多変数解析函数に就いて

XII — 固有集合体の表現[1]

前報告で述べた諸定理を更に拡張しようと思ひます. 此の論文では, 其の準備として, 固有集合体を空間的, 且つ全域的に表現することに就いて考察します[2] [3].

≪ 此の論文に現れる領域は, 特に断らない限り, 単葉有限です.≫

1 — 正則函数系の共通零点の集合として表し得る集合体を固有集合体と云ひます. 以下に考察しようと云ふのは此の種の表現に就いてです. 其の前に, か様な集合体に関する一般的な概念に就いて一応説明しませう[4].

先づ 固有集合体の要素 を定義します. n 個の複素変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の描く空間に領域 $\mathfrak{D}$ を考へ, $\mathfrak{D}$ の任意の点を (a) とし, (a) を中心にして $\mathfrak{D}$ 内に $2n$ 次元球 (又は超球体, 開集合) S を描きます. 可逆一次変換,

$$(T) \qquad y_i = a_{i1}(x - a_1) + a_{i2}(x_2 - a_2) + \cdots + a_{in}(x_n - a_n),$$
$$|a_{ij}| \neq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

に依って, 空間 (x) を空間 (y) に移します. 此のとき, 球 S が S' に移ったとしませう. λ を $1 \leq \lambda \leq n-1$ なる整数, m を正の整数として, 方程式,

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda, y_{\lambda+1}) = y_{\lambda+1}^m + A_1 y_{\lambda+1}^{m-1} + \cdots + A_m = 0$$

を考へます. 此処に方程式の左辺は $(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = (0)$ を頂点とする, 分解不可能な特殊擬多項式[5] です. 更に, 空間 $(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda, y_{\lambda+1})$ に於ける集合体 $\Phi = 0$ 上の任意の点を M とし, 方程式

$$y_{\lambda+k} = \varphi_k(M) \quad (k = 2, 3, \ldots, \mu;\ \mu = n - \lambda)$$

---

[1] ［編註］この稿の表紙の表題の下に
「之は第 2 節の補助定理 1 及び第 6 節の証明の二ヶ所で大きく間違って居る」という書き込みがある.

[2] 問題に就いては第 1 節の終り, 結果に就いては第 4 節の定理参照. 此の問題は, 或る条件の下に, 第八報告の第 2 節に於いて一度取り扱ひました (定理 2 参照).

[3] 此の問題に関聯して,
H. Cartan : Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, 1940 (Journal de Mathématiques)
が想起せられますが, 其処に述べられた諸定理を此の問題に適用する試みからは, 著者は何等の成果をも得ることが出来ませんでした.

[4] W. F. Osgood : Lehrbuch der Funktionentheorie II , 1 (1929) 第二章特に第 17 及び第 27 節参照.

[5] Osgood, 第二章, 第 5 節参照.

を考へます．此処に $\varphi_k(M)$ は何れも $\Phi=0$ 上で定義せられた, 有界な, 一価連続函数であって， 此の集合体上で一般に解析的な様なものです[6]. 聯立方程式, $\Phi=0$, $y_{\lambda+k}=\varphi_k(M)$ $(k=2,3,\ldots,\mu)$ によって規定せられる空間 (y) の点集合を σ'' とします．函数 Φ, φ_k は空間 (y) の原点を中心とする多円筒 (γ) 内に於て, 夫々上に述べた様な性質の函数として定義せられて居て, 此の (γ) 内に球 S の像 S' が存在すると考へ, σ'' の S' 内の部分を σ' とし, σ' に対応する空間 (x) の点集合を σ とします．此の (S,σ) を指して, 詳しく云ひますと, か様な一次変換 T が存在する様な (S,σ) を, 領域 $\mathfrak{D}$ に於て定義せられた固有集合体の要素 と呼ぶことにしませう．(a) を此の要素の 中心 と呼び, 此の要素は 2λ (実)次元, 或は λ 複素次元であると云ひます. 此の定義の基礎となって居るものは次の定理です.

Weierstrass の定理 — 変数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ に関する聯立方程式,

$$F_1(x)=F_2(x)=\cdots=F_p(x)=0$$

を考へる．此処に $F_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,p)$ は空間 (x) の点 (a) の近傍で正則であって，此の点に於て 0 となり，恒等的には 0 とならない様な函数である．即ち,

$$F_j(a)=0,\quad F_j(x)\not\equiv 0\qquad (j=1,2,\ldots,p).$$

若し点 (a) の如何程でも近くに此の聯立方程式を充たす第二の点があるならば, (a) の近傍に於けるかかる点の集合は, 有限個の, (a) を中心とする固有集合体の要素の和である．(之等の要素は同一次元とは限らない.)[7]

上に御話しました固有集合体の要素の定義で, 球 S は或る程度まで任意です. 此の点を補ふため次の定義を添へませう： E_1,E_2 を $\mathfrak{D}$ に於ける固有集合体の要素からなる二つの集合としませう．之等の集合が 相等 しいと云へば次の意味であると解します： E_1 に屬する任意の要素 (S,σ) に対し, E_2 に屬する少くとも一つの要素 (S',σ') が対応し, S と S' とは同じ中心を持ち, 其の小さな方のものの中で $\sigma=\sigma'$ であること．及び逆も眞であること.

か様に定義せられた要素から出発して固有集合体を定義しませう．(S,σ), (S',σ') を $\mathfrak{D}$ に於ける二つの要素とします．S と S' とが共通部分 (δ) を持って居て, (δ) に於いて σ, σ' が何れも空集合ではなく, $\sigma=\sigma'$ となるとき, 之等の要素は互に他の 直接的延長 であると云ひませう．$\mathfrak{D}$ に於いて,

[6] 同, 第 12 節の諸定義及び定理 1, 2 参照.

[7] 此処に云ふ要素とは, 上に説明した (S,σ) について申しますと, 勿論 σ のみを指して居るのであって, 球 S は問題外です.

二つの要素 (S,σ), (S',σ') が互に他の 解析的延長 であると云へば, それは之等の間に有限個の $\mathfrak{D}$ に於ける要素を置き, 列

$$(S,\sigma),(S_1,\sigma_1),\ldots,(S_m,\sigma_m),(S',\sigma')$$

を相隣る二つが相互に直接的延長である様に, することが出来ると云ふ意味です.

領域 $\mathfrak{D}$ 内に要素 (S_0,σ_0) を与へ, 其の $\mathfrak{D}$ に於ける解析的延長である様な要素の全体を考へ, 之を (又は之と相等しい任意の集合を, 之等を總て同一のものと看做し) $\mathfrak{D}$ に於いて定義せられた, 解析的に連結な固有集合体 と呼びませう. 一般に, $\mathfrak{D}$ に於いて定義せられた固有集合体と云へば, $\mathfrak{D}$ に於いて解析的に連結な固有集合体の, 次の条件を充たす様な可附番個の和のことと解し, 之等の解析的に連結な固有集合体の各を, 其の 解析的連結成分 と呼びませう. 条件は, $\mathfrak{D}$ 内に与へられた任意の閉集合上に点を持つ様な成分の数は有限個であることです. 我々はか様に固有集合体を, 畢竟 要素の集合 と看做さうと云ふのです.

