1948. 8. 6

# III— Etude quantitative de congruences dans un cas spécial

1. ≪ 領域はすべて単葉有限である. 一々断らない.≫

空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に領域 $\mathfrak{D}$ を描き, $\mathfrak{D}$ 内に正則函数の有限個の組合せ, $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)$ を考へる. $F_1 = F_2 = \cdots F_p = 0$ を $\Sigma$ とする. $(F)$ が $\mathfrak{D}$ に於て性質 (G) を持つと云へば, $\Sigma$ の任意の一点を $P$ とし, $P$ に於て正則であって $P$ の近傍の $\Sigma$ 上で恒等的に 0 となるような任意の函数を $\varphi(x)$ とすれば,

$$\varphi \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(F) \quad en\ P$$

となる, と云ふ意味である.

$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$ を $\mathfrak{D}$ に於て正則な函数とし,

$$F_i(x, y) = y_i - f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

を空間 $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_\nu)$ に於て考へる. そうすると $F_1(x, y)$, $F_2(x, y), \ldots, F_\nu(x, y)$ は $(x) \in \mathfrak{D}$ に於て性質 (G) を持つ.

証明　$\nu = 1$ のとき命題は真である. それで, $1, 2, \ldots, \nu - 1$ に対して真であるとして, $\nu$ のときにもそうであることを云へばよい.

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_{\nu-1}) = \varphi[x, y_1, \ldots, y_{\nu-1}, f_\nu(x)]$$

を考へると, $\psi$ は空間 $(x, y_1, \ldots, y_{\nu-1})$ に於ける函数であって, $P$ を $(x^0, y^0)$ とすれば, $(x^0, y^0, \ldots, y^0_{\nu-1})$ の近傍で正則であって, ここで, $F_1 = F_2 = \cdots = F_{\nu-1} = 0$ 上で恒等的に 0 となる. 故に, 假定に依って,

$$\psi \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(F_1, F_2, \ldots, F_{\nu-1}) \quad en\ (x^0, y^0_1, \ldots, y^0_{\nu-1})$$

他方, $\varphi - \psi$ は

$$\varphi - \psi \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(F_\nu) \quad en\ (x^0, y^0)$$

$$\therefore \quad \varphi \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(F) \quad en\ (x^0, y^0)$$

C. Q. F. D.

2. 前節に述べた所を量的に調べ直さう.

$(\gamma)$ を空間 $(x)$ に於ける次のような多円筒とする：

$$(\gamma): \qquad |x_i - x_i^0| < r_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

それから, $L$ を任意の複素数とする $(|L|>0)$. このとき, G. Julia に倣って, 記号

$$L(\gamma) \quad \text{又は} \quad (\gamma)L$$

によって, 次の多円筒を表すことにしよう：

$$|x_i - x_i^0| < |L| r_i \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の領域 $\mathfrak{D}$ に於て正則な函数 $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)$ を考へ, 此の一組の函数が次の性質を持ったとしよう：

$E$ を $E \Subset \mathfrak{D}$ なる任意に与へられた閉集合 (必然有界) とすれば, 定った実数 $L$, $K$

$$0 < L \leq 1, \qquad K \geq 1$$

が対応し, $(x^0)$ を $E$ の任意の一点とし, $\varphi(x)$ を $\mathfrak{D}$ にぞくする多円筒 $(\gamma): |x_i - x_i^0| < r_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ に於て定義せられて居て, 正則であって, $F_1 = F_2 = \cdots = F_p = 0$ 上で恒等的に 0 となり,

$$|\varphi(x)| < M$$

であるような函数とすれば, $\varphi$ は次の形に表現せられる：

$$\varphi = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p \qquad pour\ L(\gamma)$$

$$avec \quad |A_i| \leq KM \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

ここに, $A_i$ は $(x)$ の正則函数である.

