多変数解析函数に就て

XII — Cousin の第二問題の拡張

前報告で御話した結果を更に拡張しようとしますと, 自然新しい諸問題に遭遇します. 其の一つを研究しませう. 問題は次の通りです: ≪ Cousin の第二問題を, 其の条件を適当に軽減することに依って, 正則域では常に解ける様な形に出来ないか.≫ [1]

≪ 此の論文中の領域は例外なく単葉有限ですから, 此の条件を一々明示する煩を避けます.≫

1 — n 複素変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の空間に閉集合 (有界) Δ を描き, Δ の近傍に解析的零 (zéros analytiques) $(\mathfrak{z})$ を分布します. $(\mathfrak{z})$ は, 第三報告で説明しました様に, 次の様に被覆的に規定します :

Δ の近傍の任意の 1 点 P に対し, P を中心とする ($2n$ 次元) 球[2] (γ) と (γ) に於て定義せられた正則函数 $f(x)$ とが対応し, $(\gamma_1), (\gamma_2)$ を共通部分を持つ様な任意の一対の (γ) とするとき, 対応する函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ は其の共通部分に於て同等[3] であるとします (同等条件). 此の時, 此の系統 $\{(\gamma), f(x)\}$ は Δ の近傍に於て一つの解析的零 $(\mathfrak{z})$ を規定すると云ひます. 同一の $(\mathfrak{z})$ を規定する方法, $\{(\gamma), f(x)\}$ は素より無数にあります.

$\{(\gamma), f(x)\}$ に於て, $f(x)$ は厳密に (γ) 内に於てのみ定義せられて居ると考へましたとき, 函数族 $\{f(x)\}$ の何れか一つが 0 となる様な点の集合を $(\mathfrak{z})$ の零点の集合と呼びます. ≪ 以下解析的零の零点の集合が空間を埋めつくす場合を一切除外しませう.≫

此の際 $(\mathfrak{z})$ は解析的ですから, 零点の集合は, 若し存在すれば, 固有面です. かかるものを特に零面 (Nullstellenflächen) と呼びます. $(\mathfrak{z})$ の零面の Δ 上の部分を σ とします. 先づ次の問題を考へます :

問題 1 — Δ の近傍に於て, 正則函数 $F(x)$ を, $(\mathfrak{z})$ を零として持つ様に[4] 求めること.

之は Cousin の第二問題[5] から, 其の本質的な部分を抽き出したものです. 此の問題は, Δ を外的正則凸状としても, 一般には解けません. 原の

[1] 第 1 節及び巻末の定理参照.

[2] $2n$ 次元球 (hypersphère) は超球体とも云ひ, 多くは略して単に球と呼ぶことにします. 常に開集合を意味します.

[3] 此処に云ふ同等とは其の共通部分で 0 とならない様な正則函数 $\lambda(x)$ が存在し, 恒等的に $f_2(x) = \lambda(x) f_1(x)$ となると云ふ意味です.

[4] 云ひ換へますと, $F(x)$ が各 (γ) で $f(x)$ と同等になる様に.

[5] Cousin の第二問題に関する文献としては, 第三報告で, 巻頭の脚註 (1) に於て, 間接に挙げたより後のものでは, 私は未だ読んで居ませんが, 次のものが重要かと推察します :

K. Stein, Über das zweite Cousinsche Problem und die Quotientendarstellung meromorpher Funktionen mehrerer Veränderlichen, 1939 (Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften).

Cousin の第二問題に比べますと, 条件は幾分軽減せられて居ますが, 第三報告の第 2 節で述べた反例が, 今の場合にも其の儘あてはまります. それ故, 此の問題の条件を軽減して, 次の問題を考へませう :

問題 2 — Δ の近傍に於ける正則函数を, σ の近傍の各点に於て $(\mathfrak{z})$ を零とする様に求めること.

Δ を外的正則凸状とするとき, 此の問題が常に解けるか, それとも反例があるかを決定すること は, 色々な点から強く私の興味を唆る研究題目です. 又, 将来波及する所が非常に広い様に思はれます. 然し, 此の度は先を急ぎますし, それに, 差当ってはそれ程精密に調べる必要もありませんから, 問題を記録して置くに止めませう. [6]

条件を更に軽減します :

問題 3 — Δ の近傍で恒等的に 0 でない様な正則函数 $F(x)$ を, 各 (γ) に於て,

$$F(x) = \alpha(x) f(x),$$

$\alpha(x)$ は (γ) に於ける正則函数, となる様に求めること.

此のとき $F(x)$ は $(\mathfrak{z})$ を其の零の一部分として持つ と呼びませう. 又, 此の問題を, Cousin の広義第二問題 と名づけませう.

此の問題ならば, Δ が外的正則凸状である限り, 常に解ける ことを御話しようと云ふのです.

2 — 先づ, Cousin の第二問題に就て, 第三報告で述べた所を想起しませう. 此の報告は, 一口に云へば, Cousin の第二問題を, 解析函数の分野の外に出て, 連続函数の分野に立って, 観察した結果の記録です.

Cousin の第二問題を連続函数の分野へ拡張しますには, 其の主要部分のみについて申しますと, 前節で述べた問題 1 に於て, ≪ 正則函数 ≫ と云ふ言葉を, ≪ (一価) 連続函数 ≫ と云ふ言葉で置き換へればよろしい. (同報告, 第 1 節参照)

主定理は次のものでした (定理 I) :

定理 a — (単葉有限) 正則域に解析的零 $(\mathfrak{z})$ が分布せられたとき, 若し非解析解が存在するならば, 解析解に就いても同様である.

此の定理は, 正則域に関する Cousin の第二問題が解を持つか否かの判定を, 連続函数の分野に於ける同じ型の問題のそれに還元します.

か様に還元せられた問題については, 次の判定法があります (補助定理 II に関する注意) :

[6] 第 7 節定理 9 参照.

