高木貞治先生[1]

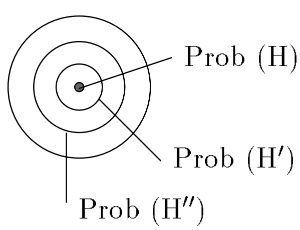
謹啓, 早速御返翰を給はり, 御鞭撻下さいまして誠に有難うございました. 益々御健勝の趣を拝察致しまして喜びに耐えません. 私も大いに張合ひを感じ, なるだけ御期待を裏切らないやうにしたいと, 及ばずながら精一杯努力致して居ります.

あの御手紙を 4 月 18 日に差し上げまして, 其の日からすぐに予定の仕事に取り掛らうとして, 先づ手紙の写しをよんでみますと, ひどく心の引かれた句がございました. ≪ 出来なささ加減 ≫[2]と云ふのがそれです. この句を追及するとどうなったかと云ふことについて御話し申し上げようと思って, 今此の御手紙を書いて居るのでございます.

生きた問題の一片を数学的自然から取り出して示さうと云ふのですと, この句の指し示す所を彷彿させることから始めるのがよいかと思ひます. それに何よりも, 私は, こう云った種類の研究が生来大好きでございます. 所で御話しいたしました二つの問題の中, Prob (E) の方からは (此の前は E としましたが以後 (E) とします. 他のものも同様です), くり返して申しますと, これは場合によれば暫く定義の中に含ませて置くことも出来ますから, 餘り緊迫した感じを受けませんし, 第一この問題と上の句とは殆んど関係がありません. それで問題となるのは Prob (H) についてであります.

今, Lemme I によって第一基礎的補助定理を表しませう. この定理は Prob (H) が (それもそれだけならば好都合に) 解けなければ無条件には成立しません. しかし条件つきでならば既に成立して居ります. これを Lemme I′ とします.

それで問題は, この Lemme I′ と組合はせると Lemme I と同じ働きをするやうな Théorème (H′) を求めることでせう. この問題を Prob (H′) とします. Prob (H) は, 本質的には Lemme I′ を Lemme I 又はそれと等價値なものに変へる問題だったと云へませう. Prob (H) をか様に解し, これを図のやうに, Prob (H′), Prob(H″), ... と次第に崩し拡げて, (之等は皆上述の意味の Prob (H′) ですが) その行方を追うて見ました.



[1][編注] この草稿の右上の部分に「(書翰用箋に書く)」の書き込みがある.
[2][編注] ここから線を引き出して, 「—— こんなことをしない —— あとも注意」の書き込みがある

そうしますと, 結局イデアルに関するある一つの問題に落着きました. イデアルと申しましても, 勿論多変数正則 (解析) 函数に関するもの, つまり正則イデアルのことですが, これまで御話し致しましたのは, 定域イデアルと呼ぶべきもの (又はそれに近いもの) のみだったのですが, Prob (H′) が最后に到達しましたのは, 不定域イデアルの分野でありました. 前に「これ等の諸概念を代数函数の分野から一般解析函数のそれに移して考へると, 函数は最早や一部分では存在しても全体では存在するとは限らないから, 其処から色々新しい問題が出て来る筈です」と申し上げましたが, その積りならば, 早晩不定域イデアルまで踏み込んで研究するのでなければ, 充分とは云へませんでせう. かたがた, ここの所を少し詳しく御説明しようと思ひます.

複素変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の描く (有限, 以下常に) 空間に (單葉, 常に) 領域 δ と δ で (一價) 正則な函数 $f(x)$ とを考へ, (f, δ) の集合を (I) とします, 但し δ は必しも連結でなくてもよろしい. このことを, f が δ で (I) にぞくすると云ふこともあります. (I) が <u>不定域イデアル</u> を作るとは次の二つの条件が充たされることです :

1° f を δ で (I) にぞくする様な函数とし, α を任意の正則函数とし, (單葉) 領域 d に於て (は確かに) そうであるとしますと,

$$\alpha f \in (I) \qquad pour \quad \delta \cap d,$$

(領域を單葉と限って居る間は, 所々に少し不自然が入るようですが, 大したことではありませんし, また最初そうすることは止むを得ません)

2° $(f, \delta) \in (I), \quad (f', \delta') \in (I)$ としますと,

$$(f + f') \in (I) \qquad pour \quad \delta \cap \delta'.$$

不定域イデアルについて, その領域に関して次の二つの条件を考へ, これを条件 (T) (Topologie の T です) と呼びます :

1° $(f, \delta) \in (I), (f, \delta') \in (I)$ ですと,

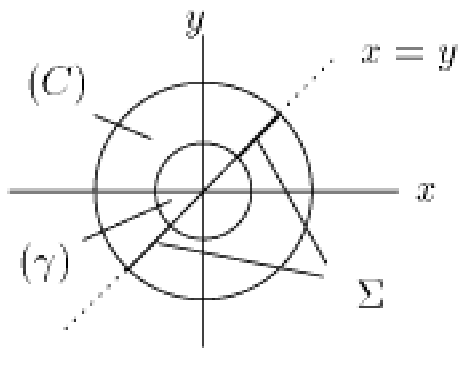
$$f \in (I) \qquad pour \quad \delta \cup \delta',$$