以上が, $(F)$ の性質であるが, このとき $(F)$ は領域 $\mathfrak{D}$ に於て性質 $(\mathrm{G}_0)$ を持つ と名づけることにしよう. 次のことが云へる：

$f_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$ を空間 $(x)$ の領域 $\mathfrak{D}$ に於て正則な函数とし, 空間 $(x, y_1, \ldots, y_\nu)$ に於て $F_i(x,y) = y_i - f_i(x)$ を考へると, $(F)$ は $(x) \in \mathfrak{D}$ に於て性質 $(\mathrm{G}_0)$ を持つ.

証明　$\mathfrak{D}$ を有界として支障ない. $\delta$ を任意の正数とし, $\mathfrak{D}$ に関する境界距離が $\geq \delta$ であるような $\mathfrak{D}$ の点の集合を $E_0$ とする. $\delta$ を相当小さくとれば, $E_0$ は実在し閉集合である. そうすると次のことが云へる：$j$ を $1, 2, \ldots, \nu$ の任意の一つとし, $(x), (x^0)$ を $E_0$ の任意の二点とすれば, 次のような正の常数 $K_1$, $K_1 \geq 1$, が存在する：

若し
$$|x_i - x_i^0| < \rho \qquad (i=1,2,\dots,n)$$
ならば, 常に
$$|f_j(x) - f_j(x^0)| < K_1\rho$$
である． このことは, $r$ が小さいときだけが問題であるから, $f_i(x)$ を Cauchy の積分 によって表示すれば直ちに分る．

$$(\gamma): \quad |x_i - x_i^0| < r,\ |y_j - y_j^0| < r \quad (i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,\nu)$$

を空間 $(x,y)$ の領域 $(x) \in \mathfrak{D}$ に含まれる任意の多円筒とし, $\varphi(x,y)$ を $(\gamma)$ で定義せられて居て, 正則であって, $F_1 = F_2 = \cdots = F_\nu = 0$ 上で恒等的に 0 となり,
$$|\varphi(x,y)| < M$$
であるような函数としよう．上に述べたことは $\delta$ をどれ程小さく与へても成立する (勿論, そうすれば $K_1$ は $\delta$ と共に変る)．それで, この $r$ に応じて, 上の $\delta$ を[1]
$$r \leq 2\delta$$
となる様にとって置いたものと考へる．二つの場合を区別する：

1° $f_i(x)$ $(i=1,2,\dots,\nu)$ 中少なくとも一つ, たとへば $f_p(x)$ があって,
$$|y_p^0 - f_p(x^0)| > \frac{r}{2}$$
となるとき．$(x^0, y^0)$ を中心とし
$$\frac{r}{8K_1}$$
を半径とする多円筒を $(\gamma')$ とする．$(\gamma')$ の任意の点に対し
$$|F_p(x,y)| > \frac{r}{2} - \frac{r}{8} - \frac{r}{8} = \frac{r}{4}$$
である．それで,
$$\varphi(x,y) = A_p(x,y)F_p(x,y)$$
とおくと, $A_p$ は $(\gamma')$ で正則であって, ここで
$$|A_p(x,y)| < \frac{4}{r}M$$
である．それで此の場合はよい．

[1][編註] この辺, 意味のはっきりしない所があるが, 原文のままにしておいた.

$2°$ $$|y_i^0 - f_i(x^0)| < \frac{r}{2} \qquad (i=1,2,\ldots,\nu)$$

のとき. $k=0,1,2,\ldots,\nu$ とし

$$\varphi_k(x,y) = \varphi[(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), y_{k+1}, \ldots, y_\nu]$$

を考へる.

$$\varphi_0(x,y) = \varphi(x,y), \quad \varphi_\nu(x,y) = 0$$

identiquement である. $\varphi_k(x,y)$ は何れも多円筒

$$(\delta) \quad |x_i - x_i^0| < \frac{r}{2K_1},\ |y_j - y_j^0| < r \quad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,\nu)$$

に於ては確かに定義せられて居る.

$$\psi_k(x,y) = \varphi_{k-1}(x,y) - \varphi_k(x,y) \quad (i=1,2,\ldots,\nu)$$

とおけば, $(\delta)$ で

$$|\psi_k(x,y)| < 2M$$

であって,

$$\varphi = \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_\nu$$

である.