定理 b — 多複素変数空間に於ける (単葉有限) 領域内に零が分布せられたとき, 之をとる連続函数が此の領域に於て存在する爲には, 此の零が清掃可能であることが必要且つ十分である.

清掃可能 (balayable) の定義は次の通りでした. (第 5 節) :

n 複素変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の空間に於ける領域 $\mathfrak{D}$ 内に零 $(\mathfrak{z})$ が分布せられたとき, $(\mathfrak{z})$ が清掃可能であるとは, $\mathfrak{D}$ の任意の点 P に対し, P を中心とする球 (γ) と $[(x)\in(\gamma);\ 0\le t\le 1]$ に於ける連続函数 $f(x,t)$ とが応じ, 次の三つの条件をみたすことである :

1° $f(x,0)$ は $(\mathfrak{z})$ を零とし, $f(x,1)$ は零点を持たないこと.

2° $f(x,t)$ は空間 (x,t) の如何なる $2n+1$ 次元の部分に於ても恒等的に 0 にならないこと.

3° $(\gamma_1), (\gamma_2)$ を共通部分を持つ様な任意の一対の (γ) とし, (δ) を其の共通部分とするとき, 之等に対応する函数 $f_1(x,t), f_2(x,t)$ は $[(x)\in(\delta),\ 0\le t\le 1]$ に於て同等であること.

定理 b は, 必要条件に就ては証明して置きましたが (第 5 節参照), 充分条件の方は証明を明示しませんでした. 然し此の証明は, 全体の行き方は補助定理 II と全く平行であって, 其の各階悌は極めて簡単ですから, 改めて述べるに及ばないと思ひます.

尚, 次のことに言及して置きました (補助定理 I) :

定理 c — (X) を n 複素変数の空間に於ける (単葉有限) 筒状域とする. (X) 内に零 $(\mathfrak{z})$ が分布せられたとき, 其の零点の集合が空間の如何なる $2n$ 次元の部分をも充填しない限り, $(\mathfrak{z})$ を零とする連続函数が (X) に於て常に存在するためには, X_i $(i=1,2,\dots,n)$ が少くとも其の一つを除けば, 總て単連結であることが必要且つ充分である.

3 — 以上が第三報告で述べたことの概要です. 之を今少し敷衍して置きませう.

n 複素変数の空間に領域 $\mathfrak{D}$ を描き, $\mathfrak{D}$ 内に 2 つの零 $(\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}')$ を分布します. $(\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}')$ を規定する被覆を夫々 $\{(\gamma'), \varphi(x)\}, \{(\gamma''), \psi(x)\}$ とし, $(\gamma'), (\gamma'')$ の小さな方を (γ) とします. 此のとき, 各変域 $[(x)\in(\gamma), 0\le t\le 1]$ に連続函数 $f(x,t)$ が存在して, 次の三つの条件をみたしたとしませう :

1° $\qquad f(x,0)=\varphi(x), \quad f(x,1)=\psi(x).$

2°, 上の 2° と同一.

3°, 上の 3° と同一.

此の場合に, $(\mathfrak{z})$ と $(\mathfrak{z}')$ とは 同類 (de la même classe) であると呼び,

$$(\mathfrak{z}) \sim (\mathfrak{z}')$$

に依って表すことにしませう.

$(\mathfrak{z}) \sim (\mathfrak{z}')$, $(\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z}'')$ ならば, $(\mathfrak{z}) \sim (\mathfrak{z}'')$ である等のことは明白です.

明らかに次の定理があります：

定理 1 — 二つの同じ類の零に就て, 一方が清掃可能ならば, 他方も同様である.

領域 $\mathfrak{D}$ に 2 つの零 $(\mathfrak{z})$, $(\mathfrak{z}')$ を分布し, 之等を $\{(\gamma),\ \varphi(x)\}$, $\{(\gamma),\ \psi(x)\}$ の形に被覆します. 此のとき, $\{(\gamma),\ \varphi(x)\psi(x)\}$ に依って規定せられる零 $(\mathfrak{z}'')$ を $(\mathfrak{z})$ と $(\mathfrak{z}')$ との和 と呼び,

$$(\mathfrak{z}'') = (\mathfrak{z}) + (\mathfrak{z}')$$

の如く表すことにしませう. 次の定理が成立すること明らかです：

定理 2 — 空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ 内に 4 つの零 $(\mathfrak{z}_1)$, $(\mathfrak{z}_1')$, $(\mathfrak{z}_2)$, $(\mathfrak{z}_2')$ が分布せられ, $\mathfrak{D}$ に於て

$$(\mathfrak{z}_1) \sim (\mathfrak{z}_1'), \quad (\mathfrak{z}_2) \sim (\mathfrak{z}_2')$$

とする. 然るときは, $\mathfrak{D}$ に於て

$$(\mathfrak{z}_1) + (\mathfrak{z}_2) \sim (\mathfrak{z}_1') + (\mathfrak{z}_2')$$

である.

4 — 空間 (x) に領域 V を描き, 位相変換

$$(G_t) \qquad x_i' = g_i(x,t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

を考へ, 其の逆変換を

$$(H_t) \qquad x_i' = h_i(x,t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

としませう. t は助変数です. G_t は $[(x)\in V,\ 0 \leq t \leq 1]$ に於て定義せられて居るものとし, G_t に依る V の像を V_t とします. $g_i(x,t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を $[(x)\in V,\ 0\leq t\leq 1]$ に於ける (一価) 連続函数とし, $h_i(x,t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を $[(x)\in V_t,\ 0\leq t\leq 1]$ に於ける同じ性質の函数とします. t が 0 になれば G_0 は単位変換になるものとします. 然うしますと, H_0 に就ても同様です. 即ち,

$$g_i(x,0) = x_i, \quad h_i(x,0) = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

V 内に零 $(\mathfrak{z})$ を分布し, 其の零点の集合を σ とします. $U \Subset V$ の如く領域 U を描き, 其の境界と σ との交りを $\mathfrak{E}$ とします. G_t による U, $(\mathfrak{z})$ の像を夫々 U_t, $(\mathfrak{z}_t)$ とします[7]. $(\mathfrak{z}_t)$ は U_t 内に一つの零を規定すること明

[7] $(\mathfrak{z})$ が $\{(\gamma),\ f(x)\}$ によって規定せられて居るとしますと, $(\mathfrak{z}_t)$ は, P の像を中心とする充分小さな球を (δ_t) としましたとき, $\{(\delta_t),\ f[h(x,t)]\}$ に依て与へられます. 然う云ふ意味です.

