の閉集合とし, (Σ_t) を次の

[1] 多変数解析函数論に於ては色々な凸性が考へられて居ます. 夫等については次の論文参照: H. Behnke–K. Stein, Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, 1940, (Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg).

[2] 第二報告の之に相当するものと比較して, E は必ずしも閉集合でなくてもよい点に注意.

[3] 此の論文が必要とする拡張に対してならば, H. Behnke, K. Stein が前掲の論文及び下記の諸論文で繰り返し指摘して居ます様に, 原の証明法を殆んど其の儘使用することが出来ます. 然し, 単に簡単さの点から云っても, 本文のものの方が遙かに簡単です.

H. Behnke–K. Stein: Approximation analytischer Funktionen in vorgegebenen Bereichen des Raumes von n komplexen Veränderlichen, 1939, (Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen).

H. Behnke–K. Stein: Die Sätze von Weierstrass und Mittag–Leffler auf Riemannschen Flächen, 1940, (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich).

形の, t を助変数とする固有面族とする:

$$(\Sigma_t) \qquad f(x,t)=0, \quad (x)\in U, \quad 0\leq t\leq 1,$$

此処に U は空間 (x) の領域, $f(x,t)$ は空間 (x,t) の点集合 $(x)\in U$, $0\leq t \leq 1$ の近傍で定義せられた正則函数であって, $0\leq t\leq 1$ の任意の決った t に対して $f(x,t)$ が恒等的に 0 とならない様なものである. 然るときは, 之等の間に次の三つの関係が同時に成立することはあり得ない:

1°. 此の族の任意の固有面 Σ_t に就て, 其の境点が H を含むある決まった開集合 V 内に存在しないこと.

2°. どの固有面 Σ_t も E の点及び其の集積点を通らないこと.

3°. 固有面 Σ_0 は H を通り, Σ_1 は V 内に入って来ないこと.[4]

空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ に固有集合体 Σ を考へ, 次の様に被覆的に表現し得られるものとします: $\mathfrak{D}$ の任意の一点 P に対し, 此の点を中心とする多円筒 (γ) と (γ) に於て正則な函数系 $(f_1,f_2,\cdots,f_p)$ とが対応して, 之等の函数の共通零点の集合と (γ) 内に於ける Σ の部分とが一致し, $(\gamma_1),(\gamma_2)$ を共通部分 (δ) を持つ様な任意の一対の (γ) とし, 之等に応ずる函数系を夫々 $(f_1,f_2,\cdots,f_p),(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_q)$ とすれば, (f) と (φ) とは (δ) に於てイデアル基として同等である. 此の時 Σ を $\mathfrak{D}$ に於て 被覆可能 であると呼びましょう.

定理 1 — 空間 (x) の単葉有限筒状域 (X) に於て被覆可能な固有集合体を Σ とする. (X) に於ける正則函数の全体を $(\mathfrak{F})$ とし, (X^0) を (X) に含まれ, $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状な, 単葉有界閉筒状域とすれば, Σ の (X^0) 上の部分, Σ_0 は $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状である.

証明　先づ筒状域 (X) が単連結の場合を証明します. 此のときは, 閉筒状域 (X^0) は有理整函数に関して外的凸状です. 有界筒状域 $(X'),(X'')$ を, $(X^0)\Subset(X'')\Subset(X')\Subset(X)$ となる様に描きます. (X') と其の境界とからなる閉筒状域を $(\overline{X'})$ とします. Borel-Lebesgue の補助定理に依て, $(\overline{X'})$ を多円筒 (γ) の有限個に依て被覆することが出来ます. それ故, 次の仮定を置いても支差ありません. :

1°. $(\overline{X'})$ の任意の点 P に対応する (γ) の半径はある正の常数 r_0 より小さくないこと.