それで, $p$ を $1,2,\ldots,\nu$ の任意の一つとし, 上と同じく

$$(\gamma'): \qquad |x_i - x_i^0| < \frac{r}{8K_1}, \quad |y_j - y_j^0| < \frac{r}{8K_1}$$

$$(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,\nu)$$

を描き, ここに於て $\psi_p(x,y)$ をよくみよう :

$(\delta)$ の各点で $\psi_p \equiv 0 \mod(F_p)$ であるから, ここに於て globalement に

$$\psi_p(x,y) = A_p(x,y)F_p(x,y),$$

ここに $A_p(x,y)$ は正則函数, である. 故に $(\gamma')$ に於て

$$\varphi = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p$$

である.

$(\gamma')$ の任意の点を $(\xi,\eta)$ とし, $y_p$ 平面上に円

$$(C) \qquad |y_p - y_p^0| < \frac{7}{8}r$$

を描くと, 点 $\eta_p$, $f_p(\xi)$ は何れも円内に入る. 更に, 二点 $y_p^0$, $f_p(\xi)$ 間の距離は $5r/8$ より小であるから, $C$ の任意の点を $y'_p$ とすれば,

$$|F_p(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{p-1}, y'_p, \eta_{p+1}, \ldots, \eta_\nu)| > \frac{r}{4}$$

である. 故に

$$|A_p(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{p-1}, y'_p, \eta_{p+1}, \ldots, \eta_\nu)| < \frac{8}{r}M$$

である. $A_p$ は $(\delta)$ に於て正則であるから, $(\gamma')$ に於ても同じ不等式が成立する. 故に, 此の場合に於ても命題は真である. C. Q. F. D.

3. Mémoire VII の Problème ($C_1$), ($C_2$) を量的なものに変へよう.

Problème (1) — 空間 $(x)$ に領域 $\mathfrak{D}$ と $\mathfrak{D}$ に含まれる閉集合 $E$ と $\mathfrak{D}$ に於て正則な有限個の函数 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ と有界正則函数 $\Phi(x)$ とが与へられ, $\mathfrak{D}$ の各点で $\Phi \equiv 0 \mod(F)$ であって, $\mathfrak{D}$ で $|\Phi| < M$ であったとする. このとき, $E$ の近傍に於て, 正則函数 $A_i(x)$ を次のように撰ぶこと :

$$\Phi = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p$$

$$|A_i(x)| < KM \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

ここに, $K$ は $\Phi$ に (従って $M$ にも) 無関係な正の数である.

Problème (2) — 空間 $(x)$ に領域 $\mathfrak{D}$ と $\mathfrak{D}$ に含まれる閉集合 $E$ と $\mathfrak{D}$ に於て正則な有限個の函数 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ と正の常数 $\rho_0$, $M$ とが与へられていて, $\mathfrak{D}$ の各点 $P$ に対し, 之を中心とする半徑が $\rho_0$ に等しいか又はそれより大きな多円筒 $(\gamma)$ と $(\gamma)$ に於て正則であって絶対値が $M$ を超えないような函数 $\varphi(x)$ とが対応し, $(\gamma')$, $(\gamma'')$ を任意の一対の contigus な多円筒とするとき, 対応する函数 $\varphi'$, $\varphi''$ が $(\gamma') \cap (\gamma'') = (\delta)$ の各点に於て, $\varphi' - \varphi'' \equiv 0 \mod(F)$ であったとする. 此のとき, $E$ の近傍に於て正則な函数 $\Phi(x)$ を, $E$ の近傍の各点に於て

$$\Phi(x) \equiv \varphi(x) \mod(F)$$

となり, $E$ の近傍に於て

$$|\Phi(x)| < KM$$

となるように撰ぶこと. 此処に, $K$ は集合 $\{(\gamma), \varphi(x)\}$ 及び $M$ に無関係な正数である.