らかです. G_t による σ, $\mathfrak{E}$ の像を夫々 σ_t, $\mathfrak{E}_t$ とします. 別に, 有界領域 Δ を描きます.

此の状勢に於て, 次の定理があります:

<u>定理 3</u> — <u>若し, 1° σ が空間 (x) の如何なる $2n$ 次元の部分をも充填することなく</u>[8], <u>2° $0 \leq t \leq 1$ の任意の t に対し, 領域 Δ 上にも其の境界上にも $\mathfrak{E}_t$ の点が無いならば, Δ に於て, 零 $(\mathfrak{z}')$ を, $\Delta \cap U$ に於て $(\mathfrak{z})$ と一致し, 他の部分に於て零点を持たない様に撰び, 零 $(\mathfrak{z}_1')$ を $\Delta \cap U_1$ に於て $(\mathfrak{z}_1)$ と一致し, 他の部分に於て零点を持たない様に撰ぶことが出来て, 其の間に次の関係がある: Δ に於て $(\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z}_1')$</u>

<u>証明</u> $(\mathfrak{z})$ が $\{(\gamma), f(x)\}$ に依って与へられて居るとして, Δ に $\{(\delta), \varphi(x)\}$ を次の様に規定します. Δ の任意の一点を P としませう. σ の U 上の部分を σ' として, 1° P が若し σ' の点ならば, Δ は $\mathfrak{E}$ の点を含みませんから P は U の内点であって, P に対し一対の $(\gamma), f(x)$ が対応します. (δ) としては, P を中心とし, (γ) の半径と, P から U の境界への (Euclid 幾何学的) 距離との中, 小さな方を半径とする球を撰び, $\varphi(x) = f(x)$ ととります. 2° P が若し σ' の点でなければ, σ' は閉集合ですから, P から σ' への距離は 0 ではありません. P を中心とし此の距離を半径とする球を (δ) とし, $\varphi(x) = 1$ ととります. か様にして得た $\{(\delta), \varphi(x)\}$ は, 1° のどの $\varphi(x)$ も σ' 外に零点を持ちませんから, 同等条件をみたすこと明了です. 故に, Δ に零を規定します. 之を $(\mathfrak{z}')$ としますと, $(\mathfrak{z}')$ は σ' の任意の点の近傍では $(\mathfrak{z})$ と一致し, σ' 外に零点を持たないこと明らかです.

全く同様にして, $0 \leq t \leq 1$ の各 t に就て, Δ 内に零 $(\mathfrak{z}_t')$ を, 同様の性質を持つ様に分布することが出来ます. 特に $(\mathfrak{z}_1')$ は存在します. 問題は, $(\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z}_1')$ を云ふことです.

$\mathfrak{E}_t$ $(0 \leq t \leq 1)$ の点の全体は明らかに閉集合です. 故に, 之と Δ との距離は 0 ではありません. それを ρ とします.

先づ $(\mathfrak{z}')$ に就て, 被覆 $\{(\delta), \varphi(x)\}$ を改造しませう. Δ の任意の点を P とします. P を中心に半径 ρ を以て球 (Γ) を描きます. (Γ) に $\mathfrak{E}$ の点はありません. それ故, 上に見ました様に, (Γ) 内に零 $(\mathfrak{z}'')$ を, σ' の各点の近傍では $(\mathfrak{z})$ と一致し, σ' 外に零点を持たない様に, 分布することが出来ます. 所で, 球と多円筒とは位相変換によって相移りますから, 定理 C に依って, (Γ) に 於て連続函数 $\Phi(x)$ を, $(\mathfrak{z}'')$ を零とする様に, 求めることが出来ます. か様にして $\{(\Gamma), \Phi(x)\}$ を作りますと, 此の被覆は Δ に於て $(\mathfrak{z}')$ を規定すること明らかです.

U と其の境界との和を $\overline{U}$ としますと, $g_i(x,t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は閉集合 $[(x) \in \overline{U}, 0 \leq t \leq 1]$ 上に於ける連続函数ですから, (x, t'), (x, t'') が此の

[8] 条件 1° を除けば定理は成立しません. 此のことは, 第三報告, 第 1 節の第三の脚註に依って, 例証出来ます.

閉集合上にある限り, 若し

$$|t' - t''| \leq \eta$$

ならば, 必ず

$$\Sigma|g_i(x,t') - g_i(x,t'')|^2 \leq \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

となる様な正数 η が存在します. 区間 $0 \leq t \leq 1$ を細分して, 各小区間の長さが η を超えない様にし, 其の分点を, 0 から 1 に向って順に,

$$\tau_1,\ \tau_2, \ldots,\ \tau_m$$

としませう.

