XIII　Weierstrass の予備定理に於ける条件に就て

此の研究の冒頭で申しました一系の問題を考察するに当たって, それ等が考へられて居る領域に種々の制限を加へて来ました. 第一乃至第六報告では單葉有限領域に限定し, 第七乃至第十一報告では無窮遠点及び分岐点を排除しました. 之等の制限を取り去らうと云ふのでありますが, 此の拡張も矢張り順次にした方がよい様に思はれますから, 無窮遠点の方は暫く不問に付して, 先づ, 分岐点が入って来るとどうなるかをしらべようと思ひます.[1]

第一乃至第六報告に於ては, 二つの補助定理が中心になって居ました. 第一及び第二基礎的補助定理がそれであります. 第七乃至第十一報告に於ても同様でした. それで, 同じ形式で拡張出来ることを予想して研究を進めて行かうと云ふのでありますが, 然うしますと問題は二群に分れます. 其の中, 第一基礎的補助定理の拡張を中心とする諸問題について考へることから始めます. 前報告で取り扱った問題も此の群に属します.

所で, 最初に, 此処に一つの疑問があります. それは, 固有集合体上に於ける函数論との関係に就てです. 空間に就ては勿論有限の部分に限定して置きまして, 一般な多葉領域に於ける解析函数論と, 固有集合体上のそれとを比較しますと, 後者は明らかに前者を含みます. 又局地的には, Weierstrass の第二定理に依って逆も眞です。然し広域的にはどうでせうか. 若し此のとき逆が成立せず, 後者の方が一般的であるとしますと, 上に述べた拡張の計畫は不徹底だと云はなければなりません. 之が第一の問題です. 此の問題は次に述べる問題に帰着します.

n 複素変数 $(n \geq 2)$ の空間 (x) の点, (a) の近傍で正則な函数 $F(x)$ を考へ, $F(a)$ が 0 であって, $F(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, x_n)$ が恒等的に 0 でないとしますと, Weierstrass の予備定理があります. 此の

$$F(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, x_n) \not\equiv 0$$

を Weierstrass の条件と呼ぶことにしませう. 此の条件は, $F(x)$ を適当な可逆一次変換によって変形することに依って, 常に実現することが出来ます. 之は, か様な局地的な問題に就てですが, 広域的にはどうでせうか. 此処に第二の問題があります.

[1] 此の二つの拡張は切り離すことが出来るやうに予想せられます. 又, 無窮遠に関する研究には, 内分岐した領域に関する諸定理が要るやうに考えられます. それで, 取り敢えず此の研究計畫をたてたのですが, 後に変更することがないとは云ひ切れません.

之等の問題を解決することがこの論文の目的であります. 結果は第 節の定理 I 及び第 節の定理 II に於て述べます.[2]

≪ 此の論文で取り扱う領域はすべて 有限 ですから, 此の条件は, 煩を避けて, 一々繰り返しては申しません. 又, 第 2 節以後に現はれる領域は殆んど 單葉 ですから, 第 1 節を除いて, 反対を明示しない限り, 此の条件も暗黙裡に仮定せられて居ると, 知ってほしいと思ひます.≫

1 —

[2][編注] 節の番号は書かれていない.

Weierstrass の条件

1 — 第二報告で 切断 と云ふ言葉を使ひました. 今一度説明しませう. x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ の任意の p 個を $u_1,u_2,\ldots,u_p$, 残りを $v_1,v_2,\ldots,v_q$ $(p+q=n,\ p>0,\ q>0)$ としましたとき, 空間 (x) に於ける点集合 E の, 一次固有集合体 $u_j=u_j^0$ $(j=1,2,\ldots,p)$ による切断とは, $(u^0,v')\in E$ である様な, 空間 (v) に於ける点 (v') の集合のことです.

尚, 之に対して, E の空間 (v) 上への射影とは, 各 (v') に対して, $(u',v')\in E$ となる様な (u') を添へることの出来る, 点 (v') の集合のことです.

固有集合体と其の切断との間の, 次元の関係に就て, 少し調べて置きませう.

n 複素変数 (又は実変数) $x_1,x_2,\ldots,x_n$ の描く空間に, 領域 Δ を考へ, Δ 内に集合 E を考へます. 此の E に対して, それに属しない様な Δ の点 (ξ) を, 次の様にして撰ぶことが出来る, としませう :
$\ll$ 先づ ξ_1 を撰ぶ. 其の為には, 高々可附番個の x_1 の定値を避ければよい. 次に ξ_2 を撰ぶ. 其の為には, 高々可附番個の, ξ_1 にのみ従属する x_2 の値を避ければよい. 以下同様であって, 最后に ξ_n を撰ぶ. 其の為には, 高々可附番個の, $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-1}$ にのみ従属する x_n の値を避ければよい.$\gg$
此のとき, E は (此の座標系に関して) Δ に於て 性質 $(\mathfrak{D}_0)$[3] を持つと呼ぶことにしませう.

次の 2 つの定理は明白です :

点集合 E が領域 Δ に於て性質 $(\mathfrak{D}_0)$ を持つならば, Δ の各点の近傍に於て其の通りである. 逆も眞である.

(同じ領域に於ける) 性質 $(\mathfrak{D}_0)$ を持つ様な可附番個の集合の和は (此の領域に於て) 同じ性質を持つ.[4]

扨て, $t_1,t_2,\ldots,t_\nu$; $x_1,x_2,\ldots,x_n$ を複素変数とし, 空間 (t,x) に領域 $\mathfrak{D}$ を描き, $\mathfrak{D}$ 内に (被覆可能な) 固有集合体 Σ を考へます. (t') を空間 (t) に於ける任意の定点とし, 一次固有集合体 $t_i=t_i'$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$ に依る Σ の切断を Γ とします. $\mathfrak{D}$ の同じ集合体による切断を Δ としますと, Γ は, (Δ と一致するか, 存在しないか, 然うでなければ,) Δ に於ける (被覆可能な) 固有集合体です. 上に申しました様に, 此の Σ, Γ の間の次元の関係に就て, 準備として, 少ししらべて置きませう.

---

[3] [編注] 次の「 $\cdots$ 」内のような書き込みがある. 「むしろ Baire の 概念がよいと思ふ」

[4] 後に御話する例外点の集合の特性は, R. Baire の catégorie 又は mesure 等の概念を借りて表示することも出来ますが, ありの儘の姿を其のまま取り入れて, 上の様に定義するのが, 此の際直截簡明かと考へます.

1° Σ 上の任意の一点を (t^0, x^0) とし，Σ の，$t_i = t_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ に依る切断を Γ_0 とする．Σ の (t^0, x^0) を通る (解析的連結) 成分の複素次元中最大のものを λ_0 とし, Γ_0 の (x^0) を通る成分のそれを μ_0 とする．然るときは,

$$\mu_0 \geq \lambda_0 - \nu$$

である．

証明 Σ の固有面 $t_1 = t_1^0$ に依る切断を Σ_1 とし, Σ_1 の $(t_2^0, \ldots, t_\nu^0, x^0)$ を通る成分の複素次元中最大のものを λ_1 としませう．(t^0, x^0) を通る, 其の複素次元が λ_0 である様な, Σ の成分の一つを C_0 としませう．

C_0 は (解析的に) 連結ですから, 一般に $f(x, t)$ を C_0 の近傍に於ける正則函数としますと, f の零点の C_0 上に於ける分布状態は, 次の 3 つを出でません：1° か様な零点は存在しないか, 2° C_0 を埋めつくすか, 又は, 3° 其の集合は $\lambda_0 - 1$ 複素次元の固有集合体を作るか．

所で, $f(x, t) = (t_1 - t_1^0)$ ととりますと, (t^0, x^0) は假定によって C_0 上の点ですから, 此の際 1° の場合は起りません．それ故, C_0 の $t_1 = t_1^0$ による切断の複素次元は λ_0 又は $\lambda_0 - 1$ です．どの C_0 についても其の通りですから,

$$\lambda_1 \geq \lambda_0 - 1$$

です．此の推理法を反覆すれば, 所求の結果を得ること明らかです．

2° (t') に対応する Γ が実在して, しかも $\mu \leq \lambda - \nu$ とならない様な場合は例外的であって, かかる (t') の集合は (全有限空間に於て) 性質 $(\mathfrak{D}_0)$ を持つ．