第八報告で, 被覆可能な固有集合体を定義しました. 此の定義を少し拡張します. 領域 $\mathfrak{D}$ を次の様に被覆します : $\mathfrak{D}$ の任意の一点 P に対して, P を中心とする $2n$ 次元球 (γ) と, (γ) の近傍で正則な函数系 $[f_1(x),f_2(x),\ldots,f_p(x)]$ とを対応せしめ, 聯立方程式

$$f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_p(x)=0$$

を充たす点の集合の (γ) 内の部分を σ とします. P が $\mathfrak{D}$ 全体を描くと考へたとき, 之等の函数系の全体は次の条件を充たすものとします : $(\gamma_1),(\gamma_2)$ を共通部分 (δ) を持つ様な任意の一対の (γ) とすれば, (γ_1) に応ずる σ_1 と (γ_2) に応ずる σ_2 とは, (δ) に於いて

$$\sigma_1=\sigma_2$$

となること. Σ を領域 $\mathfrak{D}$ に於いて定義せられ, 各 (γ) に於いて

$$\Sigma=\sigma$$

となる様な点集合としませう. 上に述べた Weierstrass の定理 から, か様な Σ は, $\mathfrak{D}$ に於いて定義せられた或る一つの固有集合体 Σ' に屬する要素の中心の集合であることが直ちに分かります. 所で, か様な固有集合体に対しては, 殊更之を要素の集合と考へる必要は少しもありませんから, 此の点集合 Σ を指して, 被覆可能な固有集合体 と呼び, 之に対し, 第八報告の第 1 節で定義したものを, 狭い意味で被覆可能 であると呼んで, 暫く区別することにします. 尚, 上述の系統 $\{(\gamma);f_1(x),f_2(x),\ldots,f_p(x)\}$ を Σ

の 被覆 と云ひ, 第八報告のそれを 狭い意味に於ける被覆 と云ふことにしませう.

1°. Σ を領域 $\mathfrak{D}$ に於ける被覆可能な固有集合体とし, (a) を Σ 上の点とします. (a) の近傍に於いて Σ が

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & y_{\lambda+1} = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda), \quad y_{\lambda+2} = \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda), \\
& \ldots, \quad y_n = \varphi_\mu(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) \qquad (\mu = n - \lambda), \\
& y_i = a_{i1}(x_1 - a_1) + a_{i2}(x_2 - a_2) + \cdots + a_{in}(x_n - a_n), \\
& |a_{ij}| \neq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}
$$

此処に $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$ は原点の近傍に於ける $(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda)$ の正則函数, a_{ij} は常数, の形に表現出来るとき, (a) を Σ の 正則点, 然うでないとき 特異点 と呼びませう. 正則点は次の性質を持って居ます.

Σ を $\mathfrak{D}$ に於ける被覆可能な固有集合体とし, (a) を其の正則点とする. (a) の近傍に於いて, Σ は, 2λ 次元であるとすれば, 次の形に表すことが出来る :

$$z_{\lambda+k} = \psi_k(z_1, z_2, \ldots, z_\lambda) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu,\ \mu = n - \lambda),$$

此処に $z_1, z_2, \ldots, z_\lambda$ は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の適当な λ 個, $z_{\lambda+1}, z_{\lambda+2}, \ldots, z_n$ は其の残りであって, ψ_k は, (a) に対応する空間 (z) の点を (z^0) とすれば, $(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_\lambda^0)$ の近傍で正則な, 変数 $z_1, z_2, \ldots, z_\lambda$ の函数である.

証明 Σ の正則点 (a) の近傍が上述 (1) の形に表されるとして,

$$F_k(y) = y_{\lambda+k} - f_k(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

と置きますと,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_\mu)}{\partial(z_{\lambda+1}, z_{\lambda+2}, \ldots, z_n)} &= \frac{\partial(F_1, \ldots, F_\mu)}{\partial(y_{\lambda+1}, \ldots, y_n)} \frac{\partial(y_{\lambda+1}, \ldots, y_n)}{\partial(z_{\lambda+1}, \ldots, z_n)} \\
&= \frac{\partial(y_{\lambda+1}, y_{\lambda+2}, \ldots, y_n)}{\partial(z_{\lambda+1}, z_{\lambda+2}, \ldots, z_n)}.
\end{aligned}
$$

所で行列式 $|a_{ij}| \neq 0$ ですから, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 中から μ 個を適当に撰んで, $z_{\lambda+1}, z_{\lambda+2}, \ldots, z_n$ としますと, 最後の Jacobi の行列式が (之は常数ですが) 0 ではない様に出来ます. 故に定理は成立します.

2°. [8]

扨て, 以下に取り扱はうと云ふのは次の問題です.

[8] ［編注］欄外に次のような書き込みがある.

「此処へ, 被覆が単一 (simple), 重複 (multiple) であると云ふ定義を入れること, 言葉については再考.」

空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ 内に被覆可能な固有集合体 Σ が与へられ, $\mathfrak{D}$ の完全内部に領域 Δ が与へられたとき, Δ に於いて正則な函数 $F_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, p)$ を求め, Σ の Δ 内の部分を

$$F_1(x) = F_2(x) = \ldots F_p(x) = 0$$

の形に表現すること.

我々は其の考察を, それで充分ですから, $\mathfrak{D}$ が筒状域である場合に限定します. ≪ 以下, 此の論文で取り扱ふ固有集合体はすべて 被覆可能 です. それ故此の条件は一々明示しません.≫

2 — 上の問題に Weierstrass の定理 を適用しようと云ふのですが, 其の爲には, 或る一つの点を鮮明にして置かなければなりません. 空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ 内に, 正則函数 $F_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,p)$ を, 其の中に恒等的に 0 のものが無い様に与へます. 聯立方程式

$$F_1(x) = F_2(x) = \ldots F_p(x) = 0$$

を充たす $\mathfrak{D}$ の点の集合を, 実在するものと考へ, Σ で表します.

所で, 前節の定義に従ひますと, Σ が孤立点を含んで居る場合には, 之を固有集合体と呼べない釈ですが, それでは不便ですから, 今後 (被覆可能な) 固有集合体は 0 次元の成分を含んで居てもよい ことにしませう.

上述の Σ に帰り, 其の一点を (a) とします. 扨て Weierstrass の定理 ですが, (a) が孤立点ならば問題はありません. それで然うでないとしませう. 然うしますと, Σ の (a) の近傍は (a) を中心とする有限個の要素から成り立って居る筈です. 其の任意の一つを (勿論此の際は 0 次元でないとして) (S,σ) としませう. 此の (S,σ) に対して, 前節の始めに説明した可逆一次変換 T が少くとも一つ対応する筈です. 今後之を

$$(T) \qquad (y) = \|a_{ij}\|(x-a) \qquad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

の如く略記しませう. 此処で疑問となるのは, 母式 $\|a_{ij}\|$ を撰らぶ際, どの程度の制限を受けるかと云ふことです. 実際は, 可逆母式 $\|a_{ij}\|$ を任意に一つ撰らびますと, それが上述の目的に合致しない様な (Σ の要素 (S,σ) が存在する) 場合は寧ろ例外なのです. 夫でか様な可逆母式及び非可逆母式を 例外的母式 と呼びませう. 例外的母式を避けるにはどの程度の注意が要るかと云ふことを, 先づ調べようと云ふのです.

遡って Weierstrass の予備定理をよく見ることから始めませう[9].

[9] Osgood, 第二章参照

Weierstrass の予備定理 — 函数 $F(x)$ を点 (a) で正則であって,

$$F(a) = 0, \quad F(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n) \not\equiv 0$$

とする. 記述を簡単にする爲 $a_n = 0$ とする. 然るときは, $F(x)$ は (a) を中心とする充分小さな多円筒 (γ) に於いて次の形に表される :

$$F(x) = (x_n^m + A_1 x_n^{m-1} + \cdots + A_m)\,\Omega(x),$$

此処に A_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ は多円筒 (γ) に於いて正則であって, $A_k(a) = 0$ となる様な, 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ のみの函数, $\Omega(x)$ は (γ) に於いて正則であって, 決して 0 とならない様な函数である.

此処で問題となるのは条件

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n) \not\equiv 0$$

であります. 之について考察しませう.

函数 $F(x)$ を有界領域 Δ の近傍で正則と考へます. Δ の任意の一点を (a) とし, 記号を簡単にする爲 $(a) = (0)$ と看做します. 若し

$$F(0, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$$

ならば, $x_1 = 0$ は方程式 $F = 0$ の解です. 一般に, Δ を通る 固有平面

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n = A_0$$

が $F = 0$ の解ならば, 暫く, 此の平面を 例外的平面 と呼び, $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ (に依って決定せられる方向) を 例外的方向 と呼びます. 例外的平面は有限個しかあり得ないこと明らかですから, 例外的方向に就いては尚更其の通りです.

