[高木先生への手紙 (大学宛)]

草稿

謹啓. 漸く梅一輪づつの季節となりました. 先生には益々御清祥の御こととと拝察致します.

御推薦によりまして昨年度も風樹會の援助を受けることが出来ました. 厚く御礼申し上げます. 私の其の後の (多変数解析函数に関する) 研究状況の概略を御報告申し上げます (昨年三月七日に改訂十二報告「Cousin の第二問題の拡張」を御送付致しました以後のことであります). 昨年は, 引き続き馬鈴藷甘藷等代用食の自給や供出に可成り時間を割かなければならなかったのですが, それでも, 何時まで此の研究をつづけられるか分らないと云ふ気持に緊張して居ました爲か, 意外に捗りまして, 今年の二月中旬までにノートで云って十冊ばかり書きました. 略々希望して居た諸結果が得られました. それに就て一応理路を検討して見ましたが, 大体間違って居ない様に思はれますから (確かなことははっきり書き上げて見なければ分りませんが, それには時間が掛りますし) 取り敢へず其の概要を申し上げようと存じます.[1]

1. 研究の中心は 合同及びイデアル に関する諸問題でありました. 第七報告の冒頭で申しました様に, ≪ イデアル, 合同等の諸概念を, 有理整函数の分野から一般解析函数のそれに移しますと, 函数は, 変数空間の一部分で存在しても, 最早や全体では存在しなくなりますから, 此処から当然, 色々新しい問題が出て来る筈です. 其の中先づ目につきますのは, 被覆的に定義せられたものを全局的に求める型のものです.≫

先づ, 合同に関する此の型の問題について, (御便宜かと存じますから), 第七報告で述べました所を繰り返して申し上げます. (領域は一々断りませんが, 單葉有限です.)

n 複素変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の空間に領域 $\mathfrak{D}$ を考へ, $f(x)$, $\varphi(x)$ を $\mathfrak{D}$ に於て正則な 2 つの函数とし, $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ を $\mathfrak{D}$ に於て正則な函数系とします. 之等の間に

$$f - \varphi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p,$$

$\alpha_i(x)$ $(i = 1, \ldots, p)$ は $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数, なる関係があるとき, f と φ とは, $\mathfrak{D}$ に於て, 函数系 (F) に関して 合同 であると云ひ, これを

$$f \equiv \varphi \pmod{F_1, \ldots, F_p}$$

[1] [編注] このページの 14 行目までの部分は, 原文では縦書きとなっている.

を以て表します.

領域 $\mathfrak{D}$ の一点を P とします. 点 P に於て合同 であると云へば, P の近傍で然うであると云ふ意味です. $\mathfrak{D}$ の各点で合同であると云ふことと, $\mathfrak{D}$ に於て然うであると云ふこととは同じではありません. 此の点を明確に区別したい場合には, 後者を 全局的 に然うであると云ひませう.

此のことから直ちに次の問題が出ます： 上述の $f(x), \varphi(x)$ が $\mathfrak{D}$ の各点で函数系 (F) に関して合同であるとして, 之等が $\mathfrak{D}$ に於て全局的に合同であるか否かを調べること, 或いは次のやうに云ひ換えても同じです.

問題 I — 空間 (x) の有界閉領域 $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍に於て正則な函数系 $(F_1, \dots, F_p)$ と函数 $\Phi(x)$ とが与へられ, $\overline{\mathfrak{D}}$ の各点 P に於て $\Phi(x) \equiv 0 \pmod{F}$ であったとする. 此の時 $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則な函数 $A_i(x)$ を

$$\Phi(x) = A_1(x)F_1(x) + \dots + A_p(x)F_p(x)$$

となるやうに撰ぶこと.

上の問題は表現に関するものです. 函数自身に就て次の問題があります.