先づ区間 $0 \leq t \leq \tau_1$ を見ます. 上述の球 (Γ) の表面を Γ とし, 此の区間の任意の t に対し, G_t に依って Γ が Γ' に移されたとしませう. 然うしますと, Γ' の任意の点と Γ の之に対応する点との距離は $\frac{\rho}{2}$ を超えません. 従って, (Γ) の中心 P から Γ' への距離は $\frac{\rho}{2}$ を下りません. 故に, P を中心とし, $\frac{\rho}{2}$ を半径として球 (S) を描きますと, (S) は G_t に依る (Γ) の像 (Γ') に含まれます. それ故, $h_i(x,t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は

$$(x) \in (S), \quad 0 \leq t \leq \tau_1$$

に於て存在します. (S) 内に $F(x,t)$ $(0 \leq t \leq \tau_1)$ を次の様に規定します :

$$F(x,t) = \Phi[h(x,t)]$$

$F(x,t)$ は $(x) \in (S),\ 0 \leq t \leq \tau_1$ に於ける連続函数です. か様にして, Δ 内に, 区間 $0 \leq t \leq \tau_1$ の任意の t に対し, $\{(S), F(x,t)\}$ を作りますと, 此の被覆は明らかに零 $(\mathfrak{z}'_t)$ を規定します. 特に $t = 0$ に対しては, H_0 は単位変換ですから, $(\mathfrak{z}'_0) = (\mathfrak{z}')$ です. 之から直ちに次のことが分ります :

$$(\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z}'_{\tau_1}).$$

全く同様に,

$$(\mathfrak{z}'_{\tau_1}) \sim (\mathfrak{z}'_{\tau_2}) \sim \cdots \sim (\mathfrak{z}'_1).$$

$$\therefore \quad (\mathfrak{z}') \sim (\mathfrak{z}'_1).$$

(証明終)

5 — 問題 3 に帰りませう. 先づ次の定理があります :

定理 4 — 第一節の問題 3 が解けるならば, Δ の近傍に於て, 解析的零 $(\mathfrak{z}')$ を, $(\mathfrak{z}) + (\mathfrak{z}')$ が清掃可能となる様に撰ぶことが出来る. [9]

[9] $(\mathfrak{z}')$ は解析的零ですから, 約束 (第 1 節) に依って, 常数 0 の規定するそれではありません. 以下すべて同様です.

証明　開集合 $\mathfrak{D}$ を, Δ を含み, $\mathfrak{D}$ 内に $(\mathfrak{z})$ が分布せられて居て, 之に関する問題 3 が其処で解ける様に撰び, 解の一つを $F(x)$ としませう. P を $\mathfrak{D}$ の任意の一点とし, P を中心とする球 (γ) をとり, 若し (γ) が $\mathfrak{D}$ に含まれないならば, 半径を小さく変へて, 含まれる様にし それを改めて (γ) と呼びます. 然うしますと,

$$F(x) = \alpha(x) f(x)$$

となる様な正則函数 $\alpha(x)$ が (γ) に存在します. $\alpha(x)$ は素の $F(x)$ が然うですから, 恒等的に 0 ではあり得ません. 此の $\alpha(x)$ をとって, $\{(\gamma), \alpha(x)\}$ を作ります.

之について, 先づ同等条件を調べませう. (γ_1), (γ_2) を共通部分 (δ) を持つ様な任意の一対とし, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ 及び $f_1(x)$, $f_2(x)$ を夫々対応する函数としますと, 夫々 (γ_1), (γ_2) に於て,

$$F = \alpha_1 f_1, \quad F = \alpha_2 f_2$$

となります. 所で, f_1, f_2 に就ては, (δ) で正則であって, 零点を持たない様な函数 $\lambda(x)$ が存在して, 恒等的に

$$f_2 = \lambda f_1$$

となるのですから,

$$\alpha_1 = \lambda \alpha_2$$

が (δ) で恒等的に成立します.

か様に同等条件が充たされますから, $\{(\gamma), \alpha(x)\}$ は $\mathfrak{D}$ に於て一つの零を規定します. 之を $(\mathfrak{z}')$ とします. 此の $(\mathfrak{z}')$ は解析的です. 又, $(\mathfrak{z}) + (\mathfrak{z}')$ は, $F(x)$ の零ですから, 定理 b に依って, $\mathfrak{D}$ に於て清掃可能です.

(証明終)

之から次の定理が得られます：

<u>定理 5</u> — <u>空間 (x) に外的に正則凸状な閉集合 Δ を描き, Δ の近傍に解析的零 $(\mathfrak{z})$ を分布する. 此のとき, 若し問題 3 が Δ の近傍に於て解けるならば, 多くとも $n+1$ 個の解 $F_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ を撰び, Δ の近傍の任意の点の近傍に於て, 其の少くとも一つが $(\mathfrak{z})$ を零とする様に出来る.</u>

<u>証明</u>　Δ の近傍に於ては, 問題 3 が解けるのですから, 定理 4 に依って, 解析的零 $(\mathfrak{z}_1)$ を $(\mathfrak{z}) + (\mathfrak{z}_1)$ が清掃可能となる様に撰ぶことが出来ます. $(\mathfrak{z})$, $(\mathfrak{z}_1)$ の零面を夫々 σ, σ_1 としませう.

σ_1 を構成する解析的に連結な成分の中, Δ 上に点を持つものの数は有限個です. か様な成分がなければそれでよろしい. 存在したとして, 其の各の上に Δ の点を一つ宛とり,

$$(a'), (a''), \ldots, (a^{(p)})$$

とします. 正数 δ を充分小さく撰び, Δ の任意の点から δ を超えない距離の所に σ_1 の境点が存在しない様にします. 此の時, n 個の複素数 α_i を,

$$\sum |\alpha_i|^2 < \delta^2 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

であって, p 個の点

$$(a^{(j)} + \alpha) \qquad (j = 1, 2, \dots, p)$$

が何れも固有面 σ_1 上にない様に撰ばうと云ふのですが, 之が可能であることは直ちに分ります.

平行移動

$$x'_i = x_i - \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

に依って $(\mathfrak{z}_1)$ を $(\mathfrak{z}_2)$ に移します. 然うしますと, Δ の近傍に於て $(\mathfrak{z}_2)$ は明らかに一つの解析的零となって居ます. 又,

$$x'_i = x_i - \alpha_i t, \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

が存在しますから定理 3 に依って,

$$(\mathfrak{z}_1) \sim (\mathfrak{z}_2)$$

です. 更に, $(\mathfrak{z}_2)$ の零面を σ_2 としますと, σ_2 は明らかに上述の点 $(a^{(j)})$ $(j = 1, 2, \dots, p)$ の何れをも通りません. それ故 Δ の充分近くについて云ひますと, 固有集合体 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ の (解析的連結) 成分はすべて $2(n-2)$ 次元です.

