

## 多変数解析関数について

奈良女子大理 岡 潔 (述)

1. 前世紀, Cauchy に引きつづいて Riemann, 少し後れて Weierstrass が出来て, 大体 1 変数解析関数論の骨格が出来ました. その Weierstrass ですが, 彼はどう思って 1 変数の解析関数論をやったのかと申しますと, “1 変数のときをやっておけば, 多変数のときも簡単に出来るだろう” と思ってやったようです. その証拠には, Weierstrass は, “多変数解析関数の essential singular point — 多分その点の近傍で函数が uniforme であり, その点が essential singular point であるような, という意味かと思えます — その点の集合は任意である” と云ったはず. このため, 大分そちらの方の研究を遅らせました.

最初どんな風にして, 人がそれに疑いを持つようになったかといいますが, Fabry が 1902 年頃, 巾級数の相関収斂半径についてくわしく見た所, どうもそんな風になりそうもない. (C. R., Paris Tom. 134) で, そこに始まります. 引きつづいて, その同じ所を Hartogs が詳しく調べました. そしてその結果, “内分岐しない正則域は擬凸状である”, 即ち任意でないという事を発見しました. Hartogs は 1906 年くらいと思います. (Math. Annalen Bd. 62). それから 1910 年くらいになりまして, E. E. Levi が同じく, “内分岐しない有理型域も又擬凸状である”, 即ち Weierstrass の予想をすっかり覆えす結果を出しました. (Ann. di Mat. pur. appl. (3) Bd. 17). Levi の証明は Hartogs のそれより大分むずかしい. それを押し切ったものだと思います. — 人が文化に貢献する仕方は色々あるんですね. 反対云っても貢献になる. もっとも貢献もしましたが, 遅らせました. なかなか功罪は離れて見ないと解らない. それならば離れて見たら解るかという, これ, やっぱり解らない. とにかくその辺歴史的に面白い. —

その後 1926 年 Julia が, “正則函数の family の正規域は, これも又擬凸状”, — 詳しく言おうとすると色々言わねばなりません, — 大体こういう結果を出した. (Acta Math. Bd. 47) そんな風に, だんだんそういったものが発見されて, されればされるほど, 1 変数の時が解っていれば多変数の時も解るといようなものではない特別な困難があると解っていきました. そういう方向の大切なものとして 1931 年, H. Cartan が, それまでは擬凸状という概念が主役を演じていたのですが, 新たに正則凸状, 正則函数の family による凸状という概念を導入しました. (Bull. Soc. Math. France Tom. 59). そして 1932 年 P. Thullen が “単葉な有限正則域は, 正則凸状である” と出しています. (Math. Annalen Bd. 106). 私は同じく 1932 年の H. Cartan と P. Thullen の連名による論文のみを読ん

でいるのですが (Math. Annalen Bd. 106). そうしますと, これはやはり困難が増したといえるのです. そうした困難を, 小さな, 文献の引用を主にする本にまとめましたのが, Behnke–Thullen の 1934 年に出版された本です. そこで主体となっているのは, 1932 年の Cartan–Thullen の論文でその辺まで問題が追跡されて来ていました.

2. そこにある問題は, 大体申しますと, 函数を漸近的に表示する問題 (ある領域で正則な函数をより広い領域で正則な函数の級数に展開する問題), Cousin の問題, これは I と II とありまして, I といいますと, 極を与えて有理型函数を求める問題, II といいますと零点を与えて正則函数を求める問題, それから Hartogs の逆の問題, 即ち有限で内分岐しない擬凸状領域は正則域かという問題, 何故正則域が大事かといいますと, Thullen の結果がありますから, それは正則凸状, それで正則域であるというのが大きいのです. まあ, こういった問題があります.

さてこれらの問題を扱う領域ですが, 一番一般的な領域が擬凸状領域で, Hartogs の逆の問題は, ここだけ問題になります. その次が正則凸状域でこれは大体正則域と同じこと, その次が *polynome* 又は *rational function* に関して *convex* な領域, 更に一番簡単なのが筒状域, 筒状域といいますと各変数平面上の領域の *product* としての領域です. 筒状域でこれらの問題が解けるというのは, (第 II 問題で多少間違っていますが) Cousin 自身が解きました. 1985 年です. (Acta Math. Bd. 19) そこで *polynome* 又は *rational function* に関して *convex* な領域に於てはどうかというのが次の問題になります. ここで漸近の問題は A. Weil が解きました. 1932 年に予報を出して (C. R., Paris Bd. 194) 1935 年に出しました. (Math. Annalen Bd. 109). それでその後が残っていました.

