1948. 2. 20

Lemme de Picard

1　Picard が Simart との共著, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes (1897) の 68, 69 頁に一つの Lemme をのべて居る (86, 87, 88 頁をも参照), 之を n 変数の場合に拡張し, 内容も今少し正確にしようと思ふ. 証明法は, 実質的にはもとのものを其の儘使ふ. 証明しようと云ふ Lemme は次の通りである：[1]

Lemme de Picard — $n+1$ 複素変数の空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = (x, y)$ に円筒 $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \gamma') = (\gamma, \gamma')$ を描き，其の中に固有面 σ を考へる. 但し σ は y が円周 γ' の充分近くにあるならば存在しないものとする. そうすると, (x) を (γ) の任意の定点とするとき, 一複素次元固有平面 $x_i = x'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 上の σ の trace は常に有限個の点である. 又其の個数は一般に同一であって，例外点 (x') の集合を $\mathcal{S}$ とすれば，$\mathcal{S}$ は (γ) 内の固有面である. 扨て, C を (γ, γ') 内に σ を通らない様に描いた任意の closed curve とし, (x^0) を $\mathcal{S}$ にぞくしない様な (γ) の任意の点とする. そうすると, C を σ を通らないように (γ, γ') 内に於て連続的に変形して, $x_i = x_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 上へ持って来ることが出来る.

注意 (x) に homographic transformation を行って, S が (x) のどれにも, どの成分も dép する様にしておけば, C が S を通らないと云ふのはいらないことであらう. 然し分点についての条件はいるから, 第三段のとき S の section だけはみておかなければならぬ. (ごく簡単).[2]

証明　(γ, γ') は円筒であるから, Cousin に依って，ここで正則な函数 $f(x, y)$ を求め，$f(x, y) = 0$ が丁度 σ となるように，又 f が multiple factor を持たないように出来る. σ は y が γ' の近傍にあるときには存在しないのだから, $f(x', y) \not\equiv 0$ である. 故に, Weierstrass によって, (γ) の各点の近傍で $f(x, y) = 0$ の根はすべて $y = \eta(x)$ の形である. ここに $\eta(x)$ は多価正則函数であって, 一般にか様なものは数個ある. その (γ) の点の近傍で (x) を少し動かしても, どの $\eta(x)$ も決してある程度以上 γ' へ近づかないのだから, ここで, y に関する方程式 $f(x, y) = 0$ の根の数は一般

[1] 私は此の Lemme が誰の発見であるか実はよく知らないのであるが, 多分 Picard に帰すべきものではないかと思ったから, 以下にのべるものをも Picard の名でよぶことにした. 若し誰か他の人 (たとえば Poincaré) の発見ならば, それが分かったときにそう改める積りである.

[2] (編注) この注意は 6 頁の内容に関連したもので, この頁の上部に書き込まれ, ここに挿入するように指示されている.

に同一である. 又 例外点 (x) はここで固有面を作る. このことは (γ) の任意の点の近傍で云へるのだから, (γ) 全体についても同様である. この (γ) に於ける例外点の集合を上に $\mathcal{S}$ としたのである.

問題の性質上, (γ) を少し小さくして (γ_0) としたとき常に定理が成立するならば それで充分である. このことを始めに云って, (γ,γ') の近傍で, 定理の条件がみたされて居ると假定して進むのが便利である. そうして進まう.

x_n 平面に於ける円 (γ_n) を z 平面に於ける正方形 δ に等角写像する. δ としては z を $z = Z_1 + iZ_2$ (i は虚単位) とすれば

$$(\delta) \qquad |Z_1| < 1, \quad |Z_2| < 1$$

をとる. 我々は (x^0) を $\mathcal{S}$ にぞくしない様な任意の点とするとき, C を Lemme で述べた位置に持ち来すため, 其の第一歩として, C を (γ,γ') 内のみを通り σ を通らないように連続的に変形して, $x_n = x_n^0$ 上へ持って来ようと云ふのであるが, 其の為には, 上の様に x_n を z に移して空間 $(x_1,\ldots,x_{n-1},z,y) = (x,z,y)$ の筒状域 $(\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-1},\delta,\gamma') = (\gamma,\delta,\gamma')$ 内で, 上に相当することが出来ることを云へばよい. 之は明らかである. 空間 (x,z,y) に於て, (x,x_n,y) に於ける $\sigma,\mathcal{S},x_n^0$ に相当するものを, 夫々 Σ, S, z^0 とする.