4. 空間 $(x)$ の領域 $\mathfrak{D}$ に於て正則な有限 函数列 (ここに函数列とは順序をもった函数の一組を云ふ) $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ を考へる. $q$ を $1, 2, \ldots, p$

の任意の一つとするとき, 函数の一組 $(F_1, F_2, \ldots, F_q)$ が $\mathfrak{D}$ に於て性質 $(G_0)$ をもつとき, 函数列 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ は $\mathfrak{D}$ に於て性質 $(H_0)$ を持つと云はう. 我々は次のことをみた：

空間 $(x)$ の領域 $\mathfrak{D}$ に於て正則な $\nu$ 個の函数を $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$ とし, 空間 $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_\nu)$ の領域 $(x) \in \mathfrak{D}$ に於て $F_i(x, y) = y_i - f_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$ を考へると, 此の $(F)$ は如何なる順に竝べても性質 $(H_0)$ をもつ.

上述の函数列 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ が $\mathfrak{D}$ に於て次の性質をもったとしよう：

$q$ を $1, 2, \ldots, p-1$ の任意の一つとするとき, 固有集合体 $F_1 = F_2 = \cdots = F_q = 0$ 上の如何なる点の近傍に於ても, $F_{q+1}$ は此の固有集合体上で恒等的に 0 ではない. 此のとき, 此の函数列 $(F)$ は性質 (I) をもつと呼ばう.

次の定理は自明である：

上述の定理に於ける $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ は如何なる順位に竝べても性質 (I) を持つ.

5. Problème (1) に対して次の補助定理がある：

空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の二つの (相異なる) 筒状域を $\Delta', \Delta''$ とし, $\Delta'$ と $\Delta''$ とは $n$ 個の成分中一個を除いて他の全部を共有して居ると考へ, $\Delta' \cup \Delta'' = \Delta$, $\Delta' \cap \Delta'' = \Delta_0$ とし, $\Delta_0$ は実在すると考へる. $E$ を $E \subset \Delta$ なる任意に与へた筒状閉集合とする. $\Delta$ に於て正則な有限函数列 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ を考へ, $\Delta_0$ に於て性質 $(H_0)$, (I) を持つとする. $\Phi(x)$ を $\Delta$ に於て正則な函数とし, $\Delta'$ に於て次の (1) の形に, $\Delta''$ に於て次の (2) の形に表はされて居るものとする：

$$\Phi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p \tag{1}$$

$$\Phi = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots + \beta_p F_p \tag{2}$$

此処に $\alpha_i$ $(i=1, 2, \ldots, p)$ は $\Delta'$ で正則有界な $(x)$ の函数, $\beta_i$ は $\Delta''$ で其の性質を持つ函数であって, それぞれの領域で

$$|\alpha_i| < M, \qquad |\beta_i| < M$$

であるとする. そうすると, $E$ の近傍に於て, 正則函数 $A_i(x)$ を

$$\Phi = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p$$

$$|A_i(x)| < KM$$

となるように撰ぶことが出来る．此処に $K$ は $\Phi(x)$ に (従って $M$ にも) 無関係な正数である．

証明　$p=1$ のときをみよう．このとき $(F)$ は $F_1$ 唯一つからなる．$\Delta'$ で $\Phi=\alpha_1 F_1$ である．所で, かかる $\alpha_1$ は唯一つしかない．故に, $\alpha_1=\beta_1$ *pour* $\Delta_0$．即ち, 命題は真である．それ故, 命題は, $1, 2, \dots, q-1, q \leq p$, に対して真であると假定して, $q$ のときにもそうであることを云へばよい．

今,

$$\alpha_i(x)-\beta_i(x)=\gamma_i(x) \qquad (i=1, 2, \dots, q)$$

とすると, $\Delta_0$ に於て, 恒等的に

$$\gamma_1 F_1+\gamma_2 F_2+\cdots+\gamma_q F_q=0$$

である．函数列 $(F_1, F_2, \dots, F_p)$ は性質 (I) をもつから, $F_1=\cdots=F_{q-1}=0$ 上で $F_q$ は恒等的に 0 ではない．故に, $\Delta_0$ の各点で

$$\gamma_q \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(F_1, F_2, \dots, F_{q-1})$$

