多変数解析函数に就て

IX — 擬凸状函数

岡　潔

第六報告の第三章に於て, 二複素変数の擬凸状函数に就て述べました. それを n 複素変数の場合に拡張して, 将来の研究に備へます.

$\ll$ 此の論文及び之に続く諸論文に於ては, 暫く分岐点を内点として持たない様な有限領域のみに就て考察します. それ故, 領域に関する此の条件は明示しません.$\gg$

1 — n 複素変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の描く有限空間を考へ, (x) に依て表し, (x) 上に, 上述の制限内に於て最も一般な領域を考へます. 領域を構成する経緯は屡々引用した H. Behnke, P. Thullen の著書 に譲ります[1]. 用語記号等も大体之に準拠し, 然うでない場合には明示します. 二三の概念を説明しませう.

$\mathfrak{D}$ を空間 (x) の領域とします. (x) 上に点を定義したと全く同様にして, $\ll$ $\mathfrak{D}$ 上に点を定義する こと $\gg$ が出来ます.

E を $\mathfrak{D}$ 上で定義せられた点の集合とします. E の相異なる点が決して $\mathfrak{D}$ 上の同じ位置を占めない時, E を $\mathfrak{D}$ の $\ll$部分集合$\gg$, 又は E は $\mathfrak{D}$ 上に於て単葉 であると呼びませう. 但し, 前者は E が $\mathfrak{D}$ 上に於て定義せられた点の集合であることを明確に併せ意味し, 後者は必ずしも然うではありません. 又 単に単葉 と云へば, 空間 (x) 上に於て単葉と云ふ意味に解することにします. E が $\mathfrak{D}$ の部分集合であることを, 記号 $E \subset \mathfrak{D}$ を以て表します[2].

$\mathfrak{D}$ 上で定義せられた点集合 E が有界であって, E の点 (に対応する $\mathfrak{D}$ の点) の $\mathfrak{D}$ に関する境界距離 (Randdistanz) の下端 ρ が 0 でなければ, E は $\ll$ $\mathfrak{D}$ に関して有界$\gg$ な部分集合であると呼びませう.

我々は, $\mathfrak{D}, E$ が単葉である場合の概念 $E \Subset \mathfrak{D}$ (E が $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれること) の代りに, 主として此の $\ll$ $\mathfrak{D}$ に関して有界な $\mathfrak{D}$ の部分集合 E $\gg$ と云ふ概念を使ひます[3] .

---

[1]特に其の第一章 §1, 2, 3 参照.

[2]此の記号に就ては下記論文 (Vorbemerkungen, 37 頁) 参照：H. Behnke–K. Stein, Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, 1940, (Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg).

[3]$\mathcal{D}, \mathcal{D}_0$ を (x) の領域, $\mathcal{D}_0$ を有界とし, $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ とします. 若し $\mathcal{D}$ が単葉ならば, 次の三つの性質は同等であって, 其の一つに対し, 他の二つは常に随伴します：　1°　$\mathcal{D}_0$ の無限点列は $\mathcal{D}$ に少くとも一つの集積点を持つこと,　2°　$\mathcal{D}_0$ が $\mathcal{D}$ に関して有界であること,　3°　$\mathcal{D}_0$ の界点が常に $\mathcal{D}$ 内にあること. 然し此のことは無限葉領域に対しては最早や成立せず, 単葉の時の $\mathcal{D}_0 \subset\subset \mathcal{D}$ なる概念は三つに分れます. 一般の領域に対しては, 性質 1° は常に 2° を伴ひますが, 逆は云へません. 又性質 2° は必ず 3° を伴ひますが, 逆は成り立ちません. 第一の反例は Behnke,Thullen の著書の 10 頁に出て居ます. 第二の反例を挙げませう. z を複素変数とし, $\log z$ に附随する Riemann 面上の点に就て, 其の座標が $0 < |z| < 3$ を充たす様なものの集合を $\mathcal{D}$ とし, 其の極座標を (r, θ) とする時,

$$\theta \leq 0 \quad \text{ならば} \quad 1 < r < 2,$$

上述の ρ を, E が有界であると否とに拘らず, E が領域である場合と同様に, E の $\mathfrak{D}$ に関する最短距離(Minimaldistanz) と呼びませう. 領域 $\mathfrak{D}$ に関する境界距離が ρ より大きい様な $\mathfrak{D}$ の点の総てからなる ($\mathfrak{D}$ の部分) 集合を, 記号 $\mathfrak{D}^{(\rho)}$ を以て表します.

更に, 上述の用語及び記号を拡張して, $\mathfrak{D}$ が数個 (有限又は無限) の, 其の任意の二つが共通点を持たない様な, 領域の和である場合にも及ぼすことにしませう. このことについて不明瞭な点はありませんから, 説明を繰返しません. 例へば, $\mathfrak{D}$ を領域, E を有界集合としましたとき, $E \subset \mathfrak{D}^{(\rho)} \quad (\rho > 0)$ ならば, E は $\mathfrak{D}$ に関して有界な $\mathfrak{D}$ の部分集合です (及び逆).

$\mathfrak{D}$ を, 其の任意の二つが共通点を持たない様な領域の和とし, E を $\mathfrak{D}$ に関して有界な $\mathfrak{D}$ の部分集合とします. 此の時, 或る現象が $\mathfrak{D}$ 上の, E の近傍に於て起こると云へば, $\mathfrak{D}$ と同じ性質の, $\mathfrak{D}$ の一つの部分集合 $\mathfrak{D}'$ が存在し, 此の $\mathfrak{D}'$ に関して, E が有界な $\mathfrak{D}'$ の部分集合となって居て, $\mathfrak{D}'$ に於て其の現象が起ると云ふ意味です[4].

擬凸状 (領) 域を定義します. 原型は云ふ迄もなく F. Hartogs の発見です.

定義 — 空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ が連続定理を充たすとは次の条件が充たされることである： 空間 (x) 上に点 (a) を中心とし, 半径 $r_i, \rho_i,\ \rho_i < r_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ を以て, 多円筒 (C); $|x_i - a_i| < \rho_i$ と, 次の二つの条件の少くとも一方を充たす点の総てからなる単葉領域 Δ とを考へる；

$$
\begin{array}{lll}
(\Delta) & |x_j - a_j| < \rho_j, \qquad\qquad |x_n - a_n| < r_n & (j = 1, 2, \cdots, n-1) \\
\text{又は} & |x_j - a_j| < r_j, \quad \rho_n < |x_n - a_n| < r_n & (j = 1, 2, \cdots, n-1).
\end{array}
$$

若し領域 $\mathfrak{D}$ が, 或る一対の (C), Δ に対し Δ と同等な部分領域を持つならば, $\mathfrak{D}$ は必ず (C) と同等であって上の部分領域を其の一部分とする様な部分領域をも持つこと. [5]

定義に於て, 領域 Δ は明かに線的単連結です. 故に, $\mathfrak{D}$ が若し其の基点 (Grundpunkt) の集合が Δ と一致し, 其の境点の基点が Δ 内に無い様な部分領域を持つならば, それは必然単葉であって, 従って Δ と同等です. 定義に依て, 二つの連続定理を充たす領域の任意の切断 (Durchschnitt) は同じ性質を持つこと明白です.

定義 — 空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ を, 次の二つの条件を充たすとき, 擬凸状 (領) 域と名づける:

$$\theta \geq 0 \quad \text{ならば} \quad 1 < r < \frac{2 + 3\theta}{1 + \theta}$$

となる様なものの集合を $\mathcal{D}_0$ とします. $\mathcal{D}$ は領域, $\mathcal{D}_0$ は $\mathcal{D}$ の部分領域且つ有界であって, $\mathcal{D}_0$ は $\mathcal{D}$ に関して性質 3° を持ちます. 然し性質 1° も 2° も持ちません. 我々は之等三つの性質の中, 2° を撰ばうと云ふのです.

[4] $\mathcal{D}$ 上で定義せられた点について云ふ場合には明示します.

[5] 第六報告では, 単葉領域 $\mathcal{D}$ の補集合 E が連続定理を充たすと云ふ云ひ方をしました. 此の名稱の起源から云へば か様に云ふのが正しいのでせうが (G. Julia の論文, 既揭, 参照), 我々は最早や一般には領域の補集合を考へることが出来ませんから, 今後は $\mathcal{D}$ が此の定理を充たすと云ふことにしませう.

1° $\mathfrak{D}$ の各界点 M に対し正数 r_0 が附随し, M の基点 $\underline{M}$ を中心とし r_0 を半径とする多円筒を (γ) とするとき, M を界点として持ち[6], 其の基点が (γ) に含まれる様な最大の $\mathfrak{D}$ の部分領域を $\mathfrak{D}_0$ とすれば, $\mathfrak{D}_0$ が連続定理を充たすこと. ($\mathfrak{D}$ が局地的に連続定理を充たすこと.)

2° (γ_1) を $\underline{M}$ を中心とし, (γ) に含まれる様な多円筒[7], $\mathfrak{D}_1$ を M を界点として持ち其の基点が (γ_1) に含まれる様な最大の $\mathfrak{D}$ の部分領域とし, (T) を (γ_1) を空間 (x') の単葉領域に寫像する様な一対一擬等角変換, $\mathfrak{D}_1'$ を (T) に依る $\mathfrak{D}_1$ の像とすれば, $\mathfrak{D}_1'$ は常に, 座標 (x') に関して, 連続定理を充たすこと. (性質 1° が擬等角変換に依て失はれないこと.)

