Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

III — Exemples.

Introduction. 我々は單葉正則域を三つに区分して筒状域, 有理函数に関して凸状なる領域[1]及び一般の領域の三種類とした. 前二報告は此の分類法にもとづいてなされたものである.[2] 所で此の第三種類の領域が実在するか否かは全く疑問である. 我々は何よりも先づ之を解決することを試みなければならない.

自分は此の問題に関聯して T. H. Gronwall による exemple[3]を想起した. 彼は二複素変数 x, y の空間に於ける筒状域 $0<|x|<\infty$, $0<|y|<\infty$ に於て, Cousin の第二問題[4] が必ずしも解けないことをのべて居る. 彼の推論は二複素変数の代数函数論にもとづいた複雑なものであるが, 若し之を簡潔にすることによって, か様な現象の起る理由を明らかにすることが出来たならば, 或は夫から出発して第三種類の領域の実例が得られるかも知れないと自分は考へた.

此の予想はたやすく実現せられた. 以下述べんとする所のものである.

1. 双円環に於ける正則函数の零点の動きを観察することから始める. 今複素変数 x, y の空間に双円環 (Γ, Γ') を考へる. Γ は x 平面上の円環, Γ' は y 平面の夫である. $f(x, y)$ を此の双円環及び其の近傍で holomorphe な変数 x, y の函数とし, 方程式 $f(x, y)=0$ を考へる. 但し此の方程式は双円環の何れかの点に於て充たされ, しかも恒等的にみたされないと仮定する.

x_0 を円環 Γ の任意の一点とするとき, 之を中心とする円 (γ) を撰び, 之に関して f を次の如く分解しうること Weierstrass の定理の示す所である：

$$f(x, y)=\varphi(x, y)\cdot\psi(x, y)$$

ここに $\psi(x, y)$ は, x が (γ) にあり, y が Γ' 又は其の周上にある様なすべての点で holomorphe, non-nulle な 1 価函数, $\varphi(x, y)$ は x_0 に対して, 閉

---

[1]問題の單葉領域の内部にある任意の單葉領域を含んで始めの領域に含まれる様な, 正則な有理函数の全体から成る函数門に関して凸状な, 第三の領域が必ず見出されるとの意.

[2]自分は第一報告に於て筒状域と有理凸状域との関係をのべ (定理 II), 第二報告に於て有理凸状域と單葉正則域との関係をのべた (定理 I). 之等の原理は将来正則域に関してのべようとすることの基礎である. Voir :
I — Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles, ce journal, 1936
II — Domaines d'holomorphie, ce journal, 1937

[3]Gronwall : On expressibility of uniform functions of several complex variables as quotient of two functions of entire character, Amer. Math. Soc. Trans., 1917

[4]零点を與えて正則函数を求める問題.

円環 Γ' にある如き $f=0$ の根を $y=\eta_1(x), \eta_2(x), \ldots, \eta_\lambda(x)$ とすれば

$$\varphi=(y-\eta_1)(y-\eta_2)\cdots(y-\eta_\lambda)$$

である. 但し $\eta(x)$ は何れも (γ) に於て algébroïde であると考へる. 若し $\lambda=0$ ならば $\varphi=1$ ととる.

円環 Γ 内に其の周と同心の円周 C を描く. 之を (γ) の有限個の (γ) によって被覆することが出来る. 夫等を

$$(\gamma_1),\ (\gamma_2),\ \ldots,\ (\gamma_\mu)$$

とする. 之等の隣接する任意の 1 対 (γ_i), (γ_j) をとり, 共通部分を (δ) とする. 其の中心 x_i から x_j に C を描くとき, 夫が正の方向であると考へる. Γ' の内側の境界を C' とする. ψ_j/ψ_i は x が (δ) にあり y が Γ' 又は其の近傍にあるとき, 0 でも ∞ でもない. 夫で x を (δ) 内に固定し, y をして C' を正の向きに 1 周せしめたときの其の偏角の増加を考へることが出来る. 之を α とする. α は x に indépendant である. 所で

$$\sum \alpha=0$$

である. ここに總和はすべての隣接する (γ) の対に汎る. 何となれば x を (γ_i) 内に固定し, y をして C' を正の向きに 1 周せしめたときの ψ_i の偏角の増加を β_i とすれば,

$$\alpha=\beta_j-\beta_i$$

であるから.

所で, 他方

$$\frac{\psi_j}{\psi_i}=\frac{\varphi_i}{\varphi_j}$$

である. 夫で, 今 x をして x_i から x_j まで C の弧を描かしめたとき, 方程式 $f=0$ の根が 閉円環 Γ' から円 (C') に出る回数を n とし, 逆に円 (C') から閉円環 Γ' に入る回数を p とすれば

$$\alpha=2\pi(n-p)$$

である. 依って, 次の結果をうる :

<u>x をして円周 C を正の向きに 1 周せしめたとき, 方程式 $f(x,y)=0$ の根が, 閉円環 Γ' から円 (C') に出る回数を N とし, 逆に此の円から此の閉円環に入る回数を P とすれば $N=P$ である.</u>

2. 扨て, 上の性質の欠除した零点を作ることが問題である. 考へを固定するため, (Γ,Γ') として次のものをとる :

$$r<|x|<1, \quad r'<|y|<1.$$

更に, 操作を簡単にするため

$$r + r' \geqq 1$$

なる如く選ぶ. かくすれば 固有面

$$y = x - 1$$

の (Γ, Γ') 内の部分は上下 2 つに分れる. 其の上半のみをとって, 零点 $(\mathfrak{z}_0)$ を作る.

