# 多変数解析函数に就て

## XI — 擬凸状域と有限正則域，有限正則域に於ける諸定理

第一次研究の結果を，第一及び第二基礎的補助定理に依て，分岐点を内点として持たない有限領域へ拡張します．但し，此の度は次の一聯の問題を考察するに止めます：　擬凸状域は正則域かと云ふこと，Cousin の第一問題，及び函数の展開[1]．

Cousin の第二問題及び積分表示に就ても略々同様と考へます[2]．

$\ll$ 此の論文に現れる領域もすべて，分岐点を内点として持たない有限領域です．それ故，此の条件は引き続き，一般には明示しません．$\gg$

### I — 有限葉正則域に於ける諸定理

1 — 此の章に於ては，有限葉 正則域に於ける，Cousin の第一問題と函数の展開とに就て述べ，第二章以後の準備をします．方法は，第一基礎的補助定理と，H. Cartan–P. Thullen の定理とに依るものであって，畢竟第一報告のそれと同一です．[3]

先づ，（基礎的）補助定理 I を場合に適合した形に変へませう．此の補助定理（第八報告）を今一度申しますと：

補助定理 I — $\ll$ 空間 $(x)$ の単葉有限筒状域 $(X)$ に固有集合体 $\Sigma$ を考へ，$\Sigma$ を含み $(X)$ に含まれる一つの単葉開集合を $V$ とし，$\Sigma$ は $V$ に於ける正則函数 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ の共通零点の集合として与へられて居ると考へる．$(X^0)$ を $(X^0) \Subset (X)$ なる筒状域とし，$\Sigma$ の $(X^0)$ 内の部

[1] 結果に就ては，第 10 節の定理 I 及び第 11 節の諸定理参照.

[2] 之等は上の三定理の様に不可分の関係にある釈ではなく，それに此の度の拡張は中間的のものですから，他の機會に確めようと思ひます.

[3] 此の為には，必ずしも第一基礎的補助定理を要しないのであって，第八報告の定理 1 があれば充分です（方法に就ては，前報告，第 1 節参照）．然し，此の方法は分岐点が入って来れば使へなくなります．所で，此の第一次拡張（第七及至第十一報告）の目的の一つは，此の方向の将来の研究を秩序立てるにあったのです．本文の方法を撰んだ所以です．尚，此の第八報告の定理 1 に依る方法に依て本章の結果が得られることは，H. Behnke, K. Stein も屡々指摘して居ます（下記論文参照).

H. Behnke–K. Stein : Approximation analytischer Funktionen in vorgegebenen Bereichen des Raumes von $n$ komplexen Veränderlichen, 1939, (Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenchaften zu Göttingen).

H. Behnke–K. Stein : Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, 1940, (Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg).

H. Behnke–K. Stein : Die Sätze von Weierstrass und Mittag–Leffler auf Riemannschen Flächen, 1940, (Vierteljahrsschaft der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich).

分を $\Sigma_0$ とする. 然るときは, $\varphi(x)$ を $V$ に於て正則有界な任意の函数とするとき, $V$ に於て $|\varphi(x)| < M$ とすれば, $(X^0)$ に於て正則な函数 $\Phi(x)$ を, $\Sigma_0$ の各点で

$$\Phi(x) \equiv \varphi(x) \quad (\mathrm{mod.}\ f_1, f_2, \ldots, f_p)$$

であって, $(X^0)$ で

$$|\Phi(x)| < KM$$

を充たす様に見出すことが出来る. ここに $K$ は $\varphi(x)$ に無関係な正数である.≫

$R$ を $n$ 複素変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の空間に於ける (分岐点を内点として持たない有限) 領域, 又は共通点を持たない様な可附番個のか様な領域の和とし, $R$ 上に 次の三つの条件を充たす様な解析的多面体 (点集合) $\Delta$ を考へます：

1°, $\Delta \Subset R$ であること. (従って $\Delta$ は $R$ の連結成分の有限個内に含まれて居て, 有界且つ有界葉です.)

2°, $\Delta$ は次の形に定義せられること：

$$(\Delta) \qquad P \in R,\ x_i \in X_i,\ f_j(P) \in Y_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

此処に $(x)$ は点 $P$ の座標, $X_i, Y_j$ は平面上の (有限) 単葉 領域, $f_j(P)$ は $R$ に於ける正則函数（$R$ の各連結成分に於て 一価 正則な解析函数の意, 以下同様) です.

3°, 数値系 $[x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1(P), f_2(P), \ldots, f_\nu(P)]$ は, $\Delta$ の相異なる点に対して, 必ず相異なること.

複素変数 $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ を導入して空間 $(x, y)$ を考へ, 其処に筒状域 $(X, Y)$, $x_i \in X_i$, $y_j \in Y_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu)$ と, 固有集合体,

$$(\Sigma) \qquad y_j = f_j(P),\ P \in \Delta \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

とを考へます. $\Delta$ 上の $(x)$ を座標とする点 $P$ と, $\Sigma$ 上の $[(x, f(P)]$ を座標とする点 $M$ とを対応せしめます. 条件 3° に依て, $\Delta$ の相異なる二点 $P_1, P_2$ には常に $\Sigma$ の相異なる二点 $M_1, M_2$ が対応するのですから此の対応は一対一です. $\Sigma$ の点は總て $(X, Y)$ に含まれ, 其の境点は總て $(X, Y)$ の境界上にあります. ($f_j(P)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ を単に $\Delta$ に於て正則な函数としますと, 前半は成立しますが, 後半は成立しません.) $X_i^0, Y_j^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu)$ を $X_i^0 \Subset X_i$, $Y_j^0 \Subset Y_j$ なる平面上の領域とし, 之に応ずる $\Delta$ を $\Delta_0$ としますと, $\Delta_0 \Subset \Delta$ です. $\Delta_0$ を $\Delta_0 \Subset \Delta$ なる任意の集合としますと, 若し $P_1, P_2$ が何れも $\Delta_0$ に屬し, 且つ同じ座標を持つならば, $M_1, M_2$ 間の距離は 0 と異なる下端を持ちます.

$\varphi(P)$ を $\Delta$ に於て正則な任意の函数とします. $\Delta$ の点 $P$ と $\Sigma$ の点 $M$ とが上述の対応関係にあるとして,

$$\varphi(M) = \varphi(P)$$

に依て, $\Sigma$ 上に於て函数 $\varphi(M)$ を考へます. 上に見ましたことから, $\Sigma$ を含む或る決った単葉開集合内で定義せられて居て, $\Sigma$ 上で $\varphi(M)$ となり, 局地的には $(y)$ に無関係である様な, $(x, y)$ に関する正則函数を考へ得ることが分かります. 故に, 補助定理 I に次の形を与へることが出来ます：

補助定理 I′ — 上述の状勢に於て, $(X^0, Y^0)$ を $(X^0, Y^0) \Subset (X, Y)$ なる筒状域とすれば, $\Delta$ に於て正則有界な函数 $\varphi(P)$ が与へられた時, $(X^0, Y^0)$ に於て正則な函数 $\Phi(x, y)$ を求め, $\Delta$ に於て $|\varphi(P)| < N$ ならば, $(X^0, Y^0)$ に於て $|\Phi(x, y)| < KN$ であって, $P$ の座標を $(x)$ とすれば, $(X^0, Y^0)$ 内の $\Sigma$ 上の任意の点 $[x, f(P)]$ に於て, 値 $\varphi(P)$ をとる様にすることが出来る. 此処に $K$ は $\varphi(P)$ に無関係な或る正数である.

此の解析的多面体 $\Delta$ と, 正則函数族に関して凸状な有限葉領域との間には, 次の関係があります[4]：

補助定理 1 — $\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ の正則域とし, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体に関して凸状であって, 有限葉である様な, $\mathfrak{D}$ の部分開集合とする. 然る時は, $E \Subset \mathfrak{D}_0$ なる任意の集合 $E$ に対して, 解析的多面体 $\Delta$ を, $E \Subset \Delta$ であって, $\mathfrak{D}_0$ の或る部分開集合 $R$ に関して, 上述の三条件を充たす様に選ぶことが出来る. 尚, 此の際 $f_j(P)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ として, $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数をとり, $X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ として円 $|x_i| < r$ を, $Y_j$ として円 $|y_j| < 1$ をとることが出来る. [5]

証明 $F$ を $\mathfrak{D}_0$ に関して有界な $\mathfrak{D}_0$ の任意の部分集合としますと, $\mathfrak{D}_0$ は有限葉ですから,

$$F \Subset \mathfrak{D}_0$$

であることが容易に分かります. 逆に, $F \Subset \mathfrak{D}_0$ ならば $F$ は ($\mathfrak{D}_0$ が有限葉でなくても) $\mathfrak{D}_0$ に関して有界です. 故に此の際此の二つの概念は一致します.

$\mathfrak{D}$ に於て正則な函数のすべてからなる函数族を $(\mathfrak{F})$ としますと, $\mathfrak{D}_0$ は $(\mathfrak{F})$ に関して凸状であって, $E \Subset \mathfrak{D}_0$ ですから, 上に見ましたことから, $E \subset \mathfrak{D}_0' \Subset \mathfrak{D}_0$ なる開集合 $\mathfrak{D}_0'$ を撰び, $\mathfrak{D}_0'$ に属しない $\mathfrak{D}_0$ の任意の点 $P_0$ に対し, $(\mathfrak{F})$ 中に少なくとも一つの函数 $\varphi(P)$ が存在し,

$$|\varphi(P_0)| > \max |\varphi(E)|$$

[4] 凸性の定義に就ては, 前報告, 第一節参照.

[5] 此の補助定理に就ては, H. Behnke–K. Stein の前掲三論文中, 始めの二つ参照.

(右辺は $E$ に於ける $|\varphi(P)|$ の上端) となる様にすることが出来ます.

$\mathfrak{D}_0'$ の $\mathfrak{D}_0$ に関する最短距離を $\rho$ とし, $r$ を $E$ の任意の点 $P(x)$ が $|x_i| < r$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を充たす様な正数とします. $\mathfrak{D}_0$ に関する境界距離が $\dfrac{1}{2}\rho$ である様な $\mathfrak{D}_0$ の点の集合を考へ, 其の閉多円筒 $|x_i| \leq 2r$ 上の部分を $\Gamma$ とします. $\Gamma$ は上に見ましたことから, 閉集合です. $\Gamma$ の任意の点 $M$ に対し, $M$ を中心とする $\mathfrak{D}$ に属する充分小さな多円筒 $(\gamma)$ と, $(\mathfrak{F})$ の函数 $f(P)$ とが対応し,

$$\max|f[(\gamma)]| > 1, \quad \max|f(E)| < 1$$

を充たすこと明白です. 故に, Borel–Lebesgue の補助定理に依て, か様な $(\gamma)$ の有限個を以て $\Gamma$ を被覆することが出来ます. 之等に対応する函数を $f_1(P), f_2(P), \ldots, f_\lambda(P)$ とします. $R = \mathfrak{D}_0^{(\frac{\rho}{2})}$ ($\mathfrak{D}_0$ に関する境界距離が $\dfrac{\rho}{2}$ より大きい様な $\mathfrak{D}_0$ の点の集合) として, 次の解析的多面体 $\Delta$ を考へます：

$$(\Delta) \qquad P \in R,\ |x_i| < r,\ |f_j(P)| < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

$E \subset \Delta$ であって, $\Delta \Subset R$ であること明らかです (補助定理の条件は $E \Subset \Delta$ となって居ますが, 之はどちらでも同じです.)

条件 $3^\circ$ を調べませう. $\mathfrak{D}$ は正則域ですから, $\mathfrak{D}$ を自身の正則域とする様な函数が存在します. 其の一つを $F(P)$ とします. 然うしますと, 正則域の定義[6] に依て, $\mathfrak{D}$ の相重なる（同じ座標を持つ) 二点 $P_1, P_2$ に於ける $F(P)$ の要素は必ず違って居ます. 故に, $F(P)$ と $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に関する其の導函数との中には, $P_1, P_2$ で相異なる値をとるものが必ずあります. 之等の導函数も亦 $\mathfrak{D}$ で正則であること云ふ迄もありません. $\Delta$ と其の境界とからなる集合を $\overline{\Delta}$ としますと $\Delta \Subset \mathfrak{D}_0$ ですから $\overline{\Delta}$ は閉集合です. 故に, Borel–Lebesgue の補助定理に依て, $F(P)$ 及び其の導函数中から, 有限個の函数

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P), \ldots,\ \varphi_\mu(P)$$

を撰び, $\overline{\Delta}$ の相重なる二点に対して, 数値系 $[\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_\mu(P)]$ が必ず違って居る様に出来ます. 之等の函数は $\Delta$ に於て有界です.

$$\max|\varphi_k(\Delta)| < N, \quad f_{\lambda+k}(P) = \frac{1}{N}\varphi_k(P) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

とし, $P \in R$, $|x_i| < r$, $|f_j(P)| < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, \nu;\ \nu = \lambda + \mu)$ なる三条件を同時に充たす $\mathfrak{D}$ の点の集合を考へますと, 此の集合は $\Delta$ です. $\Delta$ の此の形の表現は条件 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ をすべて充たします. (証明終)

[6] Behnke–Thullen の著書の 16 頁参照.