定義に依て, 与へられた領域が擬凸状であるか否かを判定するには, 其の各界点の近傍を点検すれば充分です. 二つの擬凸状域の切断は明かに何れも擬凸状です.

2 — 次に擬凸状函数を定義します.

定義 — $\mathfrak{D}$ を空間 (x) の単葉領域とする. $\mathfrak{D}$ に於ける一価実数値函数 $\varphi(x)$ は, 次の条件を充すとき, $\mathfrak{D}$ に於ける変数 (x) に関する擬凸状函数と呼ばれる:

1° $e^{\varphi(x)}$ は $\mathfrak{D}$ に於て有限であって, (x) に関して上方半連続であること.

2° $\mathfrak{D}$ の任意の一点 P を通る任意の固有二次元平面 ((x) に関する二 (実) 次元一次代数集合体) 上に於て, P の近傍で, $\varphi(x)$ は x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の何れか一つに関して劣調和函数であること.

$\mathfrak{D}$ を任意の領域とするとき, $\mathfrak{D}$ に於ける一価実数値函数 $\varphi(P)$ は, $\mathfrak{D}$ の任意の単葉部分領域内で (変数 (x) に関して) 擬凸状であるとき, $\mathfrak{D}$ に於ける (変数 (x) に関する) 擬凸状函数と呼ばれる. [8]

劣調和函数の諸性質から, 之に相当する擬凸状函数の諸性質が直ちに出ます. 其の二三を挙げて置きませう.

1° $\varphi(x)$ を擬凸状函数とし c を正の常数とすれば, $c\varphi(x)$ も擬凸状関数である.

2° $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ を擬凸状函数とすれば, $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ も擬凸状である.

3° $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ を擬凸状函数とすれば, 上端, $\max[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ も然うである.

4° 領域 $\mathfrak{D}$ に於て擬凸状函数の列 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x), \cdots$ が与へられ, $e^{\varphi_m(x)}$ が $e^{\varphi(x)}$ に収斂するとき, 若し此の収斂が $\mathfrak{D}$ の各点の近傍に於て

[6] $\mathcal{D}$ の界点 M は $\mathcal{D}$ の無限点列によって定義せられます (Behnke, Thullen の著書参照). $\mathcal{D}_1$ が M を界点として持つとは, $\mathcal{D}_1$ が適当なか様な列点を内点として持つと云ふ意味です (以下同様).

[7] (γ_1) の n 個の半径が同一でなくてもよいことに留意.

[8] 劣調和函数の定義に就ては, 第六報告第十節参照. 特に, 我々は便宜上常数 $-\infty$ をも此の種の函数に加算して居ます.

斉一であるか, 又は逓減しながらするか, 何れかならば, $\varphi(x)$ は矢張り $\mathfrak{D}$ に於て擬凸状である.

F. Hartogs の正則半徑に倣って, 次の様な函数を考へませう. $\mathfrak{D}$ を空間 (x) の任意の領域とします. $P_0\,(x^0)$ を $\mathfrak{D}$ の任意の点とし, (x^0) を中心とする多円筒 (C), $|x_i - x_i^0| < r_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を, $\mathfrak{D}$ が, P_0 を内点とする (C) と同等な部分領域を持つ様に描きます. か様な r_i の上端を $R_i(P_0)$ を以て表します. か様にして $\mathfrak{D}$ に於て定義せられた一価函数 $R_i(P)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を $\mathfrak{D}$ に関する Hartogs の半徑と呼びませう.

定理 1 — 空間 (x) の擬凸状域に関する Hartogs の半徑を $R_i(P)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とすれば, $-\log R_i(P)$ は (x) に関する擬凸状函数である. (対数記号は其の実分枝を表はす.)

証明　先づ与へられた擬凸状域 $\mathfrak{D}$ が有界である場合を考へます. $R_n(P)$ について調べませう. 此の函数は有界です. これが下方半連続であることを証明します. $P_0\,(x^0)$ を $\mathfrak{D}$ の任意の点とし, ε を任意の正数としますと, 定義に依て, (x^0) を中心とする多円筒 (C), $|x_i - x_i^0| < r_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が存在し, $\mathfrak{D}$ は P_0 を内点とする (C) と同等な部分領域 $\mathfrak{D}_0$ を持ち, $r_n + \varepsilon > R_n(P_0)$ となります. 此の $\mathfrak{D}_0$ の任意の点 $P\,(x)$ に対し,

$$R_n(P) > R_n(P_0) - \varepsilon - |x_n - x_n^0|$$

です. 故に, $R_n(P)$ は P_0 に於て下方半連続です.

改めて, $P_0\,(x^0)$ を $\mathfrak{D}$ の任意の点とします. 空間 (x) の円 $x_j = x_j^0$ $(j = 1, 2, \cdots, n-1)$, $|x_n - x_n^0| < R_n(P_0)$ を $\underline{E}$ としますと, 定義に依て領域 $\mathfrak{D}$ は, P_0 を中心とする, $\underline{E}$ と同等な円 (其の基集合 (基点の集合) が $\underline{E}$ となる様な連結 (連続) 単葉な部分集合の意, 以下同様) を持つこと明かです. 之を E とします. R_n の最大性から, 円 E の周上には必ず $\mathfrak{D}$ の界点のあることが分ります. 其の一つを $M\,(\xi)$ とします. ((ξ) は $\xi_j = x_j^0$ $(j = 1, 2, \cdots, n-1)$, $|\xi_n - x_n^0| = R_n(P_0)$ の形です.) $\mathfrak{D}$ は擬凸状域ですから, 定義に依て, 界点 M には正数 r_0 が附随します. 点 (ξ) を中心とし r_0 を半徑とする多円筒 (γ) を描き, M を界点として持ち其の基点が (γ) に含まれる様な最大の $\mathfrak{D}$ の部分領域を $\mathfrak{D}_0$ とします. $\mathfrak{D}_0$ は連続定理をみたします.

x_n 平面上の線分 (x_n^0, ξ_n) 上に点 x_n' を ξ_n に充分近く撰び, 円 $|x_n - x_n'| < |\xi_n - x_n'|$ が其の円周と共に円 $|x_n - \xi_n| < r_0$ に含まれる様にします. $(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0,\ x_n')$ を座標とする E の点を P' とします. $\mathfrak{D}_0$ に関する Hartogs の半徑を $R_i'(P)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とします. $R_n'(P') = |\xi_n - x_n'|$ です. 空間 (x) の円 $|x_1 - x_1^0| < R_1'(P')$, $x_k = x_k^0$ $(k = 2, 3, \cdots, n-1)$, $x_n = x_n'$ を $\underline{F}$ としますと, $\mathfrak{D}_0$ は, P' を中心とする $\underline{F}$ と同等な円を持ちます. 之を F とします. P' を中心とし, $0 < r_1 < R_1'(P')$ なる任意の r_1 を半徑として, F 上に円周 Γ を描きます. 此の状勢に於て, Γ 上に於ける $R_n'(P)$ の下端を ρ' としますと,

$$\rho' \leq R_n'(P')$$

であることを証明しませう. ρ'' を $\rho'' < \rho'$ なる任意の正数とし, 空間 (x) に点集合,

$$(\underline{G}) \qquad |x_1 - x_1^0| \leq r_1, \quad x_k = x_k^0, \quad |x_n - x_n'| \leq \rho'' \qquad (k = 2, 3, \cdots, n-1),$$

及び次の二つの条件の少くとも一方を充たす点集合,

$$(\underline{H}) \qquad |x_1 - x_1^0| \leq r_1, \quad x_k = x_k^0, \quad x_n = x_n' \quad (k = 2, 3, \cdots, n-1),$$

$$\text{又は} \quad |x_1 - x_1^0| = r_1, \quad x_k = x_k^0, \quad |x_n - x_n'| \leq \rho'' \qquad (k = 2, 3, \cdots, n-1)$$

を考へます. $\underline{H}$ は明かに線的単連結です (即ち $\underline{H}$ 上の任意の閉曲線は, $\underline{H}$ 上を連続的に変形することに依て, $\underline{H}$ の一点に還元することが出来ます). $\mathfrak{D}_0$ は, P' を其の一点とする, $\underline{H}$ と同等な部分集合を持つこと明かです. 之を H とします. H は閉集合であって, H の点はすべて $\mathfrak{D}_0$ にぞくしますから, <u>Borel–Lebesgue の補助定理</u>に依て, 正数 ε が存在し, $H \subset \mathfrak{D}_0^{(\varepsilon)}$ となります. 所で, $\mathfrak{D}_0$ は定義に依て, 連続定理を充たし, 此のことは x_1 と x_n とを交換しても変りませんから, $\mathfrak{D}_0$ は H を其の一部分とする, $\underline{G}$ と同等な部分集合 G を持ちます. 故に $\rho'' < R_n'(P')$ です. 従って $\rho' \leq R_n'(P')$ です.