それで, 先づ一次函数

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\,,$$

を,

$$a_{11} \neq 0$$

であって, $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ が $F = 0$ と Δ とに関する例外的方向でない様に撰らびます. そして

$$F_1(y_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と置きますと,

$$F_1(0, x_2, \ldots, x_n) \not\equiv 0.$$

次に, 空間 $(y_1, x_2, \ldots, x_n)$ に於ける Δ の像を Δ' とし, Δ' の $y_1 = 0$ に依る切断 (点 $(0, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ が Δ' に属する様な空間 $(x_2, \ldots, x_n)$ の点 $(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ の集合) を Δ_1 とします. 若し

$$F_1(0, 0, x_3, \ldots, x_n) \equiv 0$$

ならば, $x_2 = 0$ は方程式 $F_1(0, x_2, \ldots, x_n) = 0$ と Δ_1 とに関する例外的平面です. それ故, 一次函数

$$y_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n$$

を,

$$a_{22} \neq 0$$

であって, $(a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n})$ が $F(0, x_2, \ldots, x_n) = 0$ と Δ_1 とに関する例外的方向でない様に撰らびます. か様な例外的方向は, $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ を決定した後は, 高々有限個しかありません. そして

$$F_2(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と置きますと,

$$F_2(0, 0, x_3, \ldots, x_n) \not\equiv 0.$$

此の推理法を有限回反覆すれば次の結果に到達することが容易に分かります.

補助定理 1 — $F(x)$ を有界領域 Δ の近傍で正則であって, 恒等的に 0 でない函数とすれば, 次の条件を充たす様な可逆母式

$$\|a_{ij}\|, \quad |a_{ij}| \neq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

此処に a_{ij} は常数, は常に存在する. 条件は, Δ の任意の点を (b) とするとき, 一次変換,

$$(T) \qquad (y - b) = \|a_{ij}\|(x - b)$$

に依って $F(x)$ が $\Phi(y)$ に移される. 即ち

$$F(x) = \Phi(y)$$

とすれば,

$$\Phi(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, y) \not\equiv 0$$

であること.

更に, $\|a_{ij}\|$ は次の形に撰ぶことが出来る：

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & a_{nn} \end{array} \right\|$$

尚, 其の爲には次の如く撰らべば充分である：$(a_1) = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ を, $a_{11} \neq 0$ であって, (a_1) を齊次座標の点と看做して云へば, 或る決った, 高々有限個の点を避けて撰らぶ. 次に, か様に (a_1) を決定した後, $(a_2) = (a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n})$ を, $a_{22} \neq 0$ であって, 上と同じ意味に於いて, (a_2) が或る決った, 高々有限個の点と一致しない様に撰ぶ. 以下同様にして, $(a_1), (a_2), \ldots, (a_{n-2})$ を決定した後, $(a_{n-1}) = (a_{n-1,n-1}, a_{n-1,n})$ を, $a_{n-1,n-1} \neq 0$ であって, 点 (a_{n-1}) が或る決った, 高々有限個の点と一致しない様に撰らぶ. 最后に $a_{n,n}$ は $a_{n,n} \neq 0$ である様に撰らぶ.

此の補助定理の後半は, 大体上に行った推理を記述したものに過ぎません. 又前半は, 後半から慣用の推理法に依って容易に導くことが出来ます.

之から次の結果が得られます. (Weierstrass の定理の証明法を辿れば[10]容易に確かめられます.)

補助定理 2 — Weierstrass の定理に於いて, 函数 $F_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ を有界領域 Δ の近傍で正則とすれば, Δ の如何なる点に対しても例外とならない様な, 同じ一つの母式 $\|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ は存在する. 更に, $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{n-1,n}, a_{n,n})$ を Euclid 空間の点と看做して云へば, 例外点 (a) (Δ の何がしかの点に対して例外的である様な母式 $\|a\|$ に応じる点) と其の集積点との集合は内点を持たない.

3 — 函数 $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)$ を空間 (x) の有界領域 Δ の近傍で正則な函数とし, Σ を固有集合体

$$F_j(x) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

の Δ 内の部分とします. Σ の任意の点を (a) とし, (a) が Σ の孤立点でないとしませう. Weierstrass の定理 に依って, Σ の (a) の近傍の部分は有限個の, (a) を中心とする要素の和です. 其の任意の一つを (S, σ) とします. 第一節の冒頭に於ける記号を襲用しますと, 一次変換 T に依る σ の像 σ' は, 空間 (y) の原点の近傍で定義せられた, 此の点を通る, λ 複素次元 $(0 < \lambda < n)$ の集合体です. 此の σ' を, 空間 $(y_{\lambda+2}, y_{\lambda+3}, \ldots, y_n)$ に平行に, 空間 $(y_1, y_2, \ldots, y_{\lambda+1})$ に 射影 しますと, 其の像は固有面

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda, y_{\lambda+1}) = y_{\lambda+1}^m + A_1 y_{\lambda+1}^{m-1} + \cdots + A_m = 0 \quad (m > 0)$$

[10] Osgood, 第二章参照

です. Φ は原点 $(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = (0)$ を頂点とする, 分解不可能な特殊擬多項式でした. か様な場合, 空間 (x) の σ に就いて, 此の射影の方向 ($y_k = \mathrm{const}$ $(k = \lambda+2, \lambda+3, \cdots, \lambda+\mu = n)$), 或はその像 ($\Phi = 0$) は例外的でないと呼ぶことにしませう.

前節に於いては固有集合体の射影が例外的とならない様な方向に就いて調べたのでした. 次に, 要素 σ を数個の (例外的でない) 方向に射影し, 其の像 (固有面) の組合せによって σ を規定することに就いて考察しませう.

上に述べた σ' の射影的性質は変数 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の順序を変へると失はれるかも知れません. 然し, 補助定理 2 に依って, 此のことが (y) の順序に無関係に成立する様に, (y) を撰びうることが容易に分かります. (a) を領域 Δ の任意の点と見ても, 尚然うである様に出来ることも明らかです. か様に (y) を撰らびます. (之が, 補助定理 2 の意味に於いて, 一般の場合です.) 然うして置いて, $y_{\lambda+1}$ と $y_{\lambda+k}$ $(k = 2, 3, \ldots, \mu,\ \mu = n - \lambda)$ とを置き換へて, 上述の操作を行ひます. 繰り返して申しますと, σ' を, 空間 $(y_{\lambda+2}, \ldots, y_{\lambda+k-1}, y_{\lambda+1}, y_{\lambda+k+1}, \ldots, y_n)$ に平行に, 空間 $(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda, y_{\lambda+k})$ に射影します. 然うしますと, 聯立方程式

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda, y_{\lambda+1}) = 0 \\
& \Phi_1(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda, y_{\lambda+2}) = 0 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \Phi_{\mu-1}(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda, y_n) = 0
\end{aligned}
$$

が得られます. Φ_j $(j = 1, 2, \ldots, \mu-1)$ は Φ と同じ性質を持って居ます. 此の聯立方程式に依って, 空間 (y) の原点の近傍で定義せられる固有集合体を A で表しませう.

(1) の何れか一つの方程式, たとへば $\Phi(y_1, \ldots, y_\lambda, y_{\lambda+1}) = 0$ に応じる, 空間 $(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda)$ 上に張られた Riemann 面 (2λ 次元) を $\Re$ で表しますと, σ' の点は

$$
(2)\qquad (y_1, y_2, \ldots, y_\lambda, u_1, u_2, \ldots, u_\mu) \qquad (n = \lambda + \mu)
$$

の形に表されます. 此処に u_k $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$ は変数 $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ のみの函数であって, $\Re$ 上に於いて一価です. (2) に於いて $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ として, 之等の多価函数の任意の分枝を採って (y, u) を作りますと, 此の点は, 一般には最早や σ' 上にはありません. 然し A の点であることには変りがありません. 逆に, A の点はすべてか様な形に表されます. か様に, A は原点を通る, 有限個の, σ' と同じ性質を持つ集合体からなって居て, 其の一つが σ' です. 之等を

$$
\sigma', \sigma'_1, \ldots, \sigma'_N
$$

としませう.