これを私が皆大体解決しました. 正則域において Cousin I は解ける. (Mémoire I, II). Cousin II は与えた 0 面が当然要る必要十分条件, *balayable* という条件さえ満たすならば解ける. (Mémoire III). それから Hartogs の逆は成り立つ. (Mémoire VI, IX). これ 2 変数については 1942 年ですから, 出たのは戦争中ですが, やったのは戦争前. それから  $n$  変数については (不分岐な領域の場合) 戦争中に高木先生の所へ日本語で書いて送っておきました. これ遂に発表していませんけれど, それで, これだけで色々な研究をやろうと思えばやれるんです. しかし更に分岐点を入れて考えたりしようと思しますと, ここで解いた解き方だけでは不十分です. それで, — ここではあまり言う事ないのですがちょっと言っておきますと, — *ideal* に関する問題が出て来ます.

*ideal* といいますと Kummer に始まります. それからそれを Dedekind が *axiomatic* に言いなおしました. それの *element* を数から *polynome* に広げたのが Hilbert, 更に *polynome* を *analytic function* に変えようと

最初にしたのは、後で知ったのですが Rückert です。(Math. Annalen Bd. 107. 1933 年). そしてこの後、これを更に詳しくみようとして 1940 年に H. Cartan が Matrices holomorphes という論文を書いています。(J. Math. Pures. Appl. 19). これは前の正則凸状の論文と共に非常に重要な論文です。これだけで後は戦争になって、知らなかったのです。

所で element を analytic function にしますと、どうなるかと言いますと、polynome の場合は数のかわりに個々の element を  $f$  と書けばよいのですが、analytic function ですと Riemann がしました通り、この  $f$  がどこで正則かという領域  $\delta$  を添えて、 $(f, \delta)$  としなければならない。そのように pair にして始めて意味をもつんです。だから、私は領域がかわりますから、不定域 ideal としたんです。これが出来た丁度その頃、戦争後 2 年くらいですが、湯川君がノーベル賞をもうらうので飛行機でアメリカへ行くというとき、この論文をもって行ってもらったんです。(Mémoire VII). それ大分ひまがかかって出たんです。

所で、この辺別に faisceau とか何とか知らなくても出来ます。それにこんな所、あまり問題もありません。少数だけれど、是非解きたい問題、それを解くと解かんとでは大変差が出る問題であります。それを解いてしまえば一応それで終いになります。勿論 faisceau が直接代数的に意味があれば、それは別ですが。又名前も、その前後関係からいっても、その名前の妥当さからいっても、当然不定域 ideal というべきです。

それはともかく、こんな風にして、Weil とか Cartan とか、そういった人達と手をつないで、これらの問題をやったわけです。

3. 所でここまでの所で問題が残っているんです。それは、“正則函数を polynome に展開すること” です。函数をその中で polynome に展開出来る様な領域を Runge 域という事もあります。有理函数に展開出来るときを Runge 域という事もあり、本当は、あとの方が正しいのでしょうが。それで Runge 域であるための必要条件は大分後に Serre が出しています。(Proc. Amer. Math. Soc. 1955 年). “ $n$  複素次元の空間における Runge 域では、実  $n$  次元の Betti 数が 0 でなければならない。” その証明、私は読んでいないのですが面白いかもしれない。これは necessary condition です。それで sufficient condition がほしい。所がこの問題は Behnke-Thullen の本に、“有限単葉な正則域では、もしそれが einfachzusammenhängend ならばそこでの正則函数が多項式の級数に展開出来るか”，という問題として出ています (page 79). 私はそれを解いてからと思って展開の問題を考えなかったのですが、どうもこれ急に解けそうもない。それほど腰据えてやろうとはしませんでした。しかしちょいちょいあたって見たんです。これは非常にむずかしいし、又色々な方法があります。が私はこの答えは affirmative であろうと、絶えず予想して来ました。所が近頃どこかにわり

あい新しく、3次元以上だったら、この条件は sufficient ではないという反例が出ました。それでは2変数のときはどうかというのが丁度残っている。私は、やはり2変数のときはそうではないかと予想しています。そしてもしそうなら、3変数以後も条件をつけ加えたらいくんではないかと予想されます。

大体正則域であるということは、色々その領域の topology に制限を与えるはずで、これ、調べられていない。これも問題です。

4. さて次は複素多様体ですが、函数論をあそこへ始めてもって行ったのは多分 Weyl です。そして、Weyl は1変数函数だけについて考え、何もこの解析平面においてのみ考えなくても、それと同じだけの性質をもっていたら、やれると予想してあゝいうものを定義したんだと思います。所が1変数のときは、特にそれが compact だったりしますと、複素空間で考えるのと大体同じ事になるかと思いますが、2変数以後は決してそうではない。