円周 Γ 上に於ける $R_n(P)$ の下端を ρ とします.

$$\rho' \leq R_n'(P') = |\xi_n - x_n'|$$

ですから, $\rho = \rho'$ です. 又 $R_n(P') = R_n'(P')$ ですから,

$$\rho \leq R_n(P').$$

空間 (x) に次の点集合を考へます：

$$(\underline{I}) \quad |x_1 - x_1^0| \leq \eta, \ \ x_k = x_k^0, \ \ |x_n - x_n^0| \leq |x_n' - x_n^0| \ \ (k = 2, 3, \cdots, n-1).$$

η を充分小さくとれば, $\mathfrak{D}$ は明かに, P_0 を其の一点とする $\underline{I}$ と同等な部分集合 I を持ちます. 円 $|x_1 - x_1^0| < \eta$, $x_i = x_i^0 \quad (i = 2, 3, \cdots, n)$ を $\underline{J}$ とし, 点 P_0 を其の中心とする, $\underline{J}$ と同等な, $\mathfrak{D}$ にぞくする円を J とします. $0 < r_1 < \eta$ なる任意の r_1 を半径とし, P_0 を中心として, J 上に円周 C を描き, <u>C 上に於ける $R_n(P)$ の下端を ρ_0</u> とします. $\mathfrak{D}$ は I を部分集合として持ちますから,

$$\rho_0 \leq \rho + |x_n' - x_n^0|$$

です. 所で

$$\rho \leq R_n(P') = |\xi_n - x_n'|,$$

$$R_n(P_0) = |\xi_n - x_n^0| = |\xi_n - x_n'| + |x_n' - x_n^0|$$

ですから,

$$\rho_0 \leq R_n(P_0).$$

<u>円周 C に関する平均値</u>

$$m = \frac{1}{2\pi r_1}\int_C \varphi(P)\,dP, \quad \varphi(P) = -\log R_n(P)$$

を考へます. 対数記号は其の実分枝を意味し, 積分は <u>Lebesgue</u> のそれです. 函数 $\varphi(P)$ は上方半連続ですから, m は有限確定です.

$$m \geq \varphi(P_0)$$

を証明しませう. $\varphi(P)$ は上方半連続であって, 従って逓減する連続函数列の極限と看做せますから, $\varepsilon > 0$ が与へられたとき, 円周 C 上に於て,

$$\varphi(P) \leq \psi(P)$$

なる連続実数値函数 $\psi(P)$ を,

$$|m - m_1| < \varepsilon, \quad m_1 = \frac{1}{2\pi r_1}\int_C \psi(P)\,dP$$

となる様に求めることが出来ます. x_1 平面上に x_1^0 を中心とし r_1 を半径とする円周 C_1 を描きます. C_1 上の点 x_1 と C 上の点 P とを, x_1 に対して $(x_1, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ を座標とする P を対応せしめ,

$$\chi(x_1) = \psi(P)$$

とします. $f(x_1)$ を円 (C_1), $|x_1 - x_1^0| < r_1$ に於て正則であって, 0 となることなく, $|f(x_1)|$ が $|x_1 - x_1^0| \leq r_1$ に於て一価連続であって, 円周 C_1 上に於て

$$|f(x_1)| = e^{\chi(x_1)}$$

となる様な函数とします. $f(x_1)$ は存在します. $0 < \alpha < 1$ なる実数 α をとり,

$$g(x_1) = f[\alpha(x_1 - x_1^0) + x_1^0]$$

を考へますと, $g(x_1)$ は $|x_1 - x_1^0| < r_1/\alpha$ で正則な函数です. $|f|$ は $|x_1 - x_1^0| \leq r_1$ に於て連続であって 0 となることはありませんから, $\varepsilon' > 0$ が与へられたとき, α を充分 1 に近くとれば, C_1 上で

$$1 - \varepsilon' < \left|\frac{f(x_1)}{g(x_1)}\right| < 1 + \varepsilon'$$

となります. 此の $g(x_1)$ に依て, 擬等角変換,

$$(T) \qquad x'_j = x_j, \quad x'_n = (x_n - x_n^0)\,g(x_1) + x_n^0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

を考へます. (T) は空間 (x) の領域 $|x_1 - x_1^0| < r_1/\alpha$ を, 空間 (x') の之と同等な領域 $|x'_1 - x_1^0| < r_1/\alpha$ に一対一に寫像します.

$\mathfrak{D}_1$ を, 点 P_0 を持ち, 其の座標が $|x_1 - x_1^0| < r_1/\alpha$ を充たす様な, $\mathfrak{D}$ の最大の部分領域とし, $\mathfrak{D}_1'$ を変換 (T) に依る $\mathfrak{D}_1$ の像とします. $\mathfrak{D}_1$ の点 P に対応する $\mathfrak{D}_1'$ の点を Q, 特に P_0 に応じるものを Q_0 とし, 円周 C の像を C' とします. C' と C とは同等です. $\mathfrak{D}_1'$ に関する Hartogs の半径を $R_i^0(Q)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とし, C' 上に於ける $R_n^0(Q)$ の下端を ρ_0' としますと, 擬凸状域の定義と, 上に見た所とから,

$$\rho_0' \leq R_n^0(Q_0)$$

であることが容易に分ります.

所で, 円周 C' 上では

$$R_n^0(Q) = R_n(P)\,|g(x_1)|$$

です. ここに P は Q に対応する C 上の点, x_1 は其の P に対応する C_1 上の点です. 之から容易に次のことが分ります：

$$\rho_0' > 1 - \varepsilon'.$$

次に円の中心 Q_0 では

$$\begin{aligned} R_n^0(Q_0) &= R_n(P_0)\,|f(x_1^0)| \\ &= R_n(P_0)\,e^{m_1} \end{aligned}$$

$$\therefore 1 - \varepsilon' < R_n(P_0)\,e^{m_1}$$

です. 此処に於て ε, ε' を 0 に収斂させますと, 所求の関係, $\varphi(P_0) \leq m$ が得られます.

か様に $\varphi(P)$ に就て, $e^{\varphi(P)} = 1/R_n(P)$ は有限かつ上方半連続であって, $\mathfrak{D}$ の各点 P_0 に正数 η が付随し, 此の η に依て定められる範囲内で, $\varphi(P)$ は上に見た様な性質を持ちます. 故に, <u>F. Riesz</u> に依て, <u>$\varphi(P)$ は x_1 に関して劣調和函数です. $x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ に就ても同様です.</u>

x_n に就て調べませう. 上述の $\mathfrak{D}$ の部分集合 E 上に, 点 P_0 を中心とし, $0 < r_n < R_n(P_0)$ なる任意の r_n を半径として円周 S を描きます. $\mathfrak{D}$ の境点 $M\,(\xi)$ が円 E の周上にあります. それで, S 上の任意の点を P, 其の座標を $(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0, x_n)$ としますと,

$$R_n(P) \leq |x_n - \xi_n|, \quad R_n(P_0) = |x_n^0 - \xi_n|$$

です. 所で,

$$\frac{-1}{2\pi r_n} \int_S \log|x_n - \xi_n|\,dP = -\log|x_n^0 - \xi_n|$$

ですから,

$$\frac{1}{2\pi r_n} \int_S \varphi(P)\,dP \geq \varphi(P_0)$$

です. 故に, $\varphi(P)$ は x_n に関しても劣調和函数です.

改めて $P_0\,(x^0)$ を $\mathfrak{D}$ の任意の点とします. 以下, P_0 の近傍 (P_0 を含む或る単葉な $\mathfrak{D}$ の部分領域) のみが問題になって居るときには, P_0 の近傍の点 $P\,(x)$ を時として単に点 (x) と云ひます.

点 (x^0) を通る任意の固有二次元平面を L とします. 簡単の為 (x^0) を (0) と考へませう. L が

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$$

ならば, $\varphi(P)$ を $\varphi(x)$ と書きますと, $\varphi(0, 0, \cdots, 0, x_n)$ が劣調和函数であることは, 今見たばかりです.

それ以外の場合には, 変数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ は此の際対等ですから, L を

$$x_j = a_j x_1 \qquad (j = 2, 3, \cdots, n),$$

a_j は常数, の形であると考へてよろしい. 然うであるとして, 次の変換,

$$(T) \qquad x'_1 = x_1, \quad x'_j = x_j - a_j x_1 \qquad (j = 2, 3, \cdots, n)$$

を考へます. (T) に依る $\mathfrak{D}$ の像を $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}$ の点 P の像を P' とします. $\mathfrak{D}'$ は擬凸状域です. 其の Hartogs の半徑を $R'_i(P')$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とします. 所で, x_1 を固定すれば, 変換 (T) は平行移動に過ぎません. 故に,

$$R_n(P) = R'_n(P')$$

即ち

$$R_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = R'_n(x_1, x_2 - a_2 x_1, \cdots, x_n - a_n x_1).$$

特に,

$$R_n(x_1, a_2 x_1, \cdots, a_n x_1) = R'_n(x_1, 0, \cdots, 0).$$

所で, $-\log R'_n(x_1, 0, \cdots, 0)$ は, $x_1 = x'_1$ ですから, $x_1 = 0$ の近傍で x_1 の劣調和函数です. 故に $\varphi(x_1, a_2 x_1, \cdots, a_n x_1)$ に就ても其の通りです.

か様に, $\mathfrak{D}$ が有界ならば, $\varphi(P)$ は $\mathfrak{D}$ に於ける擬凸状函数です. $R_1(P), R_2(P), \cdots, R_{n-1}(P)$ に就ても同様です.

次に $\mathfrak{D}$ が有界でない場合を考へます. $\mathfrak{D}$ の一点 P_0 を定め, 其の基点 $\underline{P_0}$ を中心とし, 正の整数 p を半徑として多円筒 (γ_p) を描き, $\mathfrak{D}, (\gamma_p)$ の P_0, $\underline{P_0}$ に関する切断を $\mathfrak{D}_p$ とします. $\mathfrak{D}_p$ は擬凸状域です. 其の Hartogs の半徑を $R_i^{(p)}(P)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ としますと, $\varphi_i^{(p)}(P) = -\log R_i^{(p)}(P)$ は $\mathfrak{D}_p$ に於ける擬凸状函数です. 所で, 函数列 $\varphi_i^{(p)}(P)$ $(p = 1, 2, \cdots)$ は何れも決して逓増しませんから, 極限 $\varphi_i(P) = -\log R_i(P)$ は $\mathfrak{D}$ に於ける擬凸状函数です.