所で正則域は次の性質を持って居ます：

H. Cartan–P. Thullen の第一定理 — 有限正則域は其処に於ける正則函数の全体に関して凸状である.

此の定理は, H. Cartan–P. Thullen の同時解析接続の可能性に関する基礎定理[7] の直接の結果です. [8]

2 — 函数の展開に就て御話します[9].

補助定理 1 の $\Delta$ を考へます. 但し, 終りに追加した諸条件をも充たすものをとります. $\Delta$ は次の形です：

$$(\Delta) \qquad P \in R,\ |x_i| < r,\ |f_j(P)| < 1 \quad (i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,\nu)$$

複素変数 $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ を導入し, 空間 $(x, y)$ に多円筒,

$$(C) \qquad |x_i| < r, \quad |y_j| < 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,\nu)$$

と, 固有集合体,

$$(\Sigma) \qquad y_j = f_j(P), \quad P \in \Delta \qquad (j = 1,2,\ldots,\nu)$$

とを考へます. $r_0, \rho_0$ を $r_0 < r,\ \rho_0 < 1$ なる正数とし, $\Delta, (C), \Sigma$ に於ける $(r, 1)$ を此の $(r_0, \rho_0)$ を以て置き換へて得るものを夫々 $\Delta_0, (C_0), \Sigma_0$ とします.

$\varphi(P)$ を $\Delta$ に於ける任意の正則函数としますと, 補助定理 I′ に依て, 多円筒 $(C_0)$ に於て正則な函数 $\Phi(x, y)$ を, $\Sigma_0$ 上の任意の点 $[x, f(P)]$ に於て値 $\varphi(P)$ をとる様に作ることが出来ます. 此の $\Phi(x, y)$ を $(C_0)$ に於て, 原点を中心とする Taylor 級数に展開します. 収斂は $(C_0)$ の各点に於て斉一です. 此の展開に $y_j = f_j(P)$ $(j = 1,2,\ldots,\nu)$ を代入しますと, $\varphi(P)$ の $\Delta_0$ に於ける展開が得られます. 其の各項は $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数であって, 収斂は $\Delta_0$ の各点に於て斉一です.

$\mathfrak{D}_0$ は此の $\Delta$ と同じ性質を持つ $\mathfrak{D}_0$ の部分集合の逓増列の極限ですから, 次の定理が成立します：

定理 1 — $\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ の正則域とし, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体 $(\mathfrak{F})$ に関して凸状であって, 有限葉である様な $\mathfrak{D}$ の部分開集合とする.

[7] Behnke–Thullen の著書の第六章, 第 1 節及び下記論文参照 : H. Cartan–P. Thullen : Regularitäts–und Konvergenzbereiche, 1932, (Math. Annalen).

[8] か様に, 我々は Cartan–Thullen の基礎定理を使ひます. 所で, 此の定理は, 分岐点や無窮遠の点が入って来れば成立しなくなります. それで, 将来此の点をどうするかと云ふ問題がある訳ですが, 実際は, 此の論文では, 此の定理はなくてもすむのです. 定理 I の脚註参照. 尤も, 此の種の問題は, 他にも無い訳ではありませんが, 上述のものが一番目立つ様に思ひます.

[9] 第一報告, 第 4 節参照.

然る時は, $\mathfrak{D}_0$ に於ける任意の正則函数は, $\mathfrak{D}_0$ の各点に於て斉一に収斂する様な, $(\mathfrak{F})$ の函数の級数に展開することが出来る.

3 — 次に Cousin の第一問題に就て述べませう[10]. 補助定理から始めます.

補助定理 2 — 補助定理 I′ の $\Delta$ をとり, 其の一基点を通る超平面を $L$, $\Delta$ の $L$ 上の部分を $S$ とする. $\Delta_0$ を $\Delta_0 \Subset \Delta$ なる任意の開集合とし, $\Delta_0$ の $L$ の一方の側にある部分を $\Delta_0'$, 他方の側にある部分を $\Delta_0''$ とする. 然る時は, $R$ 上の $S$ の近傍に於て正則な函数 $\varphi(P)$ が与へられた時, $\Delta_0'$ に於て正則な函数 $\varphi_1(P)$ と $\Delta_0''$ に於て正則な函数 $\varphi_2(P)$ とを, 何れも $\Delta_0$ 内の $S$ の各点に於て矢張り正則であって, 恒等的に

$$\varphi_1(P) - \varphi_2(P) = \varphi(P)$$

となる様に, 見出すことが出来る.

証明　$x_1$ を実部と虚部とに分ち, $x_1 = \xi + i\,\eta$ （$i$ は虚単位) とします. $L$ を

$$(L) \qquad \xi = 0$$

であると見ませう. $(x)$ に関する一次変換によって常に此の形にすることが出来ますから, か様に考へて支障ありません. $\Delta$ は次の形でした：

$$(\Delta) \qquad P \in R,\ x_j \in X_j,\ f_k(P) \in Y_k \quad (j=1,2,\ldots,n; k=1,2,\ldots,\nu).$$

之に対応して, 上に繰り返しました様に, 空間 $(x,y)$ に筒状域 $(X,Y)$ 及び固有集合体 $\Sigma$ を考へます. $X_j^0, X_j^1, Y_k^0, Y_k^1$ を

$$X_j^0 \Subset X_j^1 \Subset X_j,\ Y_k^0 \Subset Y_k^1 \Subset Y_k \quad (j=1,2,\ldots,n; k=1,2,\ldots,\nu)$$

なる平面上の領域とし, $\Delta$ の $(X,Y)$ を $(X^0,Y^0)$ に依て置き換へたものを $\Delta_0$ とします. 補助定理の $\Delta_0$ を此の形であると看做して支障ありません.

$x_1$ 平面上に於て, 直線 $\xi = 0$ の $X_1$ 内の部分を含み, $X_1$ に含まれる開集合を $A$ とします. 但し $A$ を充分此の直線に近くとり, $\Delta$ の $x_1 \in A$ 上の部分に於て $\varphi(P)$ が正則である様にします. $A_1$ を $A_1 \Subset A$ であって, $X_1^1$ に関して, $X_1$ に関する $A$ と同じ関係にある開集合とします.

補助定理 I′ に依て, 筒状域, $x_1 \in A_1$, $(x,y) \in (X^1,Y^1)$ に於て正則であって, 此の筒状域内の $\Sigma$ 上の任意の点 $[x, f(P)]$ に於て値 $\varphi(P)$ をとる

[10] 第一報告の第 3 節, 及び第 5 節の定理 I の証明参照.

様な函数 $\Phi(x,y)$ が存在します. $x_1$ 平面の虚軸上に一つ又は有限個の線分の和（閉集合）$l$ を, $A_1$ に含まれ, 虚軸の $X_1^0$ 内の部分を含む様にとり, Cousin の積分

$$\Psi(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\Phi(t,x_2,\ldots,x_n,y)}{t-x_1}\,dt$$

を考へます. 但し, $\Delta_0$ の $L$ の左方 $(\xi<0)$ の部分が $\Delta_0'$ であって, 右方の部分が $\Delta_0''$ であるとして, 虚軸の正の方向に積分します. $(X^0,Y^0)$ の $\xi<0$ の部分を $(C')$, $\xi>0$ の部分を $(C'')$ としますと, $\Psi(x,y)$ は $(C')$ 及び $(C'')$ に於て正則です. $(C')$ に於ける $\Psi$ を $\Psi_1$, $(C'')$ のそれを $\Psi_2$ として区別しますと, $\Psi_1,\Psi_2$ は何れも $(X^0,Y^0)$ 内の $\xi=0$ の各点に於て矢張り正則であって, 其の間に

$$\Psi_1(x,y)-\Psi_2(x,y)=\Phi(x,y)$$

なる関係があります. 故に

$$\varphi_1(P)=\Psi_1[x,f(P)],\quad \varphi_2(P)=\Psi_2[x,f(P)]$$

$(x)$ は $R$ の点 $P$ の座標, は所求の函数です.（証明終)

$\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ の領域とします. $\mathfrak{D}$ の各点 $P$ に対し, $P$ を中心とする $\mathfrak{D}$ に属する多円筒 $(\gamma)$ と, $(\gamma)$ に於ける有理型函数 $g(P)$ とが対応し, 其の全体が次の同等条件を充たすとしませう： $(\gamma_1),(\gamma_2)$ を共通部分 $(\delta)$ を持つ任意の一対の $(\gamma)$ としますと, 対応する函数 $g_1(P),g_2(P)$ は $(\delta)$ に於て同等, 詳しく云ひますと, $g_1(P)-g_2(P)$ は正則であること. か様にして $\mathfrak{D}$ に於て極が定義せられました. 此の時, $\mathfrak{D}$ に於て有理型函数 $G(P)$ を, 与へられた極をとる様に, 云ひ換へますと, 各 $(\gamma)$ に於て $g(P)$ と同等である様に作ること, 之が Cousin の第一問題です.

$\mathfrak{D}$ を有限葉正則域とします. Cartan–Thullen の第一定理に依て, $\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体 $(\mathfrak{F})$ に関して凸状です. 故に, 補助定理 1 に於て $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_0$ と見ることが出来ますから, $\mathfrak{D}$ には此の補助定理に述べた $\Delta$ が存在します. 但し, 此の度は $X_i,Y_j$ $(i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,\nu)$ を有界閉領域として, 解析的閉多面体 $\Delta$ をとるのが便利です. (勿論, $f_j(P)$ は, $(\mathfrak{F})$ の中から撰びます.) か様に, $\mathfrak{D}$ は解析的閉多面体の列,

$$\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_p,\ldots$$

の極限です. 此処に $\Delta_p$ は上述の $\Delta$ と同じ性質であって, $\Delta_{p+1}$ の内点の集合を $E$ とする時, $\Delta_p \Subset E$ です.

$\Delta_p$ に就て見ます. 前報告の第三節で述べました様に $\Delta_p$ を $(A)$ に分割します. 但し, 此度は $(A)$ 及び其の基領域 $(\alpha)$ として, $2n$ 次元閉立方体

を撰びます. 又, $(A)$ 中には不完全な形のものがあってもよいことにします. $(A)$ を充分小さくして, 任意の $(A)$ が上述の $(\gamma)$ の適当な一つに対し, $(A) \Subset (\gamma)$ となる様にします. 各 $(A)$ に対し, か様な $(\gamma)$ の任意の一つを選び, それに附随する $g(P)$ を此の $(A)$ に附随せしめます.

$(A)_1, (A)_2$ を一つの面 ($2n-1$ 次元閉立方体) に於て隣接する一対の $(A)$ としますと, 之等に附随する $g_1(P), g_2(P)$ は共通面の近傍 ($\mathfrak{D}$ 上に於ける近傍, 以下同様) に於て同等です. 故に, 上の補助定理 2 に依て, 和 $(A)_1 \cup (A)_2$ の近傍に於て, 与へられた極をとる有理型函数が存在します. 其の基領域が, 例へば

$$(\alpha_{j,q}^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}),$$

$\alpha$ は閉正方形, $q$ 及び $\alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ は決まったもの, $j$ は任意のもの, なる形の $(A)$ の全体の和に就ても同様です. 此の際, 此の和は勿論連結でなくてもよろしい. 此の推理法を反覆することに依て, $\Delta_p$ の近傍に於て, 与へられた極をとる有理型函数の存在することが分かります. 其の一つを $G(P)$ とします.