$\sigma_1 \cap \sigma_2$ の成分の中, Δ 上に点を持つものは有限個です. か様なものが一つもなければそれ迄です. あったとして, 其の各の上に Δ の点を一つ宛とり,

$$(b'),\ (b''), \dots,\ (b^{(q)})$$

とします. 以下全く同様にして, Δ の近傍に於て, 解析的零 $(\mathfrak{z}_3)$ を,

$$(\mathfrak{z}_1) \sim (\mathfrak{z}_3)$$

であって, 其の零面を σ_3 とすれば, 固有集合体

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3$$

の Δ の近傍に於ける成分が, すべて $2(n-3)$ 次元である様に撰ぶことが出来ます.

此の方法を反覆しますと次のことが分ります : Δ の近傍に於て, 多くとも $n+1$ 個の解析的零 $(\mathfrak{z}_j)$ $(j = 1, 2, \dots, \nu)$ を撰び,

$$(\mathfrak{z}_1) \sim (\mathfrak{z}_j) \qquad (j = 2, 3, \dots, \nu)$$

であって, 共通零点が存在しない様に出来る.

Δ の近傍に於て, $(\mathfrak{z})+(\mathfrak{z}_1)$ は清掃可能ですから, 定理 1, 2 に依って, $(\mathfrak{z})+(\mathfrak{z}_j)$ $(j=1,2,\ldots,\nu)$ についても同様です. 故に, 定理 a, b に依って, Δ の近傍で正則函数 $F_j(x)$ を, 此の $(\mathfrak{z})+(\mathfrak{z}_j)$ を零とする様に求めることが出来ます. Δ の近傍の任意の点の近傍で, 之等の函数の少くとも一つは $(\mathfrak{z})$ を零として居ます. (証明終)

所で, 第八報告で次の定理を見ました (定理 2) :

空間 (x) に単葉有界閉筒状域 $(\overline{X})$ と, $(\overline{X})$ の近傍で定義せられた固有集合体とを考へ, その $(\overline{X})$ の上の部分を Σ とする. 此の固有集合体は, 単葉集合 Σ の近傍に於ける正則函数 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ の共通零点の集合として表されて居るとする. 然るときは, $(\overline{X})$ の近傍に於て正則函数 $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{p+1}(x)$ を, 其の共通零点の集合の $(\overline{X})$ 上の部分が丁度 Σ であって, 更に Σ の近傍の各点に於て函数系 (F) が函数系 (f) とイデアル基として同等である様に, 求めることが出来る.

これと定理 5 とから, 次の結果が出ます :

定理 6 — 空間 (x) の外的に正則凸状な閉集合 Δ の近傍に, 解析的零 $(\mathfrak{z})$ が与へられて居るものとして, 其の零面の Δ 上の部分を σ とする. 然るときは, 此の $(\mathfrak{z})$ に関して, σ の近傍で問題 3 が解けるならば, Δ の近傍に就ても同様である.

証明　慣用の構図を描きます.——Δ は, 次の形の解析的多面体であると看做して支障ありません :

$$(\Delta) \qquad (x)\in G,\ |x_i|\le r_i,\ |g_j(x)|\le 1 \quad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,\nu)$$

此処に G は $G \Supset \Delta$ なる開集合, r_i は正の常数, $g_j(x)$ は G に於ける正則函数です. 従って, Δ は閉集合です. y_j $(j=1,2,\ldots,\nu)$ を複素変数とし, 空間 (x,y) に固有集合体の断片,

$$(\Sigma) \qquad y_j=g_j(x), \quad (x)\in\Delta \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

を考へます. Σ は閉円筒

$$(\overline{C}) \qquad |x_i|\le r_i, \quad |y_j|\le 1, \qquad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,\nu)$$

上にあります. Σ の境界は, $(\overline{C})$ の境界上にあります. Σ の空間 (x) 上への射影が Δ です.

扨て, σ の近傍で $(\mathfrak{z})$ に関する問題 3 が解けると假定しませう. 然うしますと, 定理 5 に依って, 此の問題の μ 個の解 $F_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,\mu;\ \mu\le n{+}1)$

を撰び, σ の近傍の任意の点に対して, 之等の函数の少くとも一つが, 此の点の近傍で $(\mathfrak{z})$ を零とする様に出来ます. 空間 (x, y) に固有集合体の断片,

$$(\mathfrak{S}) \qquad\qquad (x) \in \sigma, \quad (x, y) \in \Sigma$$

を考へますと, $F_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, \mu)$ の共通零点の集合は σ ですから, $\mathfrak{S}$ 及び其の延長は, $\mathfrak{S}$ の近傍で, 正則函数

$$F_k(x), \quad y_j - g_j(x) \qquad (j=1, 2, \ldots, \nu;\ k=1, 2, \ldots, \mu)$$

の共通零点の集合として表されます. 故に, 上述の定理に依て, $(\overline{C})$ の近傍で正則函数 $\Phi_l(x, y)$ $(l=1, 2, \ldots, \mu+\nu+1)$ を求め, 之等の函数の共通零点の集合の $(\overline{C})$ 上の部分が丁度 $\mathfrak{S}$ であって, $\mathfrak{S}$ の近傍の各点に於て函数系 (Φ) が函数系 $(F, y-g)$ とイデアル基として同等である様に出来ます.