以下暫く複素空間に於ける幾何学の言葉を使ひます. 先づ, σ' の次元 λ $(0<\lambda<n)$ に就いてですが, $\lambda=n-1$ ならば, σ' と固有面 $\Phi=0$ とは一致しますから, σ' と A とは一致して, 最早や更に他の方向を撰らんで射影する必要はありません. 故に,

$$\lambda<n-1$$

とします.

可逆一次変換

$$(z)=\|b_{ij}\|\,(y)\qquad (i,j=1,2,\ldots,n) \tag{3}$$

を撰らび, 先づ変数 (z) が変数 (y) と同じ性質 (例外的でない性質) を持つ様にします. 第二の条件に就いて順次に説明しませう. 一々断りませんが, 以下常に原点 $(y)=(0)$ の近傍に就いて申します.

σ'_1 が実在するとして, 其の上に σ' の点ではない様な一点を定め, P' としませう. σ' の任意の点を M' としますと, P' と M' とに依って決定せられる方向は, σ' が λ 次元ですから, ∞^{λ} しかありません. 之に反し, 空間 (y) は n 次元ですから, 方向の数は ∞^{n-1} です. 所で, 假定に依って, $\lambda<n-1$ ですから, 一般の方向はか様な性質を持ちません. 暫く, P' と M' とに依って決定せられる方向を例外的方向と呼びます. 可逆一次変換 (3) を, 空間 (y) に於ける方向

$$z_j=\text{const}\qquad (j=1,2,\ldots,n-1)$$

が此の意味に於いて例外的でない様に撰らびます. 然うしますと, σ' 及び P' を z_n に平行に空間 $(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1})$ へ射影したとき, 其の像を夫々 σ'',P'' としますと, P'' は σ'' 上にはありません.

$\mu=n-\lambda=2$ ならば一応之でよろしい.

$$\mu>2$$

の場合には同じ操作を反覆します: 空間 $(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1})$ に於いて, σ'' 上の任意の点を M'' としますと, P'' と M'' とに依って決定せられる方向は ∞^{λ} しかありません. 他方此の空間の方向の数は ∞^{n-2} あって, 假定に依って $n-2>\lambda$ ですから, 此の空間の一般の方向はか様な性質を持ちません. それ故, 始めに変換 (3) を適当に撰らんで置けば, 空間 $(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1})$ に於ける方向

$$z_j=\text{const}\qquad (j=1,2,\ldots,n-2)$$

は, 此の意味に於いて例外的でなくなります. 然うして置いて, σ'',P'' を z_{n-1} に平行に空間 $(z_1,z_2,\ldots,z_{n-2})$ へ射影し, 其の像を夫々 σ''',P''' としますと, P''' は σ''' 上にはありません.

同様の操作を最初から数へて $\mu-1$ 回繰り返し, 空間 $(z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, z_{\lambda+1})$ に於ける $\sigma^{(\mu)}, P^{(\mu)}$ に達します. $\sigma^{(\mu)}$ は空間 (y) の σ' を空間 $(z_{\lambda+2},\ z_{\lambda+3}, \ldots, z_n)$ に平行に射影した像であって, $P^{(\mu)}$ は点 P' のそれです。此の $P^{(\mu)}$ が $\sigma^{(\mu)}$ 外にある様に (z) を撰らぶのです. 然うしますと, P' は σ' 上の点ですから, σ' の像 $\sigma^{(\mu)}$ と σ'_1 の像とは一致しません. 尚 (z) としては, か様になるのが一般の場合であって, 母式 $\|b_{ij}\|$ に Euclid 空間の点 $(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{n,n-1}, b_{n,n})$ を対応せしめて申しますと, 上述の意味で例外的である様な母式に応じる点と其の集積点との集合は, 空間 (y) の原点の近傍を上述の範囲内に於いてどの様に撰らんでも, 内点を持つ様なことがありません.

上に見た所から, 補助定理 2 に依って, 次の二つの条件を充たす様に変数 (z) を撰らびうることが直ちに分かります： 1°, 此の (z) 及び其の順序を変へたものがすべて, Weierstrass の定理の意味に於いて, 固有集合体 A と其の上の点 $(y)=(0)$ とに関して例外的でないこと. 2°, A を空間 $(z_{\lambda+2}, z_{\lambda+3}, \ldots, z_n)$ に平行に, 空間 $(z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, z_{\lambda+1})$ へ射影すれば, σ' の像 $\sigma^{(\mu)}$ が σ'_k $(k=1,2,\ldots,N)$ の像 $\sigma_k^{(\mu)}$ の何れとも一致しないこと. 尚, か様な (z) は, 補助定理 2 の意味に於いて, 一般的であることも簡単に分かります.

変数 (z) をか様に撰らびますと, 条件 1° に依って, $\sigma^{(\mu)}$ は

$$\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, z_{\lambda+1}) = 0 \tag{4}$$

の形に表されます. Ψ は $(z_1, z_2, \ldots, z_\lambda)=(0)$ を頂点とする分解不可能な特殊擬多項式です. $\sigma_k^{(\mu)}$ $(k=1,2,\ldots,N)$ に就いても同様です. 次に条件 2° に依って, $\Psi[z(y)]$ は空間 (y) の集合体 $\sigma_k^{(\mu)}$ 上で恒等的に 0 にはなりません. 故に $\Psi=0$ は $\sigma_k^{(\mu)}$ 上で, 高々 $\lambda-1$ 複素次元の集合体を作ります. それで, 空間 (y) に於いて

$$\Phi(y)=0,\ \Phi_j(y)=0,\ \Psi(z)=0,\quad (j=1,2,\ldots,\mu-1) \tag{5}$$

に依って, 原点の近傍に於いて定義せられる固有集合体を A' としますと, A' は σ' を含み, A' の σ' に属しない部分は高々$\lambda-1$ 次元です.

A' のか様な部分が実在して, 原点 $(y)=0$ の如何程でも近くに点を持つとしませう. 此の場合には, A' に属し σ' に属しない様な有限個の点を適当に撰らんで, 上の推理を反復しますと, 次の結果に到達します：≪ 空間 (y) に於いて, 聯立方程式

$$\Phi(y)=0,\ \Phi_j(y)=0,\ \Psi(z)=0,\ \Psi_1(z')=0, \quad (j=1,2,\ldots,\mu-1) \tag{6}$$

に依って, 原点の近傍に於いて定義せられる固有集合体を A'' とせよ. 但し, (z') は (3) の (z) と同じ性質の函数系, $\Psi_1(z')$ は (4) の Ψ の如く,

$(z'_1, z'_2, \ldots, z'_\lambda, z'_{\lambda+1})$ のみの函数であって, $(z'_1, z'_2, \ldots, z'_\lambda) = (0)$ を頂点とする分解不可能な特殊擬多項式である. 此の時, (z') 及び $\Psi_1(z')$ を適当に撰らび, A'' が σ' を含み, A'' の σ' にぞくしない部分は高々 $\lambda - 2$ 複素次元である様にすることが出来る. 尚, か様な (z') は一般的であって, 補助定理 2 の末段に述べた条件を充たす ≫

此の推理法を, 最初から数へて, 多くとも λ 回繰り返せば, 我々は原点 $(y) = (0)$ の近傍だけを問題にして居るのですから, 上述の形に σ' だけを表現することが出来ます. 之まで唯一つの要素 (S, σ) を問題にして来ましたが, 同じ点 (a) を中心にし, 同じ λ 複素次元である様な, Σ の有限個の要素の和を対象にとっても全く同様であって, 次の結果が得られます[11].