か様にして,

$$G_1(P), G_2(P), \ldots, G_p(P), \ldots,$$

が得られました.

$$H(P) = G_{p+1}(P) - G_p(P)$$

を見ますと, $H(P)$ は $\Delta_p$ の近傍に於ける正則函数です. 故に, 定理 1 に依て, $H_p$ を, $\Delta_p$ の近傍に於て斉一に収斂する様な, $(\mathfrak{F})$ の函数の級数に展開することが出来ます. 与へられた極をとる有理型函数 $G(P)$ が $\mathfrak{D}$ に於て存在することは, 之から直ちに分かります. (証明法は $\mathfrak{D}$ が単葉筒状域である場合と全く同様です.) か様に, 次の定理が成立します.

<u>定理 2</u> — <u>有限葉正則域に於ては, Cousin の第一問題は常に解ける.</u>

## <u>II — 主問題</u>

<u>4</u> — 此の章では, 始めに御話した一聯の問題から抽き出した主要部分を, 第一基礎的補助定理に依て解決します. [11]

先づ, 問題を説明します. $\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ の <u>有界有限葉</u> 領域とし, $\mathfrak{D}$ の基領域と交はる, 一つの超平面を考へます. $x_1$ を実部と虚部に分ち

$$x_1 = \xi + i\,\eta$$

[11] 此の定理を使ふと云ふ点以外は, 本質的には, 第六報告の第一章と同一です.

とします. 簡単の為, 此の超平面を $\xi=0$ であると看做しませう. $a_1, a_2$ を

$$a_2<0<a_1$$

なる実数とし, 超平面 $\xi=a_1$, $\xi=a_2$ も, 何れも $\mathfrak{D}$ の基領域と交はると見ます. $\mathfrak{D}$ の $\xi<a_1$ なる部分を $\mathfrak{D}_1$, $\xi>a_2$ なる部分を $\mathfrak{D}_2$, $a_2<\xi<a_1$ なる部分を $\mathfrak{D}_3$ とします. $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ の各連結成分は正則域であると假定します. 然うしますと, $\mathfrak{D}_3$ に就ても必然同様です.

$f_j(P)$ $(j=1,2,\ldots,\nu)$ を $\mathfrak{D}_3$ に於ける正則函数とします. 次の様な $\mathfrak{D}$ の部分集合 $E$ を考へます: $\mathfrak{D}_3$ に属しない $\mathfrak{D}$ の点は總て $E$ に属する. $\mathfrak{D}_3$ の点は, $\nu$ 個の条件

$$|f_j(P)|<1 \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

を同時に充たすならば $E$ に属し, 然うでなければ $E$ に属しない. $E$ は $\xi<a_2$ なる部分及び $\xi>a_1$ なる部分に同時に広がって居る連結成分を持つと考へ, 其の一つを $\Delta$ としませう.

此の $\Delta$ に関して, 次の三つの条件が充たされると假定します :

1°, $\delta_1$ を $0<\delta_1<a_1, -a_2$ なる実数とします. $|\xi|<\delta_1$ を充たす $\Delta$ の点 $P(x)$ の集合を $A$ としますと,

$$A \Subset \mathfrak{D}.$$

2°, $\delta_2$ を正数, $\varepsilon_0$ を 1 より小さい正数とします. $p$ を $1,2,\ldots,\nu$ の任意の一つとした時,

$$|f_p(P)| \geq 1-\varepsilon_0$$

を充たす $\mathfrak{D}_3$ の点は,

$$|\xi-a_1|<\delta_2 \quad \text{又は} \quad |\xi-a_2|<\delta_2$$

が充たされる部分に存在しないこと.

3°, 数値系

$$[f_1(P), f_2(P), \ldots, f_\nu(P)]$$

は $A$ の相重なる二点で決して同一とならないこと.

第二の条件に依て, $\Delta$ は領域です. $\rho_0$ を $1-\varepsilon_0<\rho_0<1$ なる実数とし, 次の様な $\Delta$ の部分集合 $\Delta_0$ を考へます: $\mathfrak{D}_3$ に属しない $\Delta$ の点は總て $\Delta_0$ に属する. $\mathfrak{D}_3$ に属する $\Delta$ の点は, $\nu$ 個の条件

$$|f_j(P)|<\rho_0 \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

を同時に充たすならば $\Delta_0$ に属し, 然うでなければ, $\Delta_0$ に属しない. 上述の条件 $2^\circ$ に依て $\Delta_0$ は開集合です. $\xi < 0$ なる $\Delta_0$ の部分を $\Delta_0'$ , $\xi > 0$ のそれを $\Delta_0''$ とします.

此の章の課題は次の通りです.

此の状勢に於て, $A$ に於て正則な函数 $\varphi(P)$ が与へられた時, $\Delta_0'$ に於て正則な函数 $\varphi_1(P)$ と, $\Delta_0''$ に於て正則な函数 $\varphi_2(P)$ とを, 何れも $\xi = 0$ 上の $\Delta_0$ の各点に於て矢張り正則であって, 恒等的に

$$\varphi_1(P) - \varphi_2(P) = \varphi(P)$$

となる様に, 作ること.

5 — 先づ補助定理 2 の方法を適用して, 此の問題の $\mathfrak{D}_3$ に関する部分を解決しませう. $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ を複素変数とし, 空間 $(x, y)$ に固有集合体,

$$(\Sigma) \qquad y_k = f_k(P), \quad P \in \mathfrak{D}_3 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

を考へます. $r, r_0$ を $r_0 < r$ なる正数とし, $r_0$ を充分大きくとり, 有界領域 $\mathfrak{D}$ が, 原点を中心とし $r_0$ を半径とする多円筒に含まれる様にします. $\rho$ を $\rho_0 < \rho < 1$ なる実数とし, 円筒 $(C)$, $|x_j| < r, |y_k| < \rho$ $(j = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, \nu)$ , 及び $(C_0)$, $|x_j| < r_0, |y_k| < \rho_0$ を考へます. $\delta$ を $\delta < \delta_1$ なる正数とし, 集合

$$(A') \qquad P \in A, \quad |\xi| < \delta, \quad |f_k(P)| < \rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

を考へます.

$\varphi(P)$ は $A$ に於て正則ですから, 補助定理 I′ に依て, $(C)$ と $|\xi| < \delta$ との共通部分に於て正則な函数 $\Phi(x, y)$ を, $P \in A'$ なる $\Sigma$ の各点 $[x, f(P)]$ に於て値 $\varphi(P)$ となる様に作ることが出来ます. $x_1$ 平面の虚軸上に線分 (連結閉集合) $l$ を円 $|x_1| < r$ に含まれ, 其の両端が円 $|x_1| < r_0$ 外にある様にとり, Cousin の積分

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\Phi(t, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\nu)}{t - x_1} \, dt$$

を考へます. 但し, 虚軸の正の方向に積分します.

$\Psi(x, y)$ に, $y_k = f_k(P)$ を代入しますと,

$$\psi(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\Phi[t, x_2, \ldots, x_n, f_1(P), \ldots, f_\nu(P)]}{t - x_1} \, dt$$

が得られます. $\psi(P)$ は $\Delta_0' \cap \mathfrak{D}_3$ 及び $\Delta_0'' \cap \mathfrak{D}_3$ に於て, 夫々正則な函数 $\psi_1(P), \psi_2(P)$ を表はします. 之等の函数は何れも $\Delta_0$ 内の $\xi = 0$ 上の各

点で矢張り正則であって, 其の間に $\psi_1(P) - \psi_2(P) = \varphi(P)$ なる関係があります.

此の解の表現を少し変へませう. 平面上に原点を中心とし $\rho_0$ を半径とする円周 $\Gamma$ を描きます. Cauchy に依て, $|\xi| < \delta$, $|x_j| < r$, $|y_k| < \rho_0$ $(j = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, \nu)$ に於て

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^\nu} \int_\Gamma \int_\Gamma \cdots \int_\Gamma \frac{\Phi(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_\nu)}{(u_1 - y_1) \ldots (u_\nu - y_\nu)} \, du_1 du_2 \ldots du_\nu$$

です. 積分は勿論, 各 $\Gamma$ に就て正の方向に行ひます. 之を次の様に略記しませう：

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^\nu} \int_{(\Gamma)} \frac{\Phi(x, u)}{(u_1 - y_1) \ldots (u_\nu - y_\nu)} \, du.$$

此の $\Phi(x, y)$ の積分表示に, $y_k = f_k(P)$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$ を代入し, $x_1$ を $t$ と置き換へ, 上に述べた $\psi(P)$ の積分表示に代入します. $t = u_0$ としますと

$$\psi(P) = \int_{(l, \Gamma)} \chi(u, P) \Phi(x', u) \, du, \tag{1}$$

$$\chi(u, P) = \frac{1}{(2\pi i)^{\nu+1} (u_0 - x_1)[u_1 - f_1(P)] \ldots [u_\nu - f_\nu(P)]}$$

となります. 但し, $\Phi(x', u)$ は $\Phi(u_0, x_2, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_\nu)$ の略記であって, 積分記号に就ては上に説明したと全く同様の略記法を用ひました. 改めて説明しなくても明瞭と思ひます. $\Delta_0 \cap \mathfrak{D}_3$ に於て, 上に述べた $\psi(P)$ の積分表示の代りに此の (1) を使ふことが出来ます.

6 — 空間 $(u)$ の筒状閉集合 $(l, \Gamma)$, $u_0 \in l$, $u_k \in \Gamma$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$ を見ますに, $(l, \Gamma)$ の如何程でも近くに, 之を含む単葉正則域があります. 其の一つを $V$ とします. 但し, $V$ は充分 $(l, \Gamma)$ に近くとるのですが, それに就ては其の都度説明することにしませう.

先づ, $(V, \mathfrak{D}_1)$ $((u) \in V, \ P(x) \in \mathfrak{D}_1)$ に於て有理型函数 $\chi_1(u, P)$ を, $(V, \mathfrak{D}_3)$ に於て, (1) 式の $\chi(u, P)$ と同じ極を持ち, 他の部分で極を持たない様に作らう と云ふのですが, $(V, \mathfrak{D}_1)$ は有限葉正則域であって, 極の分布に就ては, $\Delta$ に関する条件 $2^\circ$ に依て, $V$ を充分 $(l, \Gamma)$ に近くとって置けば, 同等条件が充たされますから, 定理 2 に依て, 此のことは可能です.

$\chi - \chi_1$ は $(V, \mathfrak{D}_3)$ に於て正則です. 所で, Cartan–Thullen の第一定理に依て, $(V, \mathfrak{D}_3)$ は明らかに, $(V, \mathfrak{D}_1)$ に於て正則な函数の全体に関して凸状です. 故に, 定理 1 に依て, $\chi - \chi_1$ は, $(V, \mathfrak{D}_3)$ の各点で斉一に収斂する様な, $(V, \mathfrak{D}_1)$ に於て正則な函数の級数に展開することが出来ます. それ

故, $V$ を $(l,\Gamma)$ に更に充分近く撰んで置きますと, 正数 $\varepsilon$ に対し, 次の様な函数 $F_1(u,P)$ が応じます： $F_1(u,P)$ は $(V,\mathfrak{D}_1)$ に於て正則であって, 第 4 節で述べた解析的多面体 $A$ に対し, $(V,A)$ に於て

$$|\chi-\chi_1-F_1|<\varepsilon.$$

$$K_1(u,P)=\chi-\chi_1-F_1$$

と置きます. $K_1(u,P)$ は $(V,\mathfrak{D}_3)$ に於ける正則函数であって, $(V,A)$ に於ては $|K_1|<\varepsilon$ です. $\mathfrak{D}_2$ に対しては, 全く同様にして $K_2(u,P)$ を作ります. 之等に依て, 積分 (1) を次の様に変形します：

$$I_1(P)=\int_{(l,\Gamma)}[\chi(u,P)-K_1(u,P)]\Phi(x',u)\,du \tag{2}$$

$$I_2(P)=\int_{(l,\Gamma)}[\chi(u,P)-K_2(u,P)]\Phi(x',u)\,du$$

$(u)\in(l,\Gamma)$ ならば, $\chi-K_1$ は $\chi_1+F_1$ に等しいのですから, $P(x)$ に関し $\mathfrak{D}_1$ に於て有理型であって, 特に $\Delta_0'$ に於て正則です. 故に, $I_1(P)$ は $\Delta_0'$ に於て正則 です. 同様に, $I_2(P)$ は $\Delta_0''$ に於て正則 です.