2°. 上述の (δ) に於て,

$$\varphi_i=\alpha_{i1}f_1+\alpha_{i2}f_2+\cdots+\alpha_{ip}f_p, \quad f_j=\beta_{j1}\varphi_1+\beta_{j2}\varphi_2+\cdots+\beta_{jq}\varphi_q,$$

$(i=1,2,\cdots,q;\ j=1,2,\cdots,p)$, ここに $\alpha_{ij}(x),\beta_{ji}(x)$ は (δ) に於ける正則函数, とすれば, 1 より小さくない実常数 M が存在して, (δ) で

$$p\,|\alpha_{ij}(x)|\leq M, \quad q\,|\beta_{ji}(x)|\leq M \quad (i=1,2,\cdots,q;\ j=1,2,\cdots,p)$$

[4]第四報告の終りの正誤参照.

となること.

各 (γ) に於て

$$h(x) = \max[|f_1(x)|, |f_2(x)|, \cdots, |f_p(x)|]$$

を考へます. 上の $(\gamma_1), (\gamma_2)$ に対応する $h(x)$ を夫々$h_1(x), h_2(x)$ としますと, (δ) に於て, 2° に依て明らかに次の様になります:

$$h_1(x) \leq M h_2(x), \quad h_2(x) \leq M h_1(x).$$

z を複素変数とし, $z = x + iy$, i は虚単位, とします. z 平面上に正方形 R を, 其の四辺が実軸又は虚軸に平行になる様に描きます. 但し, 正方形と云へば開集合を意味します. R を充分大きくとって, (X') を $x_i \in X'_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の形とするとき, 平面上の領域 X'_i がすべて R に含まれる様にします. 次に, R の平行な辺の各対の間に, それ等に平行で且つ等間隔な $(m-1)$ 個の直線を引き, R を m^2 個の小正方形に分ち, 其の任意の一つを α で表はします. 各 α の位置を明示したい場合には, それが左から数へて p 番目, 下から数へて q 番目の小正方形ならば, $\alpha_{p,q}$ を以て表はすことにします. α, $\alpha_{p,q}$ が平面 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 上にあることを示すには、記号 $\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)}_{p,q}$ を用ひます。$\alpha^{(i)}_{p,q}$, 及び之と少くとも一境点を共有する 8 個の小正方形, 及びそれ等の共通境界の和なる正方形を $\beta^{(i)}_{p,q}$ を以て表はします. 又筒状域 $x_i \in \alpha^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を (α) を以て表はします. (β) に就ても同様です.

正方形 α の一辺の長さを ρ とします. ρ を充分小さくとって, 次の三つの条件が充たされる様にします:

1°. 各 (β) の中心を中心とし, r_0 を半徑とする多円筒内に, 此の (β) 及び其の境界が含まれること.

2°. (X'') の点を含む (β) はすべて完全であって, (つまり R が小さ過ぎる為, 不完全となることなり,) (X') に含まれること.

3°. (X^0) の点を含む (β) 及び其の境界はすべて (X'') に含まれること.

中心 P が $(\overline{X'})$ に含まれる様な任意の (α) に対し, P に応ずる函数系 $(f_1, f_2, \cdots, f_p)$ 及び $h(x)$ を対応せしめます. 之等の函数は, 此の (α) に対応する (β) の近傍で矢張り定義せられて居ます.

$(\alpha)_1, (\alpha)_2$ を, 其の中心が何れも $(\overline{X'})$ に属する様な一対の (α) とし, n 個の成分 $\alpha^{(i)}$ の中 $n-1$ 個までを共有し, 残りの一対の成分は一辺を共有すると考へ, 之等に対応する $h(x)$ を夫々$h_1(x), h_2(x)$ とします. $(\alpha)_1, (\alpha)_2$ の相等しくない成分を, 例へば, 夫々

$$\alpha^{(k)}_{p,q}, \quad \alpha^{(k)}_{p+1,q}$$

としましょう. 然うしますと, x_k 平面上の之等の正方形の共通辺は

$$\xi_k = c \quad (x_k = \xi_k + i\eta_k),$$

i は虚単位, c は実数, なる形の直線上にあります. 正数 N を,

$$e^{N\frac{\rho}{2}} \geq M$$

となる様に撰び,

$$h'_2(x) = h_2(x)|e^{N(x_k - c)}|$$

を作ります. $(\alpha)_1, (\alpha)_2$ に応じる (β) を夫々$(\beta)_1, (\beta)_2$ としますとき, $(\beta)_1 \cap (\beta)_2$ の近傍に於て, x_k が正方形 $\alpha^{(k)}_{p,q}$ の左辺又は其の延長上にあるならば,

$$h'_2(x)\, e^{N\frac{\rho}{2}} \leq h_1(x)$$

となり, x_k が $\alpha^{(k)}_{p+1,q}$ の右辺又は其の延長上にあるならば,

$$h_1(x)\, e^{N\frac{\rho}{2}} \leq h'_2(x)$$

となります.