補助定理 3 — $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)$ を有界領域 Δ の近傍に於いて正則な函数とし, 固有集合体 $F_1 = F_2 = \ldots = F_p = 0$ の Δ 内の部分を Σ とし, Σ の各 (解析的連結) 成分の中, 2λ (実) 次元 $(0 < \lambda < n)$ であるものの全体又は一部分を Σ_0 とせよ. 然るときは, Σ_0 上の任意の点を (a) とするとき, n 個の一次変換

$$(z^{(i)}) = \|b^{(i)}_{jk}\|(x - a), \quad |b^{(i)}_{jk}| \neq 0, \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

を適当に撰らび, (a) の近傍に於ける Σ_0 を, 空間 $(z^{(i)}_{\lambda+2}, z^{(i)}_{\lambda+3}, \ldots, z^{(i)}_n)$ に平行に, 空間 $(z^{(i)}_1, z^{(i)}_2, \ldots, z^{(i)}_{\lambda+1})$ に射影した像を $\Sigma^{(i)}_0$ とするとき, $\Sigma^{(i)}_0$ が何れも, 本節の始めに説明した様に, Weierstrass の定理の意味に於いて例外的でなく[12], 之等 n 個の像が Σ_0 を規定する様に出来る.

更に, か様な役割を演じ得ない母式 $\|b^{(i)}_{jk}\|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を Euclid 空間の $(b'_{11}, b'_{12}, \ldots, b^{(n)}_{nn})$ を座標とする点と看做せば, か様な (例外) 点と其の集積点との集合は, 空間 (x) の点 (a) の近傍のみを問題として居る限り, それをどう定めても, 決して内点を持つことがない.

此の補助定理の後半も, 補助定理 2 に依って, 直ちに明瞭と思ひます.

4 — 上に見た所に依って, 我々の課題は, 其の特別の場合である, 次の問題に還元せられます :

空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ 内に狭い意味で被覆可能な ≪ 固有面 σ ≫ [13] が与へられ, $\mathfrak{D}$ の完全内部に領域 Δ が与へられたとき, Δ に於いて正則な函

[11] 或は, 各要素に関する之に相当する補助定理を先に出して置いて, それから 此の補助定理 3 を導くことも容易です.

[12] 詳しく申しますと, 各 i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に就いて, Σ の (a) を中心とする 2λ 次元の要素を $(S_1, \sigma_1), (S_2, \sigma_2), \ldots$ とし, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ を空間 $(z^{(i)}_{\lambda+2}, z^{(i)}_{\lambda+3}, \ldots, z^{(i)}_n)$ に平行に空間 $(z^{(i)}_1, z^{(i)}_2, \ldots, z^{(i)}_{\lambda+1})$ へ射影した像を $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$ としますと, $\Sigma^{(i)}_0$ は, $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$ の和です. 此の $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$ が何れも上述の意味に於いて例外的でないと云ふ意味です.

[13] ［編注］原文のまま. ≪ 固有集合体 σ ≫ の誤記か.

数 $F_j(x)$ $(j=1,2,\dots,p)$ を求め, σ の Δ 内の部分を

$$F_1(x)=F_2(x)=\cdots=F_p(x)=0$$

の形に表現すること.

詳しく申しますと, 此の問題が与へられた (有界) 領域 Δ に関して常に解けるならば, 一般の問題 (第 1 節) も亦其の通りです. それを証明しませう.

$\mathfrak{D}$ 内に被覆可能な固有集合体 Σ を考へます. Σ を解析的連結成分に分ち, 其の中 Δ 内に点を持つもののみを撰らび出し, 同一次元 のものを一つに集めます. か様にして Σ が,

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_j, \dots, \Sigma_m$$

に分かたれたとし, Σ_j の次元を $2\lambda_j$ としませう. 先づ, 各 Σ_j について一般問題が解けるならば, Σ についても同様である ことを申します. 今, 各 Σ_j が, Δ の近傍に於いて

$$F_{j1}(x)=F_{j2}(x)=\cdots=F_{jp_j}(x)=0$$

の形に表現せられたとしませう. $F_{jk}(x)$ $(k=1,2,\dots,p_j)$ は勿論正則函数です.

$$F_{1a}F_{2b}\cdots F_{md}=0 \quad (a=1,2,\dots,p_1,\ \dots,\ d=1,2,\dots,p_m)$$

の形の聯立方程式を見ますに, Σ の任意の点は必ず此の方程式を充たします. それで, (x^0) を Σ 外の (Δ の近傍の) 任意の点としますと, 各 j $(j=1,2,\dots,m)$ に就いて, (x^0) は Σ_j に属しませんから $F_{jk}(x^0)$ $(k=1,2,\dots,p_j)$ の少くとも一つは 0 ではありません. それで,

$$F_{1\alpha}(x^0), F_{2\beta}(x^0), \dots, F_{m\delta}(x^0)$$

が何れも 0 でないとします. 然うしますと, $F_{1\alpha}F_{2\beta}\cdots F_{m\delta}$ は (x^0) に於いて 0 になりませんから, Σ 外の点はこの聯立方程式を充たしません. か様に Σ は此の聯立方程式に依って (Δ の近傍に於いて) 表現せられます.

それ故, 我々は 与へられた Σ が同一次元であると看做す ことが出来ます. Σ の次元を 2λ とします. $\lambda=0$ ならば問題はありませんから, $\lambda>0$ と考へます. Σ の (Δ の近傍の) 任意の点を (a) としますと, Σ は被覆可能ですから, Σ の (a) の近傍, Σ' は

$$f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_q(x)=0$$

の形に表現せられます. $f_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,q)$ は何れも (a) の近傍で正則な函数です. 前節の補助定理 3 に依って,

$$(z^{(i)}) = \|b_{jk}^{(i)}\|(x-a), \quad |b_{jk}^{(i)}| \neq 0, \qquad (i,j,k=1,2,\ldots,n)$$

を適当に撰らび, Σ' を空間 $(z_{\lambda+2}^{(i)}, z_{\lambda+3}^{(i)}, \ldots, z_n^{(i)})$ に平行に, 空間 $(z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \ldots, z_{\lambda+1}^{(i)})$ に射影した像を σ_i' としますと, 之等の像が何れも Weierstrass の定理の意味に於いて例外的でなく, 之等に依って Σ' が規定せられる様に出来ます. 更に, 此の射影の方向を点 (a) に無関係に定めうることが, 慣用の推理法に依って, 直ちに分かります. 然うして置いて, 点 (a) を動かして Σ を描かせますと, 各 i $(i=1,2,\ldots,n)$ に就いて, か様な σ_i' の全体は Δ の近傍に於ける狭い意味で被覆可能な固有面［原文のまま］ σ_i を作ります. 故に, 假定に依って, Δ に於いて正則な有限個の函数を求め, σ_i の Δ 内の部分を, $F_{i1}(x) = F_{i2}(x) = \cdots = F_{ip_i}(x) = 0$ の形に表現することが出来ます. 従って Σ の Δ 内の部分は,

$$F_{ij}(x) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n, j=1,2,\ldots,p_i)$$

に依って表されます. それでよい釈です.

此処で, <u>固有集合体を被覆する様式</u>に就いて, 一度考へて置きませう. 先づ, 次の定義を追加します. 空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ に於いて, 被覆可能な固有集合体 Σ が与へられたとして, 其の一つの被覆を $\{(\gamma); f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)\}$ としませう. 此の被覆が<u>一重</u>であると云へば, それは Σ の任意の正則点又は孤立点を M としましたとき, M を含む任意の (γ) に附随する函数系を $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ としますと, M に於ける Σ の次元を 2λ $(0 \leq \lambda < n)$ とすれば, 此の函数系 (f) は, 此の点に於いて, 次の形の函数系とイデアル基として同等であると云ふ意味です：

$$z_{\lambda+k} = \varphi_k(z_1, z_2, \ldots, z_\lambda) \qquad (k=1,2,\ldots,n-\lambda),$$

此処に $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ は $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の一つの順列であって, $\varphi_k(z_1, z_2, \ldots, z_\lambda)$ は点 M の空間 $(z_{\lambda+1}, z_{\lambda+2}, \ldots, z_n)$ に平行に行った空間 $(z_1, z_2, \ldots, z_\lambda)$ 上への射影の近傍に於ける正則函数です.

上に述べた証明法を, 此の被覆の様式と云ふ点に改めて留意しながら, 今一度辿りますと, 極めて容易に次の結果が得られます.

