Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables

VIII — Un problème d'existence intérieure

Par Kiyoshi Oka

Introduction — 此の前 Mémoire VII の序言で色々とお話ししましたことを思ひ出していただきたいと思ひます. 扨てそれがお済みになりましたら, 其の続きをお話ししませう. 此の度は第一に我々の研究の対象を面影に彷彿したいと思ふのです. そこで方法ですが, それには対象となる領域の姿を描写するのがよいかと私は考へます. その描き方は, 無窮遠だけは抜いて他を略々正確に素描し, 抜いた部分は想像で補ふことにしませう. それが丁度よく, そうすると段々その姿が浮んで来るように感じられますから. (Voir Nos 1, 2.)

一般に云って, 研究対象が面影に立つようにまでなりますと, それまでかくされて居た色々な問題の姿やさゝやきが, 次々に見えたり聞きとれたりして来るのが常であります. 現在の場合も勿論然うであって, Mémoire VII では, この同じ一つの状態に於て, そこから一二の方法と一つの未解決の問題とを取り出して, それについてお話ししたのでした.

私は H. Poincaré の提出した ≪ 数学上の発見は如何ようにして起こるか ≫ と云ふ問題に強い共鳴を感じ, 私の力の及ぶ限りこれを解決して置こうと決めて居るのであります. それでかような云ひ方を撰んでお話ししているのです. (Voir par exemple : フィヒテ, 全知識学の基礎)

扨てもとの純数学的分野にもどりますと, かような様々な問題が今私の眼裡に映っているのでありますが, 其の中から一つ取り出して, 第二にそれについてお話ししませう. それが表題の問題であります. 最初に目にうつった問題がこれであって, 新鮮, 重要, そして何よりも当初極めて困難に見えたのでありました. (Voir No 3)[1]

再び Poincaré の問題の方向へ行きませう. (此の問題を Problème P とよぶことにします). そうしますとこれと並んで次の問題のあることにお気づきになりませう :

Problème Q — ≪ 数学上の研究はどのように生ひ立つか.≫ (Voir par exemple : ジイド, にせ金作りの日記). この Problème P, Q の関係ですが, たとへば個体の発生は種属のそれを簡潔な筆致で繰り返して見せてくれますように, 此の二つの問題は非常によく似ているとしか感じられません. 私の経験では, どこをしらべて見ても皆然うです. それで両者は本質的には同じであると仮定しませう. むしろ飜へして, その同一の部分を以て, 二

[1] Où je dois l'idée à M. H. Cartan pour un nouvel mode d'application des séries de Laurent. Voir : Sur le premier problème de Cousin, 1937 (C. rendus).

者の本質を仮りに定義しませう. そうしますと問題は, 之等の Problèmes の適用上の長短に移りませう. それについてですが, Problème P は個人的に解くことは比較的易しく, 一般的に動かせない表現をして見せることは比較的むつかしく, Problème Q はその反対ではないかと, 私は今考へています. (私はまだこれについて, たとへば素材の集め方が充分でないため, 充分深く考慮する時機までは来ては居ません. ただ個人的の部分は, 時間を考慮に入れると, 比較にならぬ位違って来ます.)

再びもとにもどって, 上述の問題ですが, 私には,

この問題は必ず affirmative に解ける

ように予想されます. 勿論純数学的の理路を辿って云ふのですが, ほとんど書いて見てはいないのです. それでこれを今現にここで発表しますことは, 私にも大分勇気が要るのであります.

然し, それだからこそ, Problème Q の重要さのために, ここで告明して置くことに決めたのであります. かようにすることは Problème P とも直接の関係があるのでありまして, たとへば数学上の誤った発見は, 正しい発見に劣らず, 後の更に大きな正しい発見の発芽に, 非常に貢献するのがむしろ常態なのであります.

之等の Problème P, Q のために, 本文でも再三寄り路をして, 其の都度純数学的ではなくなりますが, これも許していただきたいと思ひます.

私は更に進んで, Problème P を遡り, Problème Q を下る等のこともして見たいと思って居ます. 定めて困難ではありませうが, 文化は何としても大事でありますから.

繰り返し数へますと, 此の前皆さまにお送りいたしましたのは, Théorie des fonctions analytiques に於ける方法が一二と問題兼予告が一つと問題群生の希望が一つとでありまして, これから御送りしたいと思って居ますのは, Théorie des fonctions analytiques に於ては姿の描写が一つと問題解決の予想が一つと外一二のものとでありまして, 其の他には, 広く文化の母体を究明したいと云ふ限りない憧憬をお添へしたつもりであります.[2]

[2]*かような釈ですから, 私が予告, 予想などいたします問題, 其の他何によらず御自由に研究, 発表下さいますことを希望いたします. (Voir M. H. Cartan, C. rendus 1939, t. 208, p.414)

**Problème P についての一つの記録 (以下には此の種の言葉は繰り返へしません.) : 一般的に云って私には (意は暫く抜いて申しますと), 知と情との数学上の発見或は論文の作成に於ける時間的関係は, 情の流れが先きに識域下にきまって, その後知がそれと同じ姿をとって段々意識の表層に現はれて来るように, 常に感じられます. 現に, 此の論文を書こうとして其の方向の努力を続けて居ますと, 始めに新しい詩形の歌仙型連句 (三十六句からなるもの) が三つ, ≪ 花ふぶき ≫, ≪ 沈鐘 ≫, ≪ 巷の声 ≫ が生まれました. その形を見ますに, 最初のものは大小さまざまの時の経歴を含むロンド形式であって, あとの二つはマーチ形式であります. これは, 心の底に渦巻き澱んで居た激情がここで始めて堰を切って流れ出したものと観察されます. 此の前の Mémoire VII は, かゝる点について云へば, 無我夢中で書いたのでありまして, この論文が Mémoire VI (1942) 以来, かような心の深みまで下って充分 analyser した最初のものですから, この現象が起るのはむしろ

1 – Domaines　先づ Mémoire I へ帰りませう. 初めにその序言をよく御覧下さい. 私達が何のような問題 (複数) を目標として出帆したかは其処に明記されて居ませう. そして私達は爾来一度もまた少しもそのコースを曲げて居ないのであります.

またそれらの問題をどこからどうして撰び出したかも明示されて居ませう. だがこれについては少し説明を加へます. 私が多変数解析函数の分野を研究対象として撰んだのはずっと前 1930 年であって, G. Julia 先生の所に於てでありました. 然し帰国後任地に図書室のないのに困じ果てゝ居たのですが, 1935 年に H. Behnke, P. Thullen 両氏によってさゝやかながらそれが与へられたのであります[3]. 当時著者がどんなによろこんでこの小冊子に読み耽ったかは, 其の扉に書き残されている言葉によっても分ります[4].

Mémoire I の思想は Mémoire VI までの諸論文の基礎となるのであって, これを姿に象徴したのが其の Théorème II であります. この姿を第一基礎的補助定理と名づけませう. これは上述の著書に網羅せられた諸研究の間隙を具象化したものであって, この途を手引きして呉れた唯一のものは A. Weil 氏の或る論文でありました[5].

次に Mémoire III へ参りませう. 私は此の論文を, Mémoire IV で詳しくお話しした問題, 正確に申しますと ≪ 有理凸状域と正則域とは全体として一致するかどうか ≫ と云ふことを決定しようとして, 其の唯一の手掛りと思はれる T. H. Gronwall の Exemple を, ともかく新しい照明の下に置いてみようと云ふ意図の下に企てたのでありまして, その目標は No. 2 の Exemple で既に達せられて居たのであります. それを直ちに発表することをしなかったのは, これと一対をなす然し遙かに困難と思はれた問題, ≪ 正則域と擬凸状域とは全体としては同じものかどうか ≫ と云ふことについては, 当時まだ私は何等の曙光をも認め得なかったためであります[6]. 従って Mémoire IV の本質は, 実にこの問題を敢へて取り扱ふと云ふ決意が, ここで再びしかも明確に公約されて居る点にあるのであります[7].

当然でありませう.

***ここで風樹会へ, 御援助について, 心からの感謝をのべさせていただきたいと思ひます.

[3]Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 1934.

[4]≪ 草花を写生して居ると造化の秘密が分って来るような気がする (子規).≫ ここに改めて H. Behnke, P. Thullen 両氏に心からの感謝を送りたいと思ひます.

[5]L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Annalen, 1935. (外に Cousin の第一問題に関する H. Cartan 氏の論文もあったのですが, Mémoire III で申しましたように, 上述の事情の下にあったため, 私は見落したのです.)

[6]Affirmative, négative の両面に汎って. たとへば Mémoire II の諸定理の如きは, 云はゞ物質の蓄積のようなものでありまして, 果して役に立つのだか, 全然役に立たないのだか全く予見出来ませんでしたから, ことさら粗末にする积ではありませんが, 光と云ふ気はしなかったのであります.

[7]私は, 数学の一つの問題に対して, 文献を探しても手掛りがないことが分ると, 心 (自,

扨て本問題に帰って, 私達の対象とする領域の姿を描写しませう. 先づ有限多葉領域を定義しなければなりませんが, これは大体上述の H. Behnke–P. Thullen の著書によるのが首尾一貫してよいと思ひます. 素描と云ひましたが, この種の領域の定義は始めてであって今後も絶えず要ることでありますから, ここでやゝ丁寧に述べて置くのがよいかと思ひます.

1° — 空間　$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を n 個の独立複素変数とするとき, 列 (順序をもった組合せ) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を空間と呼び, $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ を n 個の複素数値とするとき, 列 $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ を此の空間の点と呼びます. 二点 $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$ は $x'_i = x''_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の時に, かつこの時にのみ相等しい (égaux な) のであります. 空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を (x) によって, 点 $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ を (x') によって略記します.

二点 (x'), (x'') 間の距離として色々な正の数値 (二点が相等しければ 0) が考へられて居ます. たとへば $[\sum |x'_i - x''_i|^2]^{1/2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n$, 記号 $|A|$ は複素量 A の絶対値), これをユークリッド的距離 (又は時としては単に距離) と云ひます.

其の他色々な名称があります. たとへば (x') を時として此の空間の点の座標と云ひます.

かような空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を (有限) 複素空間と云ひ, n を其の複素次元と云ひます.

2° — 点　有限複素空間 (E_n) (n は複素次元) 上の一点の座標を (x) とするとき, (x, X) を空間 (E_n) 上の点とよびます. ここに X は或る一つのものであります. 二点 $P' = (x', X')$, $P'' = (x'', X'')$ については, 常にそれ等が相等しいか否かを一意的に判定することが出来ます. その際 $P' = P''$ であるためには, $(x') = (x'')$ (相等) でなければなりません. 然し X' と X'' とについては必しも相等しくなくてもよく, 単に同等 (équivalents) であればよろしい. (云ひ換へますと, (E_n) 上の点にはかような属性がなければなりません. そして其の各々の部分をさしてしかじかよぶのです, 以下同様です.)

たとへば, 複素変数 x の平面上に原点を中心とし, 2, 1 を半径として円周 C, C' を描き, 円環 (C, C') 上に点 P を次のように定義します : $P_0 = (x_0, 0)$, $x_0 = 1 + \frac{1}{2}$, $P = (x, \ell)$, ここに x は円環 (C, C') の点であっ

他, 又は世相) を探したり自然を探したりします. 此のときは, この問題を解けと云ふのは, まるで歩いて海を渡れと云ふようなものだと思ひましたから, あたかもよく颱風来の警報の出て居た三ヶ月頃の鳴戸の高渦を乗り切って見ようとしました. 1939 年の秋のことであって, 世相も亦似たものでありました. そして問題が解けたのは翌 1940 年の夏でありました. (Voir : Note sur les domaines pseudoconvexes, 1941, Proc. Imp. Acad. Tokyo.) Mémoire IV 及び此の Note の受理の日付が何れも非常に遅れていて, 研究生長の時間的な姿をすっかりひずませていますから, 正確な年月を書き添へて置いたのであります.

て, ℓ は x_0 と x とを (C, C') 内のみを通って結ぶような連続曲線であります. かような二つの連続曲線 ℓ, ℓ' は, 若し其の両端の位置が等しく且つ (C, C') 内のみを通るような連続変形によって相移すことが出来るならば, équivalents $(\sim)$ であると規定します. そうしますと円環 (C, C') 上に張られた, 函数 $\log x$ の Riemann 面が得られます.