この空間 (x,z,y) に改めて closed curve を描いてもよいわけであるが, 矢張り始めの, 空間 (x,x_n,y) のものを, そのまま此の空間へ写像することにしよう. 此の写像を同じ文字 C で表す. C を少し変形して, 新しい C が S を通らないようにしよう. S は空間 (x,z,y) にあるものとして云へば, $2(n{+}1){-}2$ (実) 次元の固有集合体である. 又 C は, ごく少し変形すればそうなるから, analytic curve であると看做して支障ない. そうすると, 此の C は $2n+1$ 個の real analytic eqs で表される. それで, S と C との交りは $2(n{+}1){+}1$ 個の方程式をみたさなければならないから, C をごく少しうごかしてか様な交りが存在しないように出来る.

C 上の任意の点を M, 其の座標を (x',z',y') とし $z' = Z_1' + iZ_2'$ (i は虚単位) とする. $(x) = (x')$, $Z_1 = Z_1'$ 上の空間 (x,z,y) の trace は空間 (Z_2,y) であって筒状域 (γ,δ,γ') の trace は $[|Z_2| < 1,\, y \in (\gamma')]$ である. Σ の trace を Σ' とする. この空間 (y,Z_2) に於ける円筒 $[(\gamma'),|Z_2| < 1]$ 内に, 此の中の点 (y',Z_2') を通って直線 L' を Σ' に交はらない様に, 又 境界 $[\gamma',|Z_2| \leq 1]$ に交はらない様に引こうと云ふのである. (後に少し補正)

Σ' をみよう. C は S を通らないから, そして (x',z') は C 上の点であるから, Z_2 を任意にとったとき (x',Z_1',Z_2) が S にぞくするような Z_2 は有限個しかない. 何となれば, S の中には z に indep な成分があるかも知れないが, (x',Z_1',Z_2) は決してか様な成分上にはない. そうでない成分については, その $x_i = \mathrm{const}\ \ (i = 1,2,\ldots n{-}1)$ 上の trace は有限個の点で

ある．それ故 (x', Z_1', Z_2) が S 上に来るような Z_2 は有限個しかない．之を $Z_2 = a_1, a_2, \ldots, a_l$ とする．Z_2 が此の上にないときをみるに，此の Z_2 を Z_2', $z' = Z_1' + i\, Z_2'$ とし，y を任意に定めて y' とすると，此の (x', z', y') の近傍で，此の (x', z') は S にぞくしないのだから，Σ の各成分は

$$y = \varphi(x, z),$$

$\varphi(x, z)$ は正則函数，の形に表される．之を実部と虚部とに分けると

$$Y_1 = \varphi_1(x, Z_1, Z_2)$$
$$Y_2 = \varphi_2(x, Z_1, Z_2).$$

之が Σ についてである．それで Σ' については，其の対応する成分は

$$Y_1 = \varphi_1(x', Z_1', Z_2)$$
$$Y_2 = \varphi_2(x', Z_1', Z_2).$$

によって与へられる．之は明らかに線である．それで Σ' は，$Z_2' = a_1, a_2, \ldots, a_l$ 以外では線である．$Z_2 = a_1, a_2, \ldots, a_l$ 上についてみるに，ここでも線以上でないこと明らかである (∵上述二つの方程式に相当するものの中少なくとも一方は残るから)．故に線である．勿論 analytic curves である．[3]