解析函数 $I_1(P),I_2(P)$ は, $\xi=0$ 上の $\Delta_0$ の各点に於て, 矢張り正則です. 何となれば, (1) の $\psi(P)$ が此の性質を持って居て, $K_1,K_2$ は正則函数だからです. $\psi(P)$ の性質から, $I_1(P),I_2(P)$ の間に 次の関係 のあることが分かります：

$$I_1(P)-I_2(P)=\varphi(P)-\int_{(l,\Gamma)}[K_1(u,P)-K_2(u,P)]\Phi(x',u)\,du. \tag{3}$$

$$K(u,P)=K_1(u,P)-K_2(u,P)$$

と書き表します. 此の恒等式を改めて見ますに, $\varphi(P)$ は $P\in A$ に於ける正則函数, $K$ は $(u)\in V$, $P\in\mathfrak{D}_3$ に於ける正則函数であって, $\Phi(x,y)$ は $(x,y)\in(C)$, $|\xi|<\delta$ に於ける正則函数ですから, 右辺は $P(x)$ に関する $A$ に於ける正則函数 です. 故に, 左辺に就ても其の通り です.

$$\varphi_0(P)=I_1(P)-I_2(P)$$

と置きます.

$\varphi_0,K$ を与へられた函数, $\varphi,\Phi$ を次に説明する様な関係を持つ一対の未知函数として, 函数方程式

$$\varphi(P)=\int_{(l,\Gamma)}K(u,P)\Phi(x',u)\,du+\varphi_0(P) \tag{4}$$

を考へます. $\ll$ 此処に, $\Phi(x', u)$ は $\Phi(u_0, x_2, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_\nu)$ の略記であって $\varphi_0(P)$ は $A$ に於ける正則函数, $K(u,P)$ は $(V, \mathfrak{D}_3)$ に於ける正則函数です. $(V, A)$ に於ては $|K(u,P)| < 2\varepsilon$ です. 未知函数 $\varphi(P), \Phi(x,y)$ に就ては, (4) 以外に, 次の条件が要求せられて居ます: $\varphi(P)$ は $P \in A$ に於ける正則函数, $\Phi(x,y)$ は $(x,y) \in (C)$, $|\xi| < \delta$ に於ける正則函数であって, $P \in A'$ なる $\Sigma$ の各点 $[x, f(P)]$ に於て, $\Phi(x,y) = \varphi(P)$ となること. $\gg$ か様な条件が課せられて居ますから, 此の函数方程式は定積分方程式と餘り違ひません.

我々は, 正数 $\varepsilon$ を充分小さく撰べば, 此の方程式が必ず解けることを云はうと云ふのですが, 其の前に, 此のことさへ云へば, それでよいことを確めて置きませう. 上述の解 $\varphi(P), \Phi(x,y)$ が存在したと假定します. 此の $\Phi(x', u)$ を (2) に代入しますと, かくて得る $I_1(P)$ は明らかに $\Delta_0'$ に於て正則です. 同様に, $I_2(P)$ は $\Delta_0''$ に於て正則です. 之等の解析函数は, $\xi = 0$ 上の $\Delta_0$ の各点に於て矢張り正則であること明かです. 其の間に (3) なる関係のあることも容易に分ります. (以上は一度行った推理を, 改めて条件を明らかにして, 点検したに過ぎません.) 故に, 此の $I_1(P), I_2(P)$ は第 4 節に述べた問題の解です. か様に, 函数方程式 (4) が解けさへすればよろしい. 勿論其の際 $\varepsilon$ を如何程小さく撰んで置いても支障ありません.

方程式 (4) を解きませう. 解析多面体 $A$ は次の形でした:

$$(A) \qquad P \in \Delta, \quad |\xi| < \delta_1, \quad |f_k(P)| < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

又, $0 < \delta < \delta_1$, $\rho_0 < \rho < 1$ なる $(\delta, \rho)$ に依て, $A$ の $(\delta_1, 1)$ を置き換へて得る多面体が $A'$ でした. $\rho < \rho' < 1$, $\delta < \delta' < \delta_1$ なる $(\delta', \rho')$ を撰び $A'$ の $(\delta, \rho)$ を此の $(\delta', \rho')$ に依て置き換へて得る解析的多面体を $A''$ とします. 之等の間には次の関係があります:

$$A' \Subset A'' \Subset A.$$

$\varphi_0(P)$ は $A$ に於ける正則函数です. 故に $A''$ に於て有界です. $A''$ に於て

$$|\varphi_0(P)| < M_0$$

とします. 補助定理 I$'$ に依て, $(x,y) \in (C)$, $|\xi| < \delta$ —— 今後此の筒状域を $(C')$ に依て表はします —— $(C')$ に於て 正則な函数 $\Phi_0(x,y)$ を, $P \in A'$ なる $\Sigma$ 上の各点 $[x, f(P)]$ に於て値 $\varphi_0(P)$ をとり, $(C')$ に於て

$$|\Phi_0(x,y)| < NM_0$$

となる様に作ることが出来ます. 此処に $N$ は $\varphi_0(P)$ (及び $M_0$, 並びに $\varphi_0(P)$ が $A$ で正則であると云ふこと) に無関係な或る正数です. 此の

$\Phi_0(x, y)$ から

$$\varphi_1(P) = K(\Phi_0) = \int_{(l,\Gamma)} K(u, P)\Phi_0(x', u)\,du$$

なる操作 $K(\Phi_0)$ に依て, 函数 $\varphi_1(P)$ を作ります. $(u) \in (l, \Gamma)$ ならば, $P(x)$ に関して, $K(u, P)$ は $\mathfrak{D}_3$ に於て正則であって, $\Phi_0(x', u)$ は $|x_j| < r$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$, 従って $(C)$ に於て正則です. 故に, $\varphi_1(P)$ は $\mathfrak{D}_3$ に於ける正則函数です.

次に, $\varphi_1(P)$ を評価しませう. $(u) \in (l, \Gamma)$, $P \in A$ ならば, $|K(u, P)| < 2\varepsilon$ であって, $(C')$ に於て $|\Phi_0(x, y)| < NM_0$ ですから, $A$ に於て

$$|\varphi_1(P)| < 2\varepsilon N N_1 M_0, \quad N_1 = 2r(2\pi\rho_0)^\nu$$

です. それで $\varepsilon$ を,

$$2\varepsilon N N_1 = \lambda < 1$$

となる様に, 始めに撰んで置きませう.

か様に, $\varphi_1(P)$ は $A$ に於て, 従って勿論 $A''$ に於て, 有界な正則函数ですから, $\varphi_0(P)$ に対して, $\Phi_0(x, y)$ を一つ撰んだと全く同様に, $\varphi_1(P)$ に対して, $\Phi_1(x, y)$ を一つ撰び, $\varphi_2(P) = K(\Phi_1)$ なる操作によって $\varphi_2(P)$ を作ります. 此の方法を反覆して, $\varphi_p(P)$, $\Phi_p(x, y)$ を作り, 函数級数

$$\varphi_0(P) + \varphi_1(P) + \cdots + \varphi_p(P) + \cdots, \tag{5}$$

$$\Phi_0(x, y) + \Phi_1(x, y) + \cdots + \Phi_p(x, y) + \cdots, \tag{6}$$

を考へます.

$\varphi_p(P)$ は $\mathfrak{D}_3$ に於て正則, $\Phi_p(x, y)$ は $(C')$ に於て正則です. $A$ に於て,

$$|\varphi_p(P)| < \lambda^p M_0 \quad (p > 0),$$

$(C')$ に於て

$$|\Phi_p(x, y)| < \lambda^p N M_0$$

です. 故に, (5) は $A$ に於て, (6) は $(C')$ に於て, 何れも斉一に収斂します. 其の極限を夫々 $\varphi(P)$, $\Phi(x, y)$ としますと, $\varphi(P)$ は $A$ に於て, $\Phi(x, y)$ は $(C')$ に於て, 何れも正則です. $P \in A'$ なる $\Sigma$ の各点 $[x, f(P)]$ に於て, $\Phi_p(x, y)$ $(p = 0, 1, \ldots)$ は値 $\varphi_p(P)$ を採りますから, $\Phi(x, y)$ は値 $\varphi(P)$ をとります. 故に, $\varphi(P)$, $\Phi(x', u)$ が, $P \in A$ に於て, 函数方程式 $(4)$ を満足することを云へばそれでよろしい. 所で, $P \in A$ に於て

$$\varphi_0 = \varphi_0,\ \ \varphi_1 = K(\Phi_0),\ \ \varphi_2 = K(\Phi_1), \ldots, \varphi_{p+1} = K(\Phi_p), \ldots.$$

$$\therefore \quad \varphi = K(\Phi) + \varphi_0.$$

第 4 節の問題は, か様に常に解けます.

7 — 課題を離れて暫く補助定理を準備します（7 – 9 節).

第二基礎的補助定理の形を今少し整へることから始めませう.

補助定理 II — 空間 $(x)$ の分岐点を内点として持たない有限擬凸状域 $\mathfrak{D}$ に於ては, 次の二つの条件を充たす連続実数値函数 $\varphi_0(P)$ が必ず存在する： $1°$, 任意の実数 $\alpha$ に対し, $\varphi_0(P) < \alpha$ を充たす $\mathfrak{D}$ の点の集合を $\mathfrak{D}_\alpha$ とすれば, $\mathfrak{D}_\alpha$ は, 若し存在すれば, $\mathfrak{D}_\alpha \Subset \mathfrak{D}$ であること. $2°$, $\mathfrak{D}$ の任意の点 $P_0$ に対し, 其の近傍に於て, 此の点を通り, 此の点以外では $\varphi_0(P) > \varphi_0(P_0)$ の部分のみにある様な正則固有面を撰び得ること.

証明　前報告に依て, 条件 $1°$ を充たし, 条件 $2°$ を, $\mathfrak{D}$ 内に集積しない様な例外点の集合を別として, 充たす様な連続 擬凸状 函数ならば, $\mathfrak{D}$ に於て常に存在することを知って居ます. 其の一つを $\varphi(P)$ とし, 其の例外点の集合を, 実在するとして, $E_0$ としましょう. $\varphi(P) = \lambda$ 上に $E_0$ の点が存在する様な実数値 $\lambda$ を $\varphi(P)$ の 例外値 と呼びませう. $\alpha$ を任意の実数とする時, $\varphi(P) < \alpha$ を充たす $\mathfrak{D}$ の点の集合を $\mathfrak{D}_\alpha$ とします. 条件 $1°$ に依て, $\mathfrak{D}_\alpha \Subset \mathfrak{D}$ ですから, $\mathfrak{D}_\alpha$ は有界且つ有界葉です. このことは $\alpha$ を少し大きくしても勿論変りませんから, $\mathfrak{D}_\alpha$ 内に於ける $E_0$ の点は有限個です. 云ふ迄もなく, $\lim_{\alpha\to\infty} \mathfrak{D}_\alpha = \mathfrak{D}$ ですから, 例外値は可附番個です. 之を

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots, \qquad \lambda_p < \lambda_{p+1}$$

としませう.