(証明終)

3 — 定理 1 から容易に次の結果が得られます.

定理 2 — 擬凸状域は (全域的に) 連続定理を充たす.

証明　$\mathfrak{D}$ を空間 (x) の擬凸状域とします．空間 (x) の点 (a) を中心とし，半径 r_i, ρ_i $(i=1,2,\cdots,n)$, $\rho_i < r_i$, を以て，連続定理の定義に於て述べた (C), Δ を考へます．$\mathfrak{D}$ は Δ と同等な部分領域をもつと仮定し，之を Δ_0 で表します．点 (a) 上に位置する Δ_0 の点を A とし，A, (a) に関する $\mathfrak{D}$, (C) の切断を $\mathfrak{D}_0$ とします．

(x^0) を，$x_1^0 = a_1$, $|x_j^0 - a_j| < \rho_j$ $(j=2,3,\cdots,n-1)$, $|x_n^0 - a_n| < r_n$ なる任意の点とし，(x^0) 上の Δ_0 の点を P_0 とします．x_n 平面上の円 $|x_n - a_n| < r_n$ を自身に移し，$x_n = x_n^0$ を $x_n' = a_n$ に移す様な，x_n に関する一次変換の一つを $x_n' = f(x_n)$ とし，変換

$$(T) \qquad x_k' = x_k, \quad x_n' = f(x_n) \qquad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

を考へます．$\mathfrak{D}_0$ の (T) に依る像を $\mathfrak{D}_0'$ とし，Δ_0 の像を Δ_0', P_0 の像を P_0' とします．P_0' の座標は $(a_1, x_2^0, \cdots, x_{n-1}^0, a_n)$ です．

$\mathfrak{D}_0'$ は擬凸状域です．其の Hartogs の半径を $R_i(P)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とし，特に $R_1(P)$ に就て考察します．点 P_0' を中心とし，$r < r_n$ なる r を半径として，其の基集合が x_n 平面に平行な固有二次元平面上にある様に，Δ_0' 上に円周 Γ を描き，平均値

$$m = \frac{-1}{2\pi r}\int_\Gamma \log R_1(P)\, dP$$

を考へますと，

$$m \geq -\log R_1(P_0')$$

でなければなりません (定理 1)．所で，r を十分 r_n に近くとりますと，$\mathfrak{D}_0' \supset \Delta_0'$ ですから，Γ 上で恒等的に $R_1(P) = r_1$ となります．それで上の不等式は $r_1 \leq R_1(P_0')$ となりますから，$R_1(P_0') = r_1$ でなければなりません．

空間 (x) に円 $(\underline{C_1})$, $|x_1 - x_1^0| < r_1$, $x_j = x_j^0$ $(j=2,3,\cdots,n)$ を描きます．$R_1(P_0') = r_1$ ですから，$\mathfrak{D}_0$ は P_0 を中心とする $(\underline{C_1})$ と同等な円 (C_1) を含むこと明かです．P_0 は其の座標が始めに述べた形である様な Δ_0 の任意の点ですから，$\mathfrak{D}_0$ は，Δ_0 を其の一部分とし，次の空間 (x) の領域 Δ_1 と同等である様な，部分領域を持たなければなりません：

$$\begin{aligned}(\Delta_1) \qquad & |x_1 - a_1| < r_1, \quad |x_i - a_i| < \rho_i, \quad |x_n - a_n| < r_n \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=2,3,\cdots,n-1) \\ \text{又は} \quad & |x_1 - a_1| < r_1, \quad |x_i - a_i| < r_i, \quad \rho_n < |x_n - a_n| < r_n \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=2,3,\cdots,n-1).\end{aligned}$$

同様の推理を反覆することに依て，結局 $\mathfrak{D}_0$ は多円筒 (C) と同等であることが分ります．か様に $\mathfrak{D}$ は連続定理を充たします．(証明終)

定理 2 から直接に得られる結果に就て，一二を述べませう．

系 1 — 擬凸状域の集合の切断はすべて擬凸状である．

証明　空間 (x) に於ける擬凸状域の集合を $\{\mathfrak{B}\}$ とし, 其の切断が存在するとして, 其の任意の一つを $\mathfrak{D}$ とします. 空間 (x) に, 連続定理の定義で述べた $(C), \Delta$ を考へ, $\mathfrak{D}$ が Δ と同等な部分領域を持つと仮定し, $\Delta_{\mathcal{D}}$ で表します. 然うしますと, 切断の定義(Behnke, Thullen の著書の 11 頁参照) に依て, 集合 $\{\mathfrak{B}\}$ の各領域 $\mathfrak{B}$ は, $\Delta_{\mathcal{D}}$ と同等な部分領域 $\Delta_{\mathcal{B}}$ を持ちます. 所で, $\mathfrak{B}$ は擬凸状域ですから, 定理 2 に依て連続定理を満足します. 故に, 各 $\mathfrak{B}$ は (C) と同等な, $\Delta_{\mathcal{B}}$ を其の一部分とする部分領域 $(C)_{\mathcal{B}}$ を持たなければなりません. 従って, 切断の最大性に依て, $\mathfrak{D}$ は, (C) と同等であって, $\Delta_{\mathcal{D}}$ を一部分とする様な部分領域 $(C)_{\mathcal{D}}$ を持たなければなりません. か様に $\mathfrak{D}$ は連続定理を満足します.

(γ) を空間 (x) の任意の多円筒とし, (T) を (γ) を空間 (x') の単葉領域に一対一に寫像する様な任意の擬等角変換とします. $\mathfrak{D}$, (γ) の切断の任意の一つを $\mathfrak{D}_0$ とし, $\mathfrak{D}_0$ の (T) に依る像を $\mathfrak{D}'_0$ とします. $\mathfrak{D}'_0$ は明かに, 擬凸状域の集合の一つの切断と考へることが出来ます. 従って連続定理を満足します. 故に $\mathfrak{D}$ は擬凸状域です. (証明終)

系 2 — $\mathfrak{D}_p$ $(p = 1, 2, \cdots)$ を $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{D}_{p+1}$ なる擬凸状域の列とすれば, 極限は矢張り擬凸状である.

証明　空間 (x) に於て考へます. 与へられた領域列の極限の領域を $\mathfrak{D}$ とします. 此の場合 $\mathfrak{D}$ は次の二つの性質に依て規定せられます： 1°　$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}_p$ $(p = 1, 2, \cdots)$.　2°　$\mathfrak{D}$ の任意の点を P とすれば, P を内点とする様な $\mathfrak{D}_m$ が列中に存在する.　(Behnke, Thullen の著書の 12, 13 頁参照)

連続定理の定義に於てのべた $(C), \Delta$ をとり, $\mathfrak{D}$ が Δ と同等な部分領域 Δ_0 を持ち, Δ_0 の境界も亦 $\mathfrak{D}$ にぞくすると仮定します. Δ_0, Δ と其の境界との和を夫々$\overline{\Delta}_0$, $\overline{\Delta}$ とします. $\overline{\Delta}_0$ の任意の点を P としますと, P を内点とする様な $\mathfrak{D}_m$ が列中に存在し, $\mathfrak{D}_{m+1}, \mathfrak{D}_{m+2}, \cdots$ はすべて P を持ちます. P の基点 $\underline{P}$ を中心として充分小さな多円筒 (γ) を描きますと, $\mathfrak{D}_m$ は P を持つのですから, (γ) と同等であって P を内点とする様な部分領域を持ちます. 閉集合 $\overline{\Delta}$ の各点 $\underline{P}$ を中心としてか様な (γ) が存在しますから, Borel–Lebesgue の補助定理 に依て, か様な (γ) の有限個を以て $\overline{\Delta}$ を被覆することが出来ます. 之等の (γ) に対応する正の整数 m 中最大のものを M としますと, 明かに $\mathfrak{D}_M$ は $\overline{\Delta}_0$ を其の一部分とします. 所で, $\mathfrak{D}_M$ は擬凸状ですから, 定理 2 に依て連続定理を満足し, 従って Δ_0 を其の一部分とする (C) と同等な部分領域 (C_0) を持ちます. 故に, $\mathfrak{D}$ に就ても同様です.

上に Δ_0 の境界も亦 $\mathfrak{D}$ にぞくすると仮定しましたが, 此の仮定を省いても同じ結果に到達すること, 今や明瞭です. か様に $\mathfrak{D}$ は連続定理を満足します. $\mathfrak{D}$ の此の性質が擬凸状域の定義で述べた意味に於て, 擬等角変換を許容することに就ては, 系 1 の場合と全く同様です. (証明終)

$\mathfrak{D}$ を空間 (x) の任意の領域とします. $\mathfrak{D}$ の一点 P の基点を中心とし, r を半徑とする $2n$ 次元球 S を, $\mathfrak{D}$ が, S と同等であって P を内点とする様な部分

領域を持つ様に描きます. か様な r の上端を $d(P)$ で表し, $\mathfrak{D}$ に関する ユークリッド的境界距離 と呼びませう.

定理 3 — 空間 (x) の擬凸状域 $\mathfrak{D}$ に関するユークリッド的境界距離を $d(P)$ とすれば, $-\log d(P)$ は (x) に関する擬凸状函数である. (対数記号は其の実分枝を表す.)