証明 (t_1') を任意にとり，$t_1 = t_1'$ に依る Σ の切断を Σ_1, 其の複素次元を λ_1 とします．λ_1 をしらべませう．複素次元が λ である様な Σ の任意の成分を C とします．函数 $(t_1 - t_1')$ の零点の C 上に於ける分布を見ますに, 上に申しました様に, 次の三つの場合しか起こりません：1° か様な零点は存在しないか, 2° C を埋めつくすか, 又は, 3° 其の集合は $\lambda - 1$ 複素次元の固有集合を作るか．それで, 此の t_1' に対して, 若しか様な成分 C のすべてに汎って, 第二の場合が決して起こらないならば, Σ_1 が実在するならば,

$$\lambda_1 \leq \lambda - 1$$

です．

第二の場合を見ますに, 此のとき成分 C は, 固有面 $t_1 = t_1'$ に含まれます．所で此の形の固有面は, t_1' を変へますと, 原のものとは共通点を持ちません．又, Σ の成分の数は可附番個しかありません．それ故, 此の第二の場合が決して起こらない様に t_1' を撰ぶには, 高々可附番個の決った点を避ければよろしい．先ず, か様に t_1' を撰びます．

次に, 任意に t'_2 を定め, $t_2 = t'_2$ による Σ_1 の切断を Σ_2, 其の複素次元を λ_2 としませう. 然うしますと, 上と全く同様にして次のことが分ります : $\ll$ 一般には, Σ_2 が実在しないか, 又は μ_2 が

$$\mu_2 \geq \lambda - 2$$

をみたす. 尚, か様な t'_2 を撰ぶには (t'_1 は決ったものと見て居るから), 高々可附番個の点を避けさへすればよい.$\gg$

以下全く同様にして, 定理に到達します.

2 — n 複素変数 (x) の 有界 領域 $\mathfrak{D}$ に於て, 正則函数 $F(x)$ を考へます. $n \geq 2$ であって, $F(x)$ は恒等的に 0 ではなく, $F = 0$ となる点は実在するものとします.

次の形の変換を考へませう :

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + f_1(x_1), \quad f_1(x_1) = \alpha_{12}x_1^2 + \alpha_{13}x_1^3 + \cdots + \alpha_{1m}x_1^m, \\ \quad \cdots\cdots \\ y_n = x_n + f_n(x_n), \quad f_n(x_n) = \alpha_{n2}x_n^2 + \alpha_{n3}x_n^3 + \cdots + \alpha_{nm}x_n^m. \end{cases}$$

正数 ρ_j を充分小さくとり

$$(2) \qquad |\alpha_{ij}| < \rho_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 2, 3, \ldots, m)$$

となる様にしますと, 此の変換は, $\mathfrak{D}$ の近傍を, 空間 (y) の或る単葉領域に擬等角写像します. 此のことは, 一変数解析函数論に依って明らかです[5]. $\mathfrak{D}$ の写像を $\mathfrak{D}'$ とし, $F(x)$ の写像を $\Phi(y)$, 即ち

$$F(x) = \Phi(y)$$

としませう. 与へられた $F(x)$ を此の形に変形して $\Phi(y)$ を作ります. m 及び (α) を適当に撰んで, $\Phi(y)$ がある性質を持つ様にしようと云ふのです.

次の形の一次変換を考へませう :

$$(3) \qquad \begin{cases} z_1 = y_1 + \beta_1 y_n \\ \quad \cdots\cdots \\ z_{n-1} = y_{n-1} + \beta_{n-1} y_n \\ z_n = y_n \end{cases}$$

[5]注意 : 分りやすくするために (後の為にも) 矢張り $|x_i| < R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を使ふ方がよいと思ふ.

此の変換は明らかに可逆的です. 之等の変換を引き続いて行ひますと, 次の変換が得られます :

$$(4)\qquad \begin{cases} z_1 = x_1 + \beta_1[x_n + f_n(x_n)] + f_1(x_1) \\ z_2 = x_2 + \beta_2[x_n + f_n(x_n)] + f_2(x_2) \\ \qquad \cdots\cdots \\ z_{n-1} = x_{n-1} + \beta_{n-1}[x_n + f_n(x_n)] + f_{n-1}(x_{n-1}) \\ z_n = x_n + f_n(x_n) \end{cases}$$

此の変換による $\mathfrak{D}, F(x)$ の写像を $\mathfrak{D}'', \Psi(z)$ とします. $\Psi(z)$ に関して $\mathfrak{D}''$ に於て, Weierstrass の条件に就て調べませう.

始め, 変換 (1), (3), (4) に於ける, $(\alpha), (\beta)$ を変数と考へませう. (β) の変域を全有限空間とし, (α) のそれを (2) とします.

$$F(x) = \Phi(\alpha, y) = \Psi(\alpha, \beta, z)$$

と書きませう. $\Phi(\alpha, y)$ は

$$(5)\qquad |\alpha_{ij}| < \rho_j, \quad (y) \in \mathfrak{D}' \quad (i=1, 2, \ldots, n;\, j=2, 3, \ldots, m)$$

に於て正則であって, $\Psi(\alpha, \beta, z)$ は

$$(6)\qquad |\alpha_{ij}| < \rho_j, \quad |\beta_k| < \infty, \quad (z) \in \mathfrak{D}''$$

$$(i=1, 2, \ldots, n;\, j=2, \ldots, m;\, k=1, 2, \ldots, n-1)$$

に於て正則です. 但し, $\mathfrak{D}'$ は (α) と共に変り, $\mathfrak{D}''$ は (α, β) と共に変ります. 空間 (α, β, z) の領域 (6) に於て

$$\Psi(\alpha', \beta';\, z'_1, z'_2, \ldots, z'_{n-1}, z_n) \equiv 0$$

をみたす様な点 (α', β', z') の集合を考へ, $\mathfrak{E}$ を以て表しませう. 先づ此の $\mathfrak{E}$ の性質を研究しようと云ふのであります.

$\mathfrak{E}$ は実在すると考へ, 其の上の任意の点を (α^0, β^0, z^0) としませう. $\Psi(\alpha, \beta, z)$ を此の点の近傍で次の形に展開します :

$$\Psi = A_0 + A_1(z_n - z_n^0) + A_2(z_n - z_n^0)^2 + \cdots,$$

此処に $A_0, A_1, \ldots$ は, 何れも $(\alpha, \beta), z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ の正則函数です. 若し (α', β', z') が $\mathfrak{E}$ の点ならば,

$$A_0(\alpha', \beta', z') = A_1(\alpha', \beta', z') = \cdots = 0$$

であって, 逆も眞です.

始め, 点 (α^0,β^0,z^0) の近傍に於て, $\mathfrak{E}$ をよくしらべようと云ふのですが, $\mathfrak{E}$ はもともと z_n に無関係ですから, それならば殊更空間 (α,β,z) に於て考へなくてもよろしいから, 点 (α^0,β^0,z^0) の近傍に於ける $\mathfrak{E}$ の部分を (z_n に平行に) 空間 $(\alpha,\beta,z_1,\ldots,z_{n-1})$ 上へ射影したものを考へ, $\mathfrak{F}$ で表しませう. 便宜上, z_i, z_i^0 $(i=1,2,\ldots,n-1)$ を ζ_i, ζ_i^0 と書くことにします.

$\mathfrak{E}$ は聯立方程式に依って表されることを見ました：

$$A_0(\alpha,\beta,\zeta)=A_1(\alpha,\beta,\zeta)=\cdots=0$$

M を 0 又は正の整数とし,

$$A_0(\alpha,\beta,\zeta)=A_1(\alpha,\beta,\zeta)=\cdots=A_M(\alpha,\beta,\zeta)=0 \tag{7}$$

を考へます. M を充分大きくとりますと, 此の (7) を充す点 (α,β,ζ) の集合が, $\mathfrak{F}$ と一致する様になること, 明らかです. M としてか様な数の中の最小のものをとり, 改めてそれを (7) としませう. Ψ は恒等的に 0 ではありませんから, $A_0,A_1,\ldots,A_M$ の総てが恒等的に 0 である場合は起り得ません. か様に $\underline{\mathfrak{F}\text{ は固有集合体である}}$ ことが分りました.