$\alpha_0$ を 例外値以外 の実数値として, $\mathfrak{D}_{\alpha_0} = \Delta$ とします. $\Delta$ に於て

$$\psi(P) = -\log d(P)$$

を考へます. 此処に $d(P)$ は $\Delta$ に関するユークリッド的境界距離であって, 対数記号は其の実分枝を意味します. $\Delta$ は有界ですから $\psi(P)$ は連続函数です. $\alpha$ を任意の実数とする時, $\psi(P) < \alpha$ を充たす $\Delta$ の点の集合を $\Delta_\alpha$ としますと, $\Delta_\alpha \Subset \Delta$ です. か様に, $\psi(P)$ は $\Delta$ に於て条件 $1°$ を充たします. 次に条件 $2°$ を調べませう. $P_0$ を $\Delta$ の任意の点とし, $\psi(P_0) = \beta$ とします. 然うしますと, $P_0$ を中心とし, $e^{-\beta}$ を半径として, $\mathfrak{D}$ 上に $2n$ 次元球 $S$ を描きますと, $S \subset \Delta$ であって, 其の境界上に $\varphi(P) = \alpha_0$ を充たす点があります. 其の一つを $M$ とします. $\varphi(P)$ は $\varphi(P) = \alpha_0$ の近傍に於て条件 $2°$ を充たしますから, $M$ の近傍に於て, $M$ を通り, $M$ 以外では $\varphi(P) > \alpha_0$ の部分のみを走る様な正則固有面 $\sigma$ があります. 平行移動

$$(T) \qquad x_i' = x_i + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

に依て, $M$ を $P_0$ に, $\sigma$ を $\sigma'$ に移します. $\sigma'$ は $P_0$ の近傍に於て定義せられて居ます. $\sigma'$ を見ますに, 其の $P_0$ 以外の任意の点を $P'$ としますと, 之に対応する $\sigma$ の点 $P$ は $\varphi(P) > \alpha_0$ の部分にあって, $P$, $P'$ の (ユークリッド幾何学的) 距離は $e^{-\beta}$ ですから, $P'$ は, $\Delta$ に属するならば, $\psi(P) > \alpha$ の部分にあります. か様に, <u>$\psi(P)$ は $\Delta$ に於て条件 $1°, 2°$ を充たす連続函数です.</u>

実数列 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \ldots$ を

$$\mu_1 < \lambda_1, \quad \lambda_p < \mu_{p+1} < \lambda_{p+1}$$

となる様に撰びます. $\alpha_0$ を

$$\lambda_1 < \alpha_0 < \mu_2$$

となる様にとり, 之に対して上述の $\psi(P)$ を考へます. $\alpha_0$ を充分 $\lambda_1$ に近く撰びますと, 此の $\psi(P)$ に対しては, 実数 $\beta$ を

$$\mathfrak{D}_{\mu_1} \Subset \Delta_\beta \Subset \mathfrak{D}_{\lambda_1}$$

となる様に撰ぶことが出来ます. か様にして得た $\psi(P)$ に依て (前報告の終りに述べたと同様にして), $\varphi(P)$ を補正して $\varphi_1(P)$ を作ります. それに就て説明しませう.

$\beta_1, \beta_2$ を上述の $\beta$ と同じ性質を持つ二つの実数とし,

$$\beta_1 < \beta_2$$

とします. $\gamma_1, \gamma_2$ を

$$\lambda_1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \alpha_0$$

なる二つの実数とします. $\mathfrak{D}$ を 5 つの部分 $\mathfrak{D}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, 5)$ に分かち,

$$\mathfrak{D}_1 = \Delta_{\beta_1}, \quad \Delta_{\beta_1} \cup \mathfrak{D}_2 = \Delta_{\beta_2}, \quad \Delta_{\beta_2} \cup \mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}_{\gamma_1},$$

$$\mathfrak{D}_{\gamma_1} \cup \mathfrak{D}_4 = \mathfrak{D}_{\gamma_2}, \quad \mathfrak{D}_{\gamma_2} \cup \mathfrak{D}_5 = \mathfrak{D}$$

とします. 実数 $B$ を適当に撰び, 正数 $A$ を充分大きく撰んで,

$$\Psi(P) = A[\psi(P) - B]$$

が,

$\mathfrak{D}_1$ に対しては, $\qquad \varphi(P) > \Psi(P)$,
$\mathfrak{D}_3$ 及び $\mathfrak{D}_4$ に対しては, $\qquad \varphi(P) < \Psi(P)$

となる様にします. 又, 実数 $B'$ を適当に撰び, 正数 $A'$ を充分大きく撰んで,

$$\Phi(P) = A'[\psi(P) - B']$$

が,

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{D}_3 \text{ に対しては}, & \Psi(P) > \Phi(P), \\ \mathfrak{D}_5' \text{ に対しては}, & \Psi(P) < \Phi(P), \\ \mathfrak{D}_5 \text{ に対しては}, & \varphi(P) < \Phi(P) \end{array}$$

となる様にします. 此処に $\mathfrak{D}_5'$ は $\mathfrak{D}_5$ の点集合 $\varphi(P)=\gamma_2$ の近傍の部分です. $\varphi_1(P)$ を次の様に定義します：

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{D}_1 \text{ に於ては}, & \varphi_1(P) = \varphi(P)\ . \\ \mathfrak{D}_2 \text{ に対しては}, & \varphi_1(P) = \max[\varphi(P), \Psi(P)]. \\ \mathfrak{D}_3 \text{ に於ては}, & \varphi_1(P) = \Psi(P). \\ \mathfrak{D}_4 \text{ に対しては}, & \varphi_1(P) = \max[\Psi(P), \Phi(P)]. \\ \mathfrak{D}_5 \text{ に於ては}, & \varphi_1(P) = \Phi(P). \end{array}$$

か様に定義せられた $\varphi_1(P)$ を点検しませう. $\varphi_1(P)$ は $\mathfrak{D}$ に於ける一価実数値函数です. 連続であることも容易に確められます. $\psi(P)$ は性質 $2^\circ$ を持ち, $\varphi(P)$ は $\mathfrak{D}$ 内に集積しない様な例外点の集合以外では性質 $2^\circ$ を持ちますから, $\varphi_1(P)$ は $\varphi(P)$ と同様です. $\varphi_1(P)$ の例外値を調べますと, $\mathfrak{D}_3$ では $\varphi_1=\Psi$ であって, $\mathfrak{D}_5$ では $\varphi_1=\Phi$ ですから,

$$\lambda_2', \lambda_3', \dots, \lambda_p', \dots$$

です. ここに $\varphi_1(P) = \lambda_p'$ と $\varphi(P) = \lambda_p$ とは同じ点集合です. $\varphi_1(P)$ を原の $\varphi(P)$ と比較しますと, $\mathfrak{D}_{\mu_1}$ に於て, $\varphi_1(P) = \varphi(P)$, $\mathfrak{D}$ に於て, $\varphi_1(P) \geq \varphi(P)$ であることが容易に分かります. $\varphi_1 \geq \varphi$ ですから $\varphi_1$ は性質 $1^\circ$ を持ちます. 此の $\varphi_1(P)$ は $\varphi(P)$ と大体同じ性質の函数です. 唯, 擬凸状函数であるかどうかと云ふ点が違って居ますが, 上の操作には $\varphi(P)$ の此の性質は使ひませんでした. それ故, $\varphi(P)$ から $\varphi_1(P)$ を作ったと全く同様にして, $\varphi_1(P)$ から $\varphi_2(P)$ を作ることが出来ます. 此の操作を例外値が残って居る限り繰り返します. か様にして,

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_p(P), \dots$$

が得られます. $\varphi_p(P)$ $(p>1)$ の性質の中 $p$ と共に変る部分を挙げますと, $\varphi_p(P)$ の例外値は

$$\lambda_{p+1}^{(p)}, \lambda_{p+2}^{(p)}, \dots, \lambda_{p+q}^{(p)}, \dots$$

——此処に $\varphi_p(P)=\lambda_{p+q}^{(p)}$ と $\varphi(P)=\lambda_{p+q}$ とは同じ点集合です——であって, $\mathfrak{D}_{\mu_p}$ に於て $\varphi_p(P)=\varphi_{p-1}(P)$, $\mathfrak{D}$ に於て $\varphi_p(P)\geq\varphi_{p-1}(P)$ です ($\mathfrak{D}_5$ に於て $\varphi_1=\Phi$ であることに注意). か様な $\varphi_p(P)$ を撰ぶことが出来ます.

故に, 此の函数列の極限, 又は列の函数が有限個の場合には, 其の最後のものを $\varphi_0(P)$ としますと, $\varphi_0(P)$ は明らかに所求の函数です. (証明終)

か様にして作った $\varphi_0(P)$ は, 実際は擬凸状函数です. [12]

8 — 第二報告の始めに, 有理整函数に関して外的に凸状な Hülle に就て述べました. 之を少し拡張して, 前節の基礎定理を補ひませう. 但し, 此の度は便宜上 (内的) 凸性を考へます.

補助定理 3 — $\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ に於ける有限葉正則域とし, $E_0$ を $E_0 \Subset \mathfrak{D}$ なる開集合とする. 然る時は, 1°, $E_0$ を含み, $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体に関して凸状である様な $\mathfrak{D}$ の部分開集合中には 最小のものが存在し, 之を $H$ とすれば, $H \Subset \mathfrak{D}$ である. 2°, 次の条件を充たす固有面片 $\sigma$ は存在しない : $\sigma$ は $H$ の界点を通り, $H$, $E_0$ 及び $E_0$ の境界を通らず, $\sigma$ の界点は $H$ 及び其の境界上に無いこと. 及び, $\sigma$ は次の形に定義せられること :

$$\varphi(P) = 0, \quad P \in V,$$

此処に $V$ は $V \Subset \mathfrak{D}$ なる領域であって, $\varphi(P)$ は $\mathfrak{D}$ 上の $V$ の近傍に於ける正則函数である. [13]

証明 1°, 先づ, Hülle $H$ の存在を云はうと云ふのですが, 其の為少し準備します.

$\mathfrak{D}$ は 有限葉 ですから, $\mathfrak{D}'$ が $\mathfrak{D}$ に関して有界な $\mathfrak{D}$ の部分集合であると云ふことと, $\mathfrak{D}' \Subset \mathfrak{D}$ であると云ふこととは一致します. $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体を $(\mathfrak{F})$ とします. $\mathfrak{D}$ は正則域ですから, Cartan–Thullen の第一定理に依て, $\mathfrak{D}$ は $(\mathfrak{F})$ に関して凸状です. 故に, 補助定理 1 に依て, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0$ と見て, 此の補助定理に述べた解析的多面体 $\Delta$ を作ることが出来ます. $\Delta$ は次の形です :

$$(\Delta) \qquad P \in R,\ |x_i| < r,\ |f_j(P)| < 1 \quad (i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,\nu).$$

此処に, $f_j(P)$ は $(\mathfrak{F})$ の函数であって, $R$ は $\Delta \Subset R$ なる $\mathfrak{D}$ の部分開集合です. 尚, $E \Subset \mathfrak{D}$ なる与へられた集合 $E$ に対し, $E \Subset \Delta$ です.

$\rho$ を任意の正数とし, $\mathfrak{D}$ に関するユークリッド的境界距離を $d(P)$ とする時, $d(P) > \rho$ なる $\mathfrak{D}$ の点の集合を $\mathfrak{D}_\rho$ とします. (但し, $\rho$ は $\mathfrak{D}_\rho$ が存在する程小さくとります.) $\mathfrak{D}$ が有限空間 $(x)$ と一致する場合には $\mathfrak{D}_\rho = \mathfrak{D}$ です. 平行移動,

$$(T) \qquad x'_i = x_i + a_i, \quad \Sigma|a_i|^2 \leq \rho^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

[12] 其の為には, $\mathcal{D}_{\alpha_0} = \Delta$ が擬凸状であればよろしい (第九報告, 定理 3). 此のことに就ては第 9 節参照

[13] 此の 1° の部分は, H. Cartan–P.Thullen の K–Konvexe Hülle の存在に関する定理から直ちに出ます. 唯, 原著の証明は同時解析接続の可能性に関する基礎定理に立脚して居ます. Cartan–Thullen の前掲の論文参照. (尚, 定理 I の脚註参照.)

に依て, $\mathfrak{D}_\rho$ の点 $P$ を $\mathfrak{D}$ の $P'$ に移します. $P$ が決れば, $P'$ は一意に決まります. $(\mathfrak{F})$ の函数 $f(P)$ から,

$$F(P) = f(P')$$

を作りますと, $F(P)$ は $\mathfrak{D}_\rho$ に於ける正則函数です. $(T)$ を上述の制限内に於ける任意の平行移動とし, $f(P)$ を $(\mathfrak{F})$ の任意の函数とした時の $F(P)$ の全体を $(\mathfrak{F}_\rho)$ とします.

$A$ を $A \Subset \mathfrak{D}$ なる開集合とします. $A$ を $(\mathfrak{F})$ に関して凸状としますと, $A_0 \Subset A$ なる任意の集合 $A_0$ に対し, $A$ の任意の界点 $M$ の如何程でも近くに点 $P_0$ があって, $(\mathfrak{F})$ の少くとも一つの函数 $f(P)$ が $|f(P_0)| > \max|f(A_0)|$ なる関係を充たします. 之を暫く性質 $(\alpha)$ と呼びませう. 逆に, $A$ が性質 $(\alpha)$ を持てば, $A$ は $(\mathfrak{F})$ に関して凸状であることを証明しませう. $A \Subset \mathfrak{D}$ ですから, 上に説明した解析的多面体 $\Delta$ を, $A \Subset \Delta$ となる様に撰ぶことが出来ます. 正数 $\rho$ を充分小さく, $\Delta \subset \mathfrak{D}_\rho$ となる様にとります. $A$ は, 性質 $(\alpha)$ を持ちますから, $(\mathfrak{F}_\rho)$ に関して凸状であること明白です. 所で, $(\mathfrak{F}_\rho)$ の任意の函数は $\Delta$ に於て正則ですから, 定理 1 に依て, $\Delta$ の各点に於て斉一に収斂する様な $(\mathfrak{F})$ の函数の級数に展開することが出来ます. 故に, $A$ は $(\mathfrak{F})$ に関して凸状であること明らかです.