問題 II — $(F_1, F_2, \dots, F_p)$ を $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則な函数系とする. 閉領域 $\overline{\mathfrak{D}}$ の各点 P に対し, 之を中心とする多円筒 (γ) と, (γ) に於て正則な函数 $\varphi(x)$ とが対応し, (γ_1), (γ_2) を共通部分 (δ) を持つやうな任意の一対の (γ) とするとき, 之等に対応する $\varphi(x)$ をそれぞれ $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ とすれば, (δ) の各点に於て

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \pmod{F_1, \dots, F_p}$$

となって居るものとする (合同条件). 此の時 $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍で正則な函数 $\Phi(x)$ を求め, $\overline{\mathfrak{D}}$ の各点 P に於て

$$\Phi(x) \equiv \varphi(x) \pmod{F}$$

ならしめること.

次に, イデアルに関するものを御説明致します. (領域は矢張りすべて単葉有限です.)

空間 (x) の領域に於ける正則函数の 1 つの集合を I とします. I が $\mathfrak{D}$ に於て, 正則イデアル を作るとは次の 2 つの条件がみたされることです：

1° $f(x)$ を I の函数とし, $\alpha(x)$ を $\mathfrak{D}$ に於ける任意の正則函数とすれば, $\alpha(x)f(x)$ は I にぞくする.

2° $f(x)$, $\varphi(x)$ を I の函数とすれば, $f(x) + \varphi(x)$ は I にぞくする.

I を $\mathfrak{D}$ に於ける一つのイデアルとし, $F_1(x), \ldots, F_p(x)$ を $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数とします. 函数系 (F) が I の (有限) 基底であると云へば, それは $F_i(x)$ $(i = 1, \ldots, p)$ がすべて I にぞくし, I の任意の函数 $f(x)$ が

$$f(x) = A_1(x)F_1(x) + \cdots + A_p(x)F_p(x)$$

の形に表されると云ふ意味です. ここに $A_i(x)$ $(i = 1, \ldots, p)$ は $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数です.

$(f_1, f_2, \ldots, f_p)$, $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q)$ を $\mathfrak{D}$ に於ける二つの正則函数系とします. これ等が $\mathfrak{D}$ に於ける同じ一つの正則イデアルの基底であるとき, (f) と (φ) とは $\mathfrak{D}$ に於て同等 であると云ひます.

(f) と (φ) とが $\mathfrak{D}$ の一点 P の近傍で同等であるとき, これ等は点 P に於て同等 であると云ひます.

次の問題があります：

問題 III — 空間 (x) の有界閉領域 $\overline{\mathfrak{D}}$ の近傍の各点 P に, P を中心とする多円筒 (γ) と, (γ) に於ける正則函数系 $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ とが与えられて居て, 次の同等条件をみたすものとする： (γ_1), (γ_2) を共通部分 (δ) を持つ様な, 任意の一対の (γ) とすれば, 対応する函数系 $(f_1, \ldots, f_p)$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ は (δ) の各点に於て同等であること. —— 此のとき, $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数系 $(F_1, \ldots, F_\gamma)$ を求め, 各 (γ) の各点に於て, 与へられた函数系 $(f_1, \ldots, f_p)$ と同等であるやうにすること.

此の三つが主要問題でした. 研究の結果は次の通りです.

$\overline{\mathfrak{D}}$ が外的正則凸状ならば, 問題 I, II, III は常に解ける.

2. 此の結果が得られるまでの經緯を簡単に御説明致します. 種々の点から見て, 之等の問題は ($\overline{\mathfrak{D}}$ が外的正則凸状ならばと云ふ, 動かせない条件の下に於いては) 常に解けるだらうと云ふ予想がたちましたから, 肯定的解決に到達する可能性のある道筋を色々に考案して, 一々当って見ました. 此の研究は, 第一報告までは, (始め 4 , 5 年の間は), 手掛かりが全然見当らないために苦しんだのですが, 今度はそれと反対に案が多く立ちすぎるために困りました. 前に申しました十冊の研究記録の大部分は不可能の記録です. (其の大部分は, 数学的に云へば, 可能か不可能かの見分けがつかなくなって了ふことに終って居るのですが, 之も広義の不可能と看做しまして, 私はこう云ったものが集まって, 云はば数学的自然の地勢を作って居るやうに思はれるのでありまして, 研究分野の地勢を暗示し (反例等によって明示出来る部分の外は表現法が難しいでせうが), 問題を以て主要な結論とするやうな本を書くと面白いのではあるまいかと考へて居るのですが, 如何でございませうか. それだけでは, 云はば水流がなくて淋しいかも知れませんから, 主要な結果を年代順に配列して, 其の本論としての

問題に到るまでの流れの方向や速さ等を暗示したものを添へると一層面白いのではないかと思ふのですが. (Behnke–Thullen の文献目録に既に (其の積りでよめば) 其の趣が感じられるやうな気がします.))