次に, 節を改めて $\mathfrak{F}$ の次元を調べませう.

3 — 固有集合体 $\mathfrak{F}$ の, $\alpha_{nj}=\alpha_{nj}^0$ $(j=2,3,\ldots,m)$ に依る切断を $\mathfrak{G}$ とします. 記述を簡単にするため,

$$\alpha_{nj}^0=0 \qquad (j=2,3,\ldots,m)$$

と見ませう. か様に変形するためには, 擬等角写像, [6]

$$X_i=x_i \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

$$X_n=x_n+f_n(x_n)$$

を行へばよいのであって, 以下に御話しますことが, 其の為に一般性を失ふ懼はありませんから. 然うしますと変換 (4) は次の形になります：

$$\left\{\begin{aligned} &z_1=x_1+\beta_1x_n+f_1(x_1)\\ &z_2=x_2+\beta_2x_n+f_2(x_2)\\ &\qquad\cdots\cdots\\ &z_{n-1}=x_{n-1}+\beta_{n-1}x_n+f_{n-1}(x_n-1)\\ &z_n=x_n \end{aligned}\right. \tag{8}$$

[6]注意　8 頁の説明をここでしておくこと — 上の (2) は $|x_i|<R$ としておく方がよく分る — (従って後のものは R' とすること) — 但し, このままでも正しい.

尚, 当分, 若し混雑が起らなければ, 記号 (α) によって, α_{ij} $(i=1,2,\ldots,n-1;\ j=2,3,\ldots,m)$ の全体を表示させることにしませう.

$$(9) \qquad \beta_i^0 \neq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

の場合 を調べることから始めます. (α,β,ζ) を充分 $(\alpha^0,\beta^0,\zeta^0)$ の近くにとりますと,

$$\beta_i \neq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

です.

$(\alpha^0,\beta^0,\zeta^0)$ の近傍の, $\mathfrak{G}$ 上の (α,β,ζ) に対して, 空間 (z) に於ける複素直線 (1 複素次元, 一次固有集合体)

$$z_i = \zeta_i \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

が対応し, 問題の点 (z^0) の近傍に於て, 此の (複素) 直線は全く $\Psi(z)=0$ に含まれます. 従って, 空間 (x) に於ては, 複素曲線 (1 複素次元固有集合体),

$$(10) \qquad \begin{cases} x_1 + \beta_1 x_n + f_1(x_1) = \zeta_1, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_{n-1} + \beta_{n-1} x_n + f_{n-1}(x_{n-1}) = \zeta_{n-1}, \\ f_1(x_1) = \alpha_{12}x_1^2 + \alpha_{13}x_1^3 + \cdots + \alpha_{1m}x_1^m, \\ \qquad \cdots\cdots \\ f_{n-1}(x_{n-1}) = \alpha_{n-1,2}x_{n-1}^2 + \cdots + \alpha_{n-1,m}x_{n-1}^m, \end{cases}$$

が対応し, 此の (複素) 曲線は全く $F(x)=0$ に含まれます. 但し, (8) に於て係数を (α^0,β^0) とした変換に依って (z^0) に対応する点を (x^0) としますと, (x^0) の近傍に於てです.

か様に, $\mathfrak{G}$ 上の任意の (α,β,ζ) を (10) に入れて得る曲線を Γ とし, 其の複素平面 (x_i,x_n) $(i=1,2,\ldots,n-1)$ 上への射影を $\Gamma^{(i)}$ とします. 其の任意の一つ $\Gamma^{(p)}$ を, x_p^0 の近傍に於て, よく見ませう. 此の曲線は次の方程式で表されます：

$$F_p(x_p,x_n) = x_p + f_p(x_p) + \beta_p x_n - \zeta_p = 0$$

変換 (1) に於て,

$$\alpha_{pj} = \alpha_{pj}, \quad \alpha_{ij} = 0 \qquad (i \neq p,\ i=1,2,\ldots,n;\ j=2,3,\ldots,m)$$

と置きますと, 次の形の変換が得られます：

$$y_p = x_p + f_p(x_p), \quad y_l = x_l \qquad (l \neq p,\ l=1,2,\ldots,n)$$

それ故, (x^0) の近傍に於ては, 此の対応は 1 対 1 でなければなりませんから,

$$1+\frac{df_p}{dx_p}\neq 0$$

です. 故に,

$$\frac{\partial F_p}{\partial x_p}\neq 0 \tag{11}$$

一般に, (10) に依って与へられる曲線を C とし, 其の (複素) 平面 (x_i, x_n) $(i=1,2,\ldots,n-1)$ への射影を $C^{(i)}$ としませう. 上述の (11) は (α,β,ζ) が $(\alpha^0,\beta^0,\zeta^0)$ の近傍にある限り, 曲線 $C^{(i)}$ の (x_i^0) の近傍の部分に対して成立すること明らかです. 『[7] C 上の $(m+1)$ 個の点 $(x^{(i)})$ と, $(\alpha,\beta,\zeta,x'_n,x''_n,\ldots,x_n^{(m+1)})$ との対応関係について考察しませう.[8]

$(\alpha^0,\beta^0,\zeta^0)$ の近傍に (α,β,ζ) を定めますと, 弧 C が定まり, 性質 (11) を持ちます. それ故, 更に, x_n^0 の近傍に $x_n^{(i)}(i=1,2,\ldots,m+1)$ を,

$$x_n^{(p)}\neq\ x_n^{(q)}\qquad (p\neq q;\ p,q=1,2,\ldots,m+1) \tag{12}$$

をみたす様に定めますと, C 上に $m+1$ 個の相異る点が, 一意的に定まります.

此の対応は次の式によって与へられます：

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(i)}+\beta_1 x_n^{(i)}+f_1(x_1^{(i)})=\zeta_1\\ \qquad\cdots\cdots\\ x_{n-1}^{(i)}+\beta_{n-1}x_n^{(i)}+f_{n-1}(x_{n-1}^{(i)})=\zeta_{n-1}.\end{array}\right.\qquad (i=1,2,\ldots,m+1) \tag{13}$$

特に, p を $1,2,\ldots,n-1$ の任意の一つとして, $x_p^{(i)}$ について見ますに,

$$x_p^{(i)}+\beta_p x_n^{(i)}+\alpha_{p2}(x_p^{(i)})^2+\cdots+\alpha_{pm}(x_p^{(i)})^m=\zeta_p\quad (i=1,2,\ldots,m+1)$$

です. $\beta_p\neq 0$ ですから,

$$-\frac{\zeta_p}{\beta_p}+\frac{1}{\beta_p}x_p^{(i)}+\frac{\alpha_{p2}}{\beta_p}(x_p^{(i)})^2+\cdots+\frac{\alpha_{pm}}{\beta_p}(x_p^{(i)})^m=-x_n^{(i)}$$

となります. 今,

$$\Delta_{p,2}=\begin{vmatrix} 1 & x'_p & x'^2_p & \cdots & x'^m_p\\ 1 & x''_p & x''^2_p & \cdots & x''^m_p\\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_p^{(m+1)} & (x_p^{(m+1)})^2 & \cdots & (x_p^{(m+1)})^m \end{vmatrix}$$

[7] 以下を書き直す.

[8] (注意)　此の対応の論義は, 結果は正しいが書き方はごたごたして居る. 後に書きかへること (たとへば (14) は性質である. (15) は違う. Δ の説明の位置もしかたもまずい)

としますと， (12) に依って，

$$\Delta_{p,2} \neq 0$$

です. それで，

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & x'_n & x'^2_p & \cdots & x'^m_p \\ 1 & x''_n & x''^2_p & \cdots & x''^m_p \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & x^{(m+1)}_n & (x^{(m+1)}_p)^2 & \cdots & (x^{(m+1)}_p)^m \end{vmatrix}$$

としますと，

$$\frac{1}{\beta_p} = \frac{-\Delta_p}{\Delta_{p,2}}$$

であって, 従って,

$$\Delta_p \neq 0 \tag{14}$$

です. 故に (13) に依って, (α, β, ζ) は, 之等 $(m+1)$ 個の点に依って, 次の形に与へられます：

$$\zeta_p = \frac{\Delta_{p,1}}{\Delta_p}, \quad \beta_p = \frac{-\Delta_{p,2}}{\Delta_p}, \quad \alpha_{pi} = \frac{\Delta_{p,i+1}}{\Delta_p} \tag{15}$$

$$(p=1, 2, \ldots, n-1;\ i=2, 3, \ldots, m),$$

此処に $\Delta_{p,j}$ $(j=1, 2, \ldots, m+1)$ は, $\Delta_{p,2}$ の第 j 列を $x'_n, x''_n, \ldots, x^{(m+1)}_n$ によって置き換へた行列式です.