扨て, $A$ を $E_0$ を含み $(\mathfrak{F})$ に関して凸状である様な $\mathfrak{D}$ の任意の部分開集合とします. $A$ の總てに属する $\mathfrak{D}$ の点の集合を考へ, 其の内点の集合を $H$ とします.

$E_0$ は開集合ですから, $E_0 \subset H$ です. 上述の $\Delta$ に於て, $E = E_0$ ととることが出来ますから, $H \Subset \mathfrak{D}$ です. $H$ は明らかに性質 $(\alpha)$ を持ちます. 故に, $H$ は $(\mathfrak{F})$ に関して凸状です. か様に, $H$ は $E_0$ を含み $(\mathfrak{F})$ に関して凸状である様な最小の $\mathfrak{D}$ の部分開集合であって, $H \Subset \mathfrak{D}$ です.

$2^\circ$ , 補助定理に述べた性質の固有面片 $\sigma$ が存在したと假定しませう. 之が矛盾に終ればよろしい. $V \Subset V' \subset \mathfrak{D}$ なる $V'$ に於て, $\varphi(P)$ が正則であるとします. 正数 $\rho$ を充分小さく撰び, $V'$ に関するユークリッド的境界距離を $d(P)$ とすれば, $\min d(V) > \rho$ となる様にします (不等式の左辺は $V$ に於ける $d(P)$ の下端). 平行移動,

$$x_i' = x_i + z_i, \quad \Sigma|z_i|^2 \leq \rho^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

に依て, $V$ の点 $P$ を $V'$ の点 $P'$ に移します. $(z)$ を複素助変数と看做し,

$$\psi(P, z) = \varphi(P')$$

として, 固有面片族 $(\mathfrak{G})$, $\psi(P, z) = 0$, $P \in V$ を考へます. $\rho$ を充分小さく撰び, $(\mathfrak{G})$ の固有面片の界点が決して $H$ 内に入って来ない様にします.

$(\mathfrak{G})$ のどの固有面片にもぞくしない様な $H$ の点の集合を $H_0$ とします. $A_0$ を $A_0 \Subset H_0$ なる開集合とします. 上に見ました様に, $A_0$ を含み $(\mathfrak{F})$ に関して凸状な $\mathfrak{D}$ の部分開集合中には最小のものがあります. 之を $A$ とします. $H$ は $(\mathfrak{F})$ に関して凸状ですから, 補助定理 1 に依て, 上に見た $H$ の場合と同様にして, $A \Subset H$ であることが分かります. $A \subset H_0$ であることを証明しませう.

空間 $(z)$ に原点を中心とし半徑を $\rho$ とする $2n$ 次元球 $S$ を描きます. 空間 $(x, z)$ に於ける $(H, S)$ $((x) \in H, (z) \in S)$ は, 領域 $(x) \in \mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体に関して凸状な, 此の領域の部分開集合です. 故に, 定理 2 に依て, $(H, S)$ に於て, 有理型函数 $G(P, Z)$ を撰び, $(V, S)$ との共通部分に於て

$$1/\psi(P, z)$$

と同等であって, 他の部分で極を持たない様にすることが出来ます. (定理 2 は有限葉正則域に於てはと云ふのですが, 実際は此の領域が補助定理 1 の $\mathfrak{D}_0$ に課せられた条件を充たすことしか使って居ませんから).

$A$ が $H_0$ に含まれないと假定します. 然うしますと $A$ は開集合ですから, $H_0$ 外の点を含みます. 故に, $S$ 内に点 $(z^0)$ を適当に撰び $\psi(P, z^0) = 0$ 上に $A$ の点 $P_0$ がある様に出来ます. $t$ を複素変数として, 函数

$$G(P, t, z^0)$$

を考へますと, 此の函数は $P$ が $H$ にあり, $t$ が線分 $(0, 1)$ の近傍にある時有理型であって, $P = P_0, t = 1$ に於て極を持ち, $G(P, 0)$ は $A$ の近傍 ($\mathfrak{D}$ 上に於ける) に於て極を持ちません. $t$ が線分 $(0, 1)$ を 1 から 0 に向って描くとき, $G(P, t, z^0)$ が $A$ 又は其の境界上に於て最後に極を持つ様な点を $t_0$ とします. $G(P, t_0, z^0)$ は $A$ の境界上に於て極を持ち, $A$ に於て正則でなければなりません. 其の極の一つを $M$ とします. $M$ に充分近い $A$ の点を $P_1$ としますと, $A_0 \Subset H_0$ であって, $M$ は不定点ではありませんから,

$$|G(P_1, t_0, z^0)| > \max |G(A_0, t_0, z^0)|.$$

所で, 定理 1 に依て, $G(P, t_0, z^0)$ を, $A$ の各点で斉一に収斂する様な, $(\mathfrak{F})$ の函数の級数に展開することが出来ます. 之は明らかに $A$ の最小性と相容れません. 故に, $A \subset H_0$ でなければなりません.

$A_0$ は $A_0 \Subset H_0$ なる任意の開集合ですから, 上の結果は, 開集合 $H_0$ が性質 $(\alpha)$ を持つことを示します. 故に, $H_0$ は $(\mathfrak{F})$ に関して凸状です. 此の結果は $\rho$ を如何程小さくとっても成立します. 所で, $\rho$ を充分小さくしますと, $E_0 \subset H_0$ です. 之は, $H$ の最小性と矛盾します. (証明終)

9 — 補助定理 3 から, 次の二つの補助定理が容易に得られます.

補助定理 4 — $\Delta$ を空間 $(x)$ の有理整函数に関して凸状な単葉領域とし, $\varphi(x)$ を $\Delta$ の近傍に於ける, 補助定理 II に述べた性質 $2^\circ$ を持つ様な, 実数値連続函数とする. $\alpha$ を任意の実数とする時, $\varphi(x) < \alpha$ を充たす $\Delta$ の点の集合を $\Delta_\alpha$ とすれば, $\Delta_\alpha$ は, 若し存在すれば, 有理整函数に関して凸状である.

証明　$\Delta_\alpha$ を含み, 単葉であって, 有理整函数に関して凸状である様な開集合中には, 補助定理 3 に依て最小のものがあります. 之を $H$ とします. 明かに $H \subset \Delta$ です. 故に, $H$ の近傍に於て $\varphi(x)$ が定義せられて居ます. $H$ と其のすべての界点とからなる閉集合を $\overline{H}$ とし, $\varphi(x)$ の $\overline{H}$ 上に於ける最大値を $\beta$ としますと, $\overline{H}$ 上には $\varphi(x) = \beta$ となる点があります. 其の一つを $M$ とします. $\varphi(x)$ は性質 $2^\circ$ を持ちますから, $M$ は $H$ の界点でなければなりません. 更に, 同じ性質に依て, $M$ の近傍に於て, $M$ を通り, 此の点以外では $\overline{H}$ を通らない様な固有面が存在します. 故に, 補助定理 3 に依て, $M$ は $\Delta_\alpha$ の界点でなければなりません. 故に, $\beta = \alpha$, 従って $H = \Delta_\alpha$ です. 故に $\Delta_\alpha$ は有理整函数に関して凸状です. （証明終)

補助定理 5 — $\varphi(P)$ を空間 $(x)$ の領域 $\mathfrak{D}$ に於て, 補助定理 II に述べた性質 $2^\circ$ を持つ実数値連続函数とし, $\Delta$ を $\Delta \Subset \mathfrak{D}$ なる正則域とする. 若し或る実数 $\alpha$ に対して, $\varphi(P) < \alpha$ なる $\mathfrak{D}$ の点の集合を $\mathfrak{D}_\alpha$ とする時, $\mathfrak{D}_\alpha \Subset \Delta$ ならば, $\mathfrak{D}_\alpha$ は $\Delta$ に於ける正則函数の全体に関して凸状である.

$\Delta \Subset \mathfrak{D}$ ですから, $\triangle$は有界葉です. か様に, $\triangle$は有界葉正則域であって, $\mathfrak{D}_\alpha \Subset \Delta$ ですから, 補助定理 3 を適用することが出来ます. 以下, 上の場合と全く同様です.

次に, H. Cartan–P. Thullen の定理及び H. Behnke–K. Stein の定理を述べます.

H. Cartan–P. Thullen の第二定理 — $\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ の領域とし, $(\mathfrak{F})$ を $\mathfrak{D}$ に於て正則なすべての函数からなる函数族とする. 若し, 次の二つの条件が充たされるならば, $\mathfrak{D}$ は正則域である： $1^\circ$, $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$ なる任意の集合 $\mathfrak{D}_0$ に対し, $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}' \Subset \mathfrak{D}$ なる開集合 $\mathfrak{D}'$ が対応し, $\mathfrak{D}'$ はその任意の界点 $M$ に対し, $(\mathfrak{F})$ 中に少くとも一つの函数 $f(P)$ が存在して, $|f(M)| > \max |f(\mathfrak{D}_0)|$ となると云ふ性質を持つこと. $2^\circ$, $\mathfrak{D}$ の相異なる二点 $P_1, P_2$ に対し, $(\mathfrak{F})$ には少くとも一つの函数 $f(P)$ があって, $f(P_1) \neq f(P_2)$ となること. [14]

[14] 原著者は此の第二定理 (及び第一定理) を $K$–凸性に就て述べて居るのですが, 此処では便宜上, 上の形にしました. 証明法は全く同様であって, 直接的です. (Cartan–Thullen の論文, 前掲, 参照.)

H. Behnke–K. Stein の補助定理 — $\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ の領域とし,

$$\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_p, \ldots$$

を, $\mathfrak{D}_p \Subset \mathfrak{D}_{p+1}$ であって, $\mathfrak{D}$ を極限とする様な, $\mathfrak{D}$ の部分開集合の列とする. 若し, 1°, $\mathfrak{D}_p$ が $\mathfrak{D}_{p+1}$ に於ける正則函数の全体 $(\mathfrak{F}_{p+1})$ に関して凸状であって, 2°, $\mathfrak{D}_p$ の相異なる二点 $P_1, P_2$ に対し, $(\mathfrak{F}_{p+1})$ 中に $f(P_1) \neq f(P_2)$ なる函数 $f(P)$ があるならば, $\mathfrak{D}_p$ は $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体 $(\mathfrak{F})$ に関して上述の性質 1°, 2° を持つ. [15]

証明 (Cartan–Thullen の第二定理に依て, $\mathfrak{D}_{p+1}$ は正則域ですから), 定理 1 に依て, $\mathfrak{D}_p$ に於ける任意の正則函数 $\varphi(P)$ を, $\mathfrak{D}_p$ の各点に於て斉一に収斂する様な, $(\mathfrak{F}_{p+1})$ の函数の級数に展開出来ます. 此のことは勿論, $p+1, p+2, \ldots$ に対しても成立しますから, $\varphi(P)$ を $(\mathfrak{F})$ の函数に依て, 同様に展開出来ます. 故に, $\mathfrak{D}_p$ は明らかに $(\mathfrak{F})$ に関して性質 1°, 2° を持ちます. (証明終)

H. Behnke–K. Stein の定理 — $\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ の領域とする. 若し, $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$ なる任意の集合 $\mathfrak{D}_0$ に対し, $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}' \Subset \mathfrak{D}$ なる正則域 $\mathfrak{D}'$ が対応するならば, $\mathfrak{D}$ は正則域である. [16]

証明 $\mathfrak{D}'$ は正則域ですから, F. Hartogs に依て擬凸状域です. 故に, 第九報告, 定理 2 の系 2 に依て, $\mathfrak{D}$ は擬凸状域です. 故に, $\mathfrak{D}$ に対して, 補助定理 II の函数 $\varphi_0(P)$ が存在します. 所で, 補助定理 5 に依て, $\mathfrak{D}_\alpha$ $(\varphi_0(P) < \alpha,\ P \in \mathfrak{D})$ は $\mathfrak{D}_\alpha \Subset \mathfrak{D}'$ なる正則域 $\mathfrak{D}'$ に於ける正則函数の全体に関して凸状です. 従って, $\alpha, \beta$ を $\alpha < \beta$ なる任意の二つの実数としますと, $\mathfrak{D}_\alpha$ は $\mathfrak{D}_\beta$ に於ける正則函数の全体に関して, Behnke–Stein の補助定理に挙げた二つの条件を充たしますから, $\mathfrak{D}_\alpha$ は $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体に関しても同様です. 故に, Cartan–Thullen の第二定理に依て, $\mathfrak{D}$ は正則域です. (証明終)

補助定理 4, 5 の一部分を今少し拡張して置きませう.