である．又, $\Delta_0$ で

$$|\gamma_q|<2M$$

である．

与へられた閉集合 $E$ は, 大きくしても支障ないのだから, 筒状とみることが出来る．$\Delta' \cup \Delta''=\Delta$ であるから, $\Delta'$ に含まれる筒状閉集合 $E'$ と, $\Delta''$ に含まれる筒状閉集合 $E''$ とを, 之等が唯一つをのぞき他の成分をすべて共有するようにえらび, $E=E' \cup E''$ ならしめることが出来る．$E' \cap E''=E_0$ とすれば, $E_0$ は $\Delta_0$ に含まれる．$E_0$ は実在するとしてよい．更に, 此の $(\Delta', \Delta'', \Delta, \Delta_0)$ と $(E', E'', E, E_0)$ との間に, $(E)$ を其の性質を保ちつつ, 少し大きくすることによって, 筒状閉領域の一系 $(G', G'', G, G_0)$ を考へることが出来る．

上の命題は, 假定によって, $q-1$ に対して真であるから, 之を $(\Delta_0, G_0)$ に適用すると, $G_0$ の近傍で, 正則な函数 $c_i(x)$ を

$$\gamma_q=c_1 F_1+c_2 F_2+\cdots+c_{q-1} F_{q-1}$$

$$|c_i(x)|<K_1 M$$

となるように撰ぶことが出来る．ここに $K_1$ は (勿論 $(G)$ には dép. するが) $\Phi$ (及び $M$ ) に indép な正の数である．

各 $c_i$ に対し, Cousin の積分によって, $E'$ の近傍で正則な函数 $a_i(x)$ と, $E''$ の近傍で正則な函数 $b_i(x)$ とを $E_0$ の近傍で恒等的に

$$a_i(x)-b_i(x)=c_i(x) \qquad (i=1, 2, \dots, q-1)$$

となるように撰ぶことが出来る．所で, $(G', G'', G, G_0)$ の内点の集合は, それぞれ閉集合 $(E', E'', E, E_0)$ を含むから, それぞれ, $E'$ の近傍或は $E''$ の近傍で,

$$|a_i(x)| < K_2(K_1 M), \quad |b_i(x)| < K_2(K_1 M)$$

となるようにすることが出来る．ここに $K_2$ は $\Phi$ (及び $M$) に indép な正の数である．之は Cousin 積分の形から直ちに分ることである

$E'$ 或は $E''$ の近傍に於てそれぞれ $\Phi$ の次の表現 (3), (4) を考へる：

$$(3) \qquad \Phi = (\alpha_1 + a_1 F_q)F_1 + (\alpha_2 + a_2 F_q)F_2 + \cdots + (\alpha_{q-1} + a_{q-1}F_q)F_{q-1} + (\alpha_q - a_1 F_1 - a_2 F_2 - \cdots - a_{q-1}F_{q-1})F_q$$

$$(4) \qquad \Phi = (\beta_1 + b_1 F_q)F_1 + (\beta_2 + b_2 F_q)F_2 + \cdots + (\beta_{q-1} + b_{q-1}F_q)F_{q-1} + (\beta_q - b_1 F_1 - b_2 F_2 - \cdots - b_{q-1}F_{q-1})F_q$$

そうすると, 之等の $\Phi$ の表現に於て, $F_q$ の係数は $E$ の近傍に於ける同じ一つの正則函数 $\delta(x)$ を表はしていることが分る．又各係数の絶対値は, 夫々 $E'$ の近傍或は $E''$ の近傍に於て, 何れも $K_3 M$ より小である．ここに, $K_3$ は $\Phi$ (及び $M$) に無関係な正の数である．