2° 若し $\delta_1 \subset \delta_2 \subset \cdots$ であって Limit を δ_0 としましたとき, $(f, \delta_1) \in (I), (f, \delta_2) \in (I), \cdots$ でしたならば,

$$(f, \delta_0) \in (I).$$

尚不定域イデアルの定義の 1° から次のことが云へます :

$$(f, \delta) \in (I), \quad \delta \supset \delta' \text{ ならば } \quad (f, \delta') \in (I).$$



ここで一度例を作って見ませう．二複素変数 (x,y) の空間に, 原点 $(0,0)$ を中心として二つの (四次元) 球を描き, (C), (γ), $(C)\Supset(\gamma)$ とします, 何れも開集合です．それから固有面 $x=y$ を引きます．そうして次の様な (f,δ) の集合 (I) を考へます：

1°　δ が (C) にぞくし $f/(x-y)$ が δ で正則．であるか，2°　又は $\delta\subset(\gamma)$ であるか．　か様な (I) は不定域イデアルを作ること明らかであります．又, 明らかに性質 (T) を持ちます．然しこの集合が非常に人工的なものであることは, たとへば, この (I) の函数の共通零点の集合 Σ が固有面 $x=y$ の二球面 C, γ 間及び γ 上の部分であることに, よく顯はれて居ませう.

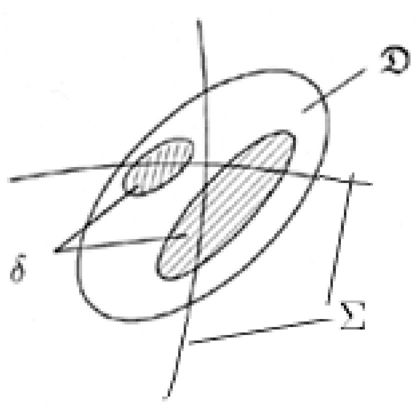
それで取り敢へず次の条件を追加することに致します（深くは考察いたしませんでした）．不定域イデアル (I) が領域 $\mathfrak{D}$ に於て性質 (N) を持つ, 或は直接に, (N) イデアルであると云へば (N は Naturel からとりました), 条件 (T) と次の二つの条件とをみたすことです：　$\mathfrak{D}$ の任意の点 P に対し,

1°　(I) は少なくとも一つの函数 f を P の近傍に於て持つこと,

2°　P を中心とする多円筒 (V) と, (V) で正則であって P で 0 とならない函数 $\omega(x)$ とがあって, P の近傍で正則な (I) の[3] 任意の函数を $f(x)$ としますと, 函数

$$\varphi(x)=\omega(x)f(x)$$

は, それが正則であるやうな (V) の部分で (I) にぞくすること, 及びその $\{(V)\}$ 中, $\mathfrak{D}\Supset\mathfrak{D}_0$ なる任意の領域 $\mathfrak{D}_0$ を考へましたとき, $\mathfrak{D}_0$ に中心をもつものの全体は, $\mathfrak{D}_0$ にのみ関係した半徑の下端 (>0) を持つこと．以上が条件であります.



(N) イデアルの一例を見ませう．空間 (x) に領域 $\mathfrak{D}$ を描き, $\mathfrak{D}$ を通って $\mathfrak{D}$ 内に端を持たない様な固有集合体 Σ (解析的に連結でなくてもよろしい) を引きます．$\delta\subset\mathfrak{D}$ とし, Σ の δ 内の部分で $f=0$ となるやうな (f,δ) の集合を (I) とします．この (I) が $\mathfrak{D}$ に於て (N) イデアルであることは困難なく確められます．か様なイデアルを <u>幾何学的不定域イデアル</u> と呼び

[3] [編注] この行の左欄外に「訂正」,
この行の下に「$\cdots\omega(x)$ とがあって, P の近傍で正則な (I) の任意 $\cdots$
↓
P の近傍で (I) にぞくするやうな」
という書き込みがある．これらは後の訂正の手紙 (5 頁) に関係する.

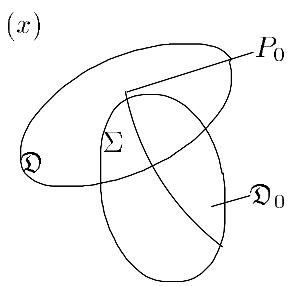
ませう. 条件 (N) の中, 第二のものの意味はこの例でよくお分かりになるかと思ひます. 実際これは, 此の種のイデアルから採ったのでありました.

然し, (N) の第一の条件に疑問がお残りになるかも知れません. 実際私にも, 唯これだけで内部関係が充分保たれて, 云はゞ, 一つの有機体のやうに果してなりうるものだらうかと云ふことは, 始めも大分氣掛りでありました. それで, 今一つ例を御話しいたしませう.