Σ' を $Z_2 = \text{const}$．の形の平面上へ射影しよう．(const を何ととっても勿論結果は同一である.) Σ' の任意の一つの成分を T' とすると，T' は analytic curve であるから，其の射影 T'' は一般に analytic curve であって，特別の場合には一点となる．後の場合は T' が $y = \text{const}$ の形のときにのみ起る．之等のことは明らかである．この T'' の和が Σ' の射影，Σ'' をあたへる．Σ'' が点を含むとして，之を $y = b_1, b_2, \ldots, b_p$ とし，それ以外の部分を Σ_0'' とする．

問題は y 平面の円 (γ') 内に移って居る．点 y' が curve Σ_0'' 上になければ問題はごく簡単である．それで，此の場合をあとにまわして，先づ，y' が curve Σ_0'' 上にあったとしよう．そうすると，y' を通り直線 l を，y' の近傍では，y' 以外の点で Σ_0'' と交はらないように引くことが出来る．[4] 何となれば，Σ_0'' の方程式を，y' の近傍で，$\psi(Y_1, Y_2) = 0$ とし，簡単のため $y' = 0$ とみる．ψ は勿論 Y_1, Y_2 の analytic fn である．今 t を実変数とし，$Y_2 = tY_1$ とし，

$$\chi(Y_1, t) = \psi(Y_1, Y_2 t)$$

[3] Σ 中に若し y を含まない成分があるとこのことが云へないのである．たとへば，$Z = A$ (A は常数) があると，之を実部と虚部とに分けると，$Z_1 = A_1, Z_2 = A_2$ となる．それで $Z_1 = A_1$ に対しては，Σ' は $Z_2 = A_2$ を含むことになる．之は面である．

[4] 之は l が Σ_0'' に含まれない限り常にそうなる． (1948. 4. 2)

を考へると, χ は $(Y_1=0,\ |t|\le B$ (B は常数)) の近傍に於ける analytic fn である. それで之を展開して

$$\chi=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)Y_1+\alpha_2(t)Y_1^2+\cdots$$

とすることが出来る. 明らかに $\alpha_0(t)\equiv 0$, 今

$$\alpha_0\equiv 0,\ \alpha_1\equiv 0,\ \cdots,\ \alpha_{\mu-1}\equiv 0,\ \alpha_\mu\not\equiv 0$$

とすると,

$$\chi=Y_1^\mu\left[\alpha_\mu(t)+\alpha_{\mu+1}(t)Y_1+\cdots\right]$$

となる. それで $\alpha_\mu(t_0)\neq 0$ となるように t_0 $(|t_0|\le B)$ をえらぶと, 直線 $l:\ Y_2=t_0Y_1$ 上で, ψ は原点の近傍で, 原点以外では 0 にならない. 所求の l である.

この l に対し, L' を次のように定める. L' は (y',Z_2') を通り, L' の射影が l であって, 其の傾きは充分急であって, L' の $|Z_2|\le 1$ 上の部分に応ずる射影 l の部分は, 上述の y' (一時原点としたもの) の近傍にあること, 及びこの l の部分は, 上述の点 $y=b_1,b_2,\ldots,b_p$ を含まず 又 γ' と交はらないこと. そうすると, L' は (y',Z_2') を通り $|Z_2|\le 1,\ y\in\gamma'$ と交はらない. それで問題は Σ', *i.e.* Σ_0' と円筒 $[|Z_2|<1,\ y\in(\gamma')]$ 内で交はらないかと云ふことだけであるが, それが疑問となるのは, (y',Z_2') の形の点だけである. 上に云ひ忘れたが, L' は $y=y'$ の形でないようにとっておく. そうすると, かかる形の点で L' 上にあるものは (y',Z_2') 以外にない. 所でこの点は Σ' にぞくしない. それで L' は上に述べた条件をすべてみたす.

若し, y' が y 平面上の curve Σ_0'' 上になければ, 同様にして L' が作れることがすぐに分る.

空間 (x,z,y) に於て点 M を通って次のような直線 L を引く :

$$(L)\qquad x_i=x_i',\quad Z_1=Z_1',\quad (Z_2,y)\in L'\qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

此の直線は $|Z_2|\le 1$ に於ては Σ と交はらない. 又, 筒状域 (γ,δ,γ') の境界とも交はらない. 云ひ換へると, この筒状域内を走る C 上の任意の点 M を通って かような直線 L が引けることが分った.