それで今

$$\Psi = \Phi - \delta F_q$$

を考へると, $E_0$ の近傍で

$$|\Psi| < (1 + K_3)M$$

であって, $E'$ の近傍で

$$\Psi = \delta'_1 F_1 + \delta'_2 F_2 + \cdots + \delta'_{q-1}F_{q-1}$$

$E''$ の近傍で

$$\Psi = \delta''_1 F_1 + \delta''_2 F_2 + \cdots + \delta''_{q-1}F_{q-1}$$

の形に表はされる．ここに $(\delta'), (\delta'')$ は何れもそれぞれの部分で正則な函数であって, そこで

$$|\delta'_i| < K_3 M, \quad |\delta''_i| < K_3 M \qquad (i = 1, 2, \ldots, q-1)$$

である．

所で, このことは, $(E)$ と $(G)$ との間に $(H) = (H', H'', H, H_0)$ を置いてあったとすれば, $(H)$ の近傍に対して云へて居たのである．そうであったとすると, 此の結果に, 命題は $(q-1)$ に対しては真であると云ふ假定を適用すれば, $E$ の近傍で正則な函数 $\varepsilon_i(x)$ を求め, そこで恒等的に

$$\Psi = \varepsilon_1 F_1 + \varepsilon_2 F_2 + \cdots + \varepsilon_{q-1}F_{q-1}$$

であって,

$$|\varepsilon_i| < K_4 M \qquad (i=1,2,\ldots,q-1)$$

となるように出来る. ここに $K_4$ は $\Phi$ (及び $M$) に indép な正数である. 従って,

$$\Phi = \varepsilon_1 F_1 + \varepsilon_2 F_2 + \cdots + \varepsilon_{q-1} F_{q-1} + \delta F_q$$

$$|\delta| < K_3 M$$

が $E$ の近傍で成立する. C. Q. F. D.

此の補助定理から次の定理が出る：

Problème (1) は, 若し $(F)$ が性質 $(\mathrm{H}_0)$, (I) をもつならば, 筒状域 $\mathfrak{D}$ に関してはとける.

証明は容易かつ慣用的であるから省略する.

6. Problème (2) に移らう. 次の補助定理がある：

前節の補助定理の幾何学的状勢に於て, $\Delta'$ で正則有界な函数 $f_1(x)$ と $\Delta''$ で正則有界な函数 $f_2(x)$ とが, $\Delta$ で正則な函数の一組 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ に関し, $\Delta_0$ の各点で合同であったとする. 此の時, 若し $\Delta_0$ に於ける $(F)$ に関する問題 (1) が常に解けるならば, $\Delta'$ に於て $|f_1(x)| < M$, $\Delta''$ に於て $|f_2(x)| < M$ とすれば, 閉集合 $E$ の近傍に於て正則な函数 $\chi(x)$ を

$$|\chi(x)| < KM$$

となるように求め, $\Delta'$ 又は $\Delta''$ の ($E$ の近傍の) 各点に於て, 夫々

$$\chi(x) \equiv f_1(x) \quad ou \quad \chi(x) \equiv f_2(x) \quad \mathrm{mod}(F)$$

ならしめることが出来る. 此処に $K$ は $f_1(x), f_2(x)$ (及び $M$ ) に無関係な正数である.

証明　前節で述べたように $(G)$ を $(E)$ と $(\Delta)$ との間に考へる. 假定に依って, $\Delta_0$ に於ける $(F)$ に関する Problème (1) は $(\Delta_0, G_0)$ に関して常にとける. 所で,

$$\psi(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

を考へると, $\psi(x)$ は $\Delta_0$ で正則, $|\psi(x)| < 2M$ であって, 其の各点で $\psi(x) \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(F)$ であるから, 正則函数 $\alpha_i(x)$ を $G_0$ の近傍に於て

$$\psi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p,$$

$$|\alpha_i(x)| < K_1 M \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

となるように見出すことが出来る. 此処に $K_1$ は $\psi(x)$ (及び $M$ ) に無関係な正の数である.