空間 (x) に領域 $\mathfrak{D}$ を描き, $\mathfrak{D}$ 内に端 (自然の端) を持つやうな固有集合体 Σ を考へます. Σ は聯立方程式

$$F_1(x) = 0, \quad F_2(x) = 0, \quad \Phi(x) = 0$$

によって与へられるものとし, F_1, F_2 は $\mathfrak{D}$ で正則であって, Φ はその正則域 $\mathfrak{D}_0$ が, 單葉であって, $\mathfrak{D}_0 \neq \mathfrak{D}$ であるやうなものとします. Σ の端はか様な Φ の自然限界から来るものとしませう. Φ がそうだからと云って Σ も必ずそうなるとは限りませんが, このさい Σ 自身本当に (自然的) 端を持つとするのであります. Σ のかかる端点の一つを P_0 としませう. 固有集合体, $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$ を S とし, Σ 及び S はいずれも (解析的に連結な) 唯一つの成分からなるとしませう.[4] この状勢の下に, $\mathfrak{D}$ 内に於て, Σ に附随する幾何学的不定域イデアルを $\mathfrak{D}$ 内で考へて (之は必ず出来ます) (I) としますと, (I) は, 此の度は, $\mathfrak{D}$ で (N) 性を持たないことは, 点 P を S 上を P_0 に近づけることによってすぐに分ります. ((T) 性は持ちます.)



扨, これ等の言葉で, Prob (H′) を述べますと, 次の通りであります :

Prob (H′) — 複素有限空間の單葉閉円筒 $\overline{(C)}$ 上で (近傍での意味, 以下同様), 不定域イデアル (I) を考へ性質 (N) を持つものとする. 此の時 $\overline{(C)}$ 上で有限個の正則函数, $F_1, F_2, \ldots, F_p$ を, これによって, $\overline{(C)}$ 上の任意の点 P の近傍で (I) にぞくする函数 f を, 常に P の近傍で

$$f = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p$$

(α は何れも P に於ける正則函数) の形に表現出来るやうに, 撰ぶこと.

此の度の研究はこれから先の部分については, 一寸簡單には申し上げにくうございますから, 結果だけを御話しいたしますが, 上述の Prob (H′) は常に (肯定的に) 解けます. そしてこのことを Théorème (H′) といたし

[4][編注] この図から線を引き出し,「つまり先に P_0 を説明し次に S, Σ を prolongement に関して説明する」の書き込みがある.

ますと (Lemme I′ + Théorème (H′)) は今までの場合 (Mémoires VII – XI) の Lemme I (Mémoire I, Théorème II) と同じ働きをします. 詳しく申しますと, これによって, 与へられた (解析函数論的) 不連續線を作ること (Mémoire I, Problème A) , 展開すること (Mémoire I, N$\underline{o}$ 4) 及び自然限界問題を取り扱ふこと (Mémoire XI, Partie II Problème principal) が皆出来ます.

実は上述の Théorème (H′) が出まして, これでよいと考へましたのは 5 月 2 日でありました. 然しこの定理は, 証明には色々以前の研究の結果を使って居ますし, その應用の点では, 如何に正確を期した積りでも, 実さい書き上げてみるまでは, 畢竟予想にすぎず, 特に自然限界問題はかなり隔たってゐますから, 一應よく調べて見ました. それでも, 尚, 若し間違ひ遺漏等がありましたならば, 直ぐに御報告致します。 之は, 勿論他のものについても同様であります.

要するに Prob (H) は解消してしまひました. その波紋はまだ多少は残ってゐますが.

この手紙も, この前のもの同様, 皆様にお見せ下さいましても, 支障ございません.

漸く新緑の季節に入ろうとしてゐます折から, 先生には何卒御自愛専一になし下さいますやう切に御祈り申し上げます. 敬具

一九四七年五月十日

和歌山縣伊都郡紀見村[5] 岡 潔[6]

先生梧下

謹啓, 今朝速達便で先生に差し上げましたお手紙中, 次の所を, 其の次のやうに訂正いたします：

誤： (不定域) (N) イデアルの定義の条件 2° に於て, ≪ P の近傍<u>で正則な</u> (I) の任意の函数を $f(x)$ としますと ≫.

正： ≪ P の近傍<u>の</u> (I) の (以下同様) ≫

つまり云ひたいのは

$$f(x) \in (I) \qquad en \quad P$$

であって, 正則性は, 云ふ迄もなく定義によって成立してゐますから, 問題ではありません.

草々敬具[7]

[5][編注] “ 和歌山縣 ⋯ ” の行と“ 先生梧下 ”の行の間に, 次の書き込みがある.
「 (東京都新宿区諏訪町 182
高木貞治先生 梧下) 」
[6][編注] 同じ高さの左欄外に「午前 10 時」の書き込みがある.
[7][編注] 左欄外に「同日午後 7 時半」の書き込みがある.