z 平面上の正方形 R の左辺及び下辺が夫々

$$x = a, \quad y = b$$

上にあるとして, $\alpha^{(k)}_{p,q}$ に実数値函数

$$A_k(x_k) = \exp\left(N \sum_{\lambda=1}^{p-1} (\xi_k - a - \lambda\rho) + N \sum_{\mu=1}^{q-1} (\eta_k - b - \mu\rho) \right)$$

$(x_k = \xi_k + i\eta_k)$ を付随せしめます. 次に, 其の中心が $(\overline{X'})$ に属する様な (α) に, 実数値函数

$$H(x) = h(x) \prod_{k=1}^{n} A_k(x_k)$$

を付随せしめます. 此処に $h(x)$ は (α) に付随するものであって, A_k は (α) の成分 $\alpha^{(k)}$ に付随するものです. 此の $H(x)$ は此の (α) に対応する (β) の近傍で, 矢張り定義せられて居ます.

(X'') の任意の点を (x) とします. (x) を含む (β) は (X') に含まれます. 従って, 之に対応する H (詳しく云ひますと, 此の (β) に応ずる (α) に付随する H) が存在し, 此の (β) の近傍で定義せられて居ます. 点 (x) を含む (β) を総てとり, それ等に対応する H の全体に汎って,

$$K(x) = \max[H(x)]$$

を考へます. か様にして, (X'') で定義せられた函数 $K(x)$ は上に見ましたことから, 連続函数であることが分かります. (X^0) の点を含む様な任意の (β) を $(\beta)_0$ とし之に対応する H を H_0 としますと, $(\beta)_0$ 及び其の境界は (X'') に含まれますから, $H_0(x)$ 及び $K(x)$ は $(\beta)_0$ の近傍で存在します. その間には次の関係があります: $(\beta)_0$ の任意の境点 (x') に対し

$$K(x') \geq H_0(x')e^{N\frac{\rho}{2}}.$$

扨て, 我々は次のことを云はうと云ふのでした: Σ_0 は有理整函数に関して外的凸状である. Σ_0 を含み, 有理整函数に関して外的凸状である様な, 最小の閉集合を S とします. (X^0) は有理整函数に関して外的凸状な閉集合ですから, S は (X^0) に含まれます.

S が Σ_0 に属しない点を持つと仮定しましょう. 此の仮定が矛盾に終ればよろしい. 今,

$$\max K(S) = c$$

としますと, 仮定から,

$$c > 0$$

となります. S 上に $K(x)$ が c となる様な点がある筈です. 其の一つを (x^0) としましょう. $K(x)$ の構造から, 次のことが容易に分かります: 点 (x^0) に対して, (x^0) を含む様な一つの (β), 之を $(\beta)_0$ とします, 及び $(\beta)_0$ の近傍で正則な函数 $F(x)$ が対応し, $F(x)$ は (x^0) 及び $(\beta)_0$ で夫々

$$|F(x^0)| = c, \quad |F(x)| \leq K(x)$$

であって, $(\beta)_0$ の任意の境点 (x') で

$$|F(x')|\, e^{N\frac{\rho}{2}} \leq K(x')$$

となる.

此の $F(x)$ が常数でないことを証明します. $F(x)$ が常数であると仮定しますと, $|F(x)| = c$ でなければなりません. 然うしますと, $(\beta)_0$ の境界上で

$$ce^{N\frac{\rho}{2}} \leq K(x')$$

となりますから, $(\beta)_0$ の境界上に S の点はありません. (x^0) は S の点ですから, S の最小性から, それならば, $(\beta)_0$ は Σ_0 の点を含まなければなりません. 所で, Σ_0 の点に対しては $F(x) = 0$ ですから, 之は矛盾です. 故に $F(x)$ は常数ではありません.