空間 (E_n) 上の点 $P = (x, X)$ に対し, (E_n) の点 (x) を其の基点と云ひ, 普通 $\underline{P}$ を以て表します (時としては座標と云ひます, 名称はいつも色々です). 空間 (E_n) 上の点集合 E が与へられた時, 其の各点の基点の集合を E の基集合と云ひ, 普通 $\underline{E}$ で表します.

(E_n) 上の点集合 E が同じ座標の相異る点を持たないとき, E を単葉 (univalent) と云ひます. 単葉集合 $\mathfrak{D}$ は, 其の基集合 $\underline{\mathfrak{D}}$ が domaine であるとき, domaine であると云ひ, $\underline{\mathfrak{D}}$ を其の基領域と云ひます.

3° – 領域　空間 (E_n) 上の点集合を $\mathfrak{D}$ とし, $\mathfrak{D}$ の部分集合 V の集合 $\{V\}$ を concevoir し, 此の $\{V\}$ が次にのべるような 5 つの性質を持つものとします. 此のような $\{V\}$ が存在するとき, $\mathfrak{D}$ を (E_n) 上の領域とよび, V を其の近傍 (voisinage), $\{V\}$ を其の近傍系と名づけます. 5 つの性質とは :

1°　各 V は単葉である.

2°　$\mathfrak{D}$ の各点は何れかの V にぞくする.

3°　2 つの voisinages V_1, V_2 があって, 一点 P を共有するならば, P を含む voisinage V があって, V_1, V_2 の共通部分のみからなる.

4°　P_1, P_2 を $\mathfrak{D}$ の相異る 2 つの点とすれば, P_1 を含む voisinage V_1 と P_2 を含む voisinage V_2 とがあって, 之等は共通点を持たない.

5°　$\mathfrak{D}$ の二点 P_1, P_2 に対し, 常に, 有限個の voisinages $V_1, V_2, \ldots, V_m$ を撰らび, V_i と V_{i+1} とは $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$, 少くとも一点を共有し, P_1 は V_1 に P_2 は V_m に含まれるように出来る.

以上が性質であります. 此の第五の性質を欠いたものも時として domaine とよばれます. これを正確には domaine connexe ou non, 混同のおそれがなければ広義の領域 (domaine au sens large) とよびませう. 性質 1° – 4° から, 如何程でも小さな voisinage の存在することが容易に云へます.

此の voisinage なる conception の助けによって, 無限点列の極限点及び点集合の集積点なる conception を空間 (E_n) に於けると同様に定義することが出来ます. また極限点 (概念) によって, 2 つの領域 $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ の点の対応関係の連続性, 及び一つの領域 $\mathfrak{D}$ で定義せられた函数の連続性を規定することが出来ます. また集積点によって, 領域 $\mathfrak{D}$ の部分集合が閉集合であるか否かを規定することが出来ます. 次の定理があります :

≪ 閉集合には同じ座標を持つ点は有限個しかあり得ない.≫

証明は容易であります. 之から直ぐに, 閉集合に対しては Borel–Lebesgue の被覆定理が成立することが分ります.

領域 $\mathfrak{D}$ 上の単純曲線分 (segment simple de courbe continue) と云へば, 直線 (の線) 分と biunivoque et bicontinue な対応を持たせうるような ensemble fermé のことであります. 上に述べた domaine のみたすべき第五の性質は, 問題の点集合が connexe であること, 即ちその任意の二点を其の集合上を走る単純曲線分で結びうること, を以て置き換へても同じであります.

4° – 二領域間の関係　空間 (E_n) 上の二領域を $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ とします.—— $\mathfrak{D}_1$ と $\mathfrak{D}_2$ とが同等 (équivalents) であると云へば, $\mathfrak{D}_1$ の点と $\mathfrak{D}_2$ の点との間に biunivoque et bicontinue な correspondance を対応する一対の点が同じ座標を持つように立てうることを云ひます. この関係のあることを $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ で表します.

$\mathfrak{D}_1$ が $\mathfrak{D}_2$ を含むとは, $\mathfrak{D}_2$ の点が univoque et continue に $\mathfrak{D}_1$ の部分集合に対応し, 其の際対応する一対の点が同じ座標をもつように出来ることを云ひます. この関係を $\mathfrak{D}_1 > \mathfrak{D}_2$ で表します. この関係の一部分をぬき出して強調しますと, 云はば単葉領域の方が多葉領域より広いのです.

更に若し上の correspondance が biunivoque ならば, $\mathfrak{D}_2$ は $\mathfrak{D}_1$ の部分領域と云ひ, $\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}_2$ で表します.

若し $\mathfrak{D}_1 > \mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_1 < \mathfrak{D}_2$ (i.e. $\mathfrak{D}_2 > \mathfrak{D}_1$) ならば, 必然 $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ です.

$\mathfrak{D}_2$ が $\mathfrak{D}_1$ の完全内部 (complet intérieur) にあると云へば, $\mathfrak{D}_1 > \mathfrak{D}_2$ であって, $\mathfrak{D}_2$ の任意の無限点列に対応する $\mathfrak{D}_1$ の点列が $\mathfrak{D}_1$ 内に少くとも一つの極限点を持つことを云ひます. この関係を $\mathfrak{D}_1 \gg \mathfrak{D}_2$ で表します.

更に若し $\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}_2$ ならば, この関係を $\mathfrak{D}_1 \Supset \mathfrak{D}_2$ で表します.

$\mathfrak{D}_2$ が $\mathfrak{D}_1$ の倍域 (domaine multiple, Überlargerungsbereich) であると云へば, $\mathfrak{D}_1 > \mathfrak{D}_2$ であって, $\mathfrak{D}_2$ の任意の点 P_2 に対応する $\mathfrak{D}_1$ の点を P_1 とすれば, P_1 に始まり $\mathfrak{D}_1$ 内を走る任意の単純曲線分 C_1 に対し, $\mathfrak{D}_2$ に, P_2 に始まり $\mathfrak{D}_2$ 内を走る一つの単純曲線分 C_2 があって, C_1 に対応する $\mathfrak{D}_2$ の点のみからなることを云ひます.

次に, E_1, E_2 を同じ一つの領域またはそれぞれ二つの領域 $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ の点集合とするとき, E_1, E_2 の間に上と全く同様に次の諸関係を規定しませう :

$$E_1 = E_2,\ E_1 > E_2,\ E_1 \gg E_2,\ E_1 \supset E_2,\ E_1 \Supset E_2.$$

用語についても同様です. 全く同じだから繰り返しません.

5° – 再び近傍系について　私達は上に système de voisinages $\{V\}$ に

よって domaine を定義したのでした. 此の conception について再考しませう.

先づ, 出来るだけ広義に解すること, 云ひ換へますと, 性質 $(1^\circ - 5^\circ)$ を保存しながら出来るだけ制約を取り除くこと, を試みませう.

領域 $\mathfrak{D}$ があたへられたとして, P を $\mathfrak{D}$ の一点とするとき, P を含む $\mathfrak{D}$ の任意の部分領域を, 仮りに, 改めて ($\mathfrak{D}$ の) 点 P の voisinage と定義してみませう. かゝる voisinage を $U(P)$ を以て表すことにします.

此の système de voisinage $\{U\}$ について性質 $(1^\circ - 5^\circ)$ を点検しませう. 1° については問題はありません. $2^\circ, 4^\circ, 5^\circ$ については, これ等は éléments を追加しても保存されるたちの性質ですから, $\{U\}$ はもとの $\{V\}$ を含むからよろしい. それで残る問題は 3° だけですが, これについては次の定理があります :

$\ll$ 領域 $\mathfrak{D}$ の点 P の 2 つの voisinages を $U_1(P)$, $U_2(P)$ とする. そのとき, $\underline{\mathfrak{D}}_0$ を P を含む, $U_1(P)$, $U_2(P)$ の基領域の共通部分であるような領域とすれば, $\underline{\mathfrak{D}}_0$ 上にある $U_1(P)$ の点はすべて $U_2(P)$ にぞくする (及び逆).$\gg$

此の定理が成立すれば, $\{U\}$ は明らかに性質 3° を持ちます. それで証明ですが, これは $\{V\}$ が性質 3° を持つことから容易に出来ます. かように $\{U\}$ は性質 $(1^\circ - 5^\circ)$ を持ちます. それで $\ll$ 仮りに $\gg$ の文字を取り去ります. これ以上広義の定義があり得ないこと明らかであります.

次に, 逆に最も狭義の système de voisinage の定義について考へませう. 先づ分ることは, 此の言葉には明確な意味がないと云ふことです. でもこの方は習慣, 時, 場所等によって違って来ませう. それで正しく云ひ変へて, système de voisinage の一つの規準型を定めることについて考へませう.

P_0 を領域 $\mathfrak{D}$ の任意の一点とし, 其の座標を (x_0) とします. そうしますと, $U(P_0)$ 中には其の基領域が次の形の多円筒 (polycylindre) となるようなものが必ずあります : $|x_i - x_i^0| < r$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 勿論 r (> 0; $1, 2, \ldots, n$ に indépendant) は相当小さく撰らぶのです. かゝる $U(P_0)$ を voisinage élémentaire (要素的近傍) と呼びませう. 同じ点 P_0 にぞくする二つの voisinage élémentaire を U_1, U_2 とし, 半径を r_1, r_2 としませう. そうしますと, 若し $r_1 > r_2$ ならば, 上述の定理によって, $U_1 \supset U_2$ です. この systéme de voisinages はそれ故性質 3° をもちます. 性質 1°, 2°, 4°, 5° をみたすことは明らかであります. かように資格 (としての性質) の方はこれでよろしい.

上にみたことから, voisinages élémentaires $U(P_0)$ 中には半径最大のものがあってかゝるものは唯一つに限ることが, 直ちに分ります. これを P_0 にぞくする domaine élémentaire (要素的領域) とよびます. 之について次

の定理があります：

≪ 領域 $\mathfrak{D}$ があたへられたとき, $\mathfrak{D}$ にぞくする dénombrable な (可附番個の) points $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ を撰らび, P_i にぞくする domaine élémentaire の全体が $\mathfrak{D}$ を完全に覆ふように出来る.≫

証明に対して特別の困難はありません. Domaines élémentaires に関聯した一二の量の名を附加して置きませう. 領域 $\mathfrak{D}$ の点を P_0 としましたとき, P_0 にぞくする domaine élémentaire の半径を P_0 の境界距離 (distance à la frontière) と云ひ, $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}_0 < \mathfrak{D}$ であるような領域としましたとき, $\mathfrak{D}_0$ の任意の一点に対応する $\mathfrak{D}$ の点の境界距離の下端 (la borne inférieure, $\geqq 0$) を, $\mathfrak{D}_0$ の $\mathfrak{D}$ に関する最短距離 (distance minimum) と云ひます.

<u>6° − Intersections de domaines</u>　空間 (E_n) 上に領域の有限又は無限集合 $\{\mathfrak{D}\}$ が与へられ, 各 $\mathfrak{D}$ に其の点 $O_{\mathfrak{D}}$ と其の一つの (広義の, 以下すべてこの意味) voisinage $U_{\mathfrak{D}}(O_{\mathfrak{D}})$ とが与へられて居て, すべての $O_{\mathfrak{D}}$ は同じ基点 $\underline{O}$ を持ち, すべての $U_{\mathfrak{D}}(O_{\mathfrak{D}})$ は同じ基領域 $\underline{U_{\mathfrak{D}}}(\underline{O_{\mathfrak{D}}})$ をもつとします. このとき領域 Δ が次の性質を持ったとしませう：

1° Δ はすべての $\mathfrak{D}$ に含まれる.

2° Δ に対応する $\mathfrak{D}$ の部分 $\Delta_{\mathfrak{D}}$ は点 $O_{\mathfrak{D}}$ を含む.

3° この二つの性質を持つすべての領域は Δ に含まれる.

これが性質であります. このとき, 領域 Δ を領域の集合 $\{\mathfrak{D}\}$ の点集合 $\{O_{\mathfrak{D}}\}$ に関する intersection (共通領域) と名づけます.