<u>補助定理 4</u> — <u>固有集合体は, 若し被覆することが出来るならば, 必ず狭い意味で, 且つ一重に然う出来る.</u>

扨て, 我々の課題はか様に上述の問題に還元せられました. 所で, 此の問題は, 之に条件 $\ll p=1$ たるべきこと $\gg$ を加へますと, <u>Cousin の第</u>

二問題の主要部分になります．此の問題を取り扱ふ準備として，Cousin の第二問題に就いて第三報告で述べたことを想起しませう[14].

此の報告は，Cousin の第二問題を，解析函数の分野の外に出て，連続函数の分野に立って観察した結果を記録したものです．主定理は次の通りでした (定理 I 参照)：

a — 単葉有限正則域に解析的零点が分布せられた時，若しそれに就いて非解析解があるならば，必ず解析解もある[15].

Cousin の第二問題は，古くから知られて居る T. H. Gronwall の実例，或は此の第三報告の極めて簡単な実例 (第 2 節) に見られます様に，問題の領域が正則域である場合に於いても，必ずしも解を持ちません．上の定理は此の解の有無の判定を，連続函数の分野に於ける同じ型の問題のそれに還元する役割りをします．それならばか様に還元せられた問題に就いてはどうかと云ひますに，それには次の判定法があります (補助定理 II の注意参照)：

b — 多複素変数の空間に於ける単葉有限領域内に零点が分布せられたとき，之をとる連続函数が此の領域に於いて存在する爲には，此の零点の分布が掃清可能であることが必要且つ充分である．

掃清可能の定義は次の通りでした (第 5 節参照)：

n 複素変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の空間に於ける有限領域 $\mathfrak{D}$ 内に零点の分布 $(\mathfrak{z})$ が与へられたとき，$(\mathfrak{z})$ が掃清可能であるとは，$\mathfrak{D}$ の任意の点 P に対して，P を中心とする $2n$ 次元球 (γ) と $[(x)\in(\gamma), 0\leq t\leq 1]$ に於ける連続函数 $f(x,t)$ とが応じ，次の 3 つの条件を充すことである：

1°，$f(x,0)$ は $(\mathfrak{z})$ を零点の分布として持ち，$f(x,1)$ は決して 0 にならないこと．

2°，$f(x,t)$ は 空間 (x,t) の如何なる ($2n+1$ 次元の) 部分に於いても恒等的に 0 にならないこと．

3°，$(\gamma_1), (\gamma_2)$ を共通部分を持つ様な任意の一対の (γ) とし，(δ) を其の共通部分とするとき，之等に対応する函数 $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$ は $(x)\in\delta$, $0\leq t\leq 1$ に於いて同等であること．

[14] Cousin の問題に就いて H. Behnke–P. Thullen の著書 (1934) 以後の研究の進展を概観するには，次の諸論文参照：

H. Behnke–K. Stein, Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null–und Polstellenflächen, 1937 (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung).

H. Behnke–K. Stein, Die Sätze von Weierstrass und Mittag–Leffler auf Riemann'-schen Flächen, 1940 (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich).

K. Stein, Über das zweite Cousinsche Problem und die Quotientendarstellung meromorpher Funktionen mehrerer Veränderlichen, 1939 (Sitzungsb. Bayer. Ak. d. Wiss.).

[15] 零点の分布 (zéros) に就いては第 1 節，解析的な零点の分布 (zéros analytiques) に就いては第 5 節参照.

定理 b の中に, 之が必要条件であることは証明しましたが (第 5 節参照), 充分条件の方の証明は明示しませんでした. 然し, 此の証明は, 全体としては補助定理 II のそれと全く平行であって, 其の各階悌は極めて簡単ですから, その正しいことは容易に確められます.

5 — 零点の分布に就いて, それが掃清可能であることが直ちに分かる様な, 簡単な場合を色々考へることが出来ます. 其の中に平行移動に関する次のものがあります.

補助定理 5 — n 複素変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の空間に於ける領域 $\mathfrak{D}$ に零点が分布せられて居るとして, 此の分布 (を規定する機構) を $(\mathfrak{z})$ とする. $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}$ に含まれる一つの領域, σ を $(\mathfrak{z})$ (を構成する連続函数) の零点の集合とする. t を実助変数とする連続的平行移動,

$$(T_t) \qquad x_i' = x_i + \alpha_i t, \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

に依って, $(\mathfrak{z})$ を $(\mathfrak{z}_t)$ に, σ を σ_t に移す $((\mathfrak{z}_0) = (\mathfrak{z}), \sigma_0 = \sigma)$. 此の状勢に於いて, 次の二つの条件が充たされたとせよ：

1°, σ は空間 (x) の如何なる ($2n$ 次元の) 部分をも充填しないこと.

2°, σ の点の集積点である様な $\mathfrak{D}$ の境点の集合を E とすれば, t を何ととっても, T_t に依る E の像 E_t が $\mathfrak{D}_0$ に現れないこと.

然るときは, 若し $(\mathfrak{z}_1)$ が $\mathfrak{D}_0$ に関して掃清可能ならば, $(\mathfrak{z})$ に就いても同様である.[16] [17]

証明　与へられた零点の分布 $(\mathfrak{z})$ が, $2n$ 次元球 Γ と其の中に於ける連続函数 $F(x)$ との系統に依って

$$\{\Gamma, F(x)\}$$

の如く表されて居るとしませう. 此の表現に就いてですが, $\mathfrak{D}'$ を $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれる領域としますと, $\mathfrak{D}'$ に中心を持つ様な球 Γ の半径の下端は 0 かも知れません. 然し, か様なことが如何なる $\mathfrak{D}'$ に対しても起こらない様に系統 $\{\Gamma\}$ を撰らぶことが常に可能です. 此のことは慣用の推理法に依って容易に分かります. それで, 上記の $\{\Gamma, F\}$ に此の性質を假定して推論を進めることにしませう.

$\mathfrak{D}_0$ の任意の点を P としませう. P の $\mathfrak{D}_0$ に関する Euclid 幾何学的境界距離 (P を中心として $\mathfrak{D}_0$ 内に描いた $2n$ 次元球の半径の上端) を $2R$ とし, P を中心, R を半径とする $2n$ 次元球を S とします. S の任意の点を $P'(x')$ で表しませう. T_t の逆変換,

$$(T_t^{-1}) \qquad X_i = x_i - \alpha_i t, \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

[16] 条件 1° は必要です. 実例は第三報告の 9 頁に於ける脚註 3 が与へます.

[17] 膨張 (収縮) に関しても同様のことが云へます. このことを使へば, 第三報告の定理 II は (補助定理 I を使わないで), 定理 I から容易に導けます.

に依って P' を移動し, かくて得る点を Q'_t とします. (特に, P の像を Q_t とし, $Q'_0=P'$, $Q_0=P$ とします.) 点 Q'_t から集合 σ への (Euclid 幾何学的) 距離を ρ' とします. 今一つ ρ'' を, Q'_t が $\mathfrak{D}$ の点ならば Γ の半徑を ρ'' とし, Q'_t が $\mathfrak{D}$ の点でなければ $\rho''=0$ とします. ρ' と ρ'' の大きい方を ρ としませう. 假定に依って, 集合 E の像 E_t が領域 $\mathfrak{D}_0$ に現れることは決してありません. それ故, $\{\Gamma\}$ を上述の如く撰んでありますから,

$$P' \in S, \quad 0 \leq t \leq 1 \ \text{ に於いて}, \ \rho \geq \rho_0 > 0$$

なる ρ_0 の存在することが, 慣用の推理法に依って簡単に分かります.

点 P を中心に, 充分小さな半徑 r の ($2n$ 次元) 球 (γ) を描きます. r をどれ程小さくとるかに就いて, 逐次に御説明しませう. 先づ, 系統 $\{(\gamma)\}$ の任意の二つ $(\gamma_1), (\gamma_2)$ が, <u>若し共通部分を持つなら</u>ば, $(\gamma_1), (\gamma_2)$ に対応する S を S_1, S_2 としますと,

$$(C_1) \qquad\qquad (\gamma_2) \subset S_1$$

(従って, $(\gamma_1) \subset S_2$) となる様にします.