実数 θ を,

$$F(x^0) = ce^{i\theta},$$

i は虚単位, となる様に撰び, t を助変数とする, 次の固有面族を考へます:

$$\Phi(x,t) = F(x) - (c+t)e^{i\theta} = 0,$$

$$(x) \in (\beta)_0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

此の固有面族に就て, 上述の補助定理に挙げた諸条件を調べましょう. 先づ, $\Phi(x,t)$ は空間 (x,t) の点集合 $(x) \in (\beta)_0$, $0 \leq t \leq 1$ の近傍で正則な函数であって, $F(x)$ は常数ではありませんから, $0 \leq t \leq 1$ の任意の決まった t の値に対し, $\Phi(x,t)$ が恒等的に 0 となることはありません. 次に,

1°. t を $0 \leq t \leq 1$ の任意の決った値とし, 固有面 $\Phi(x,t)=0$ の任意の境点を (x') としますと, 此の固有面上で

$$|F| = c + t \geq c$$

ですから,

$$ce^{N\frac{\varrho}{2}} \leq K(x')$$

となります. 故に, (x') は S を其の完全内部に含む, 或る決った開集合内に存在しません.

2°. 上述の固有面上で

$$K(x) \geq c > 0$$

ですから, 此の族のどの固有面も Σ_0 の点及び其の集積点を通りません.

3°. $t=0$ に対し, $\Phi(x,0)=0$ は S の点 (x^0) を通ります. $t=1$ に対しては,

$$\Phi(x,1) = F(x) - (c+1)e^{i\theta} = 0$$

は, 其の上で

$$c + 1 \leq K(x)$$

ですから, S を含む或る決った開集合内に入ってきません.

か様に矛盾が起こります. 故に, 筒状域 (X) が単連結である場合には, 命題は眞です.

次に, 一般の場合を考へましょう. 仮定に依て, (X^0) は函数族 $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状ですから, (X') を $(X^0) \Subset (X') \Subset (X)$ なる有界筒状域とし, (X') 内に閉集合,

$$(\Delta) \qquad |x_i| \leq r, \quad |\varphi_j(x)| \leq 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n;\, j = 1, 2, \cdots, \nu),$$

此処に r は (充分大きな) 正の常数, $\varphi_j(x)$ は $(\mathfrak{F})$ に属する函数, を Δ が (X^0) の各点を内点として持つ様に, かつ Δ が (X^0) の如何程でも近くにある様に, 描くことが出来ます.

複素変数 $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ を導入し, 空間 (x,y) に閉多円筒 $(\overline{C})$, $|x_i| \leq r$, $|y_j| \leq 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n;\, j = 1, 2, \cdots, \nu)$ と固有集合体

$$(x) \in \Sigma, \quad y_j = \varphi_j(x) \quad (j = 1, 2, \cdots, \nu)$$

とを考へ, 此の固有集合体の $(\overline{C})$ 上の部分を Γ とします. $(\overline{C})$ は閉多円筒であって, Γ 及び其の解析的延長は $(\overline{C})$ の近傍で被覆可能ですから, 上に見ました様に, Γ は (x,y) の有理整函数に関して外的凸状です.

Γ はか様な凸性を持って居ますから, Σ の Δ 上の部分は $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状です. Δ は (X^0) の如何程でも近くにとれるのですから, Σ_0 についても同様です. か様に定理は成立します.

2 — 空間 (x) に筒状域 (X) を考へ, (X) に於ける正則函数の総てからなる函数族を $(\mathfrak{F})$ とします. Δ を (X) に含まれる, $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状である様な, 連結 (連続) 閉集合とします. 函数値の平面上に, 両翼が無制限に延びて居る様な, 重複点を持たない連続曲線 L を考へます. L は平面を二つの部分に分ちます. 其の一つと L との和を Y_0 とします. $\psi(x)$ を $(\mathfrak{F})$ の一つの函数とし, Δ と $\psi(x) \in Y_0$ との共通部分を $\Delta_0, \psi(x) \in L$ の Δ 上の部分 $= S$ とします.

