多変数解析函数に就て

X — 第二基礎的補助定理

擬凸状域は有界葉擬凸状部分領域の極限であることを御話します[1].

1　≪ 此の論文に於ても, 領域が 有限であって分岐点を内点としない と云ふ条件は一々明示しません.≫

先づ一二の用語を説明します.

定義 — n 複素変数の空間 (x) 内の領域を $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数からなる一つの函数族を $(\mathfrak{F})$ とする. $\mathfrak{D}$ が $(\mathfrak{F})$ に関して凸状とは, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ に関して有界な[2] $\mathfrak{D}$ の任意の部分開集合とするとき, $\mathfrak{D}_0$ を其の一部分とする様な $\mathfrak{D}$ に関して有界な $\mathfrak{D}$ の部分集合 $\mathfrak{D}'$ が対応し, $\mathfrak{D}'$ に属しない $\mathfrak{D}$ の任意の点 P に対し, $(\mathfrak{F})$ 中に少くとも一つの函数 f があって,

$$|f(p)| > \max |f(\mathfrak{D}_0)|$$

となることを云ふ. $\mathfrak{D}$ が共通点を持たない数個 (有限又は無限) の領域の和であるときも同様に名づける. [3]

$\mathfrak{D}$ を空間 (x) の領域とし, E を其の部分集合とします. E の任意の無限点列が $\mathfrak{D}$ に少くとも一つの集積点を持つとき, E は $\mathfrak{D}$ の 完全内部 にあると云ひます. 領域 $\mathfrak{D}$ の部分集合 E が $\mathfrak{D}$ の完全内部にあることを 記号 $\underline{E \Subset \mathfrak{D}}$ を以て表します. [4]

$\underline{E \Subset \mathfrak{D}}$ ならば, E は有界且つ有界葉である ことが容易に分ります[5]. 此の名称及び記号を拡張して, $\mathfrak{D}$ が共通点を持たない領域 $\mathfrak{D}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ の和である場合にも及ぼします. このとき $E \Subset \mathfrak{D}$ ならば, E は $\mathfrak{D}_i$ の有限個の和の部分であること明かです.

---

[1] 精密な形については第四節の定理, 意義に就ては第一節参照.

[2] $\mathcal{D}_0$ が $\mathcal{D}$ に関して有界とは, $\mathcal{D}_0$ が有界であって, 其の $\mathcal{D}$ に関する最短距離が 0 でないことを云ひます (前報告第一節).

[3] 之は H. Cartan–P. Thullen の K–凸性を簡約したものに外なりません.

[4] 前報告第一節の脚註参照.

[5] 証明. $\mathcal{D}$ は有限領域ですから, E は明らかに有界でなければなりません. 次に, E が有界葉でないと假定しませう. 然うしますと, 任意の正の整数 m に対し, E には同じ基点 $\underline{P_m}$ を持つ様な m 個の点 P_{mi} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ が無ければなりません. $\underline{P_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ の集積点の一つを $\underline{M}$ とします. $\underline{M}$ を基点とする $\mathcal{D}$ の点は (よし存在しても) 可附番個です. 之を M_j $(j = 1, 2, \ldots)$ とします. 各 M_j に就て, $\rho_j > 0$ を充分小さくとれば, $\mathcal{D}$ は $\underline{M}$ を中心とし ρ_j を半徑とする多円筒と同等であって, M_j を含む様な部分領域 (γ_j) を持ちます. 二重点列 P_{mi} から点 Q_k $(k = 1, 2, \ldots)$ を次の様に撰びます : Q_k の基点 $\underline{Q_k}$ は $\underline{M}$ を中心とし $1/k$ を半徑とする多円筒に含まれ, Q_k は $(\gamma_1), (\gamma_2), \ldots, (\gamma_k)$ の何れにも属しないこと. Q_k は明らかに存在します. か様にして得た点列 Q_k は $\mathcal{D}$ の如何なる点にも集積しないこと明白です. 故に, E は有界葉でなければなりません.