<u>存在の証明</u>　$Q = \{P_{\mathfrak{D}}\}$ を考へませう. ここに $P_{\mathfrak{D}}$ は集合 $\{\mathfrak{D}\}$ の領域 $\mathfrak{D}$ の点であって, 次の条件をみたすのです： 1° どの $P_{\mathfrak{D}}$ も同じ基点 $\underline{P}$ をもつ. 2° 集合 $\{\mathfrak{D}\}$ の任意の領域 $\mathfrak{D}'$ に対し, $\mathfrak{D}'$ の一つ唯一つの点 $P_{\mathfrak{D}'}$ が集合 $\{P_{\mathfrak{D}}\}$ 中にあって, 此の $P_{\mathfrak{D}'}$ に一つの voisinage $U_{\mathfrak{D}'}(P_{\mathfrak{D}'})$ があって, どの $U_{\mathfrak{D}'}(P_{\mathfrak{D}'})$ も同じ基領域 $\underline{U}(\underline{P})$ を持つ. 此のとき Q を $\mathfrak{D}_0$ の点と呼びます. $\mathfrak{D}_0$ の二点 $Q' = \{P'_{\mathfrak{D}}\}, Q'' = \{P''_{\mathfrak{D}}\}$ は, $\{\mathfrak{D}\}$ の各領域 $\mathfrak{D}'$ に就て, $P'_{\mathfrak{D}'} = P''_{\mathfrak{D}'}$ の時に, かつこの時にのみ相等しいと規定します. そうしますと, $\mathfrak{D}_0$ は空間 (E_n) 上の点集合を作ります.

$\mathfrak{D}_0$ の二点 Q', Q'' が contigus (隣接) であると云ひますと, それは各 $\mathfrak{D}'$ に voisinage élémentaire があって, それが $P'_{\mathfrak{D}'}, P''_{\mathfrak{D}'}$ を含んで居て, 其の基領域が空間 (E_n) の決った多円筒であることを意味します. $\mathfrak{D}_0$ の二点 Q', Q'' は, $\mathfrak{D}_0$ に有限個の点 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ を撰らび, (Q', Q_1), (Q_1, Q_2), $\ldots$, (Q_m, Q'') が何れも contigus であるように出来るとき, connexes であります. 次のことは最早や明らかでありませう：$\mathfrak{D}_0$ の, 互に connexes な点の全体は, すべて領域を作る.

$\mathfrak{D}_0$ は一般に多くの領域に分れます. 所で, 与へられた点集合 $\{O_{\mathfrak{D}}\}$ は $\mathfrak{D}_0$ の点 O を規定します. それで Δ としては, 之等の領域の中, 此の O

を含むものをとればよろしい. 此の Δ は明らかに求められた諸条件をみたします. C. Q. F. D.

上に述べた $\mathfrak{D}_0$ は広義の領域であります. これを領域の集合 $\{\mathfrak{D}\}$ の広義の intersection と呼びませう. 各 $\mathfrak{D}$ を広義の領域としても同じであります.

<u>7° — 境点</u> 空間 (E_n) 上に領域 $\mathfrak{D}$ があり, $\mathfrak{D}$ に其の点の無限列 $P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$ があって, $\mathfrak{D}$ 内に point limite を持たず, 次の条件をみたしたとしませう： 1° 基点 $\underline{P_1}, \underline{P_2}, \ldots, \underline{P_m}, \ldots$ は (有限の) 点 $\underline{M}$ に収斂する. 2° $\underline{M}$ の任意の voisinage $\underline{U}(\underline{M})$ に正数 m_0 が対応し, $m_1, m_2 > m_0$ である (共に然うである) ような点列の任意の二点 P_{m_1}, P_{m_2} は常に, $\mathfrak{D}$ 内を通り其の基集合が此の $\underline{U}(\underline{M})$ 上にあるような単純曲線分によって結ぶことが出来る. 此の時 $M = (P_1, P_2, \ldots)$ を $\mathfrak{D}$ の一つの point frontière (境点) とよびます. $M' = (P'_1, P'_2, \ldots)$, $M'' = (P''_1, P''_2, \ldots)$ を $\mathfrak{D}$ の二つの境点としませう. $M' = M''$ (相等) を次のように規定します： 1° 之等の基点列が同じ (空間の) 点 $\underline{M}$ に収斂し, 2° $\underline{M}$ の任意の voisinage $\underline{U}(\underline{M})$ に正数 m_0 が対応し, $m_1, m_2 > m_0$ であるような, 点列 (P') の点 P'_{m_1} と (P'') の点 P''_{m_2} とが, 常に, $\mathfrak{D}$ 内を通り其の基集合が此の $\underline{U}(\underline{M})$ 上にあるような単純曲線分によって結ぶことが出来ること.

$\mathfrak{D}$ の部分領域 Δ (特に, 特別の場合として voisinage U) が M を境点としてもつとは, Δ の点のみによって (無限点列を作りそれによって) M を表しうることを云ひます.

領域 $\mathfrak{D}$ の一つの境点を M とし, M の基点 $\underline{M}$ を含む一つの基領域 (空間の領域) を $\underline{W}$ としませう. このとき, M を境点とするような $\mathfrak{D}$ の何れかの voisinage にぞくし, 其の基点が $\underline{W}$ にぞくするような $\mathfrak{D}$ のすべての点の集合を, 境点 M の voisinage と呼び, $W(M)$ を以て表します. $W(M)$ は $\mathfrak{D}$ の部分領域です.

領域 $\mathfrak{D}$ の点又は其の境点からなる無限点列が与へられたとき, これが一つの境点 M に収斂するとは, M の任意の voisinage $W(M)$ に対し, 点列のある所から向ふの点は, 若しそれが $\mathfrak{D}$ の点ならばすべてこの W にぞくし, 若しそれが境点ならば W の点のみによって表しうることを云ひます.

此の収斂の (概念の) 助けによって, 一方を領域の境界 (界点の集合) とする対応の連続性, 及び境界上で定義せられた函数の連続性を規定することが出来ます.

<u>2 — Domaines pseudoconvexes</u> 擬凸状域については Mémoire VI である特別の場合について一度定義しました, それを今の場合に拡張しようと云ふのでありますが, その際 2 変数と制限した方はこれを取り去っても

余り影響しないのですが, 云ふ所の単葉の方はとろうとすると相当に響きがあります.

先づ言葉が問題になります. Mémoire VI に於ては, 直かに空間 (x) に於ける領域を取り扱って居るのであります. それでは $\mathfrak{D}$ の境点とは何を意味するかと云ひますと, これについては此の論文のどこにも明記されて居ないようであります. それでそれまでの諸論文を記憶に辿って見ますに, 境点の定義についてはまだ何も云って居なかったようであります. そうしますと, $\mathfrak{D}$ の一つの境点と云ひますと, その座標を持った点一つしかないと解する外はないのでありまして, 特に $\mathfrak{D}$ が有界ならば, $\mathfrak{D}$ の境点の集合, 云ひ換へますと境界は常に閉集合であります.

次に, これが今の場合でありますが, 矢張り単葉領域をとって, 有限複素空間 (x) 上の単葉有界領域 $\mathfrak{D}$ については, 上述の定義に従ふとそこがどうなって来るかを例によって調べませう.

Exemple 1 — $\ll$ 複素変数 x の描く空間 (x), 云ひ換へますと x 平面上に, 円 (C) を描き最上の点を A 最下の点を B とし, 左方の弧 AB, と云へば A も B も含まれるのですが, 其の上に無限点列 $B_1, B_2, \ldots, B_i, \ldots$ を B から A に向ふように, A には達しないように, そして A を極限として持つようにとります. 線分, と云へば直線のそれであって, 矢張り閉集合なのでありますが, 線分 AB_i $(i = 1, 2, \ldots)$ を引き, 其の中点を C_i とします. 円周 C と線分 AC_i $(i = 1, 2, \ldots)$ とで囲まれた有界領域を Δ としませう.

この A でありますが, Δ の境点として見ますと, 定義によって A は最早や一点ではありませんから, 前の A の座標をその座標として持つ点を記号の規約に従って $\underline{A}$ で表しませう. そうしますと $\underline{A}$ には Δ の境点が無限個重なっています. その極限について考察しませう.

先づ, かかる点があるとして仮りに之を B_0 で表しますと B_0 は二つとはあり得ないことが直ちに分かります. 次に本当にあるかどうかと云ふことですが, 若し実在すれば, B_0 は近傍を持つ筈でありますが, そのようなもののあり得ないことも明白であります. それ故 B_0 は実在しないのであって, 従って Δ の境点は閉集合ではありません. $\gg$

かように, 空間 (x) 上の領域 $\mathfrak{D}$ の境点の集合は, $\mathfrak{D}$ が単葉有界であるときでさえも, 既に必しも閉集合をなさないのであります.

この点が明瞭になりましたから, 後はただ, 今の場合には, Mémoire VI のときのように領域の補集合は一般には concevoir 出来ないことに注意して, この言葉を避けさえすればよろしい.

定義 — $\ll$(有限複素) 空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ (connexe ou non, ou connexe) が 連続定理をみたすとは, 次の条件がみたされることである. 空間 (x) 上に点 (a) を中心とし, 半径 r_i, ρ_i, $\rho_i < r_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を以て, 多円筒

(C), $|x_i - a_i| < r_i$ と, 次の二つの条件の少くとも一方をみたす点の總てからなる領域 Δ とを考へる：

$$
\begin{array}{llll}
(\Delta) & |x_j - a_j| < \rho_j, & |x_n - a_n| < r_n & (j = 1, 2, \ldots, n-1) \\
\text{ou} & |x_j - a_j| < r_j, & \rho_n < |x_n - a_n| < r_n & (j = 1, 2, \ldots, n-1)
\end{array}
$$

若し領域 $\mathfrak{D}$ が, 或る一対の (C), Δ に対し, Δ と同等な部分領域を持つならば, $\mathfrak{D}$ は必ず, (C) と同等であって上の部分領域を其の一部分とするような部分領域を持つこと.≫

領域 Δ は明らかに線的単連結である. 詳しく云へば, Δ 内に引いた閉曲線は常に, Δ 内のみを通るような連続変形によって, Δ の一点に持ち来すことが出来る. 若し, それで, $\mathfrak{D}$ が Δ の倍域を持つならば, それは必然単連結であって, 従って Δ と同等である. 又, 連続定理をみたす二つの領域の (広義の) intersection を考へるならば, それは同じ性質をもつ.

定義 — ≪ 空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ (広義又は狭義) を, 次の二つの条件をみたすとき擬凸状域 とよぶ： 1° $\mathfrak{D}$ に対し正数 r_0 が附随し, M の基点 $\underline{M}$ を中心とし r_0 を半径とする多円筒を (γ) とするとき, $\mathfrak{D}$ と (γ) との intersection (広義又は狭義) を $\mathfrak{D}_0$ とすれば, $\mathfrak{D}_0$ が連続定理をみたすこと. 但し, r_0 は如何程小さくてもよいが, その代り, $\mathfrak{D}$ のみによって定まり, 境点の如何によって変ったりしてはならないこと. 2° (γ_1) を, $\underline{M}$ を中心とし (γ) に含まれるような多円筒とし, $\mathfrak{D}_1$ を, $\mathfrak{D}$ と (γ) との広義の intersection とし, (T) を, (γ_1) を空間 (x') 上の単葉領域に写像するような一対一擬等角変換とし, $\mathfrak{D}'_1$ を (T) による $\mathfrak{D}_1$ の写像とすれば, $\mathfrak{D}'_1$ は常に, 座標 (x') に関して連続定理をみたすこと. 一言に云へば, 性質 1° が擬等角変換によって失はれないこと.≫

これが定義であります. 所で, r_0 でありますが, これはかように規定した以上, いくら小さく決めてもよいのですから其の意味では局所的と云へますが, 境点と共に変ったりしてはならないのですから完全な意味に於ては然うは云へないのであります. 局所的と云ふ言葉 はここではこの意味に解さなければなりません.

私は, この擬凸状域の定義は, この時機のものとしては, 最も一般であると思ふのであります. ここを超えて一般にしますと, 何のためにわざわざ分岐点を抜いたのだか (説明の順序から云へば分岐点はまだ領域の内点に数へてはいませんが), それが分らなくなってしまふような問題に遭遇することになるのでありまして, このことは, いづれ大分後になるかと思ひますが, 将来の論文で御説明します.

所で, Mémoire VI では, 私自身境点を余り重要視して居なかった証拠として, No.11 の ≪Soit $\mathfrak{D}$ un domaine pseudoconvexe à l'espace (x, y), soit $R_y(x)$ le rayon de Hartogs par rapport à $\mathfrak{D}$. La fonction

$\varphi(x,y) = -\log R_y(x)$ est peudoconvexe dans $\mathfrak{D}$, (détermination du logarithme étant réelle).≫ と云ふ定理の証明がよくみると不充分なのであります[8].