C 上の任意の点 M を通って L が引ける. この L を M の近傍の C 上の各点を通るように平行移動する. そうしてもしばらくの間は L と同じ条件をみたす. それで, C が parameter t によって, t が単位円周 Γ 上にあるときに表されて居るとして, C 上の M と Γ 上の τ とが correspond するとすれば, $\rho>0$ を充分小さくえらび $|t-\tau|<\rho$ となるようにすれば, この t に応ずる C 上の点はすべて上述の性質をもつ. 故に, 円周 Γ はか様な円筒 [上の $|t-\tau|<\rho$ を指す] の有限個によって被覆することが

出来る．それで C を有限個の部分に分ち，之を順次に $C_1, C_2, \ldots, C_q$ とし $(C_q, C_1), (C_1, C_2), \ldots, (C_{q-1}, C_q)$ の分点を $M_1, M_2, \ldots, M_q$ とする．q を充分大きくし，分割を適当にすれば，此の各 C_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ に相当する Γ の弧が上述の円筒内にあるように出来る．分点 $M_1, M_2, \ldots, M_q$ にはある条件を置かうと思ふ．それについてのべる．

S についてであるが，S は空間 (x, z) の筒状域 (γ, δ) に於ける固有面である．故に，其の成分の内 z に dép するものの $x_i = x'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n{-}1)$ 上の trace は有限個の点である．それで，(x', z', y') を C 上の点とすると，C は S を通らないから，その x' をとれば，S の trace が上のようになる．之を $z = c_1, c_2, \ldots, c_l$ とする．$c_j = c'_j + i\, c''_j$ $(j = 1, 2, \ldots, l;\ i$ は虚単位) とし (前には c''_j を a_j とした)，分点 M_k $(k = 1, 2, \ldots, q)$ をそれに応ずる Z'_1 が，M_k に応じる全部について，上述の c'_j $(j = 1, 2, \ldots, l)$ と異なるようにとる．そうとれるように C を少し変形してそうする．[5] そうすると，M_k の一つを (x', z', y') とすると，この (x', Z'_1) 上の trace をみると円筒 $|Z_2| < 1,\ y \in (\gamma')$ に対し，$|Z_2| < 1$ の任意の Z'_2 をとると (x'), $z' = Z'_1 + i\, Z'_2$ は決して S の点でない．それで Σ の trace Σ' の $Z_2 =$ const 上の trace は常に同一数の点である．Σ' はか様な analytic curves からなる．

扨て，$C_1, \ldots, C_q$ の任意の一つ たとへば C_1 について，C_1 上の任意の点 M を通って上にしばしばくり返した様な直線 L を引くことが出来る．尚 M が C_1 上 (両端 M_1, M_2 を含む) にある間 L はただ平行移動すればよい (そうすれば条件がみたされる)．C_1 に対しては其の両端をも含めてか様に L を引く．$C_2, \ldots, C_q$ に対しても同様である．そうすると，分点 $M_1, M_2, \ldots, M_q$ に対しては二本の直線が引かれたことになる．

z_0 に対し，平面 $Z_2 = Z_2^0$ と上の M を通る直線 L との交はりを求め N とする．分点 M_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ に対しては二個の点 N'_i, N''_i が応じる．C_1 に対しては，か様にして此の平面上に曲線 C'_1 が応じる．C'_1 は N によって N'_1 (とする) から始まって N'_2 (とする) に終る様に描かれたものである．他のものについても同様である．各分点 M_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ を通る二つの線分 (いづれも L の部分) からなる curve $N'_i M_i N''_i$ を λ_i とする．そうすると，L においた条件から，C を Σ と交はらない様に筒状域 $(\gamma, \delta, \gamma')$ 内のみを通って，curve $\mu = \Sigma C'_i + \Sigma \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ に移せること明白である．