此の幾何学的状勢に於て, 次の二つの補助定理があります.

補助定理 1 — $f(x)$ を Δ_0 の近傍で正則であって, S の近傍で 0 とならない様な函数とすれば, Δ の近傍で正則な函数 $F(x)$ を, Δ_0 の近傍で $F(x) = \lambda(x)f(x)$, $\lambda(x)$ は Δ_0 の近傍で 0 とならない様な正則函数, となる様に見出すことが出来る.

証明　S は明らかに $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状です. 故に, S の近傍に於て $f(x)$ を, 斉一収斂する様な, $(\mathfrak{F})$ の函数の級数に展開することが出来ます[5].

従って, ε を与へられた正数とするとき, $(\mathfrak{F})$ に属する函数 $g(x)$ を求め,

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

が S の近傍で成立する様に出来ます. $f(x)$ は S の近傍で 0 になりませんから, ε を充分小さく撰び, S の近傍で,

$$g(x) = \mu(x)f(x)$$

とすれば,

$$|\mu(x) - 1| < \frac{1}{2}$$

となる様に出来ます. 然うしますと, $\log\mu(x)$ の各分枝は S の近傍で一価函数です. 其の決った一つをとり, 同じ記号で表はします.

第七報告の補助定理 5 に依て, Δ_0 の Δ に関する補集合を Δ' としますと, Δ_0 の近傍で正則な函数 $h_1(x)$ と, Δ' の近傍で正則な函数 $h_2(x)$ とを, S 及び其の延長である様な $\psi(x) \in L$ 上で,

$$h_1(x) - h_2(x) = \log\mu(x)$$

となる様に見出すことが出来ます. Δ_0 の近傍及び Δ' の近傍で, 夫々

$$F_1(x) = e^{h_1(x)}f(x), \quad F_2(x) = e^{h_2(x)}g(x)$$

を考へますと, この $F_1(x), F_2(x)$ は, 同じ一つの函数 $F(x)$ の部分であることが, 直ぐに分ります. この $F(x)$ は Δ_0 の近傍で, 上述 $F = \lambda f$ の形ですから, 所求の函数です.

[5] 之は第七報告の定理 4 (又は補助定理 1 と定理 2 と) の直接の結果です. 第一報告の第四節参照. 定理としては, 第二報告の第五節参照.

補助定理 2 — $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x)$ を Δ_0 の近傍で正則な函数とし, 之等の函数の共通零点の集合の Δ_0 に属する部分に就て, 其の任意個 (有限又は無限) の連結成分の和なる閉集合を Σ_0 とする. 若し Σ_0 が S 上に点を持たないならば, Δ の近傍で正則な函数 $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_p(x)$ を Σ_0 の近傍の各点で, 始めの函数系 (f) とイデアル基として同等である様に撰ぶことが出来る.

証明　函数系 (f) の共通零点の集合について, Δ_0 に属し Σ_0 に属しない部分を Σ' とします. 先づ, Δ_0 の近傍で正則であって, Σ_0 の近傍の各点で (f) に関して 0 と合同であり, Σ' の近傍の各点で 1 と合同である様な函数, $f_{p+1}(x)$ を求めようと云ふのですが, 之は第七報告で述べた問題 II ですから, 定理 7 に依て, $f_{p+1}(x)$ は存在します.

次に, 和 $S \cup \Sigma_0$ が, Δ_0 の或る決った近傍に於ける正則函数の全体に関して, 外的凸状であることを見ましょう. (X) 内に領域 V を, Δ_0 を含む様に, Δ_0 の充分近くに描きますと, $f_j(x)$ $(j = 1, 2, \cdots, p+1)$ は何れも V に於て正則であって, S 及び Δ_0 は何れも V に於ける正則函数に関して外的凸状です.