第一次研究 (第一乃至第六報告) で取り扱った問題は擬凸状域は正則域かと云ふことと, 正則域内で P. Cousin の二つの問題や函数の表現に関する諸問題が解けるかと云ふことと, 二つでした. 正則域に就ては, 其処で基本的な役割をしたのは第二報告の定理と, 正則域は其の中で正則な函数の全体に関して凸状であると云ふ H. Cartan–P. Thullen の定理とであって, 我々は之等に依て, 単葉正則域に関する上の諸問題を, 有理整函数に関する凸状域のそれに還元したのです. 同じ方針で多葉正則域を処理するためには, 次の問題を解かなければなりません：

a, 正則域 $\mathfrak{D}$ が与へられた時, 逓増して $\mathfrak{D}$ に収斂する様な $\mathfrak{D}$ の部分領域の列 $\mathfrak{D}_p$ $(p=1,2,\ldots)$ を, $\mathfrak{D}_p \Subset \mathfrak{D}$ であって, $\mathfrak{D}_p$ が $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体に関して凸状である様に撰ぶこと.

所で, Cartan–Thullen の同時解析接続の可能性に関する基礎定理 は, $\mathfrak{D}$ が無限葉になれば, 最早や此の問題に解決を与へません[6]. 他にも, 直接的方法は, 私には見当りません.

擬凸状域に移りませう. 第一次研究から推して, 此処には次の問題のあることが分かります：

b, 擬凸状域 $\mathfrak{D}$ が与へられた時, 逓増して $\mathfrak{D}$ に収斂する様な, 擬凸状な $\mathfrak{D}$ の部分領域の列 $\mathfrak{D}_p$ $(p=1,2,\ldots)$ を, $\mathfrak{D}_p \Subset \mathfrak{D}$ となる様に撰ぶこと.

所で, 我々は擬凸状域が正則域であることを何れは証明しようと云ふのですが, 先づ此のことを有界葉の場合に就て云って置けば, b を解くことによって, 同時に略々 a を解決することが出来ます. 此の論文の課題が b であることは始めに申しましたが, それはか様な理由に依て撰んだのです.

2 — 新しく遭遇した問題を b から抽き出しますと：

c, $\mathfrak{D}$ を空間 (x) の領域 (擬凸状でなくてもよい) とし, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ に関して有界な $\mathfrak{D}$ の部分領域とする. 此の時 $\mathfrak{D}_0$ に於て, 連続実数値函数 $\lambda_0(P)$ を次の二つの条件を充たす様に見出すこと： 1° $\lambda_0(P)$ は擬凸状

[6] 此の点に関する Behnke–Thullen の著書の所論は間違って居ます (第六章 §1, 特に Folgerung 1 b 証明参照). 問題の性質を明かにする為一度実例を見て置きませう. z を複素変数とし, $\log z$ に随伴する Riemann 面上に, 其の座標が $0<|z|<3$ を充たす様な点のすべてからなる領域 $\mathcal{D}$ と, その極座標 (r,θ) が $1<r<2, -2\pi<\theta<2\pi$ を充たす様な点のすべてからなる領域 $\mathcal{D}_0$ とを考へます. $\mathcal{D}$ は正則域であって, $\mathcal{D}_0 \Subset \mathcal{D}$ です. 此の時第三の領域 $\mathcal{D}'$ を $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}' \Subset \mathcal{D}$ であって, $\mathcal{D}$ に於ける正則函数の全体に関して凸状である様に撰べと云ふのが問題です. [此の際は $\mathcal{D}'=\mathcal{D}_0$ ととればよろしい. 然し之は, 特殊函数 $\mathrm{e}^{-i\log z}$ (i は虚単位) の存在がこのことを教へるのであって, 此の部分は Cartan–Thullen の基礎定理とは関係がありません.]

函数であること. 2° 任意の実数 c に対し, $\lambda_0(P) < c$ を満足する $\mathfrak{D}_0$ の点の集合は (若し存在すれば) 有界葉であること.

第二の条件を充たす連続実数値函数は素朴な概念の中から幾らでも見出せます. 其の内最も自然と思はれるものをとって見ませう. $\mathfrak{D}'$ を, $\mathfrak{D}$ に関して $\mathfrak{D}_0$ と同じ性質であって, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}'$ に関して有界な $\mathfrak{D}'$ の部分領域とする様な領域とします. $\mathfrak{D}_0$ 内に一点 O を定め, O から $\mathfrak{D}'$ の点 P へ, $\mathfrak{D}'$ 内のみを通って行く経路の長さの下端を $\lambda(P)$ とします.