これで内分岐しない有限多葉擬凸状域が定義出来たのであります. 次には分岐点を取り入れなければなりません. どの程度にそうするかと云ふことですが, VII の序言で申しましたように, 代数函数や局所的にはこれと実質的に同一の函数 (擬代数函数) の Riemann 面を (分岐点を境点と看做さないで) 取り扱ひうる丁度その程度に然うするのがよいと思ひます.

そのため先づ分岐点を定義します. それには先づゆかりの Behnke–Thullen の著書へ行くのがよいでせう. そうしますと, 其処には :

定義 — ≪ 空間 (x) 上に領域 $\mathfrak{D}$ があって, 其の一つの境点が M である. このとき, 若し M の近傍がすべて 非単葉 ならば, M を $\mathfrak{D}$ の 分岐点 と呼ぶ.≫

かようにも一般な定義から始めて居ます. これはそのまゝ取り入れませう. 次に分岐点の order を定義して居るのですが, 仕方はそのまゝとりますが, order が何故か普通とは違っているのですが, これはもとにもどします.

定義 — ≪ 上の定義に於て, 分岐点 M が近傍 $W_0(M)$ を持って居て, この $W_0(M)$ に含まれる任意の近傍を $W(M)$ とすれば, 之に対して空間 (x) に少くとも一点 $\underline{P}$ があって, その上に $W(M)$ の丁度 m 個の点が重なって居て, $\underline{P}$ をどう動かしてみても m 個以上の場合が起らないとしませう. 分岐点 M がかような近傍 $W_0(M)$ を持つとき, $(m-1)$ を M の order (階数) と呼びます. この際 $m = \infty$ をも排除しません.≫

≪ 分岐点が与へられたならば, 其の order は常に一意的に決まる.≫

これは容易に分ります.

これで一般の場合の分岐点が定義出来ました. 次に, これを丁度よい (特殊性の) 所まで持って来なければなりません. 所で, Behnke–Thullen は次は一足飛びに ≪uniformisierbar≫ まで行って了っています.

このあたりの消息を一応御説明しようと思ふのですが, その前にこの辺で私達の使ひ慣れて来た次の言葉をまた取り入れることにしませう :

≪ 或る現象が或る点 P の近傍で起る ≫ と云へば, それは, P の近傍 $U(P)$ をどれ程小さく指定しても, $U(P)$ は少くとも一つの近傍 $V(P)$ を含んで

---

[8] それでは, どう補へばよいかと申しますと, この $\mathfrak{D}$ は ≪ 有界 ≫ とみて少しも支障ないのでありまして, そうしますと上の定理は ≪ 境界に充分近い $\mathfrak{D}$ の部分では ≫ と云ふ制限をつけさへしますと, 証明法はそのままでよいのです. これ等の制限をつけたまゝ最後まで行けば, これ等は自然に消滅します. 不注意で済みませんでした.

いて, 現象 (A) が $V(P)$ で起こると云ふ意味であって, 点 P の代りに点集合をとっても同様であります.

空間 (x) 上に領域 $\mathfrak{D}$ があって, 其の一つの分岐点が M であります. M の近傍が uniformisierbar であったとしませう. そうしますと, M の近傍は勿論線的単連結であります. 詳しく申しますと, 近傍 $U(M)$ をどれ程小さく指定しても, 必ずこれに含まれるような近傍 $V(M)$ があって, $V(M)$ 上に, M を通らないように描いた任意の閉曲線は, 常に, $V(M)$ 上に於て M を通らないように連続変形して, $V(M)$ の一点にしてしまふことが出来る, ことになります. 所で, 代数函数や擬代数函数の Riemann 面はどうかと云ふに, 一般に然うではありません. このことはよく知られては居るのですが, W. F. Osgood の教科書の例[9] は非常に複雑ですし, 私は他に例を知りませんから, 簡潔な一例を挙げて置きませう.

Exemple 2 — ≪2 複素変数の空間 (x, y) 上に代数函数 $\sqrt{xy}$ の描く Riemann 面 (4 実次元, これは面と云ふ方感じがよく出ますから), (R) を考へ, $(0, 0)$ 上の分岐点を調べませう. これは一つしかありません, それを O とします. 函数 $\sqrt{y}$ を考へますと, これは (R) 上で, O の近傍で明らかに 2 価です. 所で, この函数は (R) の分岐面上の各点で, O を除いて, 明らかに正則ですから, (R) の O の近傍は線的単連結ではありません. 若しそうならば, この函数は一価になるからです.≫

かように, ≪uniformisierbar≫ な分岐点群だけを規定したのでは, 遙かに特殊すぎて私達の目的に合はないことが分りました. それで, それならば何のような分岐点群を規定すればよいかと云ふ問題が次いで起るわけであります. そして一般の場合には, かようにして探究の新過程が始まるのでありませう. 然し目下の場合には, 丁度都合よくモデルとして擬代数函数の Riemann 面が眼前にあるのですから, 私達は唯それを描写 (正確に云ひますと, それから適当に抽出) すれば足ります. 実際やってみませう :

定義 — ≪ 有限複素空間 (x) 上に領域 $\mathfrak{D}$ があって, 其の境界上に一つの分岐点 M がある (とします). M は次の 3 つの条件がみたされるとき, non-transcendent (非超越) であると呼ばれます :

1° M は ordre fini であること.

2° M の近傍は擬凸状であること.

3° M の近傍の分岐点の基集合 $\underline{\sigma}$ は固有面であること.≫

固有面 についての一般の定義は将来の論文に譲ります. 上に云ふ意味は, $\underline{\sigma}$ 上のどの点をとっても, その近傍で $\underline{\sigma}$ は有限個の正則函数の共通零点の集合 として表されると云ふのです. ≪ 以下単に固有面と云へばすべ

[9] Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1, 1929 (pp 150-153).

てこの意味に解して下さい.≫ 尚, この際は分岐点 M の近傍の云はば広狭は, M と共に変って支障ないのであります.

これで一応 non-transcendent な point critique の名称及び定義が得られました. 正確に云ひますと, その定義はこれで充分です. 然し, 詳細に調べますと, 第二条件と第三条件との重複度の大きいことが何うしても目について, provisoire な définition と云ふ感じをどうすることも出来ません. 実際は, 次のように定義しても尚充分なのであります. 一般に云って, ものゝ姿は繰り返して居る中に段々はっきり浮び出て来るものでありますから, 始めから繰り返し述べませう.

<u>定義</u> — ≪ 有限複素空間 (x) 上に領域 $\mathfrak{D}$ があって, 其の一つ分岐点が M であります. M は次の 3 つの条件をみたすとき, <u>point critique non-transcendent</u> と呼ばれます:

1° M は ordre fini であること.

2° 空間 (x) の座標を適当に撰らび変へてそれを同じ文字 (x) で表しますと, M の基点 $\underline{M}$ を中心とする多円筒 (γ) が, 半径 (複数) をどれ程小さく限定しても, 必ず撰ぶことが出来て, (γ) と $\mathfrak{D}$ との intersection を V としますと, V は擬凸状域であること.

3° 同じ V について, V 内の分岐点の集合を σ とし, σ の基集合 $\underline{\sigma}$ の任意の点を (α) とし, 空間が n 複素次元であるとして, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta)$ が $\underline{\sigma}$ の点であるような β の全体を考へますと, それは若し存在すれば有限個であること.≫

どうして此の二つの定義の同等が云へるかと申しますと, 私の Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc. (1934) の No.9 の Théorème 5 に依ってです[10].

所で, 此の証明は一寸長くなりそうですから, 將来の論文では先づ第一の定義を採用し, 次に, と云っても必しも引き続いてと云ふ意味にはならないかも知れませんが, 第二の定義によって置き換へることにしようかと考へています[11].

[10] 此の論文 (予報の原文, これは今も手許にあります) は其の大部分を 1931 年の秋ジェネバ湖畔でして, Théorème 6 だけは, 参考書 (R. Baire の Fonctions discontinues) が手許になかったから巴里へ帰ってからしたのでした. 尤も Partie I の腹案は其の前に出来ていたのでした. (尚, 此の Note については Mémoire VI の Introduction 参照).

[11] 此の Note の第一の脚註で ≪Les détails seront publiés tout prochainement≫ と公約しながら, いまだにそれを果していないことをお許し下さい.

実は出さうと思って居ましたとき, 丁度 Behnke–Thullen の著書が手に入りましたので, 前に申しましたように, それまで完備した図書室が近くになくて途方に暮れていました私は, 大喜びでそれに読み耽って居ます中に, それが後の ≪Mémoire I, II, V 及び VI の Partié III 等の母体 ≫ になるのですが, 段々色々なものが見え初めて来て, とうとう書けなくなって了ったのでした. 当然重要なものから先きに出して行かなければならないからでありまして, この状態は尚当分つづくと考へられます.

これで非超越分岐点が定義出来ました. 其の全体について簡単に御説明しませう. 有限複素空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 上に領域 $\mathfrak{D}$ があって, 其の非超越分岐点の集合が σ であります. そうしますと, σ は $\mathfrak{D}$ の境界上に於ける $(n-1)$ 複素次元の固有集合体 (variété caractéristique), 云ひ変へますと固有面 (surface caractéristique) であって, σ には超越的な境点はありません. それで σ はいくつかの解析的連結成分 (composantes connexes analytiques) σ_1, σ_2, ... に分けることが出来ます. 其の数は, 0, 1, ..., ∞ であって, 常に dénombrable であります.

これらの言葉は何れ将来の論文で正確に規定しますが, その説明を抜いても, 云ふ所は大体お解りになると思ひます. 特に, 二義的に解されるおそれは無いと考へます. 尚, 念のために, 解析的連結性を例によって御説明しますと, 2 複素変数の有限空間 (x, y) に於て, 方程式 $xy = 0$ によって表される固有面は, 集合論的には connexe ですが, analytique にはそうではなく, 二つの連結成分 $x = 0$ と $y = 0$ とに分れます.

次には, 論理的な順序としては, 一般の領域の概念を内分岐することを許容することによって拡張すべきでせう. 実際その積りで準備として先づ非超越分岐点を定義したのでありまして, これに先立って擬凸状域を内分岐しない領域の概念の上に定義しましたのは, かゝる分岐点をそれを使って定義する為でありました.

然し, ここで今一度よく考へ直して見ませう. 私達は研究対象の姿を彷彿するのが目標であって, (対象となる) 領域を撰んだのは材料として最も適当と思はれたからに過ぎません. また, 描き方も, 其処への直線コースを急ぎ足に通って居るのであって, 領域についての第一の定義や擬凸状域の第一定義は別ですが, 以後は正確な定義とは云へません. 所で, 一般の領域を拡張することは, 擬凸状域を拡張する為の前提であるに拘らず, 実際やってみようとしますと, 此の前提の方が少しではありますが面倒なのであって, しかもいらないのであります. それでこの論理的 step (Extensions des domaines) は暗黙の中に済まされたと看做して次へ移りませう.

定義 — $\ll$ 有限複素空間 (x) 上の擬凸状域を $\mathfrak{D}'$ とし, 其の非超越分岐面 (かゝる分岐点の集合) を σ とし, σ の解析的連結成分のいくつかからなる集合を σ' とする. 但し σ' は空集合でもよく, 又 σ と一致してもよい. $\mathfrak{D}'$ と σ' とからなる集合を $\mathfrak{D}$ とする. 今後かような $\mathfrak{D}$ をも領域と看做して (実は上に既に然うしてしまったのであるが), これを 改めて擬凸

また別の方面から考へましても, 上の公約を文字通りに果たせるときは遂に来ないだらうと思ひます. 理由の一つだけを申しますと, 後に書く論文中に前に出来ているものを取り入れます場合には, それが精密度に於て足りなければ補ふことに努力すればよいのだからよろしいが, 反対に精密すぎる場合には, 其の度を下げて略々必要充分にまでしてから入れませんと, 云はば凸凹した道がついてしまふからであります. 迂闊に公約などするからこう云ふことになって了ったのですが, 上に申しました通り原論文は手許に保存してあります.

状域とよぶ.≫

始めに申しましたように, これに無窮遠を想像で補って眺めると, 研究対象がほのかに浮び出て来るような気がします.