此の内 $\Sigma C'_i$ は $Z_2 = Z_2^0$ 上にある．$\Sigma \lambda_i$ をみよう．たとへば λ_1 をみるに，M_1 を (ξ, ζ, η) とすると，λ_1 (以下添数 1 を省略する) は

$$(x) = (\xi), \quad Z_1 = \zeta_1, \qquad (\zeta = \zeta_1 + i\, \zeta_2)$$

上にある．特に 其の両端 N', N'' は $Z_2 = Z_2^0$ 上にある．

[5] たとへば 往復させる — (x') は不変．Z_1 だけかへる．

所で, $(x)=(\xi)$, $Z_1=\zeta_1$ 上の trace を見るに, Σ の trace Σ' は, M_1 は分点であるから, その条件によって, 上に説明したように, 円筒 $|Z_2|<1$, $y\in(\gamma')$ 内の部分 Σ_0' は analytic curves からなり其の $Z_2=\mathrm{const}$ 上の trace は常に同一数 (有限) の点である. λ の trace λ' はこの円筒内にあって, 其の両端が $Z_2=Z_2^0$ 上にあり, Σ_0' と交はらないような curve である. (λ は $(x)=(\xi)$, $Z_1=\zeta_1$ 上の curve である). それで λ' を, 其の両端を動かさないで, 他の部分を此の円筒内のみを通るように, それから Σ_0' と交はらないように連続的に変形して, 平面 $Z_2=Z_2^0$ 上へ持ち来しうること明らかである.

他の λ_j $(j=2,3,\ldots,q)$ についても全く同様である. 故に, 所求の第一段の連続変形として, C を $Z_2=Z_2^0$ 上へ持って来ることが出来た. 此の curve を C' としよう.

第二段は C' を連続変形して $z=z^0$ 上へもって行くことである. 所で, 上の証明で, Z_1 と Z_2 とをふりかえても同じである. そうして上の証明をしたとして, そのとき C が $Z_2=Z_2^0$ 上にあったとしても同じ操作で同じ結果が出る. 所で, この操作で, C の任意の点 M の座標を (x',z',y') とすると (x',Z_2') は殆んど動かさない. 動かすかもしれないのは, 分点の条件の所だけである. 之は, Z_2 が次のようなときにのみ起る : S の z に dep する要素の和を S_0 とし, S_0 の $(x)=(x')$ 上の trace を $z=c_j$ $(j=1,2,\ldots,l)$, $c_j=c_j'+i\,c_j''$ とするとき, 分点 M で Z_2' がどれかの c_j'' と一致したとき. ――このときどうするか, と云ふことだけが問題である.

始めの $(x_1,\ldots,x_n)$ には, 不動変換により近い homographic transformation を行ってよい (理由は始めに述べた通りである[6]). そうして, S の成分は $(x_1,\ldots,x_n)$ のすべてに dép するようにしておく (特に x_n のみに dep するものがない様に). そうすると分点の modification は たとへば x_1' だけを動かすことによって出来る. 何となれば 問題の点を $M(x',z',y')$ とする (x',z') は S 上にない. $(x)=(x')$ 上の S の trace は $c_1,c_2,\ldots,c_l$ である. Z_2' は $c_1'',\ldots,c_l''$ のどれか, たとへば, c_1'' と一致している *i.e.* $Z_2'=c_1''$. このとき, S は各成分とも x_1 に dép するのだから, x_1' を動かすと c_1'' は必ず変る. ($\because z=\varphi(x_1)$ 動かない x_1 の locus は必ず curve) 動き方は, 他のものについてもごく少しだから他のものは問題にならない. それで x_1' だけを少しかへると, $Z_2'\neq c_1''$ となる. 他の c'' についてもそうなる. それでよい. 前の所で, 後のためと一言断ってこのやり方で分点が条件をみたす様に curve C を modify しておく. 前にこうしてあったとすれば, Z_1 と Z_2 とをふりかへて云ふと, あの移動で M の Z_2' は決して動かさなかった. 又 $Z_2'=\mathrm{const}$ であるとないとは問題でなかった. 故に 第

[6](編注) 1 頁の“ 注意 ”参照.