P_0 を $\mathfrak{D}'$ の任意の定点とし, P_0 を中心として $\mathfrak{D}'$ 内にある様な多円筒 (Γ) を描きます. (Γ) の任意の二点を P_1, P_2 とし, P_1, P_2 の (ユークリッド幾何学的) 距離を $d(P_1, P_2)$ で表しますと,

$$|\lambda(P_1) - \lambda(P_2)| \leq d(P_1, P_2). \tag{1}$$

故に, $\lambda(P)$ は 連続函数 です.

函数 $\lambda(P)$ が性質 2° を持つこと は略々明かですが, 確かめて置きませう. $\mathfrak{D}'$ の $\mathfrak{D}$ に関する最短距離 (前報告第一節参照) を η とします. x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を実部と虚部とに分ち $x_j = u_j + iv_j$ とします. $u_j =$ 常数, 及び $v_j =$ 常数 なる形の超平面に依て, $\mathfrak{D}$ を一辺が $\rho = \eta/\sqrt{2}$ である様な $2n$ 次元立方体に分ち, 其の中 $\mathfrak{D}'$ の点を内点又は境点として持つものを, 一般に (α) で表します. (α) は $\mathfrak{D}$ の部分領域であって, 完全な $2n$ 次元立方体です. 此の際点 O が (α) の何れかに含まれる様にし, O を含むものを (α_0) とします.

R を与へられた正数とし, $\lambda(P) < R$ を充たす $\mathfrak{D}'$ の点の集合を $\mathfrak{D}'_R$ で表します. P を $\mathfrak{D}'_R$ の任意の点としますと, O と P とを $\mathfrak{D}'$ 内のみを走る, 長さが R より小な, 曲線 L に依て結ぶことが出来ます. O を中心として, $\mathfrak{D}$ 内に半径 ρ の多円筒を描き, L が始めて其の境界と交はる点を Q_1 とし, Q_1 を中心として, $\mathfrak{D}$ 内に半径 ρ の多円筒を描き, L の弧 (Q_1, P) が始めて其の境界と交はる点を Q_2 とし, 以下同様にして, Q_m に到って, Q_m を中心として $\mathfrak{D}$ 内に描いた半径 ρ の多円筒が L の弧 (Q_m, P) (又は点 $Q_m = P$) を全部含んだとします. 明かに,

$$m \leq R/\rho \qquad (\rho = \eta/\sqrt{2}).$$

$\mathfrak{D}'$ の任意の一点を中心とし ρ を半径として, $\mathfrak{D}$ 内に描いた多円筒を (γ) としますと, (γ) の $\mathfrak{D}'$ 内の部分と共通点を持つ様な (α) の数は 9^n を超えないこと明白です. 故に, 曲線 L の少くとも一点を内点とする様な (α) の数は

$$m_1 = 9^n(m+1)$$

を超えません.

(α_0) と界点を共有する様な, (α_0) と異なる (α) を一般に (α_1) とし, (α_1) の何れかと界点を共有する様な, $(\alpha_0), (\alpha_1)$ と異なる (α) を一般に (α_2) とし, 以下同様にして, (α_{k-1}) の何れかと界点を共有するような, $(\alpha_0), (\alpha_1), \ldots, (\alpha_{k-1})$ と異なる (α) を一般に (α_k) とします. (α_k) $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ の数を N_k としますと, $N_0 = 1$, $N_1 \leq 9^n - 1$, $N_2 \leq (9^n - 1)^2, \ldots$, 一般に $N_k \leq (9^n - 1)^k$.

以上見ましたことから, $\mathfrak{D}'_R$ は $(\alpha_0), (\alpha_1), \ldots, (\alpha_{m_2})$, $\quad m_2 = m_1 - 1$, と其の境界との和の一部分であることが直ちに分ります. か様な (α) の總数を m_3 としますと,

$$m_3 = N_0 + N_1 + \cdots + N_{m_2} \leq N(\eta, R),$$

此処に $N(\eta, R)$ は η と R とに依て定まる或る正数です. 從って, $\mathfrak{D}'_R$ の葉数は $N(\eta, R)$ を超えません. 故に, $\lambda(P)$ は性質 2° を持ちます.

性質 1° に就ては, $\lambda(P)$ が不等式 (1) に依て表される特性を持つことに着目しませう. それで, 前報告の第六及び第七節で説明した方法に依て, 先づ $\lambda(P)$ の連続度を高め次に之を少し補正しませう.