3 – Problème　これで研究対象の姿が描写されました. これを色々にみていますと, 新しい問題が次々に見えて来るのでありますが, 序言でお話ししましたように, 最初に私の目についたのは次のものでありました：

Problème — ≪ 有限空間 (x) 上の一つの domaine pseudoconvexe (étendu) を $\mathfrak{D}$ とし, $\mathfrak{D}$ は non-transcendent な分岐面を内部にもつとしてこれを σ とし, σ 上の一点を M とする. このとき M の近傍を自身の Riemann 面として持つような有界な解析函数が常に存在するか.≫

この問題が始めて目についた頃に帰って, 皆さまと御一緒に考へて行くことにしませう. そうしますと研究対象の性質も段々分って来ますから. 先づ：

Exemple 3 — ≪ 次のように自問してみませう：
≪ 有限空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 上に抽象的に定義せられた Riemann 面を (R), (R) 上の一点を O とし, O を通る分岐面の, 基面の (解析的連結成分の) 本数を m, 階数 (詳しく云へば O 以外の各分岐点のそれ) を 1 とする. 其の時, (R) の葉数 ℓ は n と m とできまる上界 (borne supérieure) $B(n,m)$ を持つかどうか, i.e. $\ell < B(n,m)$? また若し持たないとすれば, その現象の始めて起る $(n,\, m)$ 等如何.≫

先づ (説明は, 長くなりますし直接の必要はありませんから, いたしませんが), 図式的に考察しますと, $B(n,m)$ は一般には存在しないだらうと予想されます. またこの現象は, すべてを正則, 詳しく云ひますと分岐基面の成分はすべて $\underline{O}$ に於て正則であって, 其の交り方もここで接したり等しない, としますと, $n=2$, $m=4$ で起るだらうと予想されます.
然しここでは, かような方法で実際に例が出るまで遂及するやり方をやめて, 全く別の行き方をしてみませう.

先づ, 二つの複素平面または其の上の Riemann 面の間の等角写像について記憶を探りますと, 同心円群と其の共通中心を通る直線群とからなる直交曲線系 (système de courbes orthogonales) を共焦点楕円群及び双曲線群に移すものが思ひ浮かびます. それをしらべます. また逆三角函数を思ひ浮かべ, それをも調べてみませう. そうしますと, 次に, この二つは次の点で一致することに気がつきませう：

$$x = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

次に, この transformation に一二の工夫を加へ, posons :

$$(1) \qquad x = \sqrt[m]{y + \sqrt{y^2 - z^{2m}}} \qquad (m \textit{ étant entier positif}).$$

Examinons : 文字の意味は (y, z) は独立複素変数の空間, x は函数値の平面であります. 函数を $x = f(y, z)$ としますと, これは代数函数であります. 空間 (y, z) 上にこの函数 $f(y, z)$ が張る Rimann 面を考へ, (R) としませう.

1° (R) は $2m$ 葉です. 然し, connexe かどうか (詳しく云ひますと $f(y, z)$ が single analytic fn を作るかどうか), それはまだ分りません. 然し, そうであろうと云ふことは逆三角函数と Exemple 2 とから予想されます.

2° (R) の分岐基面を $\underline{\sigma}$ としますと, $y = \pm z^m$ はたしかに $\underline{\sigma}$ にぞくします. それ以外に ($\underline{\sigma}$ にぞくするものが) あるとすれば, それは $y + \sqrt{y^2 - z^{2m}} = 0$, i.e. $z = 0$ だけです. それでここをよく調べませう. 今, y_0 を $y_0 \neq 0$ であるような y の任意の定値とし, 空間 (y, z) の点 $(y = y_0,\ z = 0)$ の近傍のみをみませう. そうしますと

$$y + \sqrt{y^2 - z^{2m}} = y \left[1 \pm \left(1 - \frac{z^{2m}}{y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

であって, これはこの点を中心として séries de Taylor に展開出来ます. 二重符号 $\pm$ の中 $+$ に応ずる函数の諸分枝は勿論この点の近傍で正則ですから, $-$ に応ずる方だけをしらべますと, これは次の形です :

$$\begin{aligned} &= y \left[a_1 \Big(\frac{z^{2m}}{y^2} \Big) + a_2 \Big(\frac{z^{2m}}{y^2} \Big)^2 + \cdots \right] \\ &= z^{2m} \left[a_1 \frac{1}{y} + a_2 \frac{z^{2m}}{y^3} + \cdots \right]. \end{aligned}$$

それ故, $f(y, z)$ のこの方 (この $-$ 符号に応じる方) の諸分枝も, $(y_0, 0)$ の近傍に於て正則です. ここに y_0 は 0 と異る任意の値ですから, $z = 0$ は $\underline{\sigma}$ にぞくしません.

故に $\underline{\sigma}$ は $y = \pm z^m$ だけです. 之は二本の正則な固有面です. 然し, 此の二本は, $m > 1$ ならば, 原点 $(0, 0)$ で相接します.

3° 分岐面 σ の階数 (原点上の分岐点の階数は無視) は何れも 1 です.

4° (R) が connexe かどうかを調べませう. 空間 (x, y, z) に於て, relation (1) の規定する固有面を考へ, Σ としますと, Σ は次の方程式で表されます :

$$x^m = y + \sqrt{y^2 - z^{2m}},$$

i.e.
$$(y - x^m)^2 = y^2 - z^{2m},$$

i.e.
$$y = \frac{x^{2m} + z^{2m}}{2x^m}.$$

かように Σ 上の点を (x, y, z) としますと, 其の y は (x, z) によって有理函数として表されますから, Σ は明らかに解析的に連結です. 従って Riemann 面 (R) は connexe です.

かようにして次の結果が得られました：

≪上界 $B(n, m)$ が存在しないと云ふ現象は, $n = 2, m = 2$ のとき既に起る.≫ 但し, 分岐基面はいづれも O で正則ではありますが, ここで相接します[12].≫

この例だけを御覧になっても, 上の問題は困難かも知れないように感じられませう. 実際私にはそうであったのですが, 其の困難さは何処から来たかと申しますと, 其の一つは次の事実からでした：

≪Cousin の第二問題を Riemann 面 (R) 上に移して考へると, 其の零点の分布 (zéros) $(\mathfrak{z})$ は, 局所的にも必ずしも single analytic fonction のそれとしては規定し得ない.≫

それで, 次にこのことを例証しませう. 其の為の準備から始めます. 先づ固有集合体について一二の性質を定義します.

空間 $(y_1, y_2, \ldots, y_\mu, z_1, z_2, \ldots, z_\nu)$ に μ 複素次元の (解析的に連結な) 固有集合体 Σ がありますと, 空間の座標 (y, z) を適当に撰らびますならば, 此の Σ は空間 (y) 上の (connexe な) Riemann 面 (R) に対応させることが出来ます. 勿論其の際, (R) 上の点 P' と Σ 上の点 M' とを, これ等の (y) の座標 (y') が相等しくなるように対応させるのです. かような対応は, Σ を決めるならば (R) は無限個あり, 逆に (R) をきめても Σ は無限個あります.

定義 — ≪(有限複素) 空間 (x) に一つの固有集合体 (connexe analytiquement ou non, 局所的に有限個の (x) の正則函数の共通零点として表すことの出来るようなもの) Σ があって, Σ 上に一つの点 M がある. Σ に応ずる Riemann 面の任意の一つを (R) とし, M に応ずる (R) の点を

[12] 私は Problème $(\ldots, P, Q, \ldots)$ の一つの実例を出来るだけ短時間に得てみたく思ひましたので, 丁度よい機会と思ってかようなやり方をしたのです. 問題が余り簡単過ぎましたため充分の結果は得られませんでしたが, それでも, 最初に一寸お話ししましたものと, 上に採用しましたものと, 探求方法に全く違った二つの種類があることだけはよく分りました. 仮りに, 前者を ≪必然型≫, 後者を ≪ローマンス型≫ と呼ばうかと思ひます. 後の方を何故そう呼ぶかと申しますと, このやり方はどうなって行くか全然分らない点で, 一寸新聞小説か何かを読むような趣の面白さがあるからであります.

P とする. この時, 若し (R) 上に於ける任意の正則函数 (有界な解析函数) f が, これを Σ 上の函数と看做したとき (そうすると一般には f の値は Σ 上のある固有集合体上では不定となるが, そうしたとき), M の近傍 (f と共に変りうるもの) に於て, 空間に於ける正則函数 $F(x)$ の Σ 上の跡とみることが常に出来るならば, 固有集合体 Σ は M に於て (H) 性を持つと呼ぶ.≫

この性質は固有集合体の正則性から, 私達にとって重要な部分だけを抽出したものであります. (其の重要性については, 第一基礎的補助定理 (Mémoire I, Théorème II) 参照.) Riemann 面 (R) から云へば, この定義のようになる場合には, 空間の次元を適当に上げるならば, かような Σ があると云ふことになります. このとき, Riemann 面 (R) は P に於て (H) 性をもつ と云ひます. (Σ で云へば空間の点 M, (R) で云へば其の上の点 P となって, 一寸変ります.) 再び固有集合体に帰りまして :

定義 — ≪ 上の定義に於て, Σ の点 M の近傍が, 有限個の正則函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , $f_p(x)$ によって, 其の共通零点の集合として表されたとする. この時, 函数系 (f) が M に於て (G) 性を持つ と云へば, M の近傍で空間で正則な函数 $\varphi(x)$ が, Σ 上で恒等的に 0 ならば, φ は常に, (φ に dépendre する) M の近傍に於て, $\varphi \equiv 0 \mod (f)$ であることを意味する.≫

此の固有集合体の (G) 性は, 幾何学的不定域イデアルの基底の存在性に外なりません. (然し, 後者はまだ正確には定義していませんし, 用語としても (G) 性の方が簡単ですから, 取り敢へずかように定義したのであります.)

内分岐した領域には, 始めにのべましたような云はば $(\mathfrak{z})$ 性と, 固有集合体の (H) 性及び (G) 性の云はばこの領域上への影と, この三種類の問題があって, 相寄って (全局的まで行かなくても) 局所的に既に相当困難な問題群を形造っているのであります.

ここで H. Cartan の idée を借りませう. 序言で引用した氏の論文中に次の lemme があります :

≪ 空間 (x_1, x_2, x_3) に, 次の形の 3 つの領域 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ を考へる :

$$\begin{array}{llll} (\Delta_1) & 0 < |x_1| < 1, & |x_2| < 1, & |x_3| < 1 \\ (\Delta_2) & |x_1| < 1, & 0 < |x_2| < 1, & |x_3| < 1 \\ (\Delta_3) & |x_1| < 1, & |x_2| < 1, & 0 < |x_3| < 1 \end{array}$$

$(\delta_1) = \Delta_2 \cap \Delta_3$, $(\delta_2) = \Delta_3 \cap \Delta_1$, $(\delta_3) = \Delta_1 \cap \Delta_2$, とする. g_1, g_2, g_3 をそれぞれ (δ_1), (δ_2), (δ_3) で正則な函数とし, 恒等的に

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0$$

とする．そうすると，それぞれ Δ_1, Δ_2, Δ_3 で正則な函数 h_1, h_2, h_3 を求め，恒等的に

$$g_1 = h_2 - h_3, \quad g_2 = h_3 - h_1, \quad g_3 = h_1 - h_2,$$

ならしめることが出来る.≫

これは非常に奇麗な lemme であって，証明も亦然うであります．だから繰り返してみませう．g_1, g_2, g_3 を Laurent 級数に展開して，

$$g_1 = \sum_{m,n,p} a_{mnp} x_1^m x_2^n x_3^p, \quad g_2 = \sum_{m,n,p} b_{mnp} x_1^m x_2^n x_3^p, \quad g_3 = \sum_{m,n,p} c_{mnp} x_1^m x_2^n x_3^p$$

としませう．Laurent 展開ですから，係数は先づ次の関係をみたします：

$$(1) \qquad a_{mnp} = 0 \ \text{ si } m < 0, \quad b_{mnp} = 0 \ \text{ si } n < 0, \quad c_{mnp} = 0 \ \text{ si } p < 0.$$

次に，$g_1 + g_2 + g_3 = 0$ であって Laurent 展開は一意的ですから，

$$(2) \qquad a_{mnp} + b_{mnp} + c_{mnp} = 0.$$

それ故，係数の中，添数が二つ又は三つ負であるようなものは，すべて 0 であります．何となれば，たとへば a を見ますに，若し $n < 0, p < 0$ ならば $b_{mnp} = c_{mnp} = 0$ ですから $a_{mnp} = 0$ でありますから．それで g_1 は Δ_2 で正則な函数と Δ_3 で正則な函数との和になります．分け方は，$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ としますと，Δ で正則な函数はどちらへ分けてもよろしい．そしてこれをそれぞれ $h_2, -h_3$ とします．次に g_2 を Δ_3 で正則な函数と Δ_1 で正則な函数とに分けるのですが，今度は前者が h_3 となるようにしたいのです．上述のことから然う出来ます．そうして $g_2 = h_3 - h_1$ としますと h_1 も決まります．そうしますと，$g_1 + g_2 + g_3 = 0$ ですから，$g_3 = h_1 - h_2$ であります． C. Q. F. D.