特に, (α, β, ζ) として $(\alpha^0, \beta^0, \zeta^0)$ をとり, $x^{(i)}_n$ $(i=1, 2, \ldots, m+1)$ として x^0_n に充分近い, (12) をみたす様な, $\xi^{(i)}_n$ をとり, 之に対応する相異なる $(m+1)$ 個の点を $(\xi^{(i)})$ としますと, 之等の $(m+1)$ 個の点に依って $(\alpha^0, \beta^0, \zeta^0)$ は (15) の形に与へられます.

$(x^{(i)})$ $(i=1, 2, \ldots, m+1)$ を, $(\xi^{(i)})$ に充分近い, $(m+1)$ 個の点の一対としますと, (14) の $\Delta_p \neq 0$ は矢張りみたされますから, (15) に依って (α, β, ζ) が定まり, 之等の間には関係 (13) が成立します.

か様に $(\alpha^0, \beta^0, \zeta^0, \xi'_n, \xi''_n, \ldots, \xi^{(m+1)}_n)$ に充分近い $(\alpha, \beta, \zeta, x'_n, x''_n, \ldots, x^{(m+1)}_n)$ と, $(\xi^{(i)})$ $(i=1, 2, \ldots, m+1)$ に充分近い $(x^{(i)})$ との間には, 一対一対応が成立します. 此の対応は明らかに可逆的に連続であって, 且つ解析的です. 』[9]

特に, (α, β, ζ) として $\mathfrak{S}$ 上のものを撰びますと, 対応する $(m+1)$ 個の点 $(x^{(i)})$ はすべて $F(x)=0$ 上にあります. それ故,

$$F(x') = F(x'') = \cdots = F(x^{(m+1)}) = 0 \tag{16}$$

[9] 以上を書き直す.

をみたします.

空間 $(x_1', x_2', \ldots, x_n^{(m+1)})$ に於て考へますと, (16) は一つの固有集合体であって, 其の複素次元は明らかに $(m+1)(n-1)$ です. 空間 $(\alpha, \beta, \zeta; x_n', x_n'', \ldots, x_n^{(m+1)})$ の之に対応する点集合を E としますと, E は明らかに同じ複素次元の固有集合体です. 上に見ました様に, 固有集合体 $(\alpha,\beta,\zeta)\in\mathfrak{G}$ は, 此の E に含まれるのですから, (空間 (α,β,ζ) に於ける) $\mathfrak{G}$ の複素次元を λ としますと,

$$\lambda + (m+1) \leq (m+1)(n-1),$$

即ち,

$$\lambda \leq (m+1)(n-2)$$

でなければなりません. か様にして次の結果が得られました：

<u>$\beta_i^0 \neq 0$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ である様な, $(\alpha^0, \beta^0, \zeta^0)$ の近傍に於ては, $\mathfrak{G}$ の複素次元 λ は, $\lambda \leq (m+1)(n-2)$ である.</u>

<u>4</u> — 次に, <u>$(\alpha^0, \beta^0, \zeta^0)$ に於て,</u>

$$\beta_1^0 = 0,\ \beta_2^0 \neq 0, \cdots, \beta_{n-1}^0 \neq 0$$

である場合をしらべませう. 此の $(\alpha^0, \beta^0, \zeta^0)$ に対して空間 (z) に直線

$$z_i = \zeta_i^0 \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

が対応し, (z^0) の近傍に於て, $\Psi(z) = 0$ に含まれます. 従って, 空間 (x) に於ては, 曲線

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1+f_1^0(x) = \zeta_1^0, & f_1^0(x_1) = \alpha_{12}^0 x_1^2+\cdots+\alpha_{1m}^0 x_1^m, \\ x_2+\beta_2^0 x_n+f_2^0(x_2) = \zeta_2^0, & f_2^0(x_2) = \alpha_{22}^0 x_2^2+\cdots+\alpha_{2m}^0 x_2^m, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_{n-1}+\beta_{n-1}^0 x_n+f_{n-1}^0(x_{n-1}) = \zeta_{n-1}^0, & f_{n-1}^0(x_{n-1}) = \alpha_{n-1,2}^0 x_{n-1}^2+ \\ & \qquad\qquad\cdots+\alpha_{n-1,m}^0 x_{n-1}^m \end{array}\right.$$

が対応し, (x^0) の近傍に於て $F(x)=0$ に含まれます. ここに (x^0) とは, (8) に於ける (α,β) を (α^0,β^0) とした変換による (z^0) の像です.

上の曲線上の, (x^0) の近傍の任意の一点を (x') としませう. 然うしますと,

$$x_1' + f_1(x_1') = \zeta_1^0$$

に依って, x_1' が決定せられます. 其の上, x_1' は x_1^0 の充分近くにあると考へて居ますから,

$$x_1' = x_1^0$$

一次固有集合体,

$$\beta_1 = 0, \quad \zeta_1 = \zeta_1^0, \quad \alpha_{1i} = \alpha_{1i}^0 \qquad (i=2,3,\dots,m)$$

による $\mathfrak{G}$ の切断を $\mathfrak{G}'$ としませう. $(\alpha_{22}^0, \alpha_{23}^0, \dots, \alpha_{n-1,m}^0; \beta_2^0, \beta_3^0, \dots, \beta_{n-1}^0; \zeta_2^0, \zeta_3^0, \dots, \zeta_{n-1}^0)$ は此の $\mathfrak{G}'$ 上の, $\beta_2^0 \neq 0$, $\beta_3^0 \neq 0, \cdots$, $\beta_{n-1}^0 \neq 0$ である様な点です. 此の点に於ける $\mathfrak{G}'$ の複素次元, λ' をしらべようと云ふのです.

$\mathfrak{G}'$ 上の任意の点 $(\alpha_{22}', \dots; \beta_2', \dots; \zeta_2', \dots)$ に対し, 空間 (x) に曲線

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 \\ x_2 + \beta_2' x_n + f_2(x_2) = \zeta_2', & f_2(x) = \alpha_{22}' x_2^2 + \cdots, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} + \beta_{n-1}' x_n + f_{n-1}(x_{n-1}) = \zeta_{n-1}', & f_{n-1}(x_{n-1}) = \cdots\cdots, \end{cases}$$

が対応し, (x^0) の近傍に於て, 此の上の任意の点 (x') は

$$x_1' = x_1^0, \quad F(x') = 0$$

をみたします. 今,

$$F(x_1^0, x_2, \dots, x_n) \not\equiv 0 \tag{17}$$

と假定しませう. 然うしますと, 前節で見た一般の場合と比較して, 唯 n が $(n-1)$ に変って居るだけですから,

$$\lambda' \leq (m+1)(n-3) \tag{18}$$

であることが, 容易に分ります.

条件 (17) に就ては, 若し $F(x)$ が, $F(x)=0$ 上の任意の点 (x') に対して, <u>Weierstrass の条件,</u>

$$F(x_1', x_2', \dots, x_{n-1}', x_n) \not\equiv 0$$

をみたすならば, 此の条件は勿論みたされます.

$F(x)$ が Weierstrass の条件を (上述の意味に於て) 全域的にみたすと假定して, 点 $(\alpha^0, \beta^0, \zeta^0)$ に於ける $\mathfrak{G}$ の複素次元, λ を見ませう. 此のときは, λ' は (18) をみたします. 所で, $\mathfrak{G}'$ は, $\alpha_{1i} = \alpha_{1i}^0$, $\beta_1 = \beta_1^0$, $\zeta_1 = \zeta_1^0$ $(i=2,3,\dots,m)$ に依る $\mathfrak{G}$ の切断ですから, 第 1 節の 1° に依って,

$$\lambda' \geq \lambda - (m+1)$$

です. 故に,

$$\lambda \leq (m+1)(n-2)$$

が, 矢張り成立します.