かような $\alpha_i(x)$ に対し, 前節でみたように, $E'$ の近傍で正則な函数 $a_i(x)$ と, $E''$ の近傍で正則な函数 $b_i(x)$ とを

$$|a_i(x)| < K_2 M, \quad |b_i(x)| < K_2 M \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

であって, 恒等的に

$$a_i(x) - b_i(x) = \alpha_i(x)$$

となるように撰ぶことが出来る. ここに $K_2$ は $f_1, f_2$ (及び $M$ ) に無関係な正の数である. 之等によって

$$\chi'(x) = f_1(x) - (a_1 F_1 + a_2 F_2 + \cdots + a_p F_p),$$
$$\chi''(x) = f_2(x) - (b_1 F + b_2 F_2 + \cdots + b_p F_p)$$

を作ると, $\chi', \chi''$ は同じ一つの正則函数 $\chi(x)$ の部分である. 此の $\chi(x)$ は明らかに所求のものである. C. Q. F. D.

此の補助定理と前節の定理とから, 慣用の推理法によって, 次の定理が得られる (証明省略) :

Problème (2) は, $(F)$ が性質 $(\mathrm{H}_0)$, (I) を持つならば, 筒状域 $\mathfrak{D}$ に関してはとける.

7. 以上の經路を經て, 次の中間目標に到達する :

Lemme —空間 $(x)$ の有界筒状域 $\mathfrak{D}$ に於て正則な函数 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ を考へ, 固有集合体 $F_1 = F_2 = \cdots = F_p = 0$ の $\mathfrak{D}$ 内の部分を $\Sigma$ とする. $\Sigma$ を含む一つの開集合を $V$ とし, $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれる一つの筒状域を $\mathfrak{D}_0$ とする. 此の状勢に於て, $\Sigma$ が実在するものとして, $\varphi(x)$ を $V$ に於て正則有界な任意の函数とするとき, $V$ に於て $|\varphi(x)| < M$ とすれば, $\mathfrak{D}_0$ に於て正則な函数 $\Phi(x)$ を, $\mathfrak{D}_0 \cap V$ の各点で

$$\Phi(x) \equiv \varphi(x) \quad \mathrm{mod}(F)$$

であって, $\mathfrak{D}_0$ で

$$|\Phi(x)| < KM$$

となるように撰ぶことが出来る. ここに $K$ は, $\varphi(x)$ (及び $M$ ) に無関係な正の数である.

証明　有界筒状域 $\mathfrak{D}'$ を $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}' \Subset \mathfrak{D}$ となるように撰び, 開集合

$$(\Delta) \qquad (x) \in \mathfrak{D}', \quad |F_i(x)| < \rho \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

を考へる. 正数 $\rho$ を充分小さくとって, $\Delta \Subset V$ となるようにする. $y_i$ を複素変数とし, 空間 $(x, y)$ の固有集合体

$$y_i = F_i(x) \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

を考へ, 筒状域

$$(C) \qquad (x) \in \mathfrak{D}', \quad |y_i| < \rho \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

内の部分を $S$ とする.

今 $$G_i(x,y) = y_i - F_i(x) \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

とおけば, $(G)$ は筒状域 $(C)$ で性質 $(\mathrm{H}_0)$, (I) をもつ. $\varphi(x)$ は変数 $(x, y)$ の函数として考へると, $S \Subset U$ なる, 或る $\varphi(x)$ に無関係な開集合 $U$ で正則であって, ここで $|\varphi| < M$ であるから, $\rho_0$ を $\rho_0 < \rho$ なる充分小さな正の数とすると, 前節の定理に依って

$$(C_0) \qquad (x) \in \mathfrak{D}_0, \quad |y_i| < \rho_0 \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

で正則な函数 $\Psi(x,y)$ を, 此処で $|\Psi(x,y)| < KM$ であって, 特に $S$ の各点で $\Psi(x,y) \equiv \varphi(x) \mod(G)$ となるように撰ぶことが出来る. ここに $K$ は $\varphi(x)$ に無関係な正数である.

それで, $$\Phi(x) = \Psi(x, 0)$$

を考へると, $\Phi(x)$ は $\mathfrak{D}_0$ で正則であって, ここで $|\Phi(x)| < KM$ をみたし, 特に $\Sigma$ 上の各点で $\Phi(x) \equiv \varphi(x) \mod(F)$ となる. C. Q. F. D.