Q_t を中心とし r を半徑とする球を (η) とし, 之と同心であって ρ_0 を半徑とする球を Δ とします. m を正の整数, v を

$$-\frac{1}{2m} \leq v \leq \frac{1}{2m}$$

なる任意の実数,

$$u = t + v$$

として, 点 Q_u を中心 r を半徑とする球を (η_v), 之と同心であって ρ_0 を半徑とする球を Δ_v ($(\eta_0)=(\eta)$, $\Delta_0=\Delta$) とします. 此のとき, r 及び $1/m$ を充分小さく撰らび, v の任意の二つ v_1, v_2 に対して,

$$(C_2) \qquad\qquad (\eta_{v_2}) \subset \Delta_{v_1}$$

(従って, $(\eta_{v_1}) \subset \Delta_{v_2}$) となる様にします.

今一つ, S の任意の点 P' に対応する $(\gamma), (\eta_v)$ を $(\gamma'), (\eta'_v)$ としましたとき, 若し $(\gamma), (\gamma')$ が共通部分を持つならば,

$$(C_3) \qquad\qquad (\eta'_v) \subset \Delta$$

となる様にします.

か様に r 及び m を, 三条件 $(C_1), (C_2), (C_3)$ を充たす様にとります. 此のことは, r と $1/m$ とを充分小さく撰らぶことに依って, 明らかに実現出来ます.

$(\mathfrak{z}_1)$ が $\mathfrak{D}_0$ に関して掃清可能であると假定して, か様に描いた球 (γ) に対し, $(x) \in (\gamma)$, $0 \leq t \leq 1$ に於いて (一価) 連続函数 $f(x,t)$ を, 次に説明します様に定義します： 定理 b に依って, $\mathfrak{D}_0$ に於て連続であって, 其の零点の分布が $(\mathfrak{z}_1)$ である様な函数 $\Phi(x)$ が存在します. 区間 $0 \leq t \leq 1$ を二等分し, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ に対しては, (γ) の如何に拘らず,

$$f(x,t) = (2t-1) + 2(1-t)\Phi(x) \tag{1}$$

とします.

区間 $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ に就いては, 此の区間を m 等分し, 分点を, 0 から 1 に向って順に, $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ とし, 各区間 (a_j, a_{j+1}) ($a_0 = 0, a_m = \frac{1}{2}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$) を更に二等分して, 分点を b_{j+1} としませう.

区間 $a_j \leq t \leq b_{j+1}$ に対しては, 球 Δ の性質に依って二つの場合を区別します.

<u>1°, Δ が σ の点を含まないとき.</u> 此のときは

$$f(x,t) = 1 \tag{2}$$

と定めます.

<u>2°, Δ が σ の点を含むとき.</u> 此の場合には, Q_t は $\mathfrak{D}$ に属し, Δ は此の点 Q_t に応じる球 Γ に含まれなければなりません. 此のときは, Γ に附随する函数を $F(x)$ として,

$$f(x,t) = F(x - \alpha t) \tag{3}$$

とします.

最后に, 区間 $b_j \leq t \leq a_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) に就いてですが, 両端 $t = b_j$, a_j に対しては, $f(x,t)$ は一価函数ですから, 上述の (2), (3) 又は, (1) に依って, 既に定められて居ます. 所で, 此の区間の長さは $1/2m$ ですから, 假定 (C_2) に依って, 点 Q_{b_j} に応じる Δ を Δ_b, Q_{a_j} のそれを Δ_a とし, 之等二つの球の共通部分を Δ' としますと, (η_v) は常に Δ' に含まれます. それで,

$$B(x,t) = f[x + \alpha(t - b_j), b_j], \; A(x,t) = f[x + \alpha(t - a_j), a_j]$$

を考へますと, 此の $A(x,t)$, $B(x,t)$ は何れも $(x) \in (\gamma)$, $b_j \leq t \leq a_j$ に於いて, 連続函数として定義せられて居て, 同等であります. それ故,

$$B(x,t) = \lambda(x,t) A(x,t)$$

なる λ が存在します. λ は $(x) \in (\gamma)$, $b_j \leq t \leq a_j$ に於いて決して 0 とならない連続函数であります. それで, この区間に対しては

$$f(x,t) = A(x,t) e^{\frac{a_j - t}{a_j - b_j} \log \lambda(x,t)} \tag{4}$$

を対応せしめます. 但し, 此処では, 記号 $\log\lambda(x,t)$ は $(x)\in(\gamma)$, $b_j\leq t\leq a_j$ に於ける此の函数の任意の然し決った一つの分枝を意味します. か様に新しく定義した $f(x,a_j)$, $f(x,b_j)$ はもとのものと一致します.

か様に定義した $f(x,t)$ は明らかに $(x)\in(\gamma)$, $0\leq t\leq 1$ に於ける (一価) 連続函数です. 次に此の函数系 $\{f(x,t)\}$ に就いて, 掃清可能の三つの条件を点検しませう.

1°, $f(x,0)$ は $(\mathfrak{z})$ を零点の分布として持ち, $f(x,1)$ は決して 0 にならないこと——之は明白です.

2°, $f(x,t)$ は空間 (x,t) の如何なる部分に於いても恒等的に 0 にならないこと——$(x)\in(\gamma)$, $\dfrac{1}{2}\leq t\leq 1$ に於いては $f(x,t)$ は (1) に依って規定せられるのですから,

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)=2[1-\Phi(x)]$$

です. 所で $\Phi(x)$ が恒等的に 1 ならば, $f(x,t)$ も其の通りですから, 此の条件は充たされて居ます.

$(x)\in(\gamma)$, $a_j\leq t\leq b_{j+1}$ $(j=0,1,2,\ldots,m-1)$ に於いては, (2) の場合には $f(x,t)$ は 1 ですから問題はありません. それで (3) の場合ですが, 假定 1° に依って, $F(x)$ の零点は空間 (x) の如何なる ($2n$ 次元の) 部分をも埋めませんから, $f(x,t)$ は矢張り条件を充たします.

$(x)\in(\gamma)$, $b_j\leq t\leq a_j$ $(j=1,2,\ldots,m)$ に於いては, (4) から直ちに分かります様に, $f(x,t)$ は $A(x,t)$ 及び $B(x,t)$ と同等です. それ故, $f[x+\alpha(t-b_j),b_j]$ $(j=1,2,\ldots,m)$ が問題ですが, $f(x,b_j)$ は此の区間の各 t に対し, $(x-\alpha(t-b_j))\in(\gamma)$ に於いて, 空間 (x) の如何なる部分に於いても恒等的に 0 にならないことが, 上に見ましたと全く同様にして分かりますから, 此の場合に於いても明らかに条件は充たされて居ます.

3°, (γ_1), (γ_2) を共通部分を持つ様な任意の一対の (γ) とし, (δ) を其の共通部分とするとき, 之等に対応する函数 $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$ は $(x)\in(\delta)$, $0\leq t\leq 1$ に於いて同等であること——上に見ました様に, 之等の函数は決して恒等的に 0 になることはありませんから, 同等性は局地的に立証すれば充分です (第三報告, 第一節参照). それで, (x^0,t^0) を $(x)\in(\delta)$, $0\leq t\leq 1$ の任意の点として, 此の点の近傍を調べませう.

$\dfrac{1}{2}\leq t^0\leq 1$ ならば, $\dfrac{1}{2}\leq t$ の側に対しては, (1) に依って, $f_1(x,t)=f_2(x,t)$ です. それで, $0\leq t^0\leq\dfrac{1}{2}$ として, $t\leq\dfrac{1}{2}$ の側を調べさへすればよろしい. 此の点に於ける $f(x,t)$ が (2), (3), (4) の何れに依って規定せられるかに依って, 場合を区別しませう.

$f(x,t)$ が (2) に依って与へられる場合——$f_1(x,t)=f_2(x,t)=1$ ですから問題はありません.

(3) の場合——条件 (C_1) と (C_2) とに依って, 問題の条件の充たされて居ることが容易に分かります.

(4) の場合——上に見ました様に $f(x,t)$ と $B(x,t)$ とは同等です. 以下上の場合と略々同様です.