上に, $\beta_1=0$ に就て見たことは, $\beta_2=0,\ldots,\beta_{n-1}=0$ の何れに対しても, 其の儘あてはまります. か様にして, 次のことが分りました：

$\ll$ 若し $F(x)$ が Weierstrass の条件を全域的にみたすならば, $\mathfrak{G}$ の $(\alpha^0,\beta^0,\zeta^0)$ に於ける複素次元 λ は, (β^0) が, $\beta_i=0$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ の, 少くとも二つの上にある場合を除けば, $\lambda\leq(m+1)(n-2)$ をみたす.$\gg$

全く同様の推理を繰り返すことに依って, 次の結果に到達すること明らかです：

$\ll$ 若し $F(x)$ が Weierstrass の条件を全域的にみたすならば, $\mathfrak{G}$ の $(\alpha^0,\beta^0,\zeta^0)$ に於ける複素次元 λ は, $\beta_1^0=\beta_2^0=\cdots=\beta_{n-1}^0=0$ の場合を除けば, $\lambda\leq(m+1)(n-2)$ である.$\gg$

それで, $\beta_1^0=\beta_2^0=\cdots=\beta_{n-1}^0=0$ の場合を見ませう. $(\alpha^0,\beta^0,\zeta^0)$ は $\mathfrak{G}$ 上の点ですから, 空間 (x) に於ける曲線

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1+f_1^0(x_1)=\zeta_1^0, & f_1^0=\alpha_{12}^0x_1^2+\cdots+\alpha_{1m}^0x_1^m, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_{n-1}+f_{n-1}^0(x_{n-1})=\zeta_{n-1}^0, & f_{n-1}^0=\alpha_{n-1,2}^0x_{n-1}^2+\cdots+\alpha_{n-1,m}^0x_{n-1}^m, \end{array}\right.$$

は, 点 (x^0) の近傍に於ては, $F(x)=0$ に含まれます. 所で, 此の曲線は, 実際は $x_i=$ 常数 $(i=1,2,\ldots,n-1)$ の形の直線です. それ故, $F(x)$ が Weierstrass の条件を全域的にみたす場合には, 此の場合は決して起りません. か様にして, 次のことが分りました：

$\ll$ 若し $F(x)$ が Weierstrass の条件を全域的にみたすならば, $(\alpha^0,\beta^0,\zeta^0)$ に於ける $\mathfrak{G}$ の複素次元 λ は, $\lambda\leq(m+1)(n-2)$ である.$\gg$

$\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{F}$ の, $\alpha_{ni}=\alpha_{ni}^0$ $(i=2,3,\ldots,m)$ に依る切断ですから, 第 1 節の 1° に依って, $\mathfrak{F}$ の $(\alpha^0,\beta^0,\zeta^0)$ に於ける複素次元は $\lambda+(m-1)$ を超えません. 但し, 此処に云ふ (α) とは α_{ij} $(i=1,2,\ldots,n;\ j=2,3,\ldots,m)$ のことであって, 今後すべて其の通りです. それ故, 上に見た所と, 前節のそれとから, 次の結果が得られます：

$\ll$ $\mathfrak{F}$ の $(\alpha^0,\beta^0,\zeta^0)$ に於ける複素次元は, (β^0) が $\beta_i=0$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ の何れかの上に無ければ, $(m+1)(n-2)+(m-1)$ を超えない. 若し $F(x)$ が Weierstrass の条件を全域的にみたすならば, 常に其の通りである.$\gg$

(α^0,β^0,z^0) は $\mathfrak{E}$ 上の任意の点です. $\mathfrak{E}$ は z_n に無関係であって, $\mathfrak{F}$ は其の近傍に於ける, $\mathfrak{E}$ の空間 (α,β,ζ) 上への射影です. 故に, 上に得た結果を $\mathfrak{E}$ について云へば, 次の通りです：

$\mathfrak{E}$ の, 領域 (6) の任意の点に於ける複素次元は, 其の点が $\beta_i = 0$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ の何れかにぞくする場合を除けば, $(m+1)(n-2)+m$ を超えない. 若し $F(x)$ が Weierstrass の条件を, $\mathfrak{D}$ の任意の点に於てみたすならば, 常に其の通りである.

5. 1° — (α') を円筒 (2), $|\alpha_{ij}| < \rho_i$ $(i=1,2,\ldots,n; j=2,3,\ldots,m)$ の任意の点とし, $\mathfrak{E}$ の $\alpha_{ij}=\alpha'_{ij}$ $(i=1,\ldots,n; j=2,\ldots,m)$ による切断を $\mathfrak{H}$ としませう.

$$\beta_i \neq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

に於ける $\mathfrak{E}$ の複素次元を λ^0 とし, $\mathfrak{H}$ のそれを μ^0 とします. α_{ij} の数は $(m-1)n$ です. 上述の λ^0 の上限 $(m+1)(n-2)+m$ とこの数との差を計算しますと,

$$(m+1)(n-2)+m-(m-1)n = 2(n-1)-m$$

となります. 所で, $\mathfrak{E}$ は z_n に無関係ですから, $\mathfrak{H}$ も其の通りです. 従って, $\mathfrak{H}$ が若し, 上述の $\beta_i=0$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ の部分に存在すれば, 必然 $\mu^0 \geq 1$ です. 上の差は m を大きくする程小さくなります. それが丁度 0 になる様な m を m_0 としますと,

$$m_0 = 2(n-1) \tag{19}$$

です. それ故, 第 1 節の 2° に依って, 次の結果が得られます：

≪ 変換 (1) に於て, m を $m \geq m_0$ となる様にとっておけば, (α') を円筒 (2) 内に, 任意に撰んだとき, 一般に $\mathfrak{H}$ は, $(n-1)$ 個の固有面 $\beta_i=0$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ 上を除けば, 存在しない. 尚, 例外的な (α') の集合は, 円筒 (2) に於て性質 $(\mathfrak{D}_0)$ を持つ.≫

同様にして, 次のことも分ります：

≪ $F(x)$ が $\mathfrak{D}$ の各点に於て Weierstrass の条件をみたす場合には上述の但し書き, ≪ $(n-1)$ 個の固有面 $\beta_i=0$ 上を除けば ≫ はいらない. ≫

2° — 先づ, $F(x)$ が $\mathfrak{D}$ に於ける, 任意の正則函数である場合について考察しませう. $m=m_0$ ととり, (α') を円筒 (2) 内に, 例外的とならない様に撰んで, 之に応じる変換 (1) に依って, $F(x)$ を $\Phi(y)$ に変へませう. $\Phi(y)$ は $\mathfrak{D}'$ に於て正則です.

変換 (3) に於て, (β) を, $\beta_i \neq 0$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ である様に, 任意に撰らび, $\Phi(y)$ を $\Psi(z)$ に変へます. $\Psi(z)$ は $\mathfrak{D}''$ に於て正則です. (z') を $\mathfrak{D}''$ の任意の点としたとき,

$$\Psi(z'_1, z'_2, \ldots, z'_{n-1}, z_n) \not\equiv 0$$

である, と云ふのが上述の結果です. 之は畢竟 $\Phi(y)$ の性質です.