証明　此の定理は, 若し $\mathfrak{D}$ が有界の場合に成立するならば, 常に成立します. 証明法は定理 1 のときと全く同様です. 故に, $\mathfrak{D}$ を 有界 と仮定します.

$\mathfrak{D}$ の任意の一点を $P_0\,(x^0)$ とし, (x^0) を中心として半径 $d(P_0)$ の $2n$ 次元球 $\underline{S}$ を描きます. $\mathfrak{D}$ には之と同等であって P_0 を持つ様な部分領域 S がなければなりません. 更に, S は, $\mathfrak{D}$ の境点を少くとも一つ持たなければなりません. 之を $M(\xi)$ とします. 之から直ちに分りますことは, $d(P)$ は P の連続函数 であることです.

所で, よく知られて居ます様に, (x^0) 及び此の点からの (ユークリッド的) 距離を変へない様な (x) に関する一次変換に依て, (ξ) を $\xi'_j = x_j^0$ $(j = 1, 2, \cdots, n-1)$, $\xi'_n = \alpha(P_0) + x_n^0$ なる (ξ') に移すことが出来ます. 此の変換に依て, $\mathfrak{D}$ が空間 (x') の領域 $\mathfrak{D}'$ に移ったとし, $\mathfrak{D}$ の点 P の像を P', 特に P_0 の像を P'_0 として, $\mathfrak{D}'$ に関する Hartogs の半径を $R'_i(P')$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ としますと,

$$R'_n(P'_0) = d(P_0).$$

$-\log R'_n(P')$ は, 定理 1 に依て, $\mathfrak{D}'$ に於て (x') に関する擬凸状函数です. 故に, 此の種の函数の定義から直ちに,

$$\varphi(P) = -\log R'_n(P')$$

なる $\varphi(P)$ は $\mathfrak{D}$ に於て, (x) に関して擬凸状であることが分ります.

(x^0) を通る任意の固有二次元平面を L とし, L 上に (x^0) を中心として円周 $\underline{C}$ を, $\underline{S}$ 内にある様に描き, 其の半径を r とします. $\underline{C}$ と同等な S 上の円周を C としますと,

$$\frac{1}{2\pi r}\int_C \varphi(P)\,dP \geq \varphi(P_0).$$

所で,

$$\psi(P) = -\log d(P)$$

としますと,

$$\psi(P) \geq \varphi(P), \quad \psi(P_0) = \varphi(P_0)$$

ですから,

$$\frac{1}{2\pi r}\int_C \psi(P)\,dP \geq \psi(P_0)$$

です. 故に, $\psi(P)$ は, 連続ですから, $\mathfrak{D}$ に於ける (x) に関する擬凸状函数です. (証明終)

函数 $-\log d(P)$ は次の性質を持って居ます：

1°　此の函数は $\mathfrak{D}$ に於て連続です．但し，$\mathfrak{D}$ が全有限空間 (x) と一致する場合だけは例外です．此のときは恒等的に $-\infty$ になります．

2°　$\mathfrak{D}$ の点 P が $\mathfrak{D}$ の任意の (有限) 境点に近づきますと，どの様な近づき方をしても，函数値は常に $+\infty$ に近づきます．

4 — 空間 (x) に単葉領域 $\mathfrak{D}$ を描き，$\mathfrak{D}$ に於て連続な実数値函数 $\varphi(x)$ を考へ，x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ の実部及び虚部に関して第二階までの連続な偏微係数を持つものとします．か様な函数が擬凸状である為の条件其の他を調べませう．

$\mathfrak{D}$ の任意の一点を (x^0) とし，此の点を通る，此の点の近傍で定義せられた，次の形の二次元固有集合体 (固有二次元面) T を考へます：

$$(T) \qquad x_j = f_j(y), \quad x_j^0 = f_j(y_0) \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

此処に y は複素助変数，$f_j(y)$ は y_0 の近傍で定義せられた正則函数であって，すべてが常数ではありません．x_j，y を実部と虚部とに分ち

$$y = u + i\,v, \quad x_j = u_j + i\,v_j \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

i は虚単位，とし

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = \varphi(u_j, v_j) \\ &\Phi(u,v) = \varphi[u_j(u,v), v_j(u,v)] \end{aligned} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

として

$$\Delta\Phi(u,v) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}$$

を y_0 の近傍に於て計算しませう．

$$\frac{\partial u_j}{\partial u} = \frac{\partial v_j}{\partial v} = \alpha_j, \quad \frac{\partial v_j}{\partial u} = -\frac{\partial u_j}{\partial v} = \beta_j$$

と置きますと，簡単な計算に依て次の結果が得られます．

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = \sum_j \sum_k \Bigg[&\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j \partial u_k} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v_j \partial v_k}\right)(\alpha_j\alpha_k + \beta_j\beta_k) \\ &+ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j \partial v_k} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_k \partial v_j}\right)(\alpha_j\beta_k - \alpha_k\beta_j)\Bigg] \quad (j,k=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

此の等式の右辺を記号 $W(\varphi;\alpha,\beta)$ に依て表します．此の計算の結果を記録して置きませう．

補助定理 1 — 上述の状況に於て，$\Delta\Phi = W(\varphi;\,\alpha,\beta)$ である．

之から容易に次の結果が得られます．

定理 4 — $\varphi(x)$ を空間 (x) の単葉領域 $\mathfrak{D}$ に於ける, x_j $(j=1,2,\cdots,n)$ の実部及び虚部に関する第二階までの連続な偏微係数を持つ様な実数値連続函数とする.

1° $\varphi(x)$ が $\mathfrak{D}$ に於て擬凸状である為の必要且つ十分な条件は, $\mathfrak{D}$ の各点に於て, 上に述べた $W(\varphi;\, \alpha, \beta)$ が, 任意の実数系 (α, β) に対して, 負とならないことである.

2° 擬等角変換 $x_j = g_j(x')$ $(j=1,2,\cdots,n)$ に依て, $\mathfrak{D}$ を空間 (x') の単葉領域 $\mathfrak{D}'$ に一対一に寫像する. 若し $\varphi(x)$ が $\mathfrak{D}$ に於て擬凸状ならば, $\varphi[g(x')]$ は $\mathfrak{D}'$ に於て擬凸状である.

証明　定理の前半は補助定理 1 に依て明かです. 後半を証明します. $\varphi(x)$ が $\mathfrak{D}$ に於て擬凸状であると仮定します. $\mathfrak{D}'$ の任意の点を (x'_0) とし, (x'_0) を通る任意の固有二次元平面を L' とします. $\mathfrak{D}$ に於ける之等の像を, 夫々(x_0), L とします. L は (x_0) を通る, 正則な二次元固有集合体です. 所で, $\varphi(x)$ は $\mathfrak{D}$ に於て擬凸状ですから, $W(\varphi;\, \alpha, \beta)$ は決して負になりません. 故に, 補助定理 1 に依て, $\varphi(x)$ は L 上で, (x_0) の近傍で, x_j $(j=1,2,\cdots,n)$ の何れか一つに関して劣調和函数です. 所で, 此の種類の函数は変数の等角変換を許容しますから, $\varphi[g(x')]$ は L' 上で, (x_0) の近傍で, x'_j $(j=1,2,\cdots,n)$ の何れか一つに関して劣調和函数です. 故に, $\varphi[g(x')]$ は, 上方半連続性に就ては云ふ迄もありませんから, $\mathfrak{D}'$ に於て (x') に関して擬凸状です. (証明終)

5 — $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ を空間 (x, y) の点 (x^0, y^0) の近傍で定義せられた連続, 実数値函数とし, φ は x_j $(j=1,2,\cdots,n)$, y の実部及び虚部に関して第二階までの連続な偏微係数を持ち, $W(\varphi;\, \alpha, \beta)$ は總てが 0 でない様な任意の実数系 (α, β) に対して, 常に正である, 即ち

$$W(\varphi;\, \alpha, \beta) > 0$$

と考へます. x_j, y を実部と虚部とに分ち,

$$x_j = u_j + i\, v_j, \quad y = y_1 + i\, y_2$$

とし,

$$\varphi(x, y) = \varphi(u, v, y_1, y_2)$$

と書き表します. (x^0, y^0) に於て

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2 > 0$$

と考へます. 此の条件の下に, (x^0, y^0) の近傍に於て, 此の点を通る正則な固有面 ($2n-2$ 次元) σ を, 此の点を除いて,

$$\varphi(x, y) > \varphi(x^0, y^0)$$

の部分のみを通る様に, 作れることを申しませう.

記述を簡単にするため, (x^0, y^0) を原点, $\varphi(x^0, y^0)$ を 0 と考へます. σ の方程式を

$$y = f(x) = \sum_j a_j x_j + \sum_j \sum_k b_{jk} x_j x_k,\ b_{jk} = b_{kj} \quad (j, k = 1, 2, \cdots, n)$$

とします. a_j, b_{jk} 及び $f(x)$ を実部と虚部とに分ち

$$a_j = \alpha_j + i\,\beta_j, \quad b_{jk} = \gamma_{jk} + i\,\delta_{jk},$$
$$f(x) = P(u, v) + i\,Q(u, v)$$

とします. 勿論 $\gamma_{jk} = \gamma_{kj}$, $\delta_{jk} = \delta_{kj}$ です. 此の $y_1 = P(u, v)$, $y_2 = Q(u, v)$ を $\varphi(u, v, y_1, y_2)$ 中に代入して

$$\Phi(x) = \Phi(u, v) = \varphi[u, v, P(u, v), Q(u, v)]$$

を作りますと, $\Phi(u, v)$ は第二階までの連続な偏微係数を持って居ますから, 原点の近傍に於て次の形に展開することが出来ます：

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) = &\sum_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} u_j + \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} v_j \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial u_k} u_j u_k + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial v_k} u_j v_k + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_j \partial v_k} v_j v_k \right] + \varepsilon,\end{aligned}$$

$$\varepsilon = \sum_j \sum_k [\xi_{jk} u_j u_k + 2\eta_{jk} u_j v_k + \zeta_{jk} v_j v_k] \qquad (j, k = 1, 2, \cdots, n).$$

此処に微係数は原点に於ける値です. 以下此の意味に解します. また ξ_{jk}, η_{jk}, ζ_{jk} は原点の近傍の各点で有限確定な実数値をとり, (x) が原点に近づくとき, 0 に近づく様な函数です.

今, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ を,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial u_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_j \partial v_k}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial v_k} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_k \partial v_j} \qquad (j, k = 1, 2, \cdots, n)$$

を充たす様に撰んだと仮定しませう. 然うしますと,

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) = &\frac{1}{4} \sum_j \sum_k \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial u_k} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_j \partial v_k} \right) (u_j u_k + v_j v_k) \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial v_k} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_k \partial v_j} \right) (u_j v_k - u_k v_j) \right] + \varepsilon \\ = &\frac{1}{4} W(\Phi;\, u, v) + \varepsilon.\end{aligned}$$

特に $n=1$ ならば

$$\Phi(u,v)=\frac{1}{4}\Delta\Phi\left(u_1^2+v_1^2\right)+\varepsilon$$

となります. L を空間 (x) の原点を通る任意の固有二次元平面とし, T を空間 (x,y) の, $(x)\in L$, $y=f(x)$ なる固有集合体としますと, $W(\varphi;\,\alpha,\beta)>0$ ですから, 補助定理 1 に依て, T 上の函数 φ の x_j $(j=1,2,\cdots,n)$ の何れか一つに関するラプラーシアンは常に正です. 故に再び補助定理 1 に依て, (u,v) がすべて 0 でない限り $W(\Phi;\,u,v)$ は正でなければなりません. このことは $n=1$ の場合にも眞です. 故に, 原点の近傍に於ては, 此の点以外で $\Phi(u,v)>0$ です. 云ひ換へますと, σ は原点の近傍では, 此の点を除けば, $\varphi>0$ の部分にしか存在しません.

上述の条件を充たす様に $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ を撰びうることさへ云へばよろしい. 先づ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}=\frac{\partial\Phi}{\partial v_j}=0\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

を見ます.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}=\frac{\partial}{\partial u_j}\varphi(u,v,y_1,y_2)$$

ですから, 之は (α,β) のみに関する一次方程式です. 其の形を計算しますと, 簡単に

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}&=\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\alpha_j+\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\beta_j=0\\ \frac{\partial\Phi}{\partial v_j}&=\frac{\partial\varphi}{\partial v_j}-\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\beta_j+\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\alpha_j=0\end{aligned}$$

となります. $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2>0$ ですから, 此の方程式は解けます.

次に

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial u_k}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_j\partial v_k},\quad\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial v_k}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_k\partial v_j}\qquad(j,k=1,2,\cdots,n)$$

ですが, (α,β) は既に決定せられて居ますから, 之は (γ,δ) のみに関する方程式です. 其の形を見ませう. 計算は, 単にそのためのものですから極めて簡単であって, 結果は次の通りです：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial u_k}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_j\partial v_k}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\gamma_{jk}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\delta_{jk}+C_1=0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial v_k}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_k\partial v_j}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\gamma_{jk}-\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\delta_{jk}+C_2=0.$$

C_1,C_2 は (γ,δ) に無関係な何がしかの量です. $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2>0$ ですから, 此の方程式も解けます. か様にして次の定理が得られました.

定理 5 — 空間 (x) の点 (x^0) の近傍で定義せられた連続実数値函数 $\varphi(x) = \varphi(u,v)$, u_j, v_j は x_j の実部及び虚部 $(j = 1, 2, \cdots, n)$, を考へ, φ は u_j, v_j に関する第二階までの連続な偏微係数を持ち, (總てが 0 でない様な任意の実数系 (α, β) に対し) $W(\varphi;\, \alpha, \beta) > 0$ であって,

$$\sum_j \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_j} \right)^2 \right] > 0$$

であるとする. 然るときは, (x^0) を通り, 此の点を除けば $\varphi(x) > \varphi(x^0)$ なる部分にのみ存在する様な正則な固有面を, (x^0) の近傍に於て作ることが出来る. 尚

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_n} \right)^2 > 0$$

とすれば, 此の固有面を次の形に撰ぶことが出来る：

$$x_n = f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}),$$

此処に f は x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1} に関する二次の多項式である.

6 — 劣調和函数に対して, 其の連続度を高める簡潔な操作が T. Radó 及び F. Riesz によって工案せられて居ます[9]. それを擬凸状函数の場合に移入しませう.

空間 (x) に単葉領域 $\mathfrak{D}$ を考へます. $\varphi(x) = \varphi(P)$ を $\mathfrak{D}$ に於て定義せられた一価実数値函数とし, 上方半連続且つ有界と考へます. r を決った半徑とし, $\mathfrak{D}_1$=$\mathfrak{D}^{(r)}$ の一点 (x') を中心として, 半徑 r の多円筒 (γ), $|x_i - x'_i| < r$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を描き, Lebesgue 積分 に依て,

$$\varphi_1(x') = \frac{1}{K} \int_{(\gamma)} \varphi(P)\, dP, \qquad K = (\pi r^2)^n$$

を考へます. $\varphi(x')$ は有限確定です. $\varphi_1(x)$ は $\mathfrak{D}^{(r)}$ に於て定義せられて居ます. 函数 $\varphi(x)$ から函数 $\varphi_1(x)$ を作る 此の操作を記号

$$\varphi_1(x) = A_r[\varphi(x)]$$

に依て表します. $\varphi_1(x)$ は, $\varphi(x)$ が有界ですから, 明かに連続です.

次に $\varphi(x)$ を $\mathfrak{D}$ に於ける擬凸状函数とします. 先づ, $\varphi_1(x)$ は $\mathfrak{D}_1$ で矢張り擬凸状 であることを云ひませう. $\mathfrak{D}_1$ の一点 P_0 を中心として, P_0 を通る一つの固有二次元平面上に半徑 ρ の円 (C) を描き, 其の周を C とします. (C) 及び C は $\mathfrak{D}_1$ に含まれる様にします. C 上の φ_1 の平均値

$$m = \frac{1}{2\pi\rho} \int_C \varphi_1(P)\, dP$$

[9] T. Radó: Remarques sur les fonctions subharmoniques, 1928, (C.R.).
F. Riesz: Sur les fonctions subharmoniques, Partie II, 1930, (Acta.).

を考察しませう. 空間 (X) に多円筒 (Γ), $|X_i| < r\ (i=1,2,\cdots,n)$ を描き, 其の任意の点を $Q\,(X)$ とし, $\mathfrak{D}_1$ の任意の点を $P\,(x)$ として,

$$\psi(P,Q) = \varphi(x+X)$$

と書き表しますと

$$\varphi_1(P) = \frac{1}{K}\int_{(\Gamma)} \psi(P,Q)\,dQ,$$

従って

$$m = \frac{1}{K_1}\int_C dP\int_{(\Gamma)}\psi(P,Q)\,dQ, \qquad K_1 = 2\pi\rho K$$

です. 所で, $\psi(P,Q)$ は (P,Q) に関して上方半連続且つ有界であって, 従って全体として有界な連続函数列の極限と考へられますから, 此の積分の順序を変へることが出来ます. $\psi(P,Q)$ は $\mathfrak{D}_1$ に於て, (x) に関する擬凸状函数ですから,

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int_C \psi(P,Q)\,dP \geq \psi(P_0,Q)$$

であって,

$$\frac{1}{K}\int_{(\Gamma)}\psi(P_0,Q)\,dQ = \varphi_1(P_0)$$

ですから,

$$m \geq \varphi_1(P_0)$$

となります. P_0 及び C は上述の条件以外は任意ですから, $\varphi_1(x)$ は $\mathfrak{D}_1$ で擬凸状です.