正数 r を (相当小さく) 定め,

$$\lambda_1(P') = A_r[\lambda(P')] = \frac{1}{\pi^n r^{2n}} \int_{(\gamma)} \lambda(P)\, dP$$

を考へます. 此処に (γ) は $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}'^{(r)}$ の任意の点 P' を中心とする半径 r の $\mathfrak{D}$ に属する多円筒です. $\lambda(P)$ は $\mathfrak{D}'$ で定義せられた連続函数ですから, $\lambda_1(P)$ は $\mathfrak{D}_1$ で定義せられた連続函数であって, u_j, v_j $(j = 1, 2, \ldots n)$ に関する連続な第一階偏微係数を持って居ます. 所で, $\lambda(P)$ は関係 (1) を充たしますから, ξ を u_j, v_j の任意の一つとしますと, $\mathfrak{D}_1$ で

$$\left| \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi} \right| \leq \frac{4}{\pi} \tag{2}$$

であることが容易に分ります. 次に

$$\lambda_2(P) = A_r[\lambda_1(P)]$$

を考へます. $\lambda_2(P)$ は $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1^{(r)}$ に於ける連続函数であって, u_j, v_j に関する連続な第二階までの偏微係数を持って居ます. η を u_j, v_j の任意の一つとしますと, (2) から

$$\left| \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \xi \partial \eta} \right| \leq \frac{16}{\pi^2 r} \tag{3}$$

であることが直ちに分かります．又，P' を $\mathfrak{D}_1$ の任意の一点とし P を上述の P' を中心とする多円筒 (γ) の任意の一点としますと，(1) に依て，$|\lambda(P')-\lambda(P)|<\sqrt{n}\,r$ ですから，$\mathfrak{D}_2$ で

$$(4)\qquad |\lambda_2(P)-\lambda(P)|<2\sqrt{n}\,r.$$

半径 r を充分小さく撰んで，$\mathfrak{D}_0\subset\mathfrak{D}_2$ となる様にします．M を正数として，

$$(5)\qquad \lambda_0(P)=\lambda_2(P)+M\sum_j u_j^2 \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

を考へますと，$\lambda_0(P)$ は $\mathfrak{D}_0$ に於ける連続実数値函数であって，(u,v) に関する第二階までの連続な偏微係数を持って居ます．$\lambda_2(P)$ は不等式 (3) を充たしますから，M を $1/r$ に比べて充分大きく撰びますと，$\mathfrak{D}_0$ に於て，$(0,0)$ と異なる任意の実数系 (α,β) に対して

$$W(\lambda_0;\alpha,\beta)>0$$

となること明かです．故に，前報告の定理 4 に依て，$\lambda_0(P)$ は $\mathfrak{D}_0$ に於ける擬凸状函数です．性質 2° については，$\mathfrak{D}_0$ は有界ですから，不等式 (4) に依て，$\lambda(P)$ を変形して $\lambda_0(P)$ にしても失はれないことが分かります．か様に，<u>此の $\lambda_0(P)$ は問題 c の一つの解です．</u>

上に述べたことは，(5) に於て $M\,\Sigma\,u_j^2\geq 0$ ですから，<u>$\mathfrak{D}_0$ が有界でなくても成立</u> します．擬凸状域に関するユークリッド的境界距離を $d(P)$ としますと，$-\log d(P)$ は擬凸状函数です (前報告，定理 3)．此の二つの結果に依て，問題 b を解くことは容易です[7]．

<u>3</u> — 上述の結果を今少し精緻な形にしませう．先づ次のことを証明します．

<u>$\mathfrak{D}$ を空間 (x) の領域，Δ を $\Delta\Subset\mathfrak{D}$ なる部分領域とし，$\varphi(P)$ を $\mathfrak{D}$ 上の Δ の近傍に於ける連続擬凸状函数とする．正数 ε が与へられた時，$\mathfrak{D}$ 上の Δ の近傍に於て，連続擬凸状函数 $\Phi(P)$ を撰び，$|\Phi(P)-\varphi(P)|<\varepsilon$ であって，高々有限個の例外点以外の任意の点 P_0 に対し，其の近傍に於て，P_0 を通る正則な固有面が対応し，此の点を除けば，$\Phi(P)>\Phi(P_0)$ の部分にのみ存在する，と云ふ性質を持たしめることが出来る．</u>