これは一種の融合法であります．私達はこれまで融合法としては，源まで遡って云ひますと，P. Cousin の積分 しか知らなかったのですが，今や H. Cartan によって此の新しい方法が追加されたのであります．

それで名称ですが，私達は séries de Laurent のこの新しい適用様式を直かに指して H. Cartan の Lemme と呼ぶことにしませう．

そこでこの Lemme の応用ですが，先づ次のことに注意しませう：

≪上述の lemme は，$0 < \rho < 1$ であるような ρ によって，$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ の定義に於ける 0 と代へても，矢張り成立する≫

この時も，Laurent 展開は一意的ですから，証明法は少しも変りません．

此の形の Lemme de H. Cartan と Mémoire VII でのべた Théorème du reste (No.5) とを組み合せますと，固有集合体の (H) 性や (G) 性に関

する色々な定理が得られるのですが, これに就て充分お話しすることは, Mémoire X で, Mémoire VII で予報した幾何学的不定域イデアルを取り扱ふ積りですから, そのときにお話ししようと思ひます. (これはお約束ではありません.) 今は私達は $(\mathfrak{z})$ 性に関する反例を求めて居るのですから, その準備として, 此の方向の定理を二つだけお話ししませう.

その定理のために少し準備しませう. 私達は Mémoire VII で Problème (C_2) に就て考へました. そしてそれが閉多円筒に関しては常に解けることを見ました (Théorème II). そのことから, その定理が, 今少し複雑な閉筒状域に対しても成立すると云ふ結果を出さうと云ふのです. 即ち :

≪ 空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に閉筒状域 Δ, $\rho \leqq |x_1| \leqq 1$, $\rho \leqq |x_2| \leqq 1$, ..., $\rho \leqq |x_m| \leqq 1$, $|x_{m+1}| \leqq 1$, ..., $|x_n| \leqq 1$ $(1 \leqq m \leqq n)$ を考へる. そうすると, problème (C_2) はこの Δ の近傍に於ては必ずとける.≫

証明. 閉筒状域 Δ の近傍に, ある一つの決った problème (C_2) が与へられて居るのですから, Δ の近傍で正則な函数の一組 $[F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)]$ が与へられて居り, 又 Δ の各点 P に対しては, 之を中心とする多円筒 (γ) と (γ) で正則な函数 $\varphi(x)$ とが与へられて居て, それが (F) に関して同等条件, 詳しく云ひますと, 次の条件をみたす筈であります : 共通部分 (δ) を持つような一対の (γ) を (γ'), (γ'') とすれば, 対応する函数 φ', φ'' は (δ) の各点に於て $\varphi' \equiv \varphi'' \mod (F)$.

Mémoire I 以来幾度となく繰り返しましたように, 新しく m 個の複素変数 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ を導入し, 空間 (x, y) に於て, 固有集合体 $\Phi_j(x, y) = y_j - 1/x_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ と, 閉円筒 $(\overline{C})$, $|x_i| \leqq 1$, $|y_j| \leqq 1/\rho$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ とを考へ, この固有集合体の $(\overline{C})$ 上の部分を Σ としませう.

そうして, $(\overline{C})$ の近傍で, 次の problème (C_2) を考へます. 上述の函数系 (F) に相等するものとして函数系 (F, Φ) をとります. $(\overline{C})$ の各点 P に対する函数 $\psi(x, y)$ (上の φ に相当するもの) の与へ方は, 若し P が Σ の点ならば上述の $\varphi(x)$ をそのまゝ対応させ, i.e. $\psi(x, y) = \varphi(x)$ とし, 若し P が Σ 外の点ならば $\psi(x, y) = 0$ (常数) を対応させます. そうすると $\{\psi\}$ の全体が (F, Φ) に関して同等条件をみたします. それで $(\overline{C})$ は閉円筒ですから, 此の problème (C_2) はとけ, 従って $(\overline{C})$ の近傍で正則な函数 $\Psi(x, y)$ が得られ, $(\overline{C})$ の各点 P に於て

$$\Psi(x, y) = \psi(x, y) \qquad \mathrm{mod}\ (F,\ \Phi)$$

となります.

次に此の結果に $y_j = 1/x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ を代入しませう. 即ち,

$$\Psi(x, 1/x) = \chi(x)$$

としますと, $\chi(x)$ は Δ の近傍で正則であって, Δ の各点 P に於ては

$$\chi(x) \equiv \varphi(x) \qquad \mathrm{mod}\ (F)$$

となりますから, 此の $\chi(x)$ は始めの problème (C_2) の解であります. (此の証明法は書くと比較的長くなりますが, 直観的には極めて簡単であると思ひます.) C. Q. F. D.

扨て, (H) 性や (G) 性に関して, 次の諸定理があります :

<u>(a)</u> — ≪ 空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqq 3$, の原点 O の近傍に, 固有面 (局所的に唯一つの正則函数の零点の集合として表される面) Σ があって, O を通り, O 以外の各点に於て (H) 性を持つとする. そうすると, Σ は O に於ても (H) 性を持つ.≫

証明. Σ は, 定義によって, 原点 O の近傍で正則な函数 $F(x)$ によって, $F = 0$ の形に表すことが出来る. 其の際 F は multiple factor を持たないとみてよろしい. Σ の (O の近傍の) O と異なる任意の点を M とし, M の近傍で, Σ 上で正則な任意の函数を λ としますと, λ は空間で正則な函数の Σ 上の跡と看做することが出来ます. かゝる函数の一つを $f(x)$ とします. そうして, O の近傍で, O を除いて, 次のような problème (C_2) を考へませう : 空間のこの部分の任意の点を P としましたとき, これに $\varphi(x)$ を対応させるのですが, 若し P が Σ 上の点ならば上述の $f(x)$ ($en\ M = P$) をとって, $\varphi = f$ と規定し, 若し P が Σ 外の点ならば $\varphi = 0$ と規定します. かゝる $\{\varphi\}$ の全体は, F は multiple factor を持ちませんから, F に関して同等条件をみたします.

正数 r を充分小さく撰らび, 正数 ρ をより小さくとって, 次のような $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ を描きます :

$$\begin{array}{llllll}
(\Delta_1) & \rho<|x_1|<r, & |x_2|<r, & |x_3|<r, & |x_i|<\rho & (i=4,5,\ldots,n) \\
(\Delta_2) & |x_1|<r, & \rho<|x_2|<r, & |x_3|<r, & |x_i|<\rho & (i=4,5,\ldots,n) \\
(\Delta_3) & |x_1|<r, & |x_2|<r, & \rho<|x_3|<r, & |x_i|<\rho & (i=4,5,\ldots,n)
\end{array}$$

そうしますと, O の近傍で, 上述の problème (C_2) が規定せられて居ない点は O しかありませんから, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ の近傍では, 何れも此の問題はよく規定せられて居ます. それで, 上に見ましたように, この Δ_i $(i = 1, 2, 3)$ の近傍で, その解として正則函数 $\Phi_i(x)$ が得られます.

$\psi_1 = \Phi_2 - \Phi_3$ としますと, ψ_1 は $(\delta_1) = \Delta_2 \cap \Delta_3$ で正則であって, F によって divisible であります. それで

$$\Phi_2 - \Phi_3 = \psi_1 = g_1 F$$

となります, g_1 は (δ_1) で正則です. 同様に

$$\Phi_3 - \Phi_1 = \psi_2 = g_2 F, \qquad \Phi_1 - \Phi_2 = \psi_3 = g_3 F$$

をそれぞれ $(\delta_2) = \Delta_3 \cap \Delta_1$, $(\delta_3) = \Delta_1 \cap \Delta_2$ で考へます. そうしますと

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0$$

ですから, H. Cartan の Lemme によって, Δ_i $(i = 1, 2, 3)$ で正則な函数 $h_i(x)$ が存在して, 次の関係をみたします:

$$g_1 = h_2 - h_3, \quad g_2 = h_3 - h_1, \quad g_3 = h_1 - h_2.$$

そうしますと,

$$\Phi_1 - \Phi_2 = g_3 F = (h_1 - h_2) F$$

ですから

$$\Phi_1 - h_1 F = \Phi_2 - h_2 F,$$

同様に

$$= \Phi_3 - h_3 F.$$

これから, F. Hartogs によって, Σ は O に於ても (H) 性を持つことが直ちに分ります. C. Q. F. D.

(b) — ≪ 空間 (x_1, x_2, x_3, x_4) の原点 O の近傍に O を通る固有集合体 Σ があって次の諸条件をみたす: 1° Σ は 2 複素次元であって 2 つの正則函数 $F(x), \Phi(x)$ の共通零点の集合として表されること. 2° (F, Φ) は O 以外の各点で (G) 性をもつこと. 3° Σ は O 以外の各点で (H) 性をもつこと. そうすると, Σ は O に於ても (H) 性を持つ. 尚, (F, Φ) は O に於ても (G) 性をもち, このことは条件 (3°) とは無関係に起こる.≫

証明. 空間の座標を適当に撰らび, (x) に対して F, Φ の少くとも一方, たとへば F が $F(x_1, 0, \dots, 0) \not\equiv 0$ となるようにとっておきませう. そして上と同じく Δ_1, Δ_2, Δ_3 を充分小さく描きます.

先づ後半を証明しませう. $f(x)$ を空間に於て O の近傍で正則であって, Σ 上で恒等的に 0 となるような任意の函数としますと, O の近傍の O と異る Σ 上の任意の点 M をとりますと, M に於て (F, Φ) は (G) 性を持ちますから, $f \equiv 0 \mod (F, \Phi)$ が M の近傍で云へます. 即ち,

$$f = \alpha F + \beta \Phi,$$

α, β は勿論 (x) の正則函数であります. 所で, $R > 0$ を充分小さくとりますと, どれ程小さくとっても, それに関聯して $R' > 0$ を充分小さくとり, $|x_1| < R,\ |x_i| < R'$ $(i = 2, 3, 4)$ に於て, $F(x)$ が <u>Théorème du reste</u> の諸条件, 特に根数の不変性, 即ち x_1 に関する方程式 $F(x) = 0$ が $|x_i| < R'$ $(i = 2, 3, 4)$ の任意の点 (x_2, x_3, x_4) に対し, $|x_1| < R$ に於て常に一定数 λ 個 $(\lambda \geqq 0)$ の根を持つと云ふ性質, を満足するように出来ます. そうしますと, 此の Lemme によって,

$$\beta = \beta_0 + \beta' F$$

の形に, ここに β_0, β' は何れも正則函数ですが, 一意的に表すことが出来ます. 詳しく云ひますと, β_0 は若し $\lambda = 0$ ならば常数 0, 若し $\lambda > 0$ ならば x_1 に関する高々 $\lambda - 1$ 次の polynome であって, そうなるような (β_0, β') は唯一つしかありません. それで, これに応じて, α の方も

$$\alpha = \alpha_0 - \beta' \Phi$$

と置きますと, α_0 も一意的に決まり, f は O の近傍では常に

$$f = \alpha_0 F + \beta_0 \Phi$$

の形に一意的に表されます. このことは, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ の各点で然うですから, 全局的に Δ でそうです. それで, α_0 も β_0 も Δ で正則な函数です. それ故, <u>F. Hartogs</u> によって, α_0, β_0 は O の近傍で正則であります. 故に, (F, Φ) は O に於ても (G) 性を持ちます.