二段は前のものをそのまま (踏) 襲出来る．そうして, C' は更に移動されて $(x_1,\ldots,x_n)$ で云へば $x_1=x_1^0$ 上の C'' に出来る．——このとき x_1^0 の cond であるが, 第一段の操作を行ふ前に S を通らない様にした——第二段の前にも之がいる. 第三段でも, このときは $x_1=x_1^0$ 上で, そうしなければならぬ.

それ故, 両面を合せみれば, S の各成分は (x) のすべてに dép するのであるから, (x^0) が S 上にないように定めておき, その x_1^0 をとったのならば, 前のことは云ふまでもなく云へるし, 後の第三段以後についても同様に出来る.

むしろ第二段の前の操作であるが, S の $Z_2=Z_2^0$ 上の trace S' はこの Space を λ (実) 次元とすれば, $\lambda-2$ (実) 次元になるか．そうなることを証明しよう．S の任意の一つの成分は次の形にとける．(そうなる様にしておいたのである)

$$x_{n-1}=\xi(x_1,\ldots,x_{n-2},z)$$

ここに ξ は 多価 正則函数である．之を実部と虚部とに分ち

$$X_1=\xi'(x_1,\ldots,x_{n-2},Z_1,Z_2)$$
$$X_2=\xi''(x_1,\ldots,x_{n-2},Z_1,Z_2)$$

とすることが出来る．(多価でも同じである) それで S' は

$$X_1=\xi'(x_1,\ldots,x_{n-2},Z_1,Z_2^0)$$
$$X_2=\xi''(x_1,\ldots,x_{n-2},Z_1,Z_2^0)$$

となる．之は明らかに 二つの方程式である (いずれも identité でなく, 又両者は indép. である)．故に S' は空間 $(x_1,\ldots,x_{n-1},Z_1)$ に於ける面 (*i.e.* $[2(n-1)+1]-2$ 次元) である．(前の証明の所もこうやっておくのがよい—— 強いて前のようにしようと思へば (x) に更に homographic transformation を行っておくのであるが, むだであらう)——(この方はあとで云ふ方よいだらう)

それで証明出来たことになる．　C. Q. F. D.

上の Lemme から直ちに次の系が得られる．

Corollaire — 空間 $(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$ に円筒 (γ,γ') を描き, 其の上に Riemann 面 (R) を考へる．(R) の分岐面の集合を σ とするとき, 若し σ が前の Lemme の条件をみたすならば, (R) 上に curve C を, 其の基集合 $\underline{C}$ が closed curve となる様に, (R) の分岐面を通らないように描いたとき, C をたえずこの性質を ($\underline{C}$ が (γ,γ') にあることをも含めて) 持つように連続変形して, $x_i=x_i^0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 上へ持ち来すことが出来る.

ここに (x^0) は Lemme でのべた条件をみたすような，(γ) 内の任意の点である．

証明　若し $\underline{C}$ が σ を通らなければ, Lemme から直ちに出来る．

若し $\underline{C}$ が σ を通るならば, 前に Lemme の証明でしたように, C をごく少し変形して $\underline{C}$ が σ を通らないように出来る．この変形は inf [7]しない．それでよいわけである．

訂正　Lemme の証明法についてであるが, 上の分点 M_i の処理法は二変数 (x, y) のときにはあてはまらない．それで (x^0) を S 上にない様な一点とし, 適当に一つ (x^0) をえらび, C を $(x) = (x^0)$ 上へもって行けることを先づ云ふ．

次に, それが云へるならば S 上にないような任意の (x^0) へもつて行けることを云ふ．この方は図からすぐに分る．

そうするのが簡単でもある (それだと (x', Z_1') の Z_1' を動かすのである．$Z_1 = Z_1^0$ 上にあるときは全体を平行移動するのである)

又は (x, y) の case を別にやること．そのときは多分 z の rotation.

[7](編注) influence か？