[7] $\varphi(P)$ を空間 (x) の領域 $\mathcal{D}$ に於ける擬凸状函数とし，実数 c に対し $\varphi(P)<c$ を充たす $\mathcal{D}$ の点の集合を $\mathcal{D}_c$ としますと，$\mathcal{D}_c$ は開集合です．其の一つの連結成分を Δ とします．此の時，若し Δ の界点が總て $\mathcal{D}$ に属するならば，Δ は擬凸状域です．之から上述の結果が直ちに出ます．此のことは，未だ証明して居ませんが，後に自ら明らかになります．

之は前報告, 定理 8 の拡張でありまして, 以下に述べます様に, 此の定理 8 に依て, 第八報告定理 1 の証明の之に相当する部分と同様にして, 容易に立証出来ます.

証明　複素変数 z の平面上に, 正方形 R を其の四辺が実軸又は虚軸に平行になる様に描きます. R の平行な二対の辺の各の間に, それ等に平行であって等間隔な $m-1$ 個の直線を引き, R を m^2 個の小正方形 (開集合) に分ち, 其の任意の一つを α で表します. 各 α の位置を明示するには, α_{pq} に依て, それが左から p 番目, 下から q 番目の小正方形であることを表します. また α, α_{pq} が平面 x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 上にあることを示すには, $\alpha^{(i)}, \alpha_{pq}^{(i)}$ を用ひます. $\alpha_{pq}^{(i)}$, 及び之と少くとも一界点を共有する 8 個の小正方形 (及びそれ等の共通境界の適当な部分) の和なる正方形を, $\beta_{pq}^{(i)}$ を以て表します. 筒状域 $x_i \in \alpha^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を (α) によって表します. (β), (R) についても同様です.

$\Delta \Subset \mathfrak{D}$ ですから, Δ は有界です. R を $2n$ 次元立方体 (R) が Δ の基集合 $\underline{\Delta}$ を其の境点と共に含む様に描きます. $(\alpha), (\beta)$ と同等な $\mathfrak{D}$ の部分を夫々 $(A), (B)$ とします. m を充分大きくとって, 或る Δ の点を含む任意の (B) は必ず完全な形となる様にします. 更に, 函数 $\varphi(P)$ は ($\mathfrak{D}$ 上の) Δ の近傍で定義せられて居ますが, 之等 (特殊) の (B) はすべて其の境界と共にこの範囲内にある様にしませう. α の一辺の長さを ρ とします. z, x_j $(j=1,2,\ldots,n)$ を実部と虚部とに分け

$$z = x + i\,y, \quad x_j = u_j + i\,v_j \qquad (i\text{ は虚単位})$$

とします. z 平面上の正方形 R の左辺及び下辺が夫々

$$x = a, \quad y = b$$

上にあるとして, 正数 ε' をとり, $\alpha_{pq}^{(k)}$ に実数値函数

$$g_k(x_k) = \varepsilon' \sum_{\lambda=0}^{p-1} (u_k - a - \lambda\rho) + \varepsilon' \sum_{\mu=0}^{q-1} (v_k - b - \mu\rho)$$

を附随せしめます. 次に $\varphi(P)$ が定義せられて居る範囲内に存在する (A) に, 実数値函数

$$\psi(P) = \varphi(P) + \sum_{k=1}^{n} g_k(x_k)$$

を附随せしめます. 此処に (x) は点 P の座標であって, $g_k(x_k)$ は (A) の基領域 (α) の成分 $\alpha^{(k)}$ に附随するものです.

之等の函数 $\psi(P)$ は, 何れも Δ の近傍 ($\mathfrak{D}$ 上の) に於て存在します. 隣接する一対の (A) をとって, 対応する $\psi(P)$ を比較して見ませう. $(A)_1, (A)_2$