変換 (3) を一般的にして, p を $1,2,\ldots,n$ の任意の一つとするとき, 次の変換を考へませう：

$$
(20)\qquad \begin{cases} z_1 = y_1 + \gamma_1 y_p, \\ \quad \cdots\cdots \\ z_n = y_n + \gamma_n y_p, \\ \gamma_p = 0 \end{cases}
$$

此の (20) の形の任意の一つの変換によって, 同じ一つの函数 $\Phi(y)$ を $\Psi(z)$ に変へ, $\mathfrak{D}'$ を $\mathfrak{D}''$ へ変へたとき, $\gamma_i \neq 0$ $(i \neq p;\ i=1,2,\ldots,n)$ である限り, $\Psi(z)$ が $\mathfrak{D}''$ の任意の点に於て条件

$$\Psi(z'_1,\ldots,z'_{p-1},z_p,z'_{p+1},\ldots,z'_n) \not\equiv 0$$

をみたす様に, ($\mathfrak{D}'$ に於ける正則函数) $\Phi(y)$ を作ることについて考へませう.

p を $1,2,\ldots,n$ の任意の一つとしますと, $p=n$ のときと全く同様にして, (α') を円筒 (2) 内に適当に撰んで, それに対応する変換 (1) によって, 与へられた $F(x)$ を $\Phi(y)$ に変へ, 此の $\Phi(y)$ が所求の性質を, 此の p に応じる変換 (20) に対して, 持つ様に出来ることが分ります. 所で, 性質 $(\mathfrak{D}_0)$ を持つ有限個の集合の和は, 同じ性質を持ちますから, 之等の要求を, $p=1,2,\ldots,n$ に対して同時にみたす様な, $\Phi(y)$ を作りうることも明らかです. 詳しく云へば, 次の定理が成立します：

$\ll$ 変換 (1) に於て, $m=m_0$ ととり, (α') を円筒 (2) 内に適当に撰べば, 対応する $\Phi(y)$ は次の性質を持つ： p を $1,2,\ldots,n$ の任意の一つとするとき, 其の p に応じる変換 (20) に於て, γ_i $(i\neq p;\ i=1,2,\ldots,n)$ を, $\gamma_i \neq 0$ である様に, 任意に撰ぶ. 此の変換が $\mathfrak{D}'$, $\Phi(y)$ を $\mathfrak{D}''$, $\Psi(z)$ に変へるとすれば, $\Psi(z)$ は $\mathfrak{D}''$ の各点 (z') に於て条件 $\Psi(z'_1,\ldots,z'_{p-1},z_p,z'_{p+1},\ldots,z'_n) \not\equiv 0$ をみたす.$\gg$

全く同様にして, 次の定理も成立します：

$\ll F(x)$ が $\mathfrak{D}$ の各点 (x') に於て, $1,2,\ldots,n$ の任意の一つ p に対して, 条件 $F(x'_1,\ldots,x'_{p-1},x_p,x'_{p+1},\ldots,x'_n) \not\equiv 0$ をみたす場合には, 上述の条件 $\ll \gamma_i \neq 0 \gg$ はいらない.$\gg$

3° — 変換 (20) の代りに, 次の一般的な可逆一次変換を考へませう：

$$
(21)\qquad \begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ z_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \\ \qquad \text{行列式 } |a_{ij}| \neq 0 \qquad (i,j=1,2,\ldots,n). \end{cases}
$$

此の変換によって, $\mathfrak{D}'$, $\Phi(y)$ を $\mathfrak{D}''$, $\Psi(z)$ に変へます. 此のとき, $\mathfrak{D}''$ の点 (z') に於て, $\Psi(z_1', z_2', \dots, z_{n-1}', z_n) \equiv 0$ となったとしませう. 之は直線 $z_i = z_i'$ $(i=1,2,\dots,n-1)$ が点 (z') の近傍で $\Psi=0$ に含まれると云ふのと同じことです. 従って, 空間 (y) に於て云へば, (z') に応じる点を (y') とするとき, 直線

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = z_1' \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = z_2' \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}y_1 + a_{n-1,2}y_2 + \cdots + a_{n-1,n}y_n = z_{n-1}' \end{cases}$$

が, (y') の近傍で $\Phi(y)=0$ に含まれる, と云ふのと同じことです.

変換 (20) に於て, 行列式

$$|a_{k,l}| \neq 0 \qquad (k, l = 1, 2, \dots, n-1)$$

としませう. 此のとき, 此の変換と変換 (3) とを比較します. 直線

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = 0, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}y_1 + a_{n-1,2}y_2 + \cdots + a_{n-1,n}y_n = 0 \end{cases}$$

と, 直線

$$\begin{cases} y_1 + \beta_1 y_n = 0, \\ y_2 + \beta_2 y_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots \\ y_{n-1} + \beta_{n-1} y_n = 0 \end{cases}$$

とが, 一致する為の条件は何でせうか. 行列式 $|a_{kl}| \neq 0$ $(k, l = 1, 2, \dots, n-1)$ ですから, 第二の聯立方程式と, 之の変形した次のものとは同等です :

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n-1}y_{n-1} + (a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1,n-1}\beta_{n-1})y_n = 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n-1}y_{n-1} + (a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2,n-1}\beta_{n-1})y_n = 0, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}y_1 + a_{n-1,2}y_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}y_{n-1} + (a_{n-1,1}\beta_1 + \cdots + a_{n-1,n-1}\beta_{n-1})y_n \\ \hfill = 0 \end{cases}$$

之と, 第一の聯立方程式とを比較しますと, 所求の, 必要且つ充分な条件は, 次のものであることが分ります :

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1,n-1}\beta_{n-1} = a_{1n}, \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2,n-1}\beta_{n-1} = a_{2n}, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n-1,1}\beta_1 + a_{n-1,2}\beta_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}\beta_{n-1} = a_{n-1,n}. \end{cases}$$

今,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2,n-1} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \cdots, & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

とし, Δ の第 i 列 $(i=1,2,\dots,n-1)$ を, $(a_{1n},a_{2n},\dots,a_{n-1,n})$ で置き換へて得る行列式を Δ_i としますと, 假定に依って

$$\Delta \neq 0 \tag{22}$$

ですから, 上述の条件と次のものとは同等です :

$$\beta_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i=1,2,\dots,n-1). \tag{23}$$

上に見ました所から, $\ll \Phi(y)$ の性質を判定する目的に関しては, 変換 (20) と変換 (21) とは同等である $\gg$ ことが, 容易に分ります.

4° — 与へられた $F(x)$ を, 2° の終りでのべた条件をみたす様に, 変形することについて考へませう. 先ず, 2° で申しました様に, 円筒 (2) 内に (α') を適当に撰び, 之に対応する変換 (1) によって, $F(x)$ を $\Phi(y)$ に変へ, $\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{D}'$ に変へます. $\Phi(y)$ は上述の性質 (変換 (20) に関するもの) を持ちます.

次に, 一般的変換 (21) に於て, 係数 (a) を, 行列式 $|a_{ij}|$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ の $(n-1)$ 級 (rang $n-1$) の小行列式が, 何れも 0 でない様に撰びます. 更に, R を 1 より大きい任意の正数とし, (a) を次の円筒内に於て撰びませう :

$$|a_{ij}| < R \qquad (i,j=1,2,\dots,n) \tag{24}$$

此の変換に依って, $\Phi(y)$ を $\Psi(z)$ に変へ, $\mathfrak{D}'$ を $\mathfrak{D}''$ に変へます.

此の変換に対しては $\Delta\neq 0$ ですから, (23) によって β_i $(i=1,2,\dots,n-1)$ を定めることが出来ます. 之等の β 中に 0 はありません. 此の (β) によって変換 (3) を作ります. 然うしますと, 上に見ました様に, $y_i+\beta_i y_n=$常数 $(i=1,2,\dots,n-1)$ の形の直線が, $\Phi(y)$ に含まれることは起こりません. 故に, $a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\cdots+a_{in}y_n=$常数 $(i=1,2,\dots,n-1)$ の形の直線に就ても同様です. 云ひ換へますと, $\Psi(z)$ は $\mathfrak{D}''$ の各点 (z') に於て, Weierstrass の条件 $\Psi(z'_1,z'_2,\dots,z'_{n-1},z_n)\not\equiv 0$ をみたします.

之は, 変換 (20) に於て, $p=n$ の場合をしらべたのですが, 他の $p=1,2,\dots,n-1$ に対しても全く同様です. か様に, 此の $\Psi(z)$ は所求の性質を持ちます.

尚, (a) を条件 (24) をみたす様に定めましたから, 領域 $\mathfrak{D}''$ は, $\mathfrak{D}$ と R とによって決定せられるやうな有界性を持ちます.