か様に条件 1°, 2°, 3° はすべて充たされて居ます. 故に, 定義に依って, 若し $(\mathfrak{z}_1)$ が $\mathfrak{D}_0$ に関して掃清可能ならば $(\mathfrak{z})$ についても同様です.

(証明終)

6 — 此の報告の主題 (第一節) は, 前に第八報告で一度取り上げて, 次の所まで解決して置いたことを想起しませう (第 3 節, 定理 2) :

c — 空間 (x) に単葉有界閉筒状域 $(\overline{X})$ と, $(\overline{X})$ の近傍で定義せられた固有集合体とを考へ, その $(\overline{X})$ 上の部分を Σ とする. ≪ 此の固有集合体は, 単葉集合 Σ の近傍に於ける正則函数 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ の共通零点の集合として表されて居るとする ≫. 然るときは, $(\overline{X})$ の近傍に於いて正則函数 $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{p+1}(x)$ を, 其の共通零点の集合の $(\overline{X})$ 上の部分が丁度 Σ であって, 更に Σ の近傍の各点に於いて函数系 (F) が函数系 (f) とイデアル基として同等である様に, 求めることが出来る.

以上の準備の下に課題 (第 4 節) に立ち帰ります. 此の問題の $\mathfrak{D}$ は第 1 節の終りで申しました様に, 之を筒状と限定しても, 我々の向後の研究に対して充分です. それで, 次の命題を立証しませう.

空間 (x) の筒状域 $\mathfrak{D}$ 内に被覆可能な固有面 [原文のまま] σ が与へられ, $\mathfrak{D}$ の完全内部に筒状域 Δ が与へられたとせよ. 然るときは Δ の近傍に於いて, 有限個の正則函数を撰らび, σ をその共通零点の集合として表すことが出来る.

証明　座標系 (x) は次の性質を持って居ると考へて支障ありません : σ の任意の点を (a) とするとき, (a) の近傍に於いて, σ を其の零点の集合とする正則函数を $f(x)$ とすれば, 常に

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n) \not\equiv 0$$

であること. (補助定理).

今, A を $A \Subset \mathfrak{D}$ である様な, 任意の開集合とし, σ の A 内の部分を σ' としませう. P を空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ の任意の点としますと, 座標系は上述の性質を持って居ますから, P に応じる (正確に云ひますと, 空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ への x_n 平面に平行な射影が P である様な) σ' の点は, 若し存在しても, 有限個です. 其の (空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ に平行な) x_n 平面上への射影の中, 任意の一つを η とします. P を其の原の位置から (無制限に) 少し動かしますと, 之に応じて η は, 一般には矢張り一個の点

として現れますが, 時として, P の原位置に依っては, 数個の点に分かれることもあることは, 人のよく知る所です. か様な点の数の最大を N とし, (P, η) に N を附随せしめます. (P, η) を上述の範囲内に限定しましたとき (云ひ換へますと, P の座標を (ξ) としますと点 (ξ, η) が二つの条件 $(\xi, \eta) \in \sigma$, $(\xi, \eta) \in A$ を同時に充たしますとき——今後 (ξ, η) を簡単に (P, η) と書くことにします——), N の取り得る最大値を N_A とします.

σ の Δ 内の部分を σ_0 とします. A が

$$\sigma_0 \Subset A \Subset \mathfrak{D}$$

を充たすときの N_A の下端を N_0 としませう.

$\underline{N_0 = 1 \text{ の場合}}$. A として $\Delta \Subset A$ $(\Subset \mathfrak{D})$ なる筒状開集合を撰らびませう. A を充分 Δ に近くとりますと, $N_A = N_0$ となります.

P に応じる数個の点の任意の一つが η でした. η から他のものへの (Euclid 幾何学的) 距離の最小を δ としませう. $N_A = 1$ ですから, η の中に相重なるものはありません. それで点 (P, η) が A にぞくするとき, 此の (P, η) に応じる δ の下端は 0 ではありません. 之を δ_0 としませう.

α を $\alpha < \delta_0$ である様な正の数として, 連続的平行移動,

$$(T_t) \qquad x'_j = x_j,\ x'_n = x_n + \alpha t, \quad 0 \le t \le 1, \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

を考へます. 之に就いて, 次の二つの事実が看取されます :

1°, σ' を T_1 に依って移動したものは, (もとの) σ' の近傍に点を持たないこと.

2°, α を充分小さく撰んで置けば, σ の点の集積点である様な $\mathfrak{D}$ の境点の集合を E とするとき, $0 \le t \le 1$ の如何なる t に対しても, E を T_t に依って移動したものは, σ' の近傍に点を持たないこと.

それ故, 補助定理 5 に依って, 解析的な零点の分布 σ は (詳しく云ひますと, 解析的な零点の分布の中, 之を構成する正則函数の零点の集合が σ である様なものは), σ' の近傍に関して掃清可能です.

所で, σ' に就いては, 第八報告の定理 1 に依って, B を A に含まれ, A に於ける正則函数の全体 $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状である様な閉筒状域としますと, σ' の B 上の部分は $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状です.

上述のことは (始めに A を充分 σ_0 に近くとって置けば) A を少し大きくしても矢張り成立します. 故に定理 a, b に依って, σ' の近傍に於いて, σ を其の零点の集合とする様な正則函数が存在し, 従って定理 c に依って, 上の命題は眞です.

$\underline{N_0 = q + 1 \text{ の場合}}$. A を上の場合と同様にとります. P 及び η を適当に撰らびますと, 之に応じる N が $q+1$ に等しくなります. 其の任意の一対を (P_0, η_0) とし, η_0 から P_0 に応ずる他の η への距離の最小を ε とし

ます. $(P_0, \eta_0) \in A$ のとき, ε の下端は 0 ではありません. 之を ε_0 とします. β を $\beta < \varepsilon_0$ なる正の数として,

$$(T_t) \qquad x'_j = x_j,\ x'_n = x_n + \beta t, \quad 0 \le t \le 1, \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

を考へ, β を充分小さく撰らびますと, 此の度は次の二つの事実がみられます:

1°, 上述の (P_0, η_0) の中, $(P_0, \eta_0) \in A$ である様なものの集合を S とすれば, S を T_1 に依って移動したものは σ' の近傍に点を持たないこと.

2°, 上の場合と同じ.

それで, 命題に就いての Δ を固定し, A を充分 Δ に近い, $A \Supset \Delta$ である様な筒状域ととり, $N_0 = 1, 2, \ldots, q$ のときには, A に於いては, 有限個の正則函数があって, σ を其の共通零点の集合として持って居ると假定しませう.

然うしますと, σ を T_1 に依って移動して得る固有面は, A に於いて, 正則函数 $F_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ の共通零点の集合として表されます. 従って,

$$\Phi_k(x) = F_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n - \beta t) \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

としますと, σ は, T_1 の逆変換 T_1^{-1} に依って A を移動した領域, A' に於いて, 之等 $\Phi_k(x)$ の共通零点の集合として与へられます.

所でこのことは, 正の数 β_0 を充分小さくとりますと, $\beta \le \beta_0$ なるすべての正の数 β に対して眞であって, β を充分小さくえらびますと, 共通部分 $A \cap A'$ は如何程でも A に接近します. それ故, 結局 A を充分 Δ に近くとって置くことに依って, $N_0 = q + 1$ の場合にも, 假定と同様のことが起ります.

$N_0 = 1$ の場合には命題は眞であって, 此の際 Δ を少し大きくしても $N_0 = 1$ であることは変りませんから, この假定は眞です. 故に, この假定は常に眞です. 従って, 命題は眞です. (証明終)

か様にして, 次の定理の主部が成立しました.

定理 — 空間 (x) の単葉有限筒状域 $\mathfrak{D}$ に於ける被覆可能な固有集合体 Σ は, $\mathfrak{D}$ の完全内部に於いて, 有限個の正則函数の共通零点の集合として (全域的に) 表現することが出来る. 尚, 此の際, 之等の函数が Σ を一重に被覆する様に出来る.

上の末段は補助定理 4 から出発することに依って容易に得られます.

(第十二報告終り. 4. 5. 26) (6. 5 校了)