補助定理 6 — $\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ に於ける有限葉正則域とし, $\varphi(P)$ を $\mathfrak{D}$ に於て, 補助定理 II の性質 2° を持つ実数値連続函数とする. $\alpha$ を任意の実数とする時, $\varphi(P) < \alpha$ を充たす $\mathfrak{D}$ の点の集合を $\mathfrak{D}_\alpha$ とすれば, ($\mathfrak{D}_\alpha$ が実在すれば,) $\mathfrak{D}_\alpha$ の各連結成分は正則域である. [17]

証明 $\mathfrak{D}_\alpha$ が実在すると考へます. $\mathfrak{D}$ は正則域ですから, F. Hartogs に依て擬凸状域であって, 従って, 此の $\mathfrak{D}$ に対して, 補助定理 II に述べた実

[15] H. Behnke–K. Stein : Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität, 1938, (Math. Annalen).

[16] 15 に同じ.

[17] 実際は, $\mathcal{D}_\alpha$ は $\mathcal{D}$ に於ける正則函数の全体に関して凸状です.

数値函数が存在します. 之を $\psi(P)$ とし, $\beta$ を $\beta < \alpha$ なる実数, $\gamma$ を任意の実数として, 開集合,

$$(\mathfrak{D}_{\beta\gamma}) \qquad\qquad P \in \mathfrak{D}, \quad \varphi(P) < \beta, \quad \psi(P) < \gamma$$

を考へます. $\mathfrak{D}$ は有限葉正則域であって, $\mathfrak{D}_{\beta\gamma} \Subset \mathfrak{D}$ ですから, $E_0 = \mathfrak{D}_{\beta\gamma}$ として, 補助定理 3 を適用することが出来ます. 以下補助定理 4 の場合と全く同様にして, $\mathfrak{D}_{\beta\gamma}$ が $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体に関して凸状であることが容易に分かります. 故に, $\mathfrak{D}_{\beta\gamma} \subset \mathfrak{D}$ ですから Cartan–Thullen の第二定理に依て, $\mathfrak{D}_{\beta\gamma}$ の各連結成分は正則域です. 所で, $\mathfrak{D}_{\beta\gamma} \Subset \mathfrak{D}_\alpha$ であって, $\mathfrak{D}_{\beta\gamma}$ は $\mathfrak{D}_\alpha$ の如何程でも近くにとれますから, Behnke–Stein の定理に依て, $\mathfrak{D}_\alpha$ の各連結成分は正則域です.　(証明終) [18]

10 — 課題に帰ります. 先づ擬凸状域が正則域であることを申しませう.
空間 $(x)$ に 有限葉 領域 $\mathfrak{D}$ を考へます. $x_1$ を実部と虚部とに分ち,

$$x_1 = \xi + i\,\eta$$

とします. $a_1, a_2$ を

$$a_2 < 0 < a_1$$

なる実数とし, $\xi < a_1$ なる $\mathfrak{D}$ の部分を $\mathfrak{D}_1$, $\xi > a_2$ なる $\mathfrak{D}$ の部分を $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ の共通部分を $\mathfrak{D}_3$ とします. $\mathfrak{D}$ には $\xi < a_2$ なる部分及び $\xi > a_1$ なる部分があると考へ, 之等の部分に夫々一点 $Q_1$, $Q_2$ をとります. $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ の各連結成分は正則域であると假定します. 然うしますと, $\mathfrak{D}_3$ も必ず同様です.

F. Hartogs に依て, 正則域は擬凸状域ですから, $\mathfrak{D}$ は擬凸状域です. 故に, 此の $\mathfrak{D}$ に関して, 補助定理 II に述べた実数値函数 $\varphi_0(P)$ を考へることが出来ます. $\alpha$ を実数として, $\varphi_0(P) < \alpha$ を充たす $\mathfrak{D}$ の点の集合 $\mathfrak{D}_\alpha$ を考へます. $\alpha$ を充分大きくとれば, $\mathfrak{D}_\alpha$ は定点 $Q_1$, $Q_2$ を同じ一つの連結成分中に含みます. 此の連結成分を $A$ とします. $A$ は有界且つ有界葉です. $\xi < a_1$, $\xi > a_2$ 及び $a_2 < \xi < a_1$ を充たす $A$ の部分を夫々 $A_1$, $A_2$, $A_3$ とします. 補助定理 6 に依て, $A_1$, $A_2$, $A_3$ の各連結成分は正則域です.

$\xi = 0$ 上の $A$ の界点の集合を $\Gamma$ とし, $\Gamma$ の任意の点を $M$ とします. $M$ の近傍に於て定義せられ, $M$ を通り, 此の点以外は $\mathfrak{D}$ 上の $\sigma$ の近傍に於ける $\varphi_0(P) > \alpha$ の部分のみにある様な固有面片 $\sigma$ があります. $\sigma$ の方程式を $\psi(P) = 0$ ($\psi(P)$ は正則函数) とします. $\alpha < \beta$ なる $\beta$ を充分 $\alpha$ に

[18] F. Hartogs に依て, 正則域は擬凸状域ですから, 補助定理 4 から, 此の節の諸定理と第九報告の諸定理とに依て, 擬凸状域の性質が容易に分かります: ≪ $\varphi(x)$ を $2n$ 次元球 $S$ の近傍に於ける擬凸状函数とし, $\varphi(x) < \alpha$ ($\alpha$ は任意の実数) を充たす $S$ の点の集合を $S_\alpha$ とすれば, $S_\alpha$ は, 若し存在すれば, 擬凸状である.≫

近くとりますと, $\mathfrak{D}_\beta$ $(\varphi_0(P)<\beta)$ 内に於て $\sigma$ は界点を持ちません. (但し, 其の際若し必要ならば, $\sigma$ の境界の近傍を少し切り捨てます.) $\mathfrak{D}_\beta$ の $a_2<\xi<a_1$ なる部分を $B$ としますと, $B$ は有界葉であって, 其の各連結成分は正則域です. 故に, 定理 2 に依て, $B$ に於て有理型であって, $\sigma$ に於て極 $1/\psi(P)$ を持ち, 他に極を持たない様な函数 $G(P)$ が存在します. $G(P)$ は $A_3$ に於ては正則です. $\Gamma$ の任意の点 $M$ に対し, か様な函数 $G(P)$ が対応します. 又, $A_3$ の各連結成分は正則域です (補助定理 1 の証明法参照). 故に, 正数 $\delta_0$, $\varepsilon_0$ を充分小さく撰べば, 次に述べる三つの条件を充たす様な正則函数 $f_j(P)$ $(j=1,2,\ldots,\nu)$ が $A_3$ に於て存在することが, 慣用の推理法に依て, 容易に分かります. 条件は :

$1°$, $|\xi|<\delta_0$, $|f_j(P)|<1$ $(j=1,2,\ldots,\nu)$ を充たす $A$ の点の集合を $A_0$ とすれば, $A_0 \Subset A$.

$2°$, $p$ を $1,2,\ldots,\nu$ の任意の一つとすれば, $|f_p(P)|\geq 1-\varepsilon_0$ を充たす $\mathfrak{D}_3$ の点は $|\xi-a_1|<\delta_0$ の部分にも, $|\xi-a_2|<\delta_0$ の部分にも存在しないこと.

$3°$, 数値系 $[f_1(P), f_2(P), \ldots, f_\nu(P)]$ は $A_0$ の相重なる二点で決して同一とならないこと.

尚, $|f_j(P)|<1$ $(j=1,2,\ldots,\nu)$ を充たす $A_3$ の点の集合を $A_4$ としますと, $A_4$ は如何程でも $A_3$ に近くとれることが分かります. $\xi\leq a_2$ 又は $\xi\geq a_1$ を充たす $A$ の部分と $A_4$ との和を考へますと, 之は開集合です. $A_4$ が充分 $A_3$ の近くにある様に $f_j(P)$ $(j=1,2,\ldots,\nu)$ を撰び, 此の開集合の連結成分中に, 定点 $Q_1, Q_2$ を同時に含むものがある様にし, 此の連結成分を $\Delta$ とします. <u>$\Delta$ は第 4 節に挙げた諸条件を充たします.</u>

実数 $\alpha$ を或る値 $\alpha_0$ より大きくさへとれば, $\mathfrak{D}_\alpha$ の $Q_1, Q_2$ を同時に含む連結成分として $A$ を考へることが出来ます. $\alpha'$ を $\alpha_0<\alpha'<\alpha$ となる様に撰び, $\alpha$ に $A$ を対応せしめたと全く同様にして, $\alpha'$ に $A'$ を対応せしめます. $A'\Subset A$ であること云ふ迄もありません. $A'$ の $\xi<0$ の部分を $A'_1$, $\xi>0$ のそれを $A'_2$ とします. $\Delta$ は如何程でも $A$ に近くとれるのですから, 前章の結果から, 直ちに次の結果が得られます : <u>開集合, $P\in A$, $|\xi|<\delta_0$ ($\delta_0$ は如何程小さくてもよい) に於て正則な函数 $\Phi(P)$ が与へられた時, $A'_1$ に於て正則な函数 $\Phi_1(P)$ と $A'_2$ に於て正則な函数 $\Phi_2(P)$ とを, 何れも $\xi=0$ 上の $A'$ の各点に於て矢張り正則であって, 恒等的に $\Phi_1(P)-\Phi_2(P)=\Phi(P)$ となる様に作ることが出来る.</u>

$A$ に極 $(\wp)$ が与へられたとしませう. 定理 2 に依て, $A_1$ に於て, 有理型函数 $G_1(P)$ を, $(\wp)$ を極とする様に作ることが出来ます. $A_2$ に於ても同様です. 之を $G_2(P)$ とします. $G_1(P)-G_2(P)$ は $A_3$ に於て正則です. 故に, 上の結果から, 次のことが分かります : <u>$A$ に於て Cousin の第一問題が与へられた時, 之を $A'$ に於て解くことが出来る.</u>

改めて $A$ を考へます. $A$ は $\mathfrak{D}_\alpha$ $(\alpha_0 < \alpha)$ の $Q_1, Q_2$ を含む連結成分です. $A$ の任意の界点を $M$ とします. $(\gamma)$ を $\mathfrak{D}$ 上に描かれた, $M$ を中心とする多円筒とします. $(\gamma)$ を充分小さくとりますと, $(\gamma)$ に於て定義せられた固有面片 $\sigma$ を, $M$ を通り, 此の点以外は $\varphi_0(P) > \alpha$ の部分に存在する様に, 撰ぶことが出来ます. $\sigma$ を

$$\psi(P) = 0, \quad P \in (\gamma)$$

とします. $\psi(P)$ は $(\gamma)$ に於ける正則函数です. 若し必要ならば $(\gamma)$ を少し小さくしますと, $\alpha$ に充分近い $\alpha < \alpha''$ なる $\alpha''$ が存在して, 之に対応する $A''$ 内に $\sigma$ の界点はありません. 故に, 上に述べましたことから, $\alpha''$ を更に $\alpha$ に近くとりますと, $A''$ に於て有理型函数 $G(P)$ を求め, $\sigma$ 上で, 極 $1/\psi(P)$ をとり, 他に極を持たない様にすることが出来ます. 此処に $M$ は $A$ の任意の界点です.

$A$ に関して <u>Cartan–Thullen</u> の第二定理の二つの条件を点検しませう. $A$ に於ける正則函数の全体を $(\mathfrak{F})$ とします. 上に見ましたことから, 明かに, $1^\circ$, $A$ は $(\mathfrak{F})$ に関して凸状です.

