高木貞治先生

謹啓　先生, 白の用箋がなくなってしまひましたから, か様な用紙で御手紙を差し上げますことをどうかお許し下さい. 尚, この (白でなくては失礼であると云ふ) ことは, 第一信のときはまだ知らなかったのですから, これもお許し下さい. 私, 16 日に御手紙を差し上げまして, その翌日から二日間京都へ行って, 秋月君や理論物理の湯川君に会って参りました. そのとき秋月君を通して, 先生の此度の学会でなさいましたお話を承りました. 大変面白うございました. また先生のお元氣な御様子を見せて頂くやうな氣がして非常に嬉しうございました.

秋月君とは数学について色々語り合ひました内に, 代数学及び数論と函数論との比較が出て, 極限へ行く操作が当然暫く話題になりました. そのとき私は, 「収斂には評価, 領域の二属性があるから, 解析函数論では, 一変数の場合に限定するとそれがよく出ないやうだが, 一般の場合には全く違った様々な型があって, それが此のセオリーに細かいニュアンスを与へて居るようだ. 僕の体験した具体例だけでも数個はある」と云った風なことを話しました. それが耳の底に残って居て, 帰るとすぐ, 19 日のことですが, Prob (E) は, (此の方も絶えず氣に懸って居たと見えます), それを収斂 (又は発散) の問題と見れば, どう云ふ型であるかをよく調べて置かうといたしました. そうして順次に分析して行きますと, 意外にも, 此の問題は, 一見収斂の問題らしく見えますが, 実は諸種のより簡単な存在問題の集まりにすぎないと云ふことが分りました. 同時に, 問題自身も解けました. 此の第四信ではそのことについて申し上げようとしてゐるのでございます.

Behnke–Thullen の案内書 (Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 1934, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete) には, 内分岐した領域は, ごく特別なものの外, 定義せられて居ませんから, 簡単に問題を御説明することから始めます：

有限複素空間 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に内分岐しない様な領域 $\mathfrak{D}'$ を考へます. 其の境点, 及び境点としての分岐点については Behnke–Thullen の定義に従ひます (6 頁の §2, Bereiche の始めから, §3 Rand- und Verzweigungspunkte の 14 頁の二行目まで). このとき $\mathfrak{D}'$ の点 P と次の様な $\mathfrak{D}'$ の境点 M_0 とからなる点集合 $\mathfrak{D}$ を考へます. M_0 の条件を御説明しますと, この点に対して正数 δ が対応して, M_0 の座標を (ξ) とし, 多円筒 (δ), $|x_i - \xi_i| < \delta$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ を描き, (δ) 内の $\mathfrak{D}'$ の連結成分の中, M_0 を境点とするものを Δ とし, Δ の境点であって (δ) の境界上にない様な任意の点を M としますと：

1°　Δ は擬凸状域であること,

2° M はすべて有限階 (Ordnung, $\geqq 2$) の分岐点であること,

3° M の基点 $\underline{M}$ の集合は (Δ 内の) (実) 解析集合体であること, 及び

4° M はすべて $\mathfrak{D}$ にぞくすること.

今後 (有限) 領域と云ふ言葉で, か様な $\mathfrak{D}$ を指すことにいたしませう. 尚, M_0 の近傍と云へば, Δ 内の M_0 を含む様な, 一口に云へば充分小さな, 領域であります.

上述の (3°) の集合が固有面であること, 及び M_0 の基点 $\underline{M_0}$ でかやうな固有面の二つの (解析的連結) 成分が交って居ない限り, M_0 の近傍の M はすべて同じ階数の分岐点であること等が云へます.

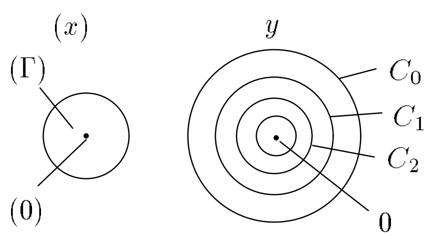
次に, 領域 $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数とは, $\mathfrak{D}$ で連続であって, 其の分岐点 (上の M_0 のやうな点) でないやうな任意の点で正則な函数のことです. 特に, $\mathfrak{D}$ に固有な正則函数とは, $\mathfrak{D}$ の相重なる二つの点で必ず相異なる要素を持つやうな $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数を云ひます.

然うしますと, Prob (E) は次の通りです：

《(有限) 領域の定点の近傍で, これに固有な正則函数を求めること.》

此の問題が, 上に申しましたやうに, 常に解けるのでありますが, その証明の概要をお話しいたします.

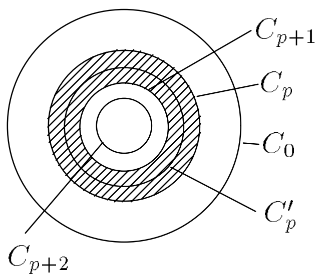
領域 $\mathfrak{D}$ の描かれて居る空間を, 改めて $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ とし, 問題の点を M, 其の座標を $(0, 0)$ とします. M_0 を m 本の分岐面, σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_m が通って居るとし, それ等の基集合 $\underline{\sigma_1}$, $\underline{\sigma_2}$, $\ldots$, $\underline{\sigma_m}$ を何れも (解析的に) 連結とします. (x) 空間に (0) を中心として多円筒 (Γ) を, y 平面に原点を中心として円 (C_0) を描きます. (Γ) 及び (C_0) は何れも充分小さく, 其の内の $\mathfrak{D}$ の成分中 M_0 を含むものが, 問題中に与へられた近傍, これを (R) としますと, (R) の完全内部に含まれるやうにとります. このさい (R) は到る処 λ 葉と考へます. 次に, 簡明のため, 固有面 $\underline{\sigma_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ はこの多円筒 $[(\Gamma), (C_0)]$ の近傍では, $y = 0$ 以外で相交はらないと 假定 しませう. 然し, この假定なくとも, 以下述べる所は実質的には変化を受けません. (y の代りにある正則函数 $F(x, y)$ をとるだけです.)