函数 $\Phi_l(x, y)$ に $y_j = g_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, \nu)$ を代入して,

$$\Psi_l(x) = \Phi_l[x, g(x)] \qquad (l=1, 2, \ldots, \mu+\nu+1)$$

を考へますと, 之等の函数は Δ の近傍で正則であって, σ の近傍の各点で, 此の函数系は函数系 (F) と明らかに, イデアル基として同等です. 故に, 先づ之等の $\Psi_l(x)$ 中には恒等的に 0 でないものがあります. 其の一つを $\Psi_p(x)$ としませう. 次に此の $\Psi_p(x)$ は $(\mathfrak{z})$ が $\{(\gamma), f(x)\}$ によって与へられるとしますと, 各 (γ) 内で,

$$\Psi_p(x) = \alpha(x) f(x),$$

$\alpha(x)$ は正則函数, の形であることが, 上のことから分ります. (証明終)

<u>6</u> — 之で準備が出来ましたから, 問題の遂及に移ります. 始め第七及び第八報告でよく調べて置いた, 或る特殊な正則域に於てするのが便利です.——

空間 (x) に <u>筒状域</u> (X) を考へ, <u>(X) に於ける正則函数の全体を $(\mathfrak{F})$</u> とします. Δ を (X) に含まれる函数族 $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状である様な閉集合とします.

函数値の平面上に, 両翼が無制限に延びて居る様な, 重複点を持たない連続曲線 L を考へます. L は平面を二部分に分ちます. 其の各と L との和を Y_1, Y_2 とします. $\varphi(x)$ を $(\mathfrak{F})$ の函数とし,

$$\varphi(x) \in L, \quad \varphi(x) \in Y_1, \quad \varphi(x) \in Y_2$$

の Δ 上の部分を, 夫々 $\Gamma, \Delta_1, \Delta_2$ とします. Γ に属しない様な, Δ_1 及び Δ_2 の点は, 何れも実在するものと考へます.

Δ の近傍に解析的零 $(\mathfrak{z})$ を分布し, $(\mathfrak{z})$ の Δ 上の部分を σ とし, 此の $(\mathfrak{z})$ に関して問題 1, 2, 3 を考へます.——

先づ, 出発点として, 次の定理を見出だすことが出来ます：

<u>定理 7</u> — <u>Δ_1 の近傍で 問題 2 が, Δ_2 の近傍で 問題 3 が解けるならば, Δ の近傍で 問題 3 が解ける.</u>

<u>証明</u>　定理 6 に依って, σ の近傍で問題 3 が解けることを云ひさへすればよろしい. 所で σ は, 第八報告の定理 1 から慣用の推理法に依って直ぐに分ります様に, 函数族 $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状です. 故に, Δ_1 の近傍では問題 1 が解けると仮定して, 所述を証明すれば充分です.

か様に假定しますと, Δ_1 の近傍に正則函数 $F(x)$ が存在して, $(\mathfrak{z})$ を零として持ちます. Δ_2 の近傍に対しては, 定理 5 に依って, 正則函数 $\Phi_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,\nu;\ \nu\leq n+1)$ を, $(\mathfrak{z})+(\mathfrak{z}_j)$, $(\mathfrak{z}_j)$ は解析的零, なる形の零を持ち, 之等の $(\mathfrak{z}_j)$ が共通の零点を持たない様に, 撰ぶことが出来ます. 之等の函数の間には次の関係があります：

$$\Phi_j(x) = A_j(x)F(x) \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

$A_j(x)$ は Γ の近傍に於ける正則函数であって, $(\mathfrak{z}_j)$ を零として持ちます. 従って之等 ν 個の $A_j(x)$ は共通の零点を持ちません.

Δ 上で $|\varphi(x)|\leq M$ とします. 函数値の平面上に, 原点を中心, $2M$ を半径として閉円を描き, L の其の上の部分を L_0 とします. L_0 は単一複素変数の整函数の全体に関して外的凸状です. それ故, 明らかに, Γ は $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状です.

之等二つのことから, 第七報告の定理 7 に依って, 此の函数系 (A) に関する合同に就ての特に第一問題は, Γ の近傍に於て必ず解けます. それ故, Γ の近傍に於て, 正則函数 $B_j(x)$ を,

$$B_1(x)A_1(x)+B_2(x)A_2(x)+\cdots+B_\nu(x)A_\nu(x)=1$$

となる様に求めることが出来ます. Δ は上述の凸状性を持ちますから, 展開に関する定理 (第二報告, 第 5 節) に依って, ε を与へられた正数とするとき, $(\mathfrak{F})$ に属する函数 $b_j(x)$ を求め, Γ 上で

$$|B_j(x)-b_j(x)|<\varepsilon \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

ならしめることが出来ます.

$$H(x)=b_1(x)A_1(x)+b_2(x)A_2(x)+\cdots+b_\nu(x)A_\nu(x)$$

と置きませう. $\varepsilon>0$ を充分小さくとり, Γ 上で

$$|H(x)-1|<\frac{1}{2}$$

ならしめ, 此の $b_j(x)$ に依って,

$$\Psi(x) = b_1(x)\Phi_1(x) + b_2(x)\Phi_2(x) + \cdots + b_\nu(x)\Phi_\nu(x)$$

を作りませう. 然うしますと, $\Psi(x)$ は Δ_2 の近傍で正則であって, $(\mathfrak{z}) + (\mathfrak{z}')$, $(\mathfrak{z}')$ は解析的零, なる形の零を持ち, Γ の近傍で次の様になります :

$$\Psi(x) = H(x)F(x).$$

$H(x)$ は, $H(x) - 1$ の絶対値が Δ 上で $\dfrac{1}{2}$ よりも小さくなる様にとって置いたのですから, $\log H(x)$ の各分枝は Δ の近傍で一価です. 以下同じ記号に依って, 其の決まった一つを表すことにしませう. 第七報告の補助定理 5 に依って, Δ_1 の近傍で正則な函数 $K_1(x)$ と, Δ_2 の近傍で正則な函数 $K_2(x)$ とを, 恒等的に

$$K_1(x) - K_2(x) = \log H(x)$$

となる様に求めることが出来ます. 従って, Δ_1 の近傍で正則な函数を撰び, Δ_1 の近傍では $F(x)$ と同等となり, Δ_2 の近傍では $\Psi(x)$ と同等となる様にすることが出来ます. 所求のものです. (証明終)

7 — それならば問題 2 は如何なる場合に解けるか, と云ふのが次に起る問題です. これに対しては次の定理があります :

定理 8 — 問題 2 が Δ の近傍で解けるためには, $(\mathfrak{z})$ が σ の近傍から清掃出来ることが必要且つ充分である.