を一つの表面に依て隣接する二つの $2n$ 次元立方体 (A) とし, 其の基領域を夫々 $(\alpha)_1, (\alpha)_2$ とするとき, $(\alpha)_1, (\alpha)_2$ の x_k 平面上の成分が夫々

$$\alpha_{pq}^{(k)}, \qquad \alpha_{p+1,q}^{(k)}$$

であって, 他の座標平面上の成分がすべて相等しいと考へます. そうしますと $(A)_1, (A)_2$ の共通表面は超平面

$$u_k = a + p\rho$$

の上にあります. $(A)_1$ に附随する ψ を $\psi_1(P)$, $(A)_2$ のそれを $\psi_2(P)$ としますと,

$$\psi_2(P) = \psi_1(P) + \varepsilon'(u_k - a - p\rho)$$

ですから, $u_k \geq a + p\rho + \frac{1}{2}\rho$ 上に於ては,

$$\psi_2(P) \geq \psi_1(P) + \frac{\varepsilon'\rho}{2},$$

$u_k \geq a + p\rho - \frac{1}{2}\rho$ 上に於ては,

$$\psi_1(P) \geq \psi_2(P) + \frac{\varepsilon'\rho}{2}.$$

$\psi(P)$ は總て連続擬凸状函数です. (A) 中から, 之に対応する (B) (此の (A) を中央に持つ (B)) の近傍で $\varphi(P)$, 従って $\psi(P)$ が定義せられて居る様なものを, 任意に一つ撰び, $(A)_0$ とし, 之に対応する (B) を $(B)_0$, 之に附随する ψ を $\psi_0(P)$ とします. $(B)_0$ は単葉領域ですから, 前報告の定理 8 に依て, 正数 ε'' に対し, u_j, v_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ に関する実係数多項式 $\Psi_0(P)$ を, $(B)_0$ の近傍に於て,

$$|\psi_0(P) - \Psi_0(P)| < \frac{\varepsilon''}{2}$$

であって, 其の總ての第一階偏微係数が, 高々有限個の点を除いて, 同時に 0 となることなく, 且つ $(0, 0)$ と異なる任意の実数系 (α, β) に対し,

$$W(\Psi_0; \alpha, \beta) > 0$$

となる様に撰ぶことが出来ます.

上に述べた, 隣接した $(A)_1, (A)_2$ に就て, 之等に対応する (B) の各の近傍で $\varphi(P)$ が定義せられて居るとして, 之等に附随する, 上に述べた $\Psi(P)$ を夫々 $\Psi_1(P), \Psi_2(P)$ としますと, $u_k \geq a + p\rho + \frac{1}{2}\rho$ 上に於ては,

$$\Psi_2(P) > \Psi_1(P) + \frac{1}{2}\varepsilon'\rho - \varepsilon''$$

となり, $u_k \geq a + p\rho - \dfrac{1}{2}\rho$ 上に於ては,

$$\Psi_1(P) > \Psi_2(P) + \frac{1}{2}\varepsilon'\rho - \varepsilon''$$

となります. それで, ε'' を

$$\frac{1}{2}\varepsilon'\rho \geq \varepsilon''$$

となる様に撰びます.

Δ の任意の点を P_0 とします. P_0 を含む任意の (B) の近傍で $\varphi(P)$ が, 従って $\Psi(P)$ が定義せられて居ます. か様な $\Psi(P)$ をすべてとり, 上端

$$\Phi(P) = \max[\Psi(P)]$$

を考へます. 函数 $\Phi(P)$ は Δ で定義せられて居ます. 上に見ましたことから, $\Phi(P)$ は明かに連続函数です. $\Phi(P)$ と始めの函数 $\varphi(P)$ とを比較しますと,

$$|\psi - \Psi| < \frac{1}{2}\varepsilon'\rho, \quad |\psi - \varphi| < \sum_{k=1}^{n} |g_k|$$

であって, (x) が (R) にある限り

$$|u_k - a - \lambda\rho| < m\rho, \quad |v_k - b - \mu\rho| < m\rho,$$

従って

$$|g_k(x_k)| < 2\varepsilon' m^2 \rho$$

ですから, Δ に於て

$$|\varphi(P) - \Phi(P)| < (2m^2 + \frac{1}{2})\rho\,\varepsilon'$$

です. 右辺は ε' を小さく撰べば, 如何程でも小さくなります. $\Psi(P)$ は擬凸状函数ですから, $\Phi(P)$ も然うです. $\Psi(P)$ は, 前報告の定理 5 に依て, (B) の近傍で命題に述べた固有面に関する性質を持ちます.

故に $\Phi(P)$ は Δ の各点の近傍に於て同じ性質を持ちます. Δ の代りに Δ より少し大きな領域をとって, それから出発しても同じ結果が得られます. 故に命題は眞です.