次に (H) 性の方を証明しませう. θ を Σ 上で O の近傍で正則な任意の函数とし, O の近傍の Σ 上の任意の点を M としますと, M に於ては, Σ は (H) 性を持つと云ふのですから, 其の近傍で空間で正則な函数 $f(x)$ があります. それで次に述べるような problème (C_2) を考へることが出来ます. 空間 (x) の O の近傍に於て, O と異なる任意の一点を P とするとき P にここで正則な函数 $\varphi(x)$ を次のように対応せしめます : 若し P が Σ 上にあるならば, i.e. $P = M$ ならば, 上述の $f(x)$ をとって, $\varphi(x) = f(x)$ と規定し, 又若し P が Σ 上にないならば, $\varphi(x) = 0$ (常数) と規定します. そうしますと, この $\{\varphi\}$ の全体について, 一対の φ', φ'' が, Σ 上の O の近傍の O と異る点 M' の近傍で共存するならば, $\varphi' - \varphi''$ は Σ 上で恒等的に 0 であって, (F, Φ) はここで (G) 性を持ちますから, M' の近傍で $\varphi' \equiv \varphi''$ mod (F, Φ) となります. 故に, $\{\varphi\}$ は (F, Φ) に関して同等条件をみたします. この problème (C_2) を, 上に見ましたように, Δ_i $(i = 1, 2, 3)$ の近傍に於て解き, 解として正則函数 $\Psi_i(x)$ を求めることが出来ます. たとへば $(\delta_1) = \Delta_2 \cap \Delta_3$ の近傍をみますに,

$$\Psi_2(x) - \Psi_3(x) = \psi_1(x)$$

はここで正則であって, $\psi_1(x) \equiv 0 \mod (F, \Phi)$ ですから, 上に (G) 性について見ましたように, ここで

$$\psi_1(x) = \alpha_1 F + \beta_1 \Phi$$

となります. ここに α_1, β_1 は一意的にきまる正則函数であります. 同様に他の二つの intersections (δ_2), (δ_3) の近傍に於ても,

$$\psi_2(x) = \alpha_2 F + \beta_2 \Phi, \qquad \psi_3(x) = \alpha_3 F + \beta_3 \Phi$$

がそれぞれ同様の意味に於て成立します. そうして,

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)F + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\Phi = 0$$

であります. 所で, この恒等式をみますに, これは O の近傍で正則な函数である常数 0 を上に説明したような意味で一意的に表現したことになっています. 故に, 恒等的に

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$$

でなければなりません.

それ故, H. Cartan の Lemme によって, Δ_i $(i = 1, 2, 3)$ で正則な函数 $h_i(x), k_i(x)$ を求め,

$$\begin{aligned} \alpha_1 = h_2 - h_3, \quad \alpha_2 = h_3 - h_1, \quad \alpha_3 = h_1 - h_2 \\ \beta_1 = k_2 - k_3, \quad \beta_2 = k_3 - k_1, \quad \beta_3 = k_1 - k_2 \end{aligned}$$

が恒等的に成立するように出来ます. そうしますと, たとへば ψ_3 を見ますに

$$\Psi_1 - \Psi_2 = \psi_3 = \alpha_3 F + \beta_3 \Phi = (h_1 - h_2)F + (k_1 - k_2)\Phi$$

ですから

$$\Psi_1 - (h_1 F + k_1 \Phi) = \Psi - (h_2 F + k_2 \Phi)$$

となり, 左辺は Δ_1 で正則, 右辺は Δ_2 で正則となります. 同様に,

$$= \Psi_3 - (h_3 F + k_3 \Phi)$$

が云へ, この函数は Δ_3 で正則です. これから, F. Hartogs によって, Σ が O で (H) 性を持つことが直ちに分ります. C. Q. F. D.

これで準備がすっかり出来ましたから, 始めに申しました実例 ((𝔷) 性についての局所的反例) についてお話ししませう.

Exemple 4 — ≪ 空間 (x, y) 上に, 函数 $t = \sqrt{x}$ に応じる Riemann 面 (R) を考へ, (R) 上に (1 価) 正則な 2 つの函数 $u = x^{\frac{2}{3}}$, $v = yx^{\frac{1}{2}}$ を考へます. 分枝の組合せについては, (R) 上の正則点 (i.e. $x = 0$ 上にない点) を一つ任意にとって, 其の近傍に於て各の (解析的) 要素を決定し, それを (解析的に) 延長 (prolonger) するやり方できめます. そうして

$$u = xt, \quad v = yt, \quad avec \;\; t = \sqrt{x}$$

となるような組み合せの方を撰らびませう.

そうして, u, v を独立複素変数とみて, 空間 (x, y, u, v) に固有集合体 Σ,

$$(\Sigma) \qquad u = xt, \quad v = yt, \quad avec \;\; t = \sqrt{x}$$

を考へます. また次の二つの固有面 U, V

$$(U) \quad u^2 = x^3, \qquad (V) \quad v^2 = xy^2$$

を考へ, 其の交りを

$$U \cap V = S$$

としませう. そうしますと Σ は S にぞくしますが, 其の一部であって全部ではありません. S の方から云ひますと, S は 2 つの (解析的連結) 成分に分れ 其の一方が Σ であります. 他方を Σ' としますと, 之は次の形です :

$$(\Sigma') \qquad u = xt, \quad v = -yt, \quad avec \;\; t = \sqrt{x}.$$

Σ は原点 O を通ります. その O ですが, Σ はこの点で (H) 性を持ちません. 何となれば, そうでなくて, (H) 性を持ったと仮定しまして, 函数 $t = \sqrt{x}$ を考へますと, 此の函数は Σ 上で正則ですから, 空間に O の近傍に正則函数 $f(x, y, u, v)$ があって Σ 上でこの函数 t と一致する筈です. 即ち,

$$t = f(t^2, y, t^3, yt).$$

所で, 之が矛盾であることは, $f(x, y, u, v)$ を原点を中心に séries de Taylor に展開しておいて, それから上の様に代入する, 云ひ換へますと, 上の恒等式の右辺がかようなべき級数に展開されて居ると考へますと, séries de Taylor の一意性から, 直ちに分ります. それ故 Σ は O に於ては (H) 性を持ちません.

同じ証明法に依って, U も V も O に於て (H) 性を持たないことが直ちに分ります. それで S を通る, 次のような固有面 T を考へませう:

$$(T) \qquad F(x,y,u,v) = u^2 + v^2 - x^3 - xy^2 = 0.$$

そうしますと,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

をみたすような T 上の点は原点 O しかありませんから, T の特異点は O だけです. 故に 定理 (a) によって, T は O に於ても (H) 性を持ちます.

此の T に応ずる Riemann 面を空間 (x,y,v) 上に考へ, (R') としませう. (R') は函数

$$u = \sqrt{-v^2 + x^3 + xy^2}$$

によって描かれる Riemann 面です. 此の (R') 上で, T 上の Σ に対応するもの, σ, がどうなっているかをよく見ませう.

先づ, Σ は S 上にありますから, σ は s, $v^2 = xy^2$ 上にあります. 次に, Σ は $u = xt$, $v = yt$ $(t = \sqrt{x})$ ですから, $uy = vx$ 上にあります. それで σ はこの u を上述の函数と見た (R') 上の固有面上にあります. それで σ は,

$$(\sigma) \qquad v^2 = xy^2, \quad uy = vx, \quad avec \;\; u = \sqrt{-v^2 + x^3 + xy^2}$$

のように表されるのではないかと云ふ予想が立ちます. 之をたしかめるためには, σ は上の二つの方程式をみたすことの方は確かですから, 条件としてこれで充分であることの方を調べればよいわけですが, s 上にあって σ にぞくしないものは, T 上の Σ' の影, σ', 以外にありません. そしてこの方は, $uy = -vx$ (u は上述の函数) 上にあります. 故にこれで充分であって, 結局 σ は上の 2 つの同時方程式によって表されます.

今少し詳細に見て置きませう. (R') の分岐基面は

$$v^2 = x^3 + xy^2$$

であって, これと s $(v^2 = xy^2)$ との交りは $x = 0, v = 0$ しかありません. それで σ と σ' ともここに於てしか交はることが出来ません. 尚, σ を表す 2 つの方程式の第二を調べてみますと, 次のようになります:

$$\begin{aligned} & y\sqrt{-v^2 + x^3 + xy^2} = vx \\ \therefore \quad & y^2(-v^2 + x^3 + xy^2) = v^2x^2 \\ \text{i.e.} \quad & (x^2 + y^2)(v^2 - xy^2) = 0. \end{aligned}$$

此の (R') 上の固有面 σ 上に, 階数 1 の零点を分布して, これを $(\mathfrak{z})$ としませう. そうしますと, 此の $(\mathfrak{z})$ は, 原点上の (R') の点 O' の近傍に於て唯一つの (R') 上の正則函数によって其の零点の集合として表すことは出来ません.

このことを証明しませう. 今 (R') 上に, O' の近傍で正則な一つの函数 θ があって, その零点の集合が $(\mathfrak{z})$ であったと仮定しませう. そうしますと, 固有面 T は O に於て (H) 性を持ちますから, 空間 (x, y, u, v) 上に於て O の近傍で正則な函数 (x, y, u, v) を求め, T 上で θ と一致するように出来ます. そうしますと Σ は次の形に表されます：

$$(\Sigma) \qquad F(x, y, u, v) = u^2 + v^2 - x^3 - xy^2 = 0, \quad \Phi(x, y, u, v) = 0.$$

此の固有集合体 Σ に 定理 (b) を適用しようと云ふのです. 先づ条件を調べませう：

先づ (1°) ですが, Σ は空間 (x, y, u, v) に於ける 2 複素次元の固有集合体であって, 2 つの正則函数 $F(x, y, u, v)$, $\Phi(x, y, u, v)$ によって, 其の共通零点の集合として与へられて居ます.

次に (3°) の (H) 性は, 空間 (x, y) 上の (R) へもどってしらべませう. Σ は $u = xt,\ v = yt,\ t = \sqrt{x}$ でした. 所で $x \neq 0$ としますと, 固有面 $U,\ u^2 = x^3$ が (H) 性を持ちますから, Σ も必然然うです. また $y \neq 0$ としますと, 固有面 $V,\ v^2 = xy^2$ が (H) 性を持ちますから, Σ も然うです. 故に, O 以外の各点で Σ は (H) 性を持ちます.

次に (2°) の (G) 性は, 上述の Riemann 面 (R') を介してしらべませう. Σ の O の近傍の任意の点を M とし, M に応ずる (R') の点を P とします. 空間 (x, y, u, v) の (空間の点としてみた) M の近傍で正則であって, Σ 上で恒等的に 0 となる任意の函数を $f(x, y, u, v)$ としませう. f の (R') 上の (i.e. T 上の) trace を θ' としますと, θ' は σ 上で恒等的に 0 になります. それで, 上に存在を仮定した函数 θ は σ を階数 1 の zéros として持ちますから, θ' は P の近傍で

$$\theta' = \gamma\theta$$

の形に表されなければなりません. 但し, γ は ((R') 上の) 正則函数です. 所で, T は各点で (H) 性を持ちますから, γ を其の上の trace とするような空間の正則函数 $C(x, y, u, v)$ が M の近傍に存在します. それで

$$f - C\Phi$$

を考へますと, この函数は $T, F = 0$ 上で恒等的に 0 になりますし, F は multiple factor を持ちませんから, f は M の近傍で

$$f = C\Phi + C'F$$

の形でなければなりません, ここに C' は (空間に於ける) 正則函数です. かように (F, Φ) は Σ 上の各点で (原点をも含めて) (G) 性を持ちます.

かように条件がみたされますから, 定理 (b) を固有集合体 Σ に適用することが出来て, 次のようになります： Σ は原点に於ても (H) 性を持つ. 之は矛盾です. 故に, 仮定は成立しません. それ故, $(\mathfrak{z})$ について述べたことは正しいのであります.≫

これで表題の問題が, 当初私にどう見えたかがやゝお分りになったかと思ひます[13].

[13] 当時の私の心情, これが序言以来直接間接に度々云ひましたように, 私の大小さまざまの数学的研究のよって生ずる虚空のようなものだと私は今考へているのですが, それはその頃風樹会の高木先生へお送りした私の手紙に, 今もその写しを読み直してみたのですが, 鮮かに出て居ると思ひますから, 其の一節を引いて置きませう. 始めに其処に出て来る言葉を説明しますと, Problème E と云ふのは上の問題であって, Problème H と云ふのは, 抽象的に与へた Riemann 面 (R) と其の上の一点 O とに対して, O の近傍で Problème E がとけると仮定したとき, O に対応する点で性質 (H) を持つような (R) の倍域を求める問題であります. (Problème (H) の意義については第一基礎的補助定理参照.)