結果に於ては, 唯一種類の証明法しか残りませんでした (一ヶ所調べ残してある所がありますから, 或は今一つ証明法があるのかも知れませんが). 其の途中の主要宿驛として次の二つが挙げられます :

a　Weierstrass の予備定理に於ける条件の全局的研究.

b　局所的諸問題の研究.

又, 上述の諸問題 (I, II, III) と同時的に解決すべきものに次の問題があります :

c　第一基礎的補助定理の拡張

これ等の中 b に就ては, 多変数解析函数の分野には (必しも全局的問題まで行かなくても) 実に色々な型の局所的問題があって, 全然手がつけられないで (と思はれます. 餘りよく文献を調べて居りませんが, 恐らくは考へられもしないで) 残されて居ることに驚きました. 此のことは, 云はば此の土地の肥沃さを思はせるものがありまして, それを大変嬉しく感じました. 然し, 此処の所は (此の度は必要に応じて調べたに過ぎませんから), もっとよく整理してから御話し申し上げたいと思ひます.

c については, 第八報告で御話ししましたものと較べますと, (この問題は上述の問題 II 及び III と関聯して居るのですが, それ等が著しく複雑になって居ると云ふことの外に) 上の b の一つが入って来ます点でやや趣が違ふのですが, それを申しますと長くなりますし, 本質的には餘り違った所はありませんから, 省くことに致します.

最后に a ですが, 之については一切が簡明であります上に, 此の前差上げました手紙でもこのことに触れました様に記憶致しますから, 簡単に御説明致します.

n 複素変数 ($n \geqq 2$) の空間 (x) の点 (a) の近傍で, 正則な函数 $F(x)$ を考へ, $F(a) = 0$, $F(x) \not\equiv 0$ とします. 此のとき, 若し $F(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n) \not\equiv 0$ ならば Weierstrass の予備定理があります. 問題は, 此の, 条件

$$F(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n) \not\equiv 0$$

であります. 之を Weierstrass の条件 と呼ぶことにします.

問題が局所的のものに止まって居ます場合には, $F(a) = 0$, $F(x) \not\equiv 0$ であるやうな函数を変形して, 上の条件をみたさしめることは, ごく簡単であって, 適当な可逆一次変換を行へば充分でありますが, 全局的の問題に, 上の予備定理を使はうとすると然うは行きません.

のみならず, 此の点を解決して置かなければ, 内分岐した多葉領域に於て, (多変数解析) 函数論を (全局的に) 考へることの意義さへ怪しくなります. (寧ろ一歩進んで固有集合体上の函数論をたてるべきかも知れません)

大体か様な理由で a を研究致しました. 結果としては, 次の定理が得られました：

n 複素変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq 2)$ の空間に単葉有界領域 $\mathfrak{D}$ を描き, $\mathfrak{D}$ に含まれる可附番個の単葉領域 Δ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ と, Δ_i に於ける正則函数 $F_i(x)$ とを与へる. 此のとき, $\mathfrak{D}$ の近傍を空間 (y) の一つの単葉有界領域に擬等角写像する様な写像 $y_j = f_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ を求め, $F_i(x) = \Phi_i(y)$ とするとき, 何れの $\Phi_i(y) = 0$ も決して複素直線を含まない様にすることが出来る. 尚此の際, ε を与へられた正の数とするとき, $\mathfrak{D}$ に於て $|f_i(x) - x_i| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ となるやうに, $f_i(x)$ を撰ぶことが可能である.

3. 此の研究は, 度々申しました通り, Behnke–Thullen の文献目録 (Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen,1934, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete) に於ける一系の問題を対象として出発したものでありまして, 第六報告までで之等の問題を単葉有限領域に於て大体解決し, 第十一報告までで其の結果を分岐点も無窮遠の点も含まないやうな領域の場合へ拡張しました.