証明　之が必要条件であることは定理 b に依て明らかです. それで, 充分条件であることを云へばよろしい. 此の条件がみたされたとしますと, 上に見ました様に, σ は外的に正則凸状ですから, σ の近傍では問題 1 が解けます (定理 a, b). 其の解の一つを $f(x)$ としませう. このことから, Δ の近傍に対しては, 定理 b 及び定理 5 によって, 正則函数 $F_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,\nu;\ \nu \leq n+1)$ を, 何れも $(\mathfrak{z})$ を其の零の一部分として持ち, Δ の近傍の任意の点に対して, 之等の函数の少くとも一つが, 其の点の近傍で $(\mathfrak{z})$ を零とする様に, 撰ぶことが出来ます. 之等の函数の間には次の関係があります :

$$F_j(x) = \alpha_j(x)f(x) \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

$\alpha_j(x)$ は σ の近傍で正則であって, 同時に 0 とならない様な函数です.

更に σ は $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状ですから, 上の証明に於けると全く同様にして, $(\mathfrak{F})$ に属する函数 $b_j(x)$ を求め,

$$H(x) = b_1(x)\alpha_1(x) + b_2(x)\alpha_2(x) + \cdots + b_\nu(x)\alpha_\nu(x)$$

としますと, $H(x)$ が σ 上で 0 にならない様に出来ます. この $b_j(x)$ に依って,

$$\Phi(x) = b_1(x)F_1(x) + b_2(x)F_2(x) + \cdots + b_\nu(x)F_\nu(x)$$

を作りますと, $\Phi(x)$ は Δ の近傍で正則な函数であって, 恒等的に

$$\Phi(x) = H(x)f(x)$$

となります. $H(x)$ は σ 上で 0 にならないのですから, $\Phi(x)$ は問題 2 の解です. (証明終)

定理 7, 8 を次の形に纏めませう：

定理 9 — $\mathfrak{S}$ を被覆可能な固有集合体[10] の σ 上の部分とし, σ は $\mathfrak{S}$ 外の点を持つものとする. 若し, $\mathfrak{S}$ を含む一つの開集合を V とし, σ の V に属しない部分を σ' とするとき, V の如何に拘らず, $(\mathfrak{z})$ が σ' の近傍から清掃可能であって, 且つ若し $\mathfrak{S}$ の近傍では問題 3 が解けるならば, 此の問題は Δ の近傍で解ける.

証明　V を充分 $\mathfrak{S}$ に近くとって, V に於て問題 3 が解ける様にします. $\mathfrak{S}$ は, 第八報告の定理 1 に依って, 函数族 $(\mathfrak{F})$ に関して外的凸状です. それ故, 第八報告で見ました様に (定理 2 の証明参照), $(\mathfrak{F})$ の函数 $\psi_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,\nu)$ 及び原点を通らない直線 L_j を適当に撰び, L_j によって分たれる平面の二つの部分の中, 原点を含むものと L_j との和を Y_j とするとき, 点集合

$$(A) \qquad (x) \in \Delta, \quad \psi_j(x) \in Y_j \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

が $\mathfrak{S} \subset A \subset V$ をみたし, 且つどの $\psi_j \in L_j$ 上にも $\mathfrak{S}$ の点がない様にすることが出来ます.

$1, 2, \ldots, \nu-1$ の任意の一数 p に対し, 次の点集合を考へます：

$$(A_p). \qquad (x) \in \Delta, \quad \psi_k(x) \in Y_k \qquad (k=1,2,\ldots,\nu-p)$$

先づ A_1 を見ませう. A_1 は $\psi_\nu \in L_\nu$ によって部分に分たれ, 其の一方が A です. A に対しては, $A \subset V$ ですから, 其の近傍で問題 3 が解けます. 他方に就ては, 境界をも含めて其の上に $\mathfrak{S}$ の点がありませんから, σ の其の上の部分の近傍から $(\mathfrak{z})$ が清掃出来ます. 従って定理 8 に依って, 其の近傍で問題 2 が解けます. 故に, 定理 7 に依って, A_1 の近傍に於て問題 3 が解けます.

[10] 第八報告, 第 1 節参照.

次に A_2 を見ますと, A_2 は $\psi_{\nu-1} \in L_{\nu-1}$ に依て二つの部分に分たれ, 其の一方が A_1 です. A_1 の近傍では問題 3 が解けることを上に見ました. 他方に対しては, 境界をも含めて其の上に $\mathfrak{S}$ の点がありません. 故に, 上の場合と全く同様にして, 問題 3 は A_2 の近傍に於ても解けることが分ります.

以下順次に, 問題 3 が $A_3, A_4, \ldots, A_{\nu-1}, \Delta$ の各近傍に於て解けることがわかります. (証明終)

<u>8</u> — 此の定理を定理 5 の証明に於ける構図に適用します.——正数 δ を充分小さく撰び, Δ の任意の点を中心に半径 δ を以て描いた球全体に $(\mathfrak{z})$ が分布せられて居て, 従って其の零面が其処で境点を持たない様にします.

複素数

$$a_1^{(j)},\, a_2^{(j)}, \ldots,\, a_n^{(j)}$$

を

$$\sum_i \left| a_i^{(j)} \right|^2 < \delta^2 \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

となる様にとり, 平行移動

$$x_i' = x_i + a_i^{(j)} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

を考へ, 之に依って σ 及び其の延長を移動し, 其の Δ 上の部分を σ_j とします. σ_j が其の断片である様な固有面は, σ のそれと同様に, Δ の近傍で被覆可能です.——$j = 1,2,\ldots,\nu$, $\nu \leq n$ とし, $a_i^{(j)}$ を適当に撰びます. 然うしますと, 前に見ました様に, $\nu+1$ 個の固有面

$$\sigma,\, \sigma_1,\, \sigma_2, \ldots,\, \sigma_\nu$$

が共通点を持たない様に, 又

$$\mathfrak{S}_p = \sigma \cap \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \cdots \cap \sigma_p \qquad (p=1,2,\ldots,\nu-1)$$

としますと, $\mathfrak{S}_p$ の延長の Δ の近傍に於ける部分が $2(n-p-1)$ 次元である様に出来ます. $\mathfrak{S}_p$ は何れも被覆可能な固有集合体の Δ 上の部分です.