函数論の方から言いますと、ここでは微分することが出来ない、それから積分することが出来ない、その上、格子わけする事が出来ない。それでは一体何が出来るのかとききたい。代数の方の観点から行きますと、そうとは違います。あるものは出来るでしょう。そして又不定域 ideal という風まで行けば、多様体の方へ移せるのですがよほどそんなものが出て来るとでない限り函数論の方との連携は付かないのではあるまいかと思われます。しかも連携が付いたら、その後は、適当に compact にした複素数空間で考えればよいので、そこへ移せた後、更に詳しく多様体の所で調べねばならない問題はありそうもない。数学の事だから、なんだ、そんな問題があったのかという事になるかもしれませんが、ちょっと観念的に考えますと、それなら数空間の方へ移して考えたらよいのではないかという事になるのです。

それで projective space と product space (Riemann 球面の product) とそれからその2つの組合わさった空間、まあそういう様な所で多変数解析函数を調べよう。一応そういう事になるのです。

5. そうしますとそこにどういう問題があるかと言いますと、Hartogs の逆問題で、“内分岐しない”というのを残して、“有限である”というのを取り去ったらどうなるかという問題が始めに出て来ます。これは projective space でなら、私の (Mémoire IX) の条件である“有限であって”とする代りに、“少なくとも1つの界点を持つならば”とすれば同じ結果が得られます。これは藤田玲子さん、少しおくれて武内君が解いています。では projective space でなく product space であったらどうかという問題が残って居る。(藤田さんが解かれた。) それから分岐点を入れたらどうかという問題はひどく残っています。私、これを大分長くやったのですが、全々

無条件でないと出さないと意地をはってるんです。だってせっかくここまで無条件にやって来たのに、それおしいでしょう。だからこんなもの一切人に言わないと思ってる。言ったらそれだけ問題へりますからね。

まあこれ大分長くやってみたんですが、非常にだんだんだんだんむづかしくなってます。このへんでは、この問題それ自体を取り扱っているのではないでしょうが、分岐した代数面上における色々な領域について、“正則域で擬凸状ではない”とかいった風な論文を H. Grauert が書いています。

そういうなのに刺激されたのでしょうか、大西君が“有限で内分岐しない正則域は正則凸状である”という Thullen の定理を内分岐した場合にはどうなるかを調べて、そしてどういう意味になるか解かりにくいという点において興味がある論文を書いています。(未発表)。丁度 Grauert があゝいう様なものを出しているとき、それからこの問題が残っているとき、そういうものを背景にして、あゝという意味のひょうびょうとしたのは実際面白い。

6. 次に 1930 年にフランスで私がやった仕事で、あそこで、もうそういう事止めようと思って、予報だけしたのですが、(J. of Sci. of the Hiroshima Univ. 1934 年) 固有面の正規族というのを定義しました。そして一口でいえば、“固有面の正規域は擬凸状になる”というのをしています。

これ証明なかったのを西野君が証明して、ここでは 2 変数だけだったのを  $n$  変数にして、それから固有面を一般の解析集合にして同様の事が言えるというのを藤田君がやっています。それからもう一つ同じ予報で擬凸状域の捕集合を  $H$  集合と呼んで、それについての話があるのですが、これも証明がなかったのを、ここでは  $n$  変数にして、西野君が証明しています。それから order の低い  $H$  集合について、田所君の仕事があります。出ていますから、読んで下さい (J. of Math. of Kyoto Univ. 1962 年：藤田、田所は未発表)。

所でここでの問題ですが、1 変数の場合には Integral function とか、meromorphic function とかの理論が色々あります。これを多変数にしますと、 $x_1, x_2, \dots, x_n$  を変数とする整函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  で、 $x_2, \dots, x_n$  をきめると、ここに  $f(x_1, a_2, \dots, a_n)$  という 1 変数の整函数が出来まして、これについて色々 theory が成り立つ、即ち図がえがける。それでこの parameter を動かしたら、この図が動く、だから moving picture が出来ます。その動き方がどうかという一系の問題があります。それでそういう見方が可能だという気がする様な論文を出しています。私のです。(Japanese J. of Math. Vol XXXII, 1962 年)。

複素空間に固有面の列  $S_1, S_2, S_3, \dots$  と、そして別に任意の positive number の列  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$  がある。そうしたとき、ある点の近傍にお