此の立場から申しますと, それを更に拡張しようとして, 再び上述の問題 I, II (及び III) に遭遇したわけであります.

此の方面の研究はどこまで済んで居て, 大体どう云った問題が残って居るかについて簡単に御説明致します.

第八報告の第一基礎的補助定理が拡張出来ますから (上述 c), 第十一報告の結果を, 分岐点を含むやうな, 有界, 外的正則凸状閉領域 にまで拡張できます.

新しく追加された諸問題 (上述 I, II, III) に就いても同様と予想されます. それで, 残って居る問題は大体次の三つです：

α. 分岐点を含み, 無窮遠点を含まない領域へ, 第二基礎的補助定理を拡張すること.

β. その結果を無窮遠の点を含む領域へ拡張すること.

γ. (今一つ, 之は孤立した一問題にすぎませんが, 次のものが残って居ます) $\mathfrak{D}$ を空間 (x) に於ける単葉有限正則域とする. 若し $\mathfrak{D}$ が線的に単連結 (linéairement simplement connexe) ならば, $\mathfrak{D}$ に於ける任意の正則函数を ($\mathfrak{D}$ の完全内部で斉一収斂するやうな) 多項式級数に展開することが出来るか. (Behnke–Thullen 79 頁, 若し之が肯定的に解決されましたならば, Runge の定理の狭義の拡張が得られるわけであります.)

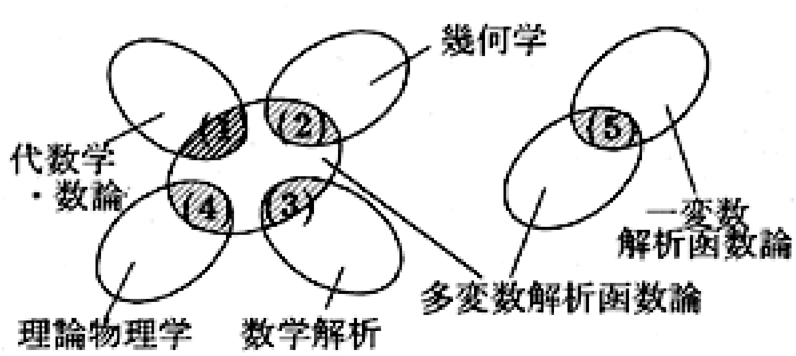
[之等の問題に就ての私の予想を, 先生に申し上げますことは少し恐しいのですが, 敢て申し上げます. (之に対処する案はあるのですが, 何しろ手段の餘地の非常に少い所の様に思はれますから), ことによると非常に簡単に解決されるかも知れませんが, ことによると無条件に解決し去ること

は不可能に近いかもしれないと思はれます(か様に一面非常に恐しい問題ですが, 他面, 若し後の場合が起っても, 残された条件は (応用の見地から云っても) 餘り目障りにはならないだらうと考へられます.)

β は色々の点から推して, 簡単だらうと予想されます.

γ については, (Behnke–Thullen に明記せられて居ると云ふ以外 餘り重きを置いて居りませんから, 予想も甚だ怪しいものですが) 上述の諸研究, 特に b に依って, 簡単に, 肯定的に解決せられるのではあるまいかと云ふ気がして居ます.]

4. 多変数解析函数の分野は, 云はば数学的自然の中で, 非常に形勝の地を止めて居るかと思ひます. つまり四通八達と云ふ気がします. 其の互に交渉を持つ筈の部分を, 假りに図に書いて見ますと, (1), (2), (3), (4) となります. 又, 之までの研究の偏り(と思ふのですが) から, (理論的にはあり得ないことですが, 現状では) 一変数解析函数論とも触れ會ふことになって, 図の (5) があります.



其の中 (1) の部分に漸く手を着け始めただけですが, 此の種の計畫の空中楼閣でないことが, 此の一例に依って実証せられた様な気がしまして其の点を一番喜んで居ります.