扨て, 先づ

$$x_i' = x_i + a_i^{(1)} t, \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

がありますから, 定理 3 及び定理 1 に依って, $\mathfrak{S}_1$ の近傍を除外すれば, $(\mathfrak{z})$ は σ の近傍から清掃出来ます. 故に上の定理に依って, 問題 3 は, 若し $\mathfrak{S}_1$ の近傍で解けるならば, Δ の近傍に於ても解けます.

次に $\mathfrak{S}_1$ の近傍を見ますに,

$$x_i' = x_i + a_i^{(2)} t, \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

がありますから, $(\mathfrak{z})$ は, $\mathfrak{S}_2$ の近傍を除けば, $\mathfrak{S}_1$ の近傍から清掃出来ます. 故に, 問題 3 は, 若し $\mathfrak{S}_2$ の近傍で解けるならば, $\mathfrak{S}_1$ の近傍に於て, 従って Δ の近傍に於いて解けます.

以下同様にして, 最后に $\mathfrak{S}_\nu$ は存在しませんから, 問題 3 は Δ の近傍で解けます.

か様に, 第 6 節の始めに述べた, 特殊な外的正則凸状閉集合に関しては問題 3 が解ける, と云ふことが分りました.

9 — 一般の場合を見ませう.

空間 (x) に外的正則凸状閉集合 Δ を考へ, Δ の近傍に解析的零 $(\mathfrak{z})$ を分布します. 定理 6 の証明でのべた常用の構図を描きます.——Δ は次の形の解析的多面体であると看做して支障ありません :

$$(\Delta) \qquad (x) \in G, \ |x_i| \leq r_i, \ |\varphi_j(x)| \leq 1 \quad (i=1, 2, \ldots, n; j=1, 2, \ldots, \nu)$$

此処に G は $G \Supset \Delta$ なる開集合, r_i は正の常数, $\varphi_j(x)$ は G に於ける正則函数です. y_j $(j=1, 2, \ldots, \nu)$ を複素変数とし, 空間 (x, y) に固有集合体の断片,

$$(\Sigma) \qquad y_j = \varphi_j(x), \quad (x) \in \Delta \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

を考へます. Σ は閉筒状域 $(\overline{C})$, $|x_i| \leq r_i$, $|y_j| \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \nu)$ 上にあり, Σ の境点は $(\overline{C})$ の境界上にあります. 第二報告の定理 I (又は, 第八報告の定理 1) に依って, Σ は有理整函数の全体に関して外的凸状です.

$(\mathfrak{z})$ が $\{(\gamma), f(x)\}$ に依って被覆的に与へられて居るものとしませう. Σ の近傍の任意の一点を (x^0, y^0) としますと, (x^0) は Δ の近傍の点ですから, (x^0) を中心とする $2n$ 次元球 (γ) と (γ) に於ける正則函数 $f(x)$ とが此の系統中に存在します. (x^0, y^0) を中心とし (γ) と同じ半径を以て $2(n+\nu)$ 次元球 (δ) を描きますと, $f(x)$ は (δ) に於ける正則函数です. 点 (x^0, y^0) に此の (δ), $f(x)$ を対応せしめます. か様にして $\{(\delta), f(x)\}$ を作りますと, 之によって Σ の近傍で解析的零が規定せられること明らかです. 此の Σ の近傍に於てならば, 上に見ました様に, 問題 3 を解くことが常に可能です.

上述の零に関する一つの解を $F(x, y)$ としませう. $F(x, y)$ は Σ の近傍に於ける正則函数であって, 常数 0 ではなく, 各 (δ) に於て

$$F(x, y) = \alpha(x, y) f(x)$$

となります. 此処に $\alpha(x,y)$ は (δ) に於ける正則函数です.

更に定理 5 に依って, Σ 上の一点を $[\xi,\varphi(\xi)]$ としますと, 此の点を中心とする球 (δ) 内に於ける上述の関係に於て,

$$\alpha[\xi,\varphi(\xi)]\neq 0$$

となる様に $F(x,y)$ を撰ぶことが出来ます.

$y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,\nu)$ を代入し,

$$\Phi(x)=F[x,\varphi(x)]$$

を作ります. $\Phi(x)$ は Δ の近傍に於ける正則函数であって, Δ の近傍の任意の点 P の近傍で恒等的に

$$\Phi(x)=\beta(x)f(x),\quad \beta(x)=\alpha[x,\varphi(x)]$$

となります. $f(x)$ は P に対応するものであって, $\beta(x)$ は必然 P の近傍で正則な函数です. 特に $P=(\xi)$ に対しては, $\beta(\xi)\neq 0$ ですから, $\Phi(x)$ は恒等的に 0 ではありません. 故に, $\Phi(x)$ は与へられた問題 3 の解です.

か様にして, 定理 5 を考慮に入れて, 次の結果が得られました :

定理 — 空間 (x) に, 単葉有界であって, 外的に正則凸状である様な閉集合 Δ を描き, Δ の近傍に解析的零 $(\mathfrak{z})$ を分布する. 但し, $(\mathfrak{z})$ の零点の集合は Δ の近傍を埋め盡さないものとする. 然るときは, Δ の近傍に於て正則であって, $(\mathfrak{z})$ を其の零の一部分とし, 恒等的に 0 でない様な函数は常に存在する.

更に, 多くとも $n+1$ 個のか様な函数を撰び, Δ の近傍の任意の点に於て, 其の少くとも一つが, 此の点の近傍で, 正確に $(\mathfrak{z})$ を零として持つ様にすることが出来る.

(5. 2. 28)