Γ'' を Γ' と同心で其の内部にある任意の円環とし (Γ, Γ'') について N 及び P をしらべると,

$$N = 0, \quad P = 1$$

なるを知る. 故に

此の双円環 (Γ, Γ') に於て正則であって, $(\mathfrak{z}_0)$ を零点として持つ様な函数は存在しない.

尚, $(\mathfrak{z}_0)$ を零点として持つ様な有理型函数は必ず存在する. 実さい, (Γ, Γ') に於て有理型であって, Γ の上半に於て $1/(y - x + 1)$ を極とし, 他に特異点を持たぬ様な函数は Cousin の定理によって常に見出しうる. 其の一つを $G(x, y)$ とすれば $1/G$ が所要の函数である. 此の $G(x, y)$ を (Γ, Γ') に於て互に素なる, 2 つの正則函数の商として表はし得ないこと, 上に見た所から結論される.

3. 次の様な開集合 A を考える：

$$r < |x| < 1, \quad r' < |y| < 1, \qquad r + r' \geqq 1$$
$$|G(x, y)| < M$$

A は連結されて居ないかもしれないが, 之を構成する領域はすべて正則域である. 所で正数 M を充分大きくとっておけば, 其の中には, 其の領域内で正則な有理函数の全体からなる函数門に関し凸状な領域の列によって, 内部から approximatif ではない様なものが必ずある.

先づ M をどれ位大きくとるべきかからのべよう. 正数 d を $6d < 1 - r'$ なる如く撰ぶ. x 平面に 0 を中心, $\dfrac{1+r}{2}$ を半径として円周 C を描き, y 平面に次の様な円環 Γ'_0 を描く： $r' + d < |y| < 1 - d$. $G(x, y)$ の任意の極を (x', y') とし 固有平面 $x = x'$ 上に y' を中心とし, d を半径として円 $(\gamma_{x'})$ を描く. 空間に於てか様な円の全体からなる点集合を考へ, E とする. 点集合：

$$|x| = \frac{1+r}{2}, \quad r' + d \leqq |y| \leqq 1 - d$$

から E を引き去ったものを F とする. F は明らかに 1 つの continuum であって, 其の各点で $G(x,y)$ は正則である. A が此の F を含む程 M を大きくとれば夫で充分であって, A を構成する領域の中, 此の F を含むものは上述の性質を持つ.

実際, 若しそうでないならば, Weil の定理によって $G(x,y)$ を F 上で有理函数列の極限として表はしうる. しかも, 其の各函数は F で正則であり其の収斂は F で斉一である様なものを撰ぶことが出来る. か様な函数列の 1 つを (S) とする.

扨て, C 上に点 ξ を, 円 (γ_ξ) が存在し, しかも Γ'_0 に含まれる様に撰ぶ. Γ'_0 の 2 つの境界の距離は $4d$ よりも大きいから, 此のことは常に可能である. かくすれば (S) の函数中には $x=\xi$ とおいたとき, 此の円内で極を持つものが必ずある. 何となれば, 然らずば, か様にして得られた 1 変数 y の函数列はすべて此の円内及び其の近傍で正則であって, 円周上で $G(\xi,y)$ に向って斉一収斂する. 故に Weierstrass の定理により, 円内に於ても斉一収斂し, 従って $G(\xi,y)$ は円内で正則でなければならぬ. 之は此の函数が円の中心で極を持つことと矛盾するから.

か様に $x=\xi$ とおいたとき (γ_ξ) で極を持つ様な有理函数が (S) 中に見出される. 其の 1 つをとり, 之を互に素な polynomes の商として表はし, 其の分母を $f(x,y)$ とする. (x',y') を上の (ξ,η) と同一性質の任意の点とせよ. f は F 上で零をとることが出来ない. 夫故, 方程式 $f(x,y)=0$ の根を prolonger することにより, $f(x',y)=0$ は円 $(\gamma_{x'})$ 内に根を持つことが分る. しかも, 根のかずは x' に無関係である. 之を m とする.

y 平面に 0 を中心とし, $\dfrac{1+r'}{2}$ を半径として円周 C' を描く. $(\gamma_{x'})$ を y 平面上に描かれた動円と考へ, x' をして C を正の向きに 1 周せしめると, $(\gamma_{x'})$ は C' を 1 度だけ内部から外部によぎる. しかも此の円の半径は d であって, 円周 C' から円環 Γ'_0 の境界への距離は $2d$ よりも大であるから, $(\gamma_{x'})$ が C' をよぎるとき及び其の前後しばらくは, 此の円は絶えず Γ'_0 に含まれて居る. 夫故 x をして C を正の向きに 1 周せしめると, $f=0$ の根の内 m 個が円 (C') から此の円外に出る. もとよりか様なことはあり得ない.

此の矛盾は冒頭の仮定から来たものである. 故に A を構成する領域の内, F を含むものは所要の性質を持つ. C. Q. F. D.