<u>4　基礎的補助定理 II</u> — <u>空間 (x) の, 分岐点を内点として持たない有限擬凸状域 $\mathfrak{D}$ に於て, 次の二つの条件を充たす連続擬凸状函数 $\varphi_0(P)$ がつねに存在する : 1°, 任意の実数 c に対し $\varphi_0(P) < c$ を充たす $\mathfrak{D}$ の点の集合を (若し存在するならば) $\mathfrak{D}_c$ とすれば, $\mathfrak{D}_c \Subset \mathfrak{D}$ であること. 2°, $\mathfrak{D}$ 内に集積しない様な例外点以外の, $\mathfrak{D}$ の任意の点 P_0 に対し, 其の近傍</u>

に於て, 此の点を通り, 此の点以外では $\varphi_0(P) > \varphi_0(P_0)$ の部分にのみ存在する様な正則な固有面を撰び得ること.

証明 η_m $(m = 1, 2, \ldots)$ を $\eta_m > \eta_{m+1}$ であって, 0 に収斂する任意の正数列とし, l_m $(m = 1, 2, \ldots)$ を $l_m < l_{m+1}$ であって, m と共に $+\infty$ に近づく, 後に説明します様な正数列とします. $\mathfrak{D}$ に関するユークリッド的境界距離を $d(P)$ とし[8]

$$d(P) > \eta_m$$

を充たす $\mathfrak{D}$ の点の集合に就て, 定点 O を含む連結成分を $\mathfrak{D}_m$ とします. $\mathfrak{D}_1$ は実在すると考へます. 領域 $\mathfrak{D}_m$ に就て, 定点 O から任意の点 P へ $\mathfrak{D}_m$ 内のみを通って行く経路の長さの下端を $\lambda_m(P)$ とします.

$$\lambda_m(P) < l_m$$

を充たす $\mathfrak{D}_m$ の点の集合を Δ_m とします. Δ_m は有界な, 有界葉領域です. $\lambda_m(P) \geq \lambda_{m+1}(P)$ ですから,

$$\Delta_m \Subset \Delta_{m+1}.$$

$m > 2$ に対し, $\mathfrak{D}$ 上の Δ_m の近傍に於て, 連続擬凸状函数 $\varphi_m(P)$ を次の様に作り得る様に l_m $(m = 1, 2, \ldots)$ を撰ぶことが出来ることを証明します： 実数 a_m が存在して,

$$\varphi_m(P) < a_m$$

を充たす Δ_m の点の集合の, O を含む連結成分を A_m とすれば,

$$\Delta_{m-2} \Subset A_m \Subset \Delta_{m-1}$$

となること. $-\log d(P)$ は領域 $\mathfrak{D}$ に於ける擬凸状函数です (対数は実分枝, 以下同様). 正数列 η'_m $(m = 2, 3, \ldots)$ を

$$\eta_{m-1} > \eta'_m > \eta_m$$

となる様に撰び,

$$d(P) > \eta'_m$$

を充たす $\mathfrak{D}$ の点の集合の, O を含む連結成分を $\mathfrak{D}'_m$ とします. 第二節で見た所に依て, $\mathfrak{D}'_{m+1}$ に於て, 連続擬凸状函数 $\lambda^0_{m+1}(P)$ を,

$$\lambda^0_{m+1}(P) = \mu(P) + M\Sigma\, u_j^2 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

[8] 但し, $\mathcal{D}$ が全有限空間と一致する場合だけは例外であって恒等的に $+\infty$ となりますが, 此の場合に対して定理が成立することは明白ですから, 以後除外します.

$$|\mu(P) - \lambda_{m+1}(P)| < N$$

となる様に撰ぶことが出来ます. ここに u_j は x_j の実部, M, N は或る正数, $\mu(P)$ は或る連続な正数値函数です. 先づ, 此の $\lambda^0_{m+1}(P)$ に対して, 正数 b が存在して,

$$\lambda^0_{m+1}(P) < b, \quad P \in \mathfrak{D}'_{m-1}$$

を同時に充たす $\mathfrak{D}$ の点の集合に就て, O を含む連結成分を B_m とすれば,

$$\Delta_{m-2} \Subset B_m \Subset \Delta_{m-1}$$

となる様にしようと云ふのですが, 之は, l_{m-1} と l_{m-2} との差が充分大きければ, 明かに可能です. $m = 3, 4, \ldots$ に対し此のことが常に可能である様に, 始めに正数列 l_p $(p = 1, 2, \ldots)$ を撰んで置きます. 然うしますと, 上端

$$\varphi_m(P) = \max[-\log d(P),\ \lambda^0_{m+1}(P) - b - \log \eta'_{m-1}]$$

は, $\mathfrak{D}'_{m+1}$ に於ける連続擬凸状函数であって, $a_m = -\log \eta'_{m-1}$ は上述の条件を充たします $(A_m = B_m)$. 故に, 所求の函数です.