8. 以上で目的は既に達せられて居るのであるが, 此の機会に Problème (1) に関する対応する定理をのべて置かうと思ふ.

前定理 (Lemme) の状勢に於て, $\Phi(x)$ を $\mathfrak{D}$ に於て有界な正則函数とし, $\Sigma$ が実在する場合には, $V$ に於て有界な正則函数 $\alpha_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,p)$ が存在して, 恒等的に

$$\Phi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p$$

となるものとする. $\Sigma$ が空集合ならば条件は要らない. 然るときは, $\mathfrak{D}$ 或は $V$ に於て夫々

$$|\Phi(x)| < M, \quad |\alpha_i(x)| < M$$

とすれば, 正則函数 $A_i(x)$ $(i=1,2,\dots,p)$ を, $\mathfrak{D}_0$ に於て

$$\Phi = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p, \quad |A_i(x)| < KM$$

となるように見出すことが出来る. ここに $K$ は $\Phi(x)$ (及び $M$) に無関係な正の数である.

証明　前定理の証明の一部を其の儘使ふ. 但し, 此の度の $S$ は空集合かも知れないが, 其の時は $\rho$ を充分小さくして, $\Delta$ も亦実在しないようにする.

先づ $S$ が実在する場合を考へる. $\alpha_i(x)$ は $(x,y)$ の函数と考へると, $S \Subset U$ なる或る決った開集合 $U$ で正則であって, ここで $|\alpha_i(x)| < M$ であるから, 空間 $(x)$ の有界筒状域 $\mathfrak{D}''$ 及び正数 $\rho'$ を, $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}'' \Subset \mathfrak{D}', \rho' < \rho$ となるようにえらび, 筒状域,

$$(C') \qquad (x) \in \mathfrak{D}'', \quad |y_i| < \rho' \qquad (i=1,2,\dots,p)$$

を考へると, 前定理に依って, 正則函数 $a_i(x,y)$ $(i=1,2,\dots,p)$ を, $(C')$ に於て

$$|a_i(x,y)| < K_1M$$

であって, $(C')$ 内の $\Sigma$ 上の各点で

$$a_i(x,y) \equiv \alpha_i(x) \mod(G)$$

となるように求めることが出来る.

次に $S$ が空集合ならば

$$a_i(x,y) = 0 \qquad (i=1,2,\dots,p)$$

ととる.

かようにして

$$\Psi(x,y) = \Phi(x) - (a_1F_1 + a_2F_2 + \cdots + a_pF_p)$$

を考へると, $\Psi(x,y)$ は $(C')$ で正則であって, 此処で

$$|\Psi(x,y)| < K_2M,$$

$K_2$ は $\Phi(x)$ に無関係なある正の数, なる形の上界を持ち, 若し $\Sigma$ が実在すれば, $(C')$ 内の $\Sigma$ の各点で

$$\Psi(x,y) \equiv 0 \mod(G)$$

である.

正数 $\rho_0$ を $\rho_0 < \rho'$ となるように撰び, 筒状域

$$(C_0) \qquad\qquad (x) \in \mathfrak{D}_0, \quad |y_i| < \rho_0 \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

を考へる. $(G_1, G_2, \ldots, G_p)$ は筒状域 $(C')$ で性質 $(\mathrm{H}_0)$, (I) を持つから, 第 5 節の定理によって, 正則函数 $B_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots, p)$ を, $(C_0)$ で

$$\Psi = B_1 G_1 + B_2 G_2 + \cdots + B_p G_p, \quad |B_i| < K_3 M,$$

$K_3$ は $\Phi(x)$ に無関係な或る正の数, となるように見出すことが出来る. それで,

$$A_i(x) = a_i(x, 0) - B_i(x, 0) \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

を考へると, $A_i(x)$ は $\mathfrak{D}_0$ で正則であって, ここで

$$|A_i(x)| < (K_1 + K_3) M = KM$$

$$\Phi = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p$$

となる. C. Q. F. D.