≪ 私, 此の Probs E, H に今年に入りましてから二ヶ月半程没頭致しました.≫ ≪ 其の研究の進行の有様はこんな風でした： 出来なさ相に思って, 反例へ向って追ひつめようとすると, 意外な途からするりと抜ける. それでは或は反対かと思って, 其の途を通って affirmative な解決へ, 実験 ((室)) 的に行こうとすると, 意外な障碍にはたと突き当ってしまふ. これを交々繰り返す. それがいくらでも続く. そして今だに, 全くどちらとも予想さへ付け兼ねて居ます ≫ 所で, その中に ≪ 私の研究過程が此の形式を辿ったことが, のどかな春の光の中に, しづ心なく花片が散るように見えて参りました. 情緒の世界は不思議なものでございます.≫ ≪ それで之等の問題を, それ自体及び其の意義を一つの結果つまり一つの発見とみて ((丁寧な道しるべを添へて)), 公表しようかと思ひます.≫

≪ 私数年前札幌に暫く御厄介になって居ました時, 名前は忘れましたが或る会から研究補助を受けて居ました関係から, 期限が来たから研究報告を書けと云はれました. 所が私の研究は ((Mémoire VI を分岐点も無窮遠点も含まない一般の領域へ拡張することについて調べていたのであって, 1942 年の夏の初め頃のことですが)) 其の時丁度, 云はば霧の絶え間からきれぎれに山の姿の所々が見えて行くような状態にありましたから, 本当に困って了って非常に苦心してやっと其の一片をやゝ描写することが出来ました. これは第一報告として夏の終り頃その会宛に送って置きましたし先生の所へも差し上げましたかのように記憶していますから (そのことは余り確かではありませんが), 多分御一見下さいましたことと存じますが, あれはさっき読み直して見ましたが, 相当に書けていますし ≫ ≪ あの報告の形式には, 発見の云はば鋭い喜びを其の儘発表する方が, 研究者の健康によい, と云ふ大きな存在理由があると思ひます.≫

Behnke–Thullen の著書に挙げられて居る諸問題の ≪ 本質的な部分は解いて了ったと思った (今でもそう信じていますが) 其の瞬間に, 正確には翌朝目が覚めましたとき, 何だか自分の一部分が死んで了ったような気がして洞然として秋を感じました. それが, その延長の重要部分が, 上に申しましたように, まだ解決されて居ず容易には解けそうもない, と云ふことが分って来ますと, 何だか死んだ児が生き返って呉れたような気がして参りました. 本当に情緒の世界と云ふものは分け入れば分け入る程不思議なものであって ≫ ≪ 私が乱れむすぼれて了った自分の情緒を解きほぐして, 云はゞ各其の処を得しめようと務め始めましてから, $\cdots$ ≫

≪ 私, 早く因縁付きの一系の問題 ((の束縛)) から離れて, 多変数函数の分野の四辺に群生するであらう色々な新しい型の問題を採集して暮したいと申し上げました. そうしますと早速かような一群の問題に出会ったのは不思議です. 然し此の Problèmes E, H は採集したまゝで能事終れりとは出来ません. それは, 之等がどの様に, 又どの程度に解決されるかと云ふことが, 多変数解析函数のつくる山の頂きがどの程度の高さであるかと云ふこと, つまり：「雲自ら巻き自ら舒ぶる」を看て樂しむと云ふような場所か, 「其の一と房

それで後は序言でお話ししました私のこの問題についての予想を繰り返すまででです：

予想 — 此の問題は必ず affirmative に解ける.

最后に, H. Cartan の Lemme へ今一度注意を向けませう. 企ては, 此の美しい Lemme を或る新しい照明の下に置いてみようと云ふのです.

第二節で, F. Hartogs の連続定理 を御話ししました. この言葉の意味は, 単葉の場合に, 領域の補集合 E が特別の形の連続性を持つと云ふのでして, E の其の有様は固有面 (空間を n 複素次元としますと, $n-1$ 複素次元の variété analytique) が代表して居ます.

それで上の 連続定理 を $(n-1)$ (複素) 次元 のそれと呼び, それに対して 一般 (複素) 次元のもの を concevoir することが出来ます. 即ち：

定義 — ≪ 空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の領域 $\mathfrak{D}$ (connexe ou non) が $n-m$ $(\geqq 0)$ (複素) 次元の連続定理 をみたすとは, 次の条件がみたされることである. 空間 (x) 上に点 (a) を中心とし, 半径 r_i, ρ_i, $\rho_i < r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を以て, 多円筒 (C), $|x_i - a_i| < r_i$ と, 次の二つの条件の少くとも一方をみたす点の總てからなる単葉領域 Δ とを考へる：

$$
\begin{array}{lll}
(\Delta) & |x_i-a_i|<r_i, \quad |x_j-a_j|<\rho_j & (i=1,\ldots,m;\, j=m+1,\ldots,n) \\
ou & \rho_i<|x_i-a_i|<r_i, \quad |x_j-a_j|<r_j & (i=1,\ldots,m;\, j=m+1,\ldots,n)
\end{array}
$$

にも光しむ山いちごの実」でも採取すべき所か, それとも木を植え畑を開くに適して居るか, 之等を決定する重要な要素と考へられるからです. 多変数代数函数論を別に発表することの意義も, 少くとも半分程は, 従ってきまると思ひます.

それで, 私もいづれ之等の問題には全力を挙げるつもりです. 然し上のことについてならば, 勿論誰が解いても同じことですし, それに私としましては全然白紙に帰って, 之等の問題を研究すること, 及び其の研究の姿を研究することを楽しみたいと思ひますから, ほかを一度片づけてからにしようと思ひます. (然し, かようなことを先生に申し上げましては全く蛇足ですが, 之等の問題は, いくら意識の表層からは取り去っても, 誰かによって解決されるまでは, 潜在意識の部分に焼きつけられて居るに決って居ますから, 何時自然解決に達しないとも限りません. 之は自由意志の範囲ではありません.)≫

之は 1947 年 4 月 18 日に書いたものでありまして, 風樹会から生活補助を受けて居ました御礼に, 私の研究の進行状態を簡単に報告したものであります. 高木先生には, 之を第一信として第四信 (1948 年 8 月 13 日) まで差し上げてあります. その写しは上にも一寸申しましたように手許にあります. 之等によって此の研究の生長の有様がやゝ覗えるかと思ひます. それで今後も出来る程づつ手紙に書いて (唯書いておいただけでは少しも証拠になりませんから), 誰宛にでもよいから, 送っておくことにしようかと考へています.

上の手紙にある Problème H の方は, 此の論文の Problème E よりも前に, 解消して了ふことになるのでして, 上にも申しましたが, Mémoire X で取り扱ふ予定の幾何学的不定域イデアルの bases locales finies の存在及び其の以後のものが, このことについて御話しいたしますでせう.

また札幌で書いた上に云ふ第一報告及び其の後のものについては次の Mémoire IX (上に, 相当個所で御説明しましたような研究の第一部) でお話ししようと思って居ます. 然し, 之等はいづれも私の予定をお漏しして居るに過ぎないのでありまして, 決して公のお約束ではありません.

若し領域 $\mathfrak{D}$ が, 或る一対の $(C), \Delta$ に対し, Δ と同等な部分領域を持つならば, $\mathfrak{D}$ は必ず, (C) と同等であって上の部分領域を其の一部分とするような部分領域を持つこと.≫

この観点から, Cartan の Lemme を見直しますと, 当然次の形の Lemme が成立するかどうかが問題になりませう：

≪空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqq 3$, に次の形の領域 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ を考へる：

$$\begin{array}{llllll} (\Delta_1) & |x_1|<\rho_1, & |x_2|<r_2, & |x_3|<r_3, & (x_4, x_5, \ldots, x_n)\in\mathfrak{D}, \\ (\Delta_2) & |x_1|<r_1, & \rho_2<|x_2|<r_2, & |x_3|<r_3, & (x_4, x_5, \ldots, x_n)\in\mathfrak{D}, \\ (\Delta_3) & |x_1|<r_1, & |x_2|<r_2, & \rho_3<|x_3|<r_3, & (x_4, x_5, \ldots, x_n)\in\mathfrak{D}, \end{array}$$

但し $\rho_1 < r_1$ であって, $\mathfrak{D}$ は空間 $(x_4, x_5, \ldots, x_n)$ の領域である. $\Delta_i \cap \Delta_j = (\delta_k)$ $(i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j, j \neq k)$ とし, (δ_i) $(i = 1, 2, 3)$ に正則函数 $g_i(x)$ があって, 恒等的に

$$g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) = 0$$

とする. 然うすると, Δ_i $(i = 1, 2, 3)$ で正則な函数 $h_i(x)$ を求め, 恒等的に

$$g_1 = h_2 - h_3, \quad g_2 = h_3 - h_1, \quad g_3 = h_1 - h_2$$

ならしめることが出来る.≫

これが成立するかどうかを御一緒にしらべてみませう. やり方は前の場合と同じようにします. g_1, g_2, g_3 を (x_1, x_2, x_3) に関する原点を中心とする Laurent 級数に展開しますと,

$$g_1 = \sum_{m,n,p} a_{mnp} x_1^m x_2^n x_3^p, \quad g_2 = \sum_{m,n,p} b_{mnp} x_1^m x_2^n x_3^p, \quad g_3 = \sum_{m,n,p} c_{mnp} x_1^m x_2^n x_3^p$$

となります. 係数は $(x_4, x_5, \ldots, x_n)$ の $\mathfrak{D}$ に於ける正則函数です. そうしますと,

$$(1) \qquad \begin{aligned} & a_{mnp} = b_{mnp} = c_{mnp} \quad \text{si} \quad m < 0, \\ & b_{mnp} = 0 \quad \text{si } n < 0, \quad c_{mnp} = 0 \quad \text{si} \quad p < 0 \end{aligned}$$

であります. また $g_1 + g_2 + g_3 = 0$ であって Laurent 展開は常に一意的に決まりますから, 恒等的に

$$(2) \qquad a_{mnp} + b_{mnp} + c_{mnp} = 0$$

であります. それで次のようになります：

$$g_1 = A' + B_2' + B_3', \quad g_2 = \alpha'' + B_3'', \quad g_3 = \alpha''' + B_2''',$$

ここに, B_2' は g_1 に於ける $n<0$ であるようなすべての項の和, B_3' は $p<0$ のそれであって, B_3'' は g_2 に於ける $p<0$ であるようなすべての項の和, B_2''' は g_3 に於ける $n<0$ であるようなすべての項の和です. そうしますと, A' は $G:\ |x_i|<r_i\ (i=1,2,3),\ (x_4,x_5,\ldots,x_n)\in\mathfrak{D}$ で正則, α'', α''' は Δ_1 で正則です. 又 B_2' は Δ_2 で, B_3' は Δ_1 で正則です. 之等の B の間には次の関係があります :

$$B_2'+B_2'''=0, \quad B_3'+B_3''=0.$$

それで, 次のように置くことが出来ます :

$$h_2=B_2', \quad -h_3=A'+B_3', \quad h_1=\alpha'''.$$

そうしますと,

$$g_1=h_2-h_3, \quad g_3=h_1-h_2$$

となります. それで $g_1+g_2+g_3=0$ ですから,

$$g_2=h_3-h_1$$

であります. かように此の形の補助定理も亦成立します.

これを矢張り H. Cartan の Lemme と名づけ, Cartan の Lemme のこの形を指して, Lemme du théorème de la continuité à $(n-2)$ dimensions と呼びませう.

私達は, $(n-1)$ 次元の連続定理から, どう云ふやり方でどう云ふ結果が導き出されたかをよく知って居ます[14]. 一般次元の連続定理, 特に $(n-2)$ 複素次元のものについてはどうでせうか. またどう云ふものがこの定理, と云っても主として $(n-2)$ 次元のものを指して云って居るのですが, それを充たすでせうか. 之等の問題を検討或は探索することは, みなさまにお委せいたします.

H. Cartan は, その論文で, Cousin の第一問題が解けるための必要条件を問題にして, それが $n=2$ (n は空間の複素次元のかず) を超えると, 領域を単葉と制限しても, 最早や正則域とは限らないと云ふことを例証したのです. この $n=2$ の場合を繰り返して御説明申しますと, そのときには ≪Cousin の第一問題が其の中で常に解けるような領域は正則域でなければならない≫ のでありまして, この定理も矢張り氏に負ふものであって, 私達が此の問題を, 正則域と限定して其処でのみ取り扱ったことに対する

[14]Voir par exemple : G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, 1926 (Acta Mathematica).

理由を与へるものであったのです. それで此の論文は私達に対してこの方向に新しく問題を提出したことになるのですが, これに対して上述のことが解決を与へるかどうか, 又若しそうだとすればそれはどう云ふ形に於てか, 等の研究も併せてみなさまにお委せしたいと思ひます.

(Le 7 Décembre 1948 à Kimimura, Kishū, Japon)