$\varphi_m(P)$ を少し補正しませう. $\psi_m(P)$ を次の様な函数とします : ψ_m は φ_m と同じ所で定義せられて居て, $\varphi_m(P) \geq a_m$ の時は, $\psi_m(P) = \varphi_m(P)$. $\varphi_m(P) < a_m$ の時は, P が A_m の点ならば $\psi_m(P) = \varphi_m(P)$, 然うでなければ $\psi_m(P) = a_m$. $\psi_m(P)$ が連続函数であることは云ふ迄もありません. 擬凸状函数であることを云ひませう. $\chi_p(P)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ を次の様な函数とします :

$\varphi_m(P) \geq a_m - \dfrac{1}{p}$ ならば, $\chi_p(P) = \varphi_m(P)$.

$\varphi_m(P) < a_m - \dfrac{1}{p}$ の時は, P が A_m の点ならば $\chi_p(P) = \varphi_m(P)$,

然うでなければ $\chi_p(P) = a_m - \dfrac{1}{p}$.

此の $\chi_p(P)$ は明らかに擬凸状函数です. $\psi_m(P)$ は, 函数列 $\chi_p(P)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ の極限であって, 収斂は斉一ですから, 擬凸状函数です. $\psi_m(P)$ は次の性質を持って居ます :

<u>実数 a_m が存在して, $\psi_m(P) < a_m$ を充たす Δ_m の ($\mathfrak{D}$ 上の) 近傍の点の集合を A_m とすれば, $\Delta_{m-2} \Subset A_m \Subset \Delta_{m-1}$ である.</u>

前節の結果から, Δ_m の ($\mathfrak{D}$ 上の) 近傍に於て, $\psi_m(P)$ と同じ性質を持ち, 更に定理に述べた性質 2° を持つ様な, 連続擬凸状函数 $\Psi_m(P)$ のあることがわかります. $\Psi_m(P)$ の $\psi_m(P)$ から受け継いだ特性を, 簡単の為同じ文字 a_m, A_m に依て表します. 此の函数列 $\Psi_m(P)$ $(m = 3, 4, \ldots)$ から函数列 $\Phi_m(P)$ を作ります.

先づ, $\Phi_3(P)=\Psi_3(P)$ とします. 次に $\Phi_4(P)$ ですが, c_j $(j=1,2,3)$ を $c_j<a_4$ であって, a_4 に充分近い三つの実数とし,

$$\Psi_4(P)<c_j$$

を充たす Δ_4 の点の集合を C_j としますと, $\Psi_4(P)$ は連続函数ですから,

$$\Delta_2 \Subset C_j \Subset \Delta_3$$

となります. $c_1<c_2<c_3$ とします. K を正数とし, $\Phi_4(P)$ を次の様に定義します：

$P\in C_1$　ならば　$\Phi_4(P)=\Phi_3(P)$,
$P\in (C_3-C_1)$　ならば　$\Phi_4(P)=\max[\Phi_3,\,K(\Psi_4-c_2)]$,
$P\in (\Delta_4-C_3)$　ならば　$\Phi_4(P)=K(\Psi_4-c_2)$.

K を充分大きく撰びますと, $\Phi_4(P)$ は Δ_4 に於ける連続函数です. 擬凸状であって性質 2° を持つことも明かです. 更に, $\Phi_4(P)$ が次の条件を充たす様にします：
P が C_3 に属しない Δ_4 の点ならば,

$$\Phi_4(P)>4$$

(一般には, $\Phi_m(P)>m$). 全く同様にして, Δ_5 に於て $\Phi_5(P)$ を作ります. 以下同様です. か様にして得た函数列 $\Phi_m(P)$ $(m=3,4,\ldots)$ の極限 $\varphi_0(P)$ が所求の函数であることは明白です.

(第十報告終,　3. 11. 12)