所で, 一般に, 空間 (x) に領域 $\mathfrak{D}$ を考へ, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ に含まれる, $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体に関して外的凸状な閉集合とし, $g(x), h(x)$ を $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数としましたとき, 条件

$$|g(x)| \leq 1$$

を充たす $\mathfrak{D}_0$ の点の集合を A とし, 固有面

$$h(x) = 0$$

の $\mathfrak{D}_0$ に属する部分を σ としますと, 和 $A \cup \sigma$ は $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数に関して外的凸状です. 此のことは, 正の整数 N を充分大きく撰び, 正数 ε を充分小さくとって, $\mathfrak{D}_0$ 上に, 条件

$$|g^N(x)h(x)| \leq 1 + \varepsilon$$

を充たす点集合を考へることに依て, 容易に分ります.

V に於ける正則函数に関して外的凸状な二つの集合の共通部分は, 同じ凸性を持ちますから, 上述のことは, 此のことから容易に確かめられます.

Δ_0 は $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状であって, 従って Δ_0 の近傍に於ける正則函数は何れも $(\mathfrak{F})$ の函数の極限ですから, $S \cup \Sigma_0$ は $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状です.

次に, S の近傍に $f_j(x)$ $(j = 1, 2, \cdots, p+1)$ の共通零点はありませんから, 第七報告の定理 7 に依て,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_{p+1} f_{p+1} = 1$$

となる様な正則函数 $\lambda_j(x)$ を, S の近傍に於て求めることが出来ます.

上に見た所から, ε を任意の正数とするとき, $(\mathfrak{F})$ の函数 $\alpha_i(x), \beta_j(x)$ $(i=1,2,\cdots,p;\ j=1,2,\cdots,p+1)$ を求め, S の近傍に於ては

$$|\alpha_i(x)-\lambda_i(x)|<\varepsilon, \quad |\beta_j(x)-\lambda_j(x)|<\varepsilon$$

となり, Σ_0 の近傍では

$$|\alpha_i(x)-1|<\varepsilon, \quad |\beta_j(x)|<\varepsilon$$

となる様にすることが出来ます. $f_{p+1}(x)$ は Σ_0 の近傍の任意の点 P に於て

$$f_{p+1}=\mu_1 f_1+\mu_2 f_2+\cdots+\mu_p f_p,$$

$\mu_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,p)$ は P の近傍に於ける正則函数, の形ですから, Δ_0 の近傍に於て正則な函数,

$$\Phi_i=\beta_1 f_1+\cdots+\beta_{i-1}f_{i-1}+\alpha_i f_i+\beta_{i+1}f_{i+1}+\cdots+\beta_{p+1}f_{p+1} \quad (i=1,2,\cdots,p)$$

を作り, 上述の $\varepsilon>0$ を充分小さくしますと, S 上に於ては $\Phi_i(x)$ は何れも 0 となることなく, Σ_0 の近傍に於ては函数系 (Φ) は始めの函数系 (f) とイデアル基として, 其の各点で同等となります. これから, 補助定理 1 に依て, 補助定理 2 は直ぐに出ます.

3. 定理 2 — 空間 (x) に単葉有界閉筒状域 $(\overline{X})$ と, $(\overline{X})$ の近傍で定義せられた固有集合体とを考へ, その $(\overline{X})$ 上の部分を Σ とする. 此の固有集合体は, 単葉集合 Σ の近傍に於ける正則函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x)$ の共通零点の集合として表はされて居るとする. 然るときは, $(\overline{X})$ の近傍に於て正則函数 $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_{p+1}(x)$ を, 其の共通零点の集合の $(\overline{X})$ 上の部分が丁度 Σ であって, 更に Σ の近傍の各点に於て函数系 (F) が函数系 (f) とイデアル基として同等である様に, 求めることが出来る.

証明　$(\overline{X})$ の x_i 平面上の成分を $\overline{X}_i$ $(i=1,2,\cdots,p)$ とします. $\overline{X}_i$ は閉多辺形領域であると考へて支差ありません. 然うしますと, 定理 1 に依て, Σ は $(\overline{X})$ の或る決った近傍に於ける正則函数の全体, $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状です.

複素変数 y の平面上に閉領域 $\overline{C}$, $|y|\leq 1$ と, 原点からの距離が 1 である様な直線 L とを描き, L によって分たれる y 平面の二つの部分の中, 原点を含むものと, L との和を Y としますと, $\overline{C}$ はすべての Y の共通部分です. Σ は $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状ですから, 此のことから容易に次のことが分ります.