$A$ の相重なる任意の一対の点を $P_1, P_2$ とし, 其の共通の基点を $\underline{P}$ とします. $\underline{P}$ を一端として, 空間 $(x)$ に半直線 $\underline{L}$ を描きます. $A$ 上に, $P_1$ から出発して半直線を, 其の基点がすべて $\underline{L}$ 上にある様に描きますと, $A$ は有界ですから, 此の半直線は必ず $A$ の境界と交はります. 其の一点を $M_1$ とし, 此の線分 $(P_1, M_1)$ を $L_1$ とします. 同様にして, $P_2$ を一端とする線分 $L_2$ を描きます. 線分 $L_1$ の長さが $L_2$ の長さを超えないと考へませう. (か様に假定しても勿論一般性は失はれません.) $M = M_1$ に対応する $G(P)$ を $G_0(P)$ とします. $G_0(P)$ は $A$ に於て正則, $M_1$ 以外の $A$ のすべての界点に於ても矢張り正則であって, $M_1$ に於ては極を持ちます. 故に, $G_0(P)$ は $P_1, P_2$ に於て相異なる要素を持たなければなりません. 従って, $2^\circ$, $A$ の相異なる二点に対し, $(\mathfrak{F})$ 中には之等の二点に於て相異なる値をとる函数が必ずあります.

か様に条件 $1^\circ, 2^\circ$ が充たされますから, <u>Cartan–Thullen</u> の第二定理に依て, $A$ は正則域です. $\mathfrak{D}$ は有限葉領域であって, $A$ は其の如何程でも近くにとれますから, <u>Behnke–Stein</u> の定理に依て, <u>$\mathfrak{D}$ は正則域です.</u>

$\mathfrak{D}$ を改めて空間 $(x)$ に於ける <u>擬凸状域</u> とします. 此の $\mathfrak{D}$ に関して, 補助定理 II に述べた函数 $\varphi_0(P)$ をとり, $\alpha$ を任意の実数として, $\mathfrak{D}_\alpha$ $(\varphi_0(P) < \alpha)$ を考へます. (但し, $\mathfrak{D}_\alpha$ が実在する程 $\alpha$ を大きくとります.) 定理 2 の証明に於てしました様に (第 3 節, 及び前報告の第 3 節参照), $\mathfrak{D}_\alpha$ を小 $2n$ 次元立方体 (開集合) $(A)$ に分ちます. 但し, $(A)$ は必ずしも完全な形とは限りません. 充分細かく分ちますと, 補助定理 4 に依て, 各 $(A)$ は (完全な形であるときは云ふ迄もなく, 然うでない場合に於ても) 有理整函数に

関して凸状な単葉開集合です. 従って, Cartan–Thullen の第二定理に依て, 其の各連結成分は正則域です. 分割を充分細かくすれば, 各 $(B)$ に就ても同様です. ($(B)_0$ は $(A)_0$ を中心とする $9^n$ 個の $(A)$ と, 夫等の境界の適当な部分とからなる $2n$ 次元立方体であって, 勿論不完全な形であってもよろしい.) 故に, 上に得た結果によって, $\mathfrak{D}_\alpha$ の各連結成分が正則域であることが, Cousin の第一問題の時と同様にして容易に分かります. 故に, Behnke–Stein の定理に依て, $\mathfrak{D}$ は正則域です.

定理 I — 分岐点を内点として持たない有限擬凸状域は正則域である. [19]

此の定理に依て, 或る領域が正則域かと云ふ問題は, 總て其の領域が擬凸状域かと云ふ問題に還元せられます. [20]

11 — 凸性の定義 (前報告, 第 1 節) を少し拡張し, 改めて次の様に定義します.

定義 — $\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ の分岐点を内点として持たない有限領域とし, $(\mathfrak{F})$ を $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数からなる一つの函数族とする. $\mathfrak{D}$ が $(\mathfrak{F})$ に関して凸状とは, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$ なる任意の集合とする時, $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$ なる $\mathfrak{D}$ に関して有界な開集合 $\mathfrak{D}'$ が対応し, $\mathfrak{D}'$ に属しない $\mathfrak{D}$ の任意の点 $P_0$ に対し, $(\mathfrak{F})$ 中に少なくとも一つの函数 $f(P)$ があって, $|f(P_0)| > \max|f(\mathfrak{D}_0)|$ となることを云ふ. $\mathfrak{D}$ が共通点を持たない数個 (有限又は無限) の上述の性質を持つ領域の和である時も同様に名づける.

此の定義は明らかに之迄の定義を含みます. 次の凸性を併せ考へるのが便利です.

定義 — 上述の状況に於て, $\mathfrak{D}$ が $(\mathfrak{F})$ に関して狭義凸状とは, $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$ なる任意の集合 $\mathfrak{D}_0$ に対し, $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}' \Subset \mathfrak{D}$ なる開集合 $\mathfrak{D}'$ が対応して上述の条件を充たすことを云ふ.

狭義凸状ならば, 明らかに凸状です. $\mathfrak{D}$ が有限葉ならば, 此の新しく定義した二つの凸性及び前に定義したものは一致します. $\mathfrak{D}$ が $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体に関して凸状 (或は狭義凸状) であることを, 簡単に, $\mathfrak{D}$ は正則凸状 (或は 狭義正則凸状) であると云ひませう. [21]

---

[19]以上の所論から Cartan–Thullen の第一定理を抜き去るには ≪ 正則域 ≫ と云ふ言葉の代りに ≪ 次の二つの条件を充たす領域 $\mathcal{D}$ ≫ と云ふ言葉を使へばよろしい. 条件 : 1°, $\mathcal{D}$ に於ける正則函数の全体を $(\mathcal{F})$ とすれば, $\mathcal{D}$ は $(\mathcal{F})$ に関して凸状であること. 2°, $\mathcal{D}$ の相異なる任意の一対の点に対し, 此の二点に於て相異なる値をとる函数が $(\mathcal{F})$ 中に存在すること. 結果として, 定理 I と Cartan–Thullen の第一定理とが同時に得られます.

[20]第六報告の序言参照. 屡々遭遇する一例を求めますと, 擬凸状域のÜberlargerungs-bereich は矢張り擬凸状域ですから, 例へば, Cartan–Thullen の第二定理に於て, 第二条件は要りません.

[21]H. Behnke 及び其の一門は狭義凸性を指して凸性と呼んで居ます. (Behnke–Thullen の著書及び第一節の始めに挙げた H. Behnke–K. Stein の三つの論文中始めの二つ, 特に,

正則域は狭義正則凸状であるかと云ふことが前報告以来の懸案でした[22]. 先づ此の点を調べます.

補助定理 7 — 補助定理 II (第 7 節) に於て, $\mathfrak{D}_\alpha$ は $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体に関して凸状である.

証明　$\mathfrak{D}_\alpha$ は擬凸状域です (補助定理 4, Cartan–Thullen の第二定理及び Hartogs の定理に依る). 故に, 定理 I に依て正則域です. 故に, $\beta$ を $\alpha<\beta$ なる実数としますと, 補助定理 5 に依て, $\mathfrak{D}_\alpha$ は $\mathfrak{D}_\beta$ に於ける正則函数の全体に関して凸状です. 故に, Behnke–Stein の補助定理に依て, $\mathfrak{D}_\alpha$ は $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体に関して凸状です.　(証明終)

定理 II — 有限正則域は狭義正則凸状である.

証明　$\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ の (有限) 正則域とします. $E$ を, $E \Subset \mathfrak{D}$ なる任意の点集合とします. 補助定理 II に於ける $\mathfrak{D}_\alpha$ を $E \Subset \mathfrak{D}_\alpha$ となる様にとります. 上の補助定理 7 に依て, $\mathfrak{D}_\alpha$ は $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体 $(\mathfrak{F})$ に関して凸状ですから, 補助定理 1 に依て, $\mathfrak{D}_0=\mathfrak{D}_\alpha$ と見て, 解析的多面体 $\Delta$ を,

$$(\Delta) \qquad P\in R,\ |x_i|<r,\ |f_j(P)|<1 \quad (i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,\nu)$$

の形に, $E\Subset\Delta$ となる様に撰ぶことが出来ます. 此処に, $f_j(P)$ は $(\mathfrak{F})$ の函数, $R$ は $\Delta \Subset R \subset \mathfrak{D}$ なる適当な開集合です.

$\Delta$ に属しない $\mathfrak{D}$ の任意の点を $P_0$ とします. 此の $P_0$ に対して, $(\mathfrak{F})$ の函数 $f(P)$ を, $|f(P_0)|>\max|f(E)|$ となる様に撰びうることを云へばよろしい. $\Delta$ と同じ性質の $\Delta'$ を, $\Delta\Subset\Delta'$, $P_0\in\Delta'$ となる様にとります. $\Delta'$ の形を,

$$(\Delta') \qquad P\in R',\ |x_i|<r',\ |F_k(P)|<1 \quad (i=1,2,\ldots,n;k=1,2,\ldots,\mu)$$

とします. 但し, $r\le r'$ となる様に撰びます. $\Delta$, $\Delta'$ から

$$(\Delta'') \qquad P\in R',\quad |x_i|<r,\quad |f_j(P)|<1,\quad |F_k(P)|<1$$
$$(i=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots,\nu;k=1,2,\ldots,\mu)$$

を作ります. $\Delta$ は明らかに $\Delta''$ の一つ又は数個の連結成分の和です. $P_0$ が $\Delta''$ に属しないならば, $x_i$, $f_j(P)$ の中には, 所求の条件を充たすものが必ずあります. $P_0$ が $\Delta''$ に属するならば, $\Delta''$ に於て, $\Delta$ で 0, 他の部分

第二のもの参照.) 尚, 前に一度申しました様に, 正則函数族に関する全域的凸性なる概念は H. Cartan に依て導入せられました. (第四報告の終り脚註に於ける, H. Cartan の論文参照.)

[22] 其の第 1 節参照. 我々は第一次研究 (第一乃至第六報告) が一通り済むまでは単葉領域を離れませんでしたが, 其の理由の一つは此処にありました.

で 1 となる函数を考へますと, 此の函数は, $\Delta''$ に於て正則ですから, 定理 1 に依て, $\Delta''$ の各点で斉一に収斂する様な, $(\mathfrak{F})$ の函数の級数に展開されます. 故に, 此の場合にも所求の函数は存在します.　(証明終)

系 — $\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ の有限正則域とし, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体 $(\mathfrak{F})$ に関して凸状な $\mathfrak{D}$ の部分開集合とすれば, $\mathfrak{D}_0$ は $(\mathfrak{F})$ に関して狭義凸状である.

証明　$\mathfrak{D}_0$ は $(\mathfrak{F})$ に関して凸状ですから, $E$ を, $E \Subset \mathfrak{D}_0$ なる任意の集合としますと, $\mathfrak{D}_0$ には $E \subset \mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}_0$ であって $\mathfrak{D}_0$ に関して有界な開集合 $\mathfrak{D}'$ があって, 定義に述べた条件を充たします. 他方, 上の定理 II に依て, $\mathfrak{D}$ には $E \subset \mathfrak{D}'' \Subset \mathfrak{D}$ なる $\mathfrak{D}''$ があって, $\mathfrak{D}$ に関して, 従って勿論 $\mathfrak{D}_0$ に関して同じ条件を充たします. $\mathfrak{D}' \cap \mathfrak{D}'' = \mathfrak{D}_1$ を考へますと, $E \subset \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_0$ であって, 此の条件を充たします. 所で, $\mathfrak{D}''$ は有界葉であって, $\mathfrak{D}'$ は $\mathfrak{D}_0$ に関して有界ですから, $\mathfrak{D}_1 \Subset \mathfrak{D}_0$ です. 故に, $\mathfrak{D}_0$ は $(\mathfrak{F})$ に関して狭義凸状です.　(証明終)

定理 1 と此の系とから, 次の結果が得られます.

定理 III — $\mathfrak{D}$ を空間 $(x)$ の有限正則域とし, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数の全体 $(\mathfrak{F})$ に関して凸状な $\mathfrak{D}$ の部分開集合とすれば, $\mathfrak{D}_0$ に於ける任意の正則函数は, $\mathfrak{D}_0$ の各点に於て斉一に収斂する様な, $(\mathfrak{F})$ の函数の級数に展開することが出来る.

定理 2 と定理 II, III とから, 次の結果が得られます.

定理 IV — 有限正則域に於て, Cousin の第一問題は常に解ける.

(第十一報告終,　3. 12. 12)