5° — か様にして得た $\Psi(z)$ から出発して, 上に $F(x)$ から $\Phi(y)$ を作った操作を繰り返しませう. (1) と同じ形の次の変換を考へます：

$$(25)\quad \begin{cases} u_1 = z_1 + \varphi_1(z_1), \quad \varphi_1(z_1) = \delta_{12} z_1^2 + \delta_{13} z_1^3 + \cdots + \delta_{1m} z_1^m, \\ \qquad \cdots\cdots \\ u_n = z_n + \varphi_n(z_n), \quad \varphi_n(z_n) = \delta_{n2} z_n^2 + \delta_{n3} z_n^3 + \cdots \delta_{nm} z_n^m. \end{cases}$$

此の変換に於て, m を $m = m_0$ と定めます. $\mathfrak{D}''$ は, $\mathfrak{D}$ と R とが決って居ますから, (a) の如何に拘らず, 有界です. 故に, 正数 ρ'_j を充分小さく撰び, (δ) を

$$(26)\qquad |\delta_{ij}| < \rho'_j \qquad (i=1,2,\ldots,n;\ j=2,3,\ldots,m)$$

をみたす様にとりますと, 変換 (25) は $\mathfrak{D}''$ の近傍を, 空間 (u) の或る単葉領域に移します. $\mathfrak{D}''$ の像を $\mathfrak{D}'''$ とし,

$$\Psi(z) = \chi(u)$$

としませう. 上に見ました様に, (δ') を円筒 (26) 内に適当に撰んで置きますと, 対応する $\chi(u)$ は次の性質を持ちます：

$\ll \chi(u)=0$ は如何なる (複素) 直線をも含まない.$\gg$

$F(x)$ から $\chi(u)$ を作る操作を見直すと之は擬等角写像による変形であって, 次の二つの性質を持って居ることが, 容易に分ります：
(a) 此の変形は如何程でも小さく限定することが出来ること.
(b) $\mathfrak{D}$ に於て正則な函数 $F(x)$ を与へる代りに, $\mathfrak{D}_i$ $(i=1,2,\ldots)$ に於て正則な函数 $F_i(x)$ を与へても, $\mathfrak{D}_i$ の全体が有界である限り, 之等に対して同じ一つの変形が存在し, しかも矢張り性質 (a) を持つこと.
— か様にして次 定理が得られました：

定理 I — n 複素変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ の空間に単葉有界領域 $\mathfrak{D}$ を描き, $\mathfrak{D}$ に含まれる可附番個の単葉領域 Δ_i $(i=1,2,\ldots)$ と Δ_i に於ける正則函数 $F_i(x)$ とを与へる. 此のとき, $\mathfrak{D}$ の近傍を空間 (y) の一つの単葉有界領域に擬等角写像する様な写像 $y_j = f_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ を求め, $F_i(x)=\Phi_i(y)$ とするとき, 何れの, $\Phi_i(y)=0$ も決して複素直線を含まない様にすることが出来る. 尚此の際, ε を与へられた正数とするとき, $\mathfrak{D}$ に於て $|f_j(x)-x_j| < \varepsilon$ $(j=1,2,\ldots,n)$ となる様に, $f_j(x)$ を撰ぶことが可能である.[10]

[10]覚書： 定理 I は $\ll$ 有限個の助変数を含む擬等角写像 ... $\gg$ とすること.

§ III　Weierstrass の第二定理の検討. 固有集合体の表現.

1 — §II で得た結果を直接応用して解決出来る, 二つの問題に就て述べます. 先づ, Weierstrass の第二定理 を, 広域的に調べ直しませう. 然うしますと, 次の定理が得られます：

定理 II — n 複素変数 $(n \geq 2)$ の空間 (x) の単葉有界領域 $\mathfrak{D}$ に於ける, 被覆可能な固有集合体を Σ とする. 此のとき, G を $G \Supset \mathfrak{D}$ である様な, 任意の単葉有界領域とすれば, G を空間 (y) の一つの単葉有界領域に擬等角写像する様な, 写像

$$y_i = \theta_i(x) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

を, 次の性質を持つ様に撰ぶことが出来る： Σ の写像を Σ' とするとき, Σ' の任意の要素 (e) は, 其の複素次元を λ $(\lambda > 0)$ とすれば, $(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda)$ を助変数として表現することが出来ること. 尚, ε を任意の正数とするとき, か様な写像を, G に於て

$$|\theta_i(x) - x_i| < \varepsilon \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

となる様に, 求めることが出来る.

証明　此の定理が成立することを云ふには, 次の命題の真であることを云へば充分です：

≪ 上述の領域 $\mathfrak{D}$ に於ける可附番個の点を

$$(S) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$$

とする. 但し, 之等の内には相等しい点があってもよい, 各 P_i に対して, 其の近傍で定義せられて居て, 其の点を通るやうな, 被覆可能な固有集合体 σ_i を対応せしめる. 此のとき, 上述の擬等角写像

$$y_j = \theta_j(x) \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

を次のやうに撰ぶことが出来る：任意の P_i に対し, 其の写像を P_i' とし, σ_i のそれを σ_i' とするとき, σ_i' の P_i' を中心とする任意の要素 (e) は, 其の複素次元を λ $(\lambda > 0)$ とすれば, $(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda)$ を助変数としてとることが出来ること. 更に此の際, ε を任意の正数とするとき, G に於て

$$|\theta_j(x) - x_j| < \varepsilon \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

となること.$\gg$

P_i [11] を与へられた点列 (S) の任意の一点としますと, σ_i は, 被覆可能ですから, 此の点の近傍で, 有限個の正則函数 $f_{ij}(x)$ $(j=1,2,\ldots,p_i)$ の共通零点の集合として与へられます. σ_i は P_i を通りますから, $f_{ij}(P_i)=0$ です. 之等の函数中には恒等的に 0 のものはないと考へませう. 更に, p_i をか様な数の中の最小のものとしませう. か様に (S) の各 P_i に対し正の整数 p_i が対応します. q を正の整数とします. 上の命題に於ける $\ll$ 任意の P_i に対し $\gg$ と云ふ言葉を, $\ll p_i\leq q$ である様な, 任意の P_i に対し $\gg$ と云ふ言葉で置き換へて, 第二の命題を作ります. 此の第二の命題が任意の q に対して真ならば, 第一の命題も真であることを証明しませう.

点列 (S) の任意の一点を P_r とし, σ_r の P_r を中心とする任意の要素を (e_0) [12] としませう. (e_0) の複素次元を λ_0 とします. 先づ, λ_0 [13] >0 としませう. 此のときは, 可逆一次変換,

$$(T)\qquad y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n,$$

$$\text{行列式}\quad |a_{ij}|\neq 0\qquad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

を適当に撰び, P_r の変換 (T) による像を (η) とします. 空間 $(y_1,y_2,\ldots,y_{\lambda_0})$ の点 $(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{\lambda_0})$ を中心とする充分に小さな多円筒を (δ) とし, (δ) 上に張られた Riemann 面 ($2\lambda_0$ 次元) を $\mathfrak{R}$ とします. $\pi_j(y_1,y_2,\ldots,y_{\lambda_0})$ $(j=1,2,\ldots,\mu_0;\ \lambda_0+\mu_0=n)$ を $\mathfrak{R}$ 上に於て正則であって,

$$\pi_j(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{\lambda_0})=\eta_{\lambda_0+j}\qquad (j=1,2,\ldots,\mu_0)$$

となる様な函数とします. 然うしますと, (e_0) の (T) による像 (e_0') は, 聯立方程式,

$$(E)\qquad y_{\lambda_0+j}=\pi_j(y_1,y_2,\ldots,y_{\lambda_0})\qquad (j=1,2,\ldots,\mu_0)$$

によって与へられます.

$\mathfrak{R}$ が N 葉であるとして, $(y_1,y_2,\ldots,y_{\lambda_0})$ を基点とする, $\mathfrak{R}$ 上の N 個の点を $Q_1,Q_2,\ldots,Q_N$ とし,

$$\Phi_j(y)=[y_{\lambda_0+j}-\pi_j(Q_1)]\cdots[y_{\lambda_0+j}-\pi_j(Q_N)]$$

を作りますと, $\Phi_j(y)$ は (η) の近傍に於ける正則函数です. 対応 (T) によって,

$$F_j(x)=\Phi_j(y)$$

[11] [編注] 「i を r とすること」という書き込みがある.
[12] [編注] 「0 をとり去ること」という書き込みがある.
[13] [編注] 「0 をとり去ること」という書き込みがある.