今一番私の興味を唆ります問題は, この (1) から (5) までの部分に, どう云ふ型の問題があり得るだらうかと云ふことであります. 出来るだけ早く此の方面の研究を, 組織的に始めたいと思って居ます. (然し実際は, 昨年度の研究を具体的に書き上げることと, 其のあと (No. 3) を片付けることと, 第七報告以後を外国文で発表することと色々云はば, 残務がございまして, 仲々思ふにまかせません.)[2]

以上此の一年間の研究と現在の状況とについて簡単に御報告申し上げました (繰り返して申しますが, 何しろまだ明確に書き上げて見て居ませんから, 決して遺漏が無いとは申し上げられません. 然し, 大分云はば地勢に習熟致しましたし, 大抵は大丈夫だらうと思はれます.)

「[3]私, 第六報告が出来ました際, 其の概要 (後に帝国学士院へ御報告致しましたと同じもの) を H. Behnke (と H. Cartan と) に送りました それ

[2] [編注] この行の下に「其の準備のこと (きいたりよんだり)」の書き込みがある.
[3] [編注] この行の左欄外に「Omit」の書き込みがある.

に対して Behnke が, 此の問題 (擬凸状域は正則域かと云ふ問題, Behnke–Thullen 54 頁) は 30 年間解けなかったものであって, 此の論文は永久に貴兄の名を冠すべき傑作であると云って大変褒めて呉れまして, 私の大学 (Bon 大学) から招へいするから, 此の戰争が一段落着いたら是非来て欲しいと云って呉れましたので, 私も其の気になって, それまでに充分準備して置いて, 少し長く滞在して, 問題を主にした本 (上述 4) を書くと面白いかも知れないと思って居たのですが, 間もなく獨ソ戰が突発し, 今日に及んで此の案は全く目茶々々になって了ひました.

然し其の時は, 自分では餘り出来たと云ふ気はしないで, 何だか, たとへば有名な嶮山の登はんに成功したに過ぎない様な感じでしたが, 今度は何だか打ち開けた広い所へ出た様な気がしまして, 一応之で一段落だと思って居ます.」

私, 佛蘭西へ行って, G. Julia の所で勉強して, 結局此の問題 (多変数解析函数の研究) を撰んで帰ってから大体 15 年になります. 漸くこれで少し打ち開けた所へ出ることが出来たやうな気が致します. 後 15 年位続けてここを開拓して, 出来うれば色々な型の問題を残して, 次の時代に譲り渡したいと考へて居ます.

所で先生に折り入って御願があるのでございますが, 風樹會の援助を今暫く続けて頂けないでございませうか. 私の唯一の収入だったのですから.

それから, 藷を作りながら勉強しますと, 時間も非常に取られますし, それに肉体の疲労の爲, 往々思索の緻密さが失はれ勝ちになりまして, 貴重な時間の浪費としか思はれないのです. それで, 何処か外から今少し援助して貰って, それが巧く行ったならば四国か九州かの僻地の漁村へでも行って, 家族のカロリー等の不足は魚ででも補ふことにして, 其の方の責任を解除して貰って, 二三ヶ年専心勉強したいと思って居たのですが, 今度の突然のインフレ対策で, 此の案も棄てなければなるまいかと存じます.[4]

それで此の際どうするのがよいのか, 全く分からなくなって了ひましたので, それに就いて先生の御示教と, 出来うれば御盡力とを仰ぎたいと存じます. 御多忙中誠に恐縮致しますが, 呉々も御願ひ申し上げます.[5]

先は右, 御報告かたがた御依頼申し上げました. 末筆ながら御自愛専一になし下さいますやう, 御祈り申し上げます.

敬具

[4][編注] ここから線を引き出して, 「之が理想だが月 200 円ではたりない, やむを得なければ …… 」の書き込みがある.

[5][編注] この行と次の行との間に「功力さん等にみせてもよいこと　大変世話になったこと　健康のこと」の書き込みがある.

昭和二十一年三月三日

岡 潔

高 木 貞 治 先 生

[編注] [6]

[6] この行の下に次の書き込みがある：

「(1° 漁村　2° つとめる　3° 今のまま, — 健康のこと, 功力さんのこと)

東京都本郷区
東京帝国大学
理学部数学教室 (乞御廻送)」