σ を 1 より小さな正数とし, 円周 C_0 の半径を r とするとき, y 平面上に原点を中心とし半径, r, σr, $\sigma^2 r$, $\ldots$ を以て, 円周, C_0, C_1, C_2, $\ldots$ を描き, 円環, $(C_0, C_2) = \Delta_0$, $(C_1, C_3) = \Delta_1$, $\ldots$ を考へます. 然うして次の諸問題を順次に解いて行きます：

1° 以下 (x) は常に (Γ) の近傍にあるとして y のみについて云ひますが, Δ_p $(p=0,1,\ldots)$ の近傍に於ける, Riemann 面 (R) (上述の (R)) 上に於て, 固有正則函数 $f_p(P)$ (P は (R) 上の点の代表) を作ること. この問題は, 上の假定に依って, 局所的には常にとけますから, Lemme I′ と Théorème (H′) と (合同の Prob I が (單葉) 正則域の完全内部では常にとけると云ふ定理と——今後これを定理 (H′) の内に含ませます, 第二信でもそうすべきでした) によって, 少し複雑にはなりますが, 略 Mémoire XI の Partie II の様にして融合出来て, 其の解が得られます.

2° 二円周 C_p, C_{p+1} の間に同心円周 C'_p を描き, 円環 (C_p, C_{p+1}) の近傍で, (R) 上に於ける正則函数 $\varphi(P)$ を与へ, 円環 (C_0, C'_p) の近傍で, (R) 上に於ける正則函数 $\varphi'_p(P)$ を, (C'_p, C_{p+2}) の近傍で同様の函数 $\varphi''_p(P)$ を,



$$\varphi'_p - \varphi''_p = \varphi_p$$

となるやうに求めること.

この問題も同様の理由によって, 同様にして常にとけます. 尚, そのさい (C_p, C_{p+1}) で $|\varphi_p(P)| < M$ としますと, φ に無関係な正数 K_p を, $|\varphi'_p| < K_p M$, $|\varphi''_p| < K_p M$ が, 夫々 (C_0, C_{p+1}), (C_p, C_{p+2}) で成立するやうに見出すことが出来ます.

3° 円環 (C_0, C_1) 内に点 y_0 を定め (1°) で求めた $f_0(P)$ によって, 有理型函数

$$G_0(P) = \frac{f_0(P)}{y - y_0}$$

を作ります. 但し y_0 を, 其の上の λ 個の点で $f_0(P)$ がすべて違った値をとる様に撰びます. 問題は (C_0) の近傍に於て, (R) 上で (一価) 有理型であって, $y = y_0$ の近傍で上の $G_0(P)$ と同等である様な函数 $G(P)$ を求めることです. —— 今

$$(S) \qquad \omega_1, \omega_2, \ldots$$

を次第に減少して 0 に収斂する正数の列とし, (1°) に於ける $f_p(P)$ によって, (2°) に於て

$$\varphi_{p-1} = \omega_{p-1} f_{p-1} - \omega_p f_p \qquad (p = 2, 3, \ldots)$$
$$\varphi_0 = G_0 - \omega_1 f_1$$

として, φ'_p, φ''_p を求め, Δ_p の近傍に於て

$$H_p = \omega_p f_p - (\varphi''_{p-1} + \varphi'_p + \varphi'_{p+1} + \cdots) \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$
$$H_0 = G_0 - (\varphi'_0 + \varphi'_1 + \cdots)$$

を考へます. 若し括弧内がすべて斉一収斂すれば, H_p $(p = 1, 2, \ldots)$ は, (C_0) の近傍に於ける (R) 上の同一の有理型函数の部分的表示となり, この函数は所求の G になること明らかです.

所で, ここですが, この問題は, 其の性質上, 列 (S) が如何程急激に 0 に傾いても少しも支差ありません. それ故, (S) を充分そのやうに撰びますと, G は存在します. それによって

$$F(P) = (y - y_0)\, G(P)$$

を作りますと, (C_0) の近傍に於て, (R) に固有な正則函数となること明らかです.

この身極めがつきますまでには, 一時間餘りしかかゝらなかったのですが, さて書かうとしてみますと, 以外に長くなりまして, 書き上げたものは, 実は素描の域を脱して居りません. 本来ならば丁寧に書いて検討してから先生に申し上げなければならないのでございますが, 決して間違っては居ないと思ひますしそれに私, 明日以後来月の十日頃まで, ずっと研究以外の予定がたてこんでゐまして, それ以後となると餘り間がのびてしまひますから, 直ぐにお話しすることにいたしました. ただ, お約束しました慎みの足りない点は, 專へに御海容を仰ぐ外ございません.

第一信で, 「Prob (E), (H) は局所的問題であって, 全局的諸問題とは餘り関係がないでせう」と申し上げました. 所が, 上には, (Lemme I′ + Théorème (H′)) の三種類の応用を皆使ひました.

Prob (E) ノ (R) ハ Poincaré ノ代数的要素ノ如クミテ
条件ヲオシマズ簡潔ニ定義スルコト
(同一葉数, 固有面等ヲサス)