を考えますと, $F_j(x)$ は P_r の近傍に於ける正則函数です. P_r の近傍に於て, 聯立方程式,

$$F_j(x)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,\mu_0)$$

によって表される固有集合体を考へ, $\mathfrak{S}_r$ としますと, (e_0) は明らかに其の一つの要素です.

与へられた σ_r を, $\mathfrak{S}_r$ を以って置き換へても, 要素 (e_0) は失はれません. $\mathfrak{S}_r$ は μ_0 個の正則函数によって, 其の共通零点の集合として与へられます. ここに $\mu_0 \le n-1$ です. 此のことは $\lambda_0>0$ として云ったのですが、$\lambda_0=0$ ならば n 個の正則函数をとって $\mathfrak{S}_r$ を作るまでです. 此処に (e_0) は, 点列 (S) の任意の点 P_r を中心とする, σ_r の任意の要素です. このことから, 容易に次のことが分ります： 若し $q\le n$ であるやうな任意の q に対して第二の命題が真ならば, 第一の命題は真である. 所求の結果です. それ故, 定理が成立することを云ふためには, 第二の命題を証明すれば充分です.

$q=1$ のときを見ませう. 点列 (S) の, p_i [14] $=1$ である様な, 任意の点を P_i としますと, σ_i は唯一の方程式 $f_{i1}(x)=0$ によって表されます. f_{i1} は P_i の近傍に於ける正則函数であって, P_i に於て 0 となり, 恒等的には 0 ではありません. か様な点は高々可附番個しかありませんから, か様な函数に付ても同様です. 故に, 定理 I に依って, 領域 G を空間 (y) の一つの単葉有界領域に擬等角写像するやうな写像

$$y_j=\theta_j(x) \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

を適当に撰び, 之に対して, か様な函数の任意の一つ $f_{i1}(x)$ の像 $\varphi_{i1}(y)$ が, P_i の像 (η) に於て, <u>Weierstrass</u> の条件 $\varphi_{i1}(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-1},y_n)\neq 0$ をみたすやうにすることが出来ます. 故に, 方程式 $F(y)=0$ は (η) の近傍で y_n に関して解けます. 此の方程式 $F(y)=0$ は σ_i の像 σ_i' を表しますから, このことは, σ_i' の (η) を中心とする任意の要素が, $(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1})$ を助変数としてとることが出来ることを示します. 尚, 此の際, G に於て, $|\theta_j(x)-x_j|<\varepsilon$ $(j=1,2,\ldots,n)$ ならしめることが出来ます. か様に, $q=1$ のときは第二の命題は真です.

それ故, 第二の命題は, $1,2,\ldots,q$ に対して真であると假定して, $q+1$ に対しても其の通りであることを証明しませう. 之さへ云へばそれでよろしい. 点列 (S) の, $p_i\le q+1$ である様な P_i の全体からなる部分列を (S') とします. (S') の任意の一点を P_r としませう. 記号を簡単にするため, $P_r=P$ と書きます. $p\le q+1$ です. P_r を通る固有面 σ_r は, 上に云ひました様に, P_r の近傍で, p 個の正則函数 $f_{ri}(x)$ $(i=1,2,\ldots,p)$ の共通零点の

[14][編注] 「i を r とすること」という書き込みがある.

集合として表されます. (之等の函数は何れも P_r で 0 となり, 恒等的には 0 ではありません.) 先づ, 次の様な写像 (T_1), $y_i = \theta_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ を撰ばうと云ふのです： (T_1) は領域 G を空間 (y) の或る單葉有界領域に擬等角写像し, ε' を与へられた正数としますと, G に於て

$$|\theta_i(x) - x_i| < \varepsilon' \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

であること. 及び, (S') の任意の一点 P_r の近傍に於て, 聯立方程式

$$f_{r1}(x) = f_{r2}(x) = \cdots = f_{r,p-1}(x) = 0$$

によって表される固有集合体を考へ, (t_r) で表し, (t_r) の P_r を中心とする任意の要素を (e) としますと, (e) の像 (e') は, 其の複素次元を λ としますと, 助変数 $(y_1, y_2, \dots, y_\lambda)$ によって表現し得られること. $p-1 \leq q$ ですから, 假定によって, か様な写像 (T_1) は存在します.

上述の要素 (e') が, P_r の像 (η) の近傍で, 上に説明しました様に, 聯立方程式,

$$(E) \qquad y_{\lambda+j} = \pi_j(y_1, y_2, \dots, y_\lambda) \qquad (j=1,2,\dots,\mu;\ \lambda+\mu=n)$$

に依って表されるとしませう.

$$f_{rp}(x) = \varphi_r(y)$$

とします. $\varphi_r(y)$ は恒等的に 0 かも知れません. 其のときは, 要素 (e') は, 上述の (E) によって, 与へられますから, $\varepsilon' < \varepsilon$ となる様に ε' を 撰んで置きさへすればよろしい.

然うでないとしませう. そのときは, 上に申しました様に, $\mathfrak{R}$ を N 葉とし, $(y_1, y_2, \dots, y_\lambda)$ を基点とする $\mathfrak{R}$ 上の点を $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ として

$$\psi_r(y_1, y_2, \dots, y_\lambda) = \prod_k \varphi_r[y_1, \dots, y_\lambda, \pi_1(Q_k), \pi_2(Q_k), \dots, \pi_\mu(Q_k)] \qquad (k=1,2,\dots,N)$$

を作ります. ψ_r は $(\eta_1, \dots, \eta_\lambda)$ の近傍に於ける正則函数であって, $\psi_r(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\lambda) = 0$ となります. 正数 R を充分大きくとり, 円筒 $|y_i| < R$ $(i=1,2,\dots,n)$ が G の像 G' を含む様にします. 次の様な写像,

$$(T_2) \qquad z_i = P_i(y_1, y_2, \dots, y_\lambda), \qquad z_j = y_j \qquad (i=1,2,\dots,\lambda;\ j=\lambda+1,\dots,n)$$

を撰びませう： (T_2) は上の円筒を空間 (z) の或る單葉有界領域に擬等角写像し, 上の円筒に於て

$$|\rho_i - y_i| < \varepsilon' \quad (i=1,2,\dots,\lambda)$$

となること．及び, (S') の任意の点 P_r に対し, 若し φ_r が恒等的に 0 でなければ,

$$\psi_r(y_1, \dots, y_\lambda) = \chi_r(z_1, \dots, z_\lambda)$$

としますと, χ_r は, (η) の写像を (ζ) としますと, $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_\lambda)$ に於て Weierstrass の条件 $\chi_r(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{\lambda-1}, z_\lambda) \not\equiv 0$ をみたすこと．か様な写像は, 定理 I に依って存在します.

写像 (T_2) に依る, 要素 (e') の像を (e'') としますと, (T_2) の形に依って, (e'') は助変数 $(z_1, z_2, \dots, z_\lambda)$ に依って表現せられます．又, $\chi_r(z_1, z_2, \dots, z_\lambda)$ は, 上に述べました様に, $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_\lambda)$ に於て z_λ に関して Weierstrass の条件をみたします．故に, 固有集合体 $\chi_r(z_1, \dots, z_r) = 0$, $(z) \in (e'')$ に就て, 点 (ζ) を中心とする各要素は Weierstrass に依って, $(z_1, z_2, \dots, z_\lambda)$ [を助変数] [15] としてとることが出来ます[16].

今一度, ψ_r が恒等的に 0 である場合に立ち帰りませう．このときは, $\psi_r = 0$ の (e') 上の部分である固有集合体に於て, (η) を中心とするものは, すべて $(y_1, y_2, \dots, y_\lambda)$ を助変数として表現出来るのですから, か様なものの (T_2) による像は, $(z_1, z_2, \dots, z_\lambda)$ を助変数として表現することが出来ます．此の二つの場合しか起り得ません[17]．それ故, $2\varepsilon' < \varepsilon$ となる様にとっておきさへすれば, $(T_1), (T_2)$ を引き続いて行ふことによって得る写像は, 所求のものであること明らかです．か様に第二の命題は, $q+1$ のときも真です.[18]　(証明終)

[15] [編補]
[16] Osgood, 第二章, § 14 参照
[17] $p=1$ のときは ...
[18] [編注：記入なし]