$\varphi_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,\nu)$ を $(\mathfrak{F})$ に属する函数とし, 函数値の平面上に, 原点を通らない直線 L_j を描き, L_j に依て分たれる平面の二つの部分の中, 原点を含む方と, L_j との和を Y_j とし, 点集合

$$(\Delta) \qquad (x)\in(\overline{X}), \quad \varphi_j(x)\in Y_j \quad (j=1,2,\cdots,\nu)$$

を作ります. ν を充分大きくし, $\varphi_j(x)$ 及び Y_j を適当に撰びますと, Δ は次の諸条件を充たします: Δ は Σ を含むこと. V を $\Sigma\subset V$ なる与へられた開

集合とすれば, Δ は V に含まれること. 及び, j を $1, 2, \cdots, \nu$ の任意の一つとするとき, $\varphi_j(x) \in L_j$ 上に Σ の点がないこと.

$f_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ は Σ の近傍で正則です. 上述の V を, 之等の函数がすべて V で正則となる様に撰びます. 次に, q を $0, 1, \cdots, \nu$ の任意の一つとして, 次の様な点集合を考へます:

$$(\Delta_q) \qquad (x) \in (\overline{X}), \quad \varphi_j(x) \in Y_j \quad (j = 1, 2, \cdots, q).$$

特に,

$$\Delta_0 = (\overline{X}), \quad \Delta_\nu = \Delta$$

です.

Δ_q の近傍に於て, 正則函数系 $(F_1^{(q)}, F_2^{(q)}, \cdots, F_p^{(q)})$ を, Σ の近傍の各点で函数系 (f) とイデアル基として同等である様に撰ばうと思ひます. $\Delta_{\nu-1}$ に対しては, (f) は Δ_ν の近傍で正則であって, $\varphi_j(x) \in L_j$ 上に Σ の点はありません $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$. 故に, 補助定理 2 に依て, $(F^{(\nu-1)})$ を求めることが出来ます. 同様にして, 順次に, $(F^{(\nu-2)}), (F^{(\nu-3)}), \cdots, (F^{(0)})$ を求めることが出来ます. $F_i^{(0)}(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ は何れも $(\overline{X})$ の近傍で正則です. 之を $F_i(x)$ と記します.

次に, 上に補助定理 2 の証明で見ました様に, 第七報告の定理 4 に依て, $(\overline{X})$ の近傍で正則な函数 $F_{p+1}(x)$ を, 函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_{p+1})$ の共通零点の集合の $(\overline{X})$ 上の部分が丁度 Σ であって, Σ の近傍の各点に於て, $F_{p+1}(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, F_1, F_2, \cdots, F_p)$ となる様に, 求めることが出来ます. か様にして得た函数系 $(F_1, F_2, \cdots, F_{p+1})$ は明らかに所求のものです.

此の定理 2 と, 第七報告の定理 13 とから, 直ちに次の結果が得られます.

基礎的補助定理 I — 空間 (x) の単葉有限筒状域 (X) に固有集合体 Σ を考へ, Σ を含み (X) に含まれる一つの単葉開集合を V とし, Σ は V に於ける正則函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x)$ の共通零点の集合として与へられて居ると考へる. (X^0) を $(X^0) \Subset (X)$ なる単葉有界筒状域とし, Σ の (X^0) 内の部分を Σ_0 とする. 然るときは, $\varphi(x)$ を V に於て正則有界な任意の函数とするとき, V に於て $|\varphi(x)| < M$ とすれば, (X^0) に於て正則な函数 $\Phi(x)$ を, Σ_0 の各点で

$$\Phi(x) \equiv \varphi(x) \quad (\mathrm{mod.}\, f_1, f_2, \cdots, f_p)$$

であって, (X^0) で

$$|\Phi(x)| < KM$$

を充たす様に, 見出すことが出来る. ここに K は $\varphi(x)$ に無関係な正数である.

此の定理は早晩更に拡張しなければなりません. 然し, 分岐点を持たない様な有限領域に関する我々の研究に対しては, 之で充分です.

(第八報告終り. 3. 9. 5)