Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables [1]

VIII — Lemme fondamental

Par Kiyoshi Oka

1. Domaines intérieurement ramifiés. — H. Behnke, P. Thullen が序言で云った著書で取扱っている領域は, ごく特別のものを除いて, 分岐点を内点として持たないようなものであるが, 序言でのべたようにいつまでもこの制限を残しておいては到底不充分であるから, ここでこれを取り去らう. 然し此の度はまだ無窮遠は取扱はない. それで此の論文では空間は常に有限であって, 従ってこのことは必ずしも明記しない.

Behnke, Thullen に従って, 複素空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (これを (x) と略記する) 上に内分岐しない領域, 境点, 分岐点を考える. (但し Behnke, Thullen は p. 13 に葉数 m を分岐点の階数とよんでいるが, 私達は矢張り $m-1$ をそうよぶことにする.) 領域 $\mathfrak{D}$ の分岐点 M が次の条件をみたすとき, 私達はこれを point critique non-transcendent とよぶ :

1° M の ordre が有限であること.

2° M の基点 $\underline{M}$ をふくむ単葉領域 $\underline{\delta}$ があって, 共通部分 $\underline{\delta} \cap \mathfrak{D}$ の M を境点とする成分を δ とすれば, $\underline{\delta}$ における, δ の境点の基集合は固有面であること.

内分岐しない領域 $\mathfrak{D}$ に, 其の非超越的分岐点の一部又は全部の集合を, 次の条件をみたすようにつけ加えて, 点集合 $\mathfrak{D}'$ を作る :

M を $\mathfrak{D}'$ にぞくするような $\mathfrak{D}$ の任意の分岐点とすれば, $\underline{M}$ を含む単葉領域 $\underline{\delta}$ があって, $\underline{\delta} \cap \mathfrak{D}$ 内の M を境界とする成分を δ とすれば, δ の非超越的分岐点はすべて $\mathfrak{D}'$ にぞくすること.

私達は今後かような $\mathfrak{D}'$ をも 領域 とよぶことにする. かように拡張した二つの領域の関係や其の intersection は, それ等の領域からそれぞれの points critiques をすべて引き去った二つの領域を仲介として定義すればよい.

領域 $\mathfrak{D}$ が pseudoconvexe であるとは, $\mathfrak{D}$ から points critiques をすべて引き去った領域 $\mathfrak{D}_0$ がそうであることを云ふ.

領域 $\mathfrak{D}$ の任意の点を P とする. (以下一般に P の座標を (x) とする). 函数 $f(P)$ が $\mathfrak{D}$ において 正則 であるとは, $f(P)$ が一価であって points critique でないような点 (正則点) の近傍で (P の座標) (x) の正則函数で

[1] [編注] 原文にはこの表題と署名はない. 「岡潔先生遺稿集」第 5 集 後記参照.

あって, Δ を $\Delta \Subset \mathfrak{D}$ である様な任意の領域とすれば ($\Delta \subset \mathfrak{D}$ とは Δ が $\mathfrak{D}$ の真正部分領域であること, $\Delta \Subset \mathfrak{D}$ とは其の上 Δ が $\mathfrak{D}$ の完全内部に含まれること, 云いかえると Δ の任意の limiting point が $