いて、これらの固有面の area  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$  とこの数との比

$$\sigma_1/\nu_1, \sigma_2/\nu_2, \sigma_3/\nu_3, \dots$$

が bounded になる領域が考えられます。これもやはり、擬凸状になる。そういう定理です。これ自身では、moving picture になっていませんが、そういう事があるという事を感じさせます。

7. 次は多変数の代数函数です。これ、最初フランスでやりました頃のが Picard-Simart の本に出ています。その後イタリアへ移って、更にアメリカへ移ったのです。そのフランスの所ですが、 $\int Adx + Bdy$  という形の線積分で 1<sup>st</sup> kind の積分というのがあって、これの independent なものの数がいくつあるかという問題があります。これは大体どういうものが問題になるかといいますと

$$A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} + C \frac{\partial f}{\partial z} = \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) f$$

という方程式の解です (page 118)。ここで  $A, B, C$  が未知函数で  $f$  は与えられた代数面を定義する多項式です。なおこれを仔細にみますと、 $A, B, C$  としては、畢竟 polynome が問題なのだから、それらの係数間の関係が問題です。

所がそうしますと、方程式の数の方が未知数の数よりもずっと多い ( $A, B, C$  の次数に制限がある)。それで方程式に非常に多くの dependence がないと解けない。しかもその meaning を 1 次元の Betti 数と結びつけて説明せよという事になります。それでこれ多分、長い間解けなかったのです。

これ連立一次方程式の問題ですから外へもって行きようがちょっとないのです。これを複素多様体で考えますと singularity が入っていないときは、まあ 1 変数のときと同じになるんです。所がここで singularity が入ったらどうかという問題があります。それから 2<sup>nd</sup> kind の線積分となりますとこれは先の多項式  $A, B, C$  で次数に制限をおかないんでしょうから、これは次数さえ高く上げれば、未知数の数を超えてしまいますから必ず解けます。

で、そちらには大して問題はありません。それから、こういう風に (Picard-Simart の様に) やりますと、そのまま行けば代数幾何だけれど函数論的問題がそこにはないかと言いますと、ないわけではありません。よく知りませんが色々 singularity を入れたりしますと問題があるだろうと思います。

8. 次に偏微分方程式について。これ言ってしまいますと、複素数空間の上の代数的 Riemann 多葉域  $R$ 、それから有限個の固有面をひき去った  $R'$ 、又こういったものの Überlagerungsbereich  $\tilde{R}$  及び  $\tilde{R}'$ 、において偏微

分方程式を考えます. でそのために  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の有限空間で次の様な linear differentially equation

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^n} = A \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{n-1} \partial x_2} + \dots + C \frac{\partial u}{\partial x_n} + Du + E$$

を考えます. ここで係数は皆  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の正則函数です. こういう場合には,  $x_1 = 0$  の上に initial condition を与えます. それも  $x_2, \dots, x_n$  の正則函数にします.

所でこれらの係数が皆 finite order の整函数であって, それからこの donné も又すべて finite order の整函数ならば solution も又整函数になる. そういう風な事が言えないか. もしそうならこれを lemme にして,  $R$  とか  $R'$  とかの Überlagerungsbereich においても initial condition さえしかるべく与えれば, 全体で solution がありはしないかという問題を取り扱うことが出来る. それでそれらを皆代数函数論へ入れたらどうだろうか. 大体そう考えているのです.

9. 多変数解析函数の所は, 理論が出来上るのに非常に時間がかかりました. 何しろ始めは, だんだん発見されるほど困難がふえて行ったのですから. 所がそれとは別に大体前世紀の 1890 年くらいから始めまして, やっている人は少なかったんですが, しかし長い間に色々な文献をためて色々な結果に達しています. がそれは理論が出来上るよりも前から始めている事が多いのだからして, その一つ一つについて, 始めからもっと色々な事を知っているとすれば, 乃至は予想出来るとすればという風に一応見なおさなければなりません. 整理するのはめんどうだけれど, そうして行けば一つ, 二つづつ, 問題は必ず出て来ます. それで当分はその様に一応整理して, 問題を出して, それを解く. そうしてからでないとい先へは進めない. そのかわりに当分は後ろ向きの姿勢で研究する事が出来る. 現在はそういう所と考えています.

(文責及び ( ) 内の注は西野)

[あとがき] 1964 年 2 月 10 日 ~ 12 日, 数理解析学総合研究 (第一班) シンポジウムが京都大学基礎物理学研究所で開かれ, 岡潔先生はそこで講演をされた. その講演をテープに録音し, 後にそれを文章化したものが

数理解析学総合研究報告 (第一班) 1964 年 3 月

に収録されている. これはその全文の再録である. 当ホームページでの公開を快諾された京都大学数理解析研究所に感謝する.

西野利雄