次に, $\underline{r \geq r_1 \geq r_2 > 0\ \text{としますと},\ \mathfrak{D}_1\ \text{に於て}}$

$$A_{r_1}[\varphi] \geq A_{r_2}[\varphi] \geq \varphi$$

$\underline{\text{であること}}$ を申します. 正数 ρ_j, $\rho'_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ を

$$r \geq \rho_1 > \rho'_1, \quad r \geq \rho_k = \rho'_k \qquad (k=2,3,\cdots,n)$$

となる様に撰び, $\mathfrak{D}_1$ の任意の点 (x^0) を中心として, 半径 ρ_j の多円筒 (δ) と半径 ρ'_j の多円筒 (δ') とを描き, Lebesgue 積分に依て, (δ) 及び (δ') に於ける $\varphi(x)$ の算術平均を考へ, 夫々 M, M' とします. x_1- 平面上の円, $|x_1 - x_1^0| < \rho_1$ 及び $|x_1 - x_1^0| < \rho'_1$ を夫々 A, A' とし, 空間 $(x_2, x_3, \cdots, x_n)$ の多円筒, $|x_k - x_k^0| < \rho_k\ (= \rho'_k,\ k=2,3,\cdots,n)$ を B とします. x_1- 平面上の任意の点を $P\,(x_1)$, 空間 $(x_2,x_3,\cdots,x_n)$ の任意の点を $Q\,(x_2,x_3,\cdots,x_n)$ として, $\varphi(x) = \varphi(P,Q)$ と書き表します. $\varphi(x)$ は上方半連続かつ有界ですから,

$$M = \frac{1}{K'}\int_B dQ\int_A \varphi(P,Q)\,dP, \qquad M' = \frac{1}{K''}\int_B dQ\int_{A'}\varphi(P,Q)\,dP,$$

$$K' = \pi^n(\rho_1\rho_2\cdots\rho_n)^2, \qquad K'' = \pi^n(\rho'_1\rho'_2\cdots\rho'_n)^2$$

です．暫く Q を Δ の定点と見ます．然うしますと, $\varphi(P,Q)$ は x_1 に関する劣調和函数ですから, 円 A, A' の境界を夫々 α, α' とし, α, α' 上に於ける $\varphi(P,Q)$ の算術平均を夫々 μ, μ' としますと

$$\mu \geq \mu'$$

です．此のことは次の二つのことに注意すれば直ちに分ります: α 上で $\varphi(P,Q) \leq 0$ ならば $\mu' \leq 0$ であること, 及び若し $\varphi(P,Q)$ が x_1 に関する調和函数ならば, $\mu = \mu'$ であること．それ故, 次の二つの積分が, P の極座標を (ρ,θ) とするとき, ρ, θ に関する任意の順序の逐次積分として表しうることから,

$$\frac{1}{\pi\rho_1^2}\int_A \varphi(P,Q)\,dP \geq \frac{1}{\pi{\rho'_1}^2}\int_{A'} \varphi(P,Q)\,dP$$

となります．故に

$$M \geq M'.$$

従って,

$$A_{r_1}[\varphi] \geq A_{r_2}[\varphi].$$

$A_{r_2}[\varphi] \geq \varphi$ については, 同様にして, 一層簡単に分ります．

r_p $(p = 1, 2, \cdots)$ を逓減して 0 に収斂する正数列としますと, 函数列 $A_{r_p}[\varphi]$ は, 上述のことから, 逓減します (逓増しません)．且つ全体として有界です．故に, 収斂します．其の極限を $\Phi(x)$ としますと, $\Phi(x)$ は $\mathfrak{D}$ で存在します．所で $A_{r_p}[\varphi] \geq \varphi$ ですから,

$$\Phi(x) \geq \varphi(x)$$

です．他方 $\varphi(x)$ は上方半連続ですから,

$$\Phi(x) \leq \varphi(x)$$

です．故に, $\Phi(x) = \varphi(x)$ です．か様に, 函数列 $A_{r_p}[\varphi]$ は <u>逓減して φ に収斂</u>します．其の各函数は $\mathfrak{D}^{(r_p)}$ に於て定義せられた連続な擬凸状函数です．

次に $\varphi(x)$ が有界でない場合を考へます．

$$\psi_p(x) = \max[\varphi(x), -p] \qquad (p = 1, 2, \cdots)$$

を作りますと, 此の函数列は逓減し, 其の極限は $\varphi(x)$ です．又其の各函数は有界な擬凸状函数です．故に, 結局上の場合と同じ結果に到達します．

改めて $\varphi(x)$ を $\mathfrak{D}$ に於ける連続実数値函数とします．$\mathfrak{D}_1$ に於て $\varphi_1(x) = A_r[\varphi(x)]$ を考へます．x_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を実部と虚部とに分ち

$$x_j = u_j + i\,v_j$$

としますと, $\varphi_1(x)$ は $\mathfrak{D}_1$ に於ける連続函数であって, 明かに u_j, v_j に関する<u>連続な第一階偏微係数</u>を持ちます．此の操作を重ねますと,

$$\varphi_2(x) = A_r[\varphi_1(x)] = A_r^2[\varphi(x)]$$

は $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1^{(r)}$ に於ける連続函数であって, u_j, v_j に関する連続な第一及び第二階偏微係数を持つこと, 上述のことに依て明かです. 尚, $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}^{(2r)}$ です.

$\varphi(x)$ を, 其の上 $\mathfrak{D}$ に於て擬凸状であるとします. 既に見ました様に, $\varphi_1(x)$ は $\mathfrak{D}_1$ に於ける擬凸状函数, 従って $\varphi_2(x)$ は $\mathfrak{D}_2$ に於ける擬凸状函数です.

r を 0 に収斂させますと, $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ は $\mathfrak{D}$ の完全内部に於て, $\varphi(x)$ に斉一に収斂します. 此の際 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ が決して増大しないことも, 既述のことに依て明かです.

$\varphi(x)$ を $\mathfrak{D}$ に於ける連続擬凸状函数とし, u_j, v_j に関する第二階までの連続な偏微係数を持つと考へます. 定理 4 に依て, $\mathfrak{D}$ の各点に於て, (任意の実数系 (α, β) に対して)

$$W(\varphi;\, \alpha, \beta) \geq 0$$

です. 今 ε を任意の正数とし,

$$\lambda(x) = \varepsilon \sum_j (u_j^2 + v_j^2) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

として,

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lambda(x)$$

を作りますと,

$$\begin{aligned} W(\psi;\, \alpha, \beta) = \sum_j \sum_k \Bigg[&\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_j \partial u_k} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v_j \partial v_k} \right) (\alpha_j \alpha_k + \beta_j \beta_k) \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_j \partial v_k} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_k \partial v_j} \right) (\alpha_j \beta_k - \alpha_k \beta_j) \Bigg] \\ &\qquad\qquad\qquad (j, k = 1, 2, \cdots, n) \\ = W(\varphi;\, &\alpha, \beta) + W(\lambda;\, \alpha, \beta). \end{aligned}$$

$$\therefore W(\psi;\, \alpha, \beta) \geq 2\varepsilon \sum_j (\alpha_j^2 + \beta_j^2) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

$\mathfrak{D}'$ を $\mathfrak{D}$ 内に与へられた単葉有界領域としました時, 正数 ε を充分小さく撰べば, $|\varphi - \psi|$ の $\mathfrak{D}'$ に於ける上端は如何程でも小さくなります.

これ迄 $\mathfrak{D}$ を単葉領域として御話しましたが, 之は単に用語を簡明にするためでした. 上に述べた所が, $\mathfrak{D}$ が単葉でない場合に対しても其の儘成立することは, 今や明白と考へます. 以上を纏めますと:

定理 6 — $\varphi(x)$ を空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ に於ける擬凸状函数とすれば, $\mathfrak{D}$ を極限とする $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{D}_{p+1}$ なる領域の列 $\mathfrak{D}_p$ と, $\varphi(x)$ を極限とする逓減函数列 $\varphi_p(x)$ $(p = 1, 2, \cdots)$ とを, 次の条件を充たす様に撰ぶことが出来る：
各 $\varphi_p(x)$ は $\mathfrak{D}_p$ に於て, x_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ の実部及び虚部に関し第二階までの連続な偏微係数を持つ様な連続実数値函数であって, 任意の実数系 (α, β) に対し

$$W(\varphi_p;\, \alpha, \beta) \geq \varepsilon_p \sum_j (\alpha_j^2 + \beta_j^2) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

となること．ここに ε_p は p のみに従属する正数である．若し更に $\varphi(x)$ が $\mathfrak{D}$ に於て連続ならば，函数列 φ_p を，加ふるに $\mathfrak{D}$ の各点に於て斉一に収斂する様に撰ぶことが出来る．

之から容易に次の定理が得られます：

定理 7 — 擬凸状函数は一対一擬等角写像を許容する．

証明　定理 6 の函数列の各 $\varphi_p(x)$ は，定理 4 の前半に依て，$\mathfrak{D}_p$ に於て擬凸状であって，後半に依て，擬等角写像を許容します．故に，$\varphi(x)$ に就ても同様です．(証明終)

7 — 定理 5 に於て，φ の第一階偏微係数が同時に 0 にならないこと を仮定しました．これに対処する方法が問題として残って居ます．$n = 2$ の場合には，直接此の仮定を除去出来ましたが，一般の場合に同じことが云へるかどうかは容易に分りません．此の点を補填して，此の予備的研究を終りませう．

空間 (x) の 単葉有界 領域 $\mathfrak{D}$ と $\mathfrak{D}$ の近傍に於ける 連続実数値 函数 $\varphi(x)$ とを考へます．x_j を実部と虚部とに分ち

$$x_j = u_j + i\,v_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

とします．ε を与へられた正数とするとき，(u, v) に関する実係数の多項式 $\Phi(u, v) = \Phi(x)$ を，$\mathfrak{D}$ に於て $|\varphi(x) - \Phi(x)| < \varepsilon$ となる様に撰ぶことが出来ることが，C. Weierstrass 及び其の他の人達に依てよく知られて居ます．此処から出発しませう．

先づ前節で述べた操作

$$\varphi_1(x) = A_r[\varphi(x)] = \frac{1}{K}\int_{(\gamma)} \varphi(P)\,dP, \qquad K = (\pi r^2)^n$$

を量的に少し調べませう．$\mathfrak{D}$ に於て $|\varphi(x)| \leq M$ としますと，$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}^{(r)}$ に於て，

$$|\varphi_1(x)| \leq M \tag{1}$$

です．次に $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}$ を評価します．x 平面上に半径 r の二つの円を (ユークリッド幾何学的) 距離 h $(h < 2r)$ だけ離して描きますと，(二円の一方にぞくし他方にぞくしない点の集合として) 二つの月形が出来ます．其の面積は合せて $4rh$ より小です．之から，簡単に $\mathfrak{D}_1$ に於て

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right| \leq \frac{4M}{\pi r} \tag{2}$$

であることが分ります．$v_1, u_2, \cdots, v_n$ に就ても同様です．次に

$$\varphi_2(x) = A_r[\varphi_1(x)]$$

を調べます. ξ, η を何れも $u_1, v_1, u_2, \cdots, v_n$ の任意の一つとしますと,

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = A_r\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\right]$$

です. 従って,

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} A_r\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right]$$

です. 故に, (1) と (2) とに依て, $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1^{(r)}$ に於ける次の評価が得られます:

$$\left|\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi \partial \eta}\right| \leq \left(\frac{4}{\pi r}\right)^2 M. \tag{3}$$

$\Phi(x)$ を $\mathfrak{D}$ の近傍に於ける第二の連続実数値函数とし, $\mathfrak{D}$ に於て

$$|\varphi(x) - \Phi(x)| \leq \varepsilon$$

とします. $A_r[\Phi] = \Phi_1, A_r[\Phi_1] = \Phi_2$ としますと, 此処で問題になって居る演算は何れも線型ですから, 夫々(2) 或は (3) から

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}\right| \leq \frac{4\varepsilon}{\pi r}, \\ &\left|\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi \partial \eta}\right| \leq \left(\frac{4}{\pi r}\right)^2 \varepsilon \end{aligned} \tag{4}$$

が夫々$\mathfrak{D}_1$ 或は $\mathfrak{D}_2$ に於て成立します.

$\varphi(x)$ を, 改めて $\mathfrak{D}$ の近傍に於ける, <u>第二階までの (u, v) に関する連続な偏微係数を持つ様な連続実数値函数</u> とします. $\varepsilon > 0$ を与へますと, 次の様な $\eta > 0$ が対応します: $|x'_j - x''_j| < \eta$ を満足する様な $\mathfrak{D}$ の二点 $(x'), (x'')$ に対して, 常に

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{\partial \varphi(x')}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi(x'')}{\partial \xi}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial^2 \varphi(x')}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi(x'')}{\partial \xi \partial \eta}\right| < \varepsilon.$$

演算 A_r に於て,

$$r = \eta$$

ととりますと, $\varphi_1(x)$ は $\mathfrak{D}_1$ に於て次の関係を満足します:

$$|\varphi_1(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

$\varphi_2(x)$ については, 上の関係から, (1) に依て, $|\varphi_2 - \varphi_1| < \varepsilon$ となりますから, $\mathfrak{D}_2$ に於て,

$$|\varphi_2(x) - \varphi(x)| < 2\varepsilon. \tag{5}$$

其の微係数に就ては, 例へば $\partial\varphi_2/\partial\xi = A_r[\partial\varphi_1/\partial\xi]$ ですから, 同様にして, $\mathfrak{D}_2$ に於て,

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right|<2\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}\right|<2\varepsilon. \tag{5}$$

$\Phi(x)=\Phi(u,v)$ を改めて u_j, v_j に関する $\underline{m\text{ 次の実係数の多項式}}$ とします. 前節で一応考へました様に, 空間 (X) に多円筒 (Γ), $|X_j|<r$ $(j=1,2,\cdots,n)$ を描き, 其の任意の点を $Q\,(X)$, $\mathfrak{D}_1$ の任意の点を $P\,(x)$ とし, X_j を実部と虚部とに分ち $X_j=U_j+iV_j$ として,

$$\Psi(P,Q)=\Phi(x+X)=\Phi(u+U,v+V)$$

と表しますと,

$$\Phi_1(x)=\frac{1}{K}\int_{(\Gamma)}\Psi(P,Q)\,dQ$$

となります. $\Phi(u+U,v+V)$ は矢張り (u,v) に関する m 次の実係数多項式ですから, Φ_1 は (u,v) に関する m 次を超えない実係数多項式です. 従って, Φ_2 に就ても同様です.

多項式 $\Phi(u,v)$ の第一階偏微係数に依て, 聯立方程式

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}=\frac{\partial\Phi}{\partial v_1}=\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}=\cdots=\frac{\partial\Phi}{\partial v_n}=0 \tag{E}$$

を作ります. 若し此の方程式 (E) を満足する点 (x) が有限個でなければ, $\Phi(u,v)$ の実係数を極く少し変へることに依て, Φ が此の性質を持つ様に出来ることを確かめませう. ε を与へられた正数として, 先づ,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}=0$$

を見ます. 之が恒等式でなければ $\Phi^{(1)}=\Phi$ と書き表します. 若し恒等式ならば

$$\Phi^{(1)}=\Phi-\varepsilon_1 u_1$$

の如く Φ を変形します. 此処に ε_1 は $\varepsilon_1<\varepsilon$ なる任意の正数です. 次に聯立方程式

$$\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial u_1}=\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial v_1}=0$$

を見ます. 若し此の方程式に依て表される集合体が, 其の上の何れの点の近傍を見ても, $(2n-2)$ 次元ならば, $\Phi^{(2)}=\Phi^{(1)}$ と書き表はします. 代数的集合体 $\partial\Phi^{(1)}/\partial u_1=0$ は, (u,v) が複素空間であるときと同様に, 一般に数個の解析的成分に分解します. 其の各成分上に任意の一点を定め, か様な点の全体を $P_1, P_2, \cdots$ とします. 若し上の場合が起こらないならば, $\partial\Phi^{(1)}/\partial v_1$ が之等の点でとる値の中には 0 が無ければなりません. それで此の時は正数 ε_1' を ε より小さく, 且つ之等の値の何れとも一致しない様に撰び, $\Phi^{(1)}$ を変形して

$$\Phi^{(2)}=\Phi^{(1)}-\varepsilon_1' v_1$$

とします. 此の $\Phi^{(2)}$ に就ては $\partial\Phi^{(2)}/\partial v_1$ は点 $P_1, P_2, \cdots$ で決して 0 となりません. 又

$$\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial u_1} = \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial u_1}$$

です. (一般に v_1 以外の任意の u_j, v_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ に就て其の通りです.) 故に, 新しい聯立方程式

$$\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial u_1} = \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial v_1} = 0$$

については, 第一の場合が現れます. 以下全く同様にして $\Psi = \Phi^{(2n)}$ に達します. Ψ は次の形です：

$$\Psi = \Phi - \sum_j (\varepsilon_j u_j + \varepsilon'_j v_j) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

ここに ε_j, ε'_j は 0 又は ε より小さな正数です. Ψ に関して方程式 (E) を作りますと, 此の (E) を満足する点 (x) は明らかに有限個です.

上述の $\varphi(x)$ 及び ε, η に就て, $\eta \leq \varepsilon$ とし, $\varepsilon' = \eta^2\varepsilon$ なる ε' をとり, (u, v) に関する実係数の多項式 $\Phi(u, v)$ を, $\mathfrak{D}$ に於て

$$|\varphi(x) - \Phi(x)| < \varepsilon'$$

となる様に撰びます. $r = \eta \leq \varepsilon$ ですから, (1) と (4) と (5) とから, $\Phi_2(x) = A_r^2[\Phi(x)]$ が $\mathfrak{D}_2$ に於て次の関係を充たすことが分ります：

$$|\varphi - \Phi_2| < \delta_1,$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi}\right| < \delta_2, \quad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\xi\partial\eta}\right| < \delta_3,$$

$$\delta_1 = (\varepsilon^2 + 2)\varepsilon, \quad \delta_2 = \left(\frac{4}{\pi}\varepsilon + 2\right)\varepsilon, \quad \delta_3 = \left(\frac{16}{\pi^2} + 2\right)\varepsilon.$$

此の $\Phi_2(u, v)$ は実係数の多項式です. 之をごく少し変形して, 新しい実係数の多項式を作り, 方程式 (E) が高々有限の点に依てのみ充たされる様に出来ます. か様にして次の結果が得られました.

≪ $\varphi(u, v)$ を単葉有界領域 $\mathfrak{D}$ の近傍に於ける第二階までの連続な偏微係数を持つ連続実数値函数とすれば, 与へられた正数 ε に対し, 実係数多項式 $\Phi(u, v)$ を $\mathfrak{D}$ の近傍に於て,

$$|\varphi - \Phi| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}\right| < \varepsilon$$

であって, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi}$ のすべてが, 高々有限個の点を除いて, 同時に 0 とならない様に撰ぶことが出来る.≫

従って定理 6 から, 直ちに次の結果が得られます.

定理 8 — $\mathfrak{D}$ を空間 (x) の単葉有界領域とし, x_j の実部及び虚部を夫々 u_j, v_j $(j=1,2,\cdots,n)$ とする. $\varphi(x)$ を $\mathfrak{D}$ の近傍に於ける連続な擬凸状函数とすれば, 与へられた正数 ε に対し, 実係数多項式 $\Phi(u,v)$ を, $\mathfrak{D}$ の近傍で $|\varphi-\Phi|<\varepsilon$ であって, 其の總ての第一階偏微係数が, 高々有限個の点を除いて, 同時に 0 となることなく, 且つ $\mathfrak{D}$ の近傍で $((0,0)$ と異なる任意の実数系 (α,β) に対し) $W(\Phi;\alpha,\beta)>0$ となる様に撰ぶことが出来る.

(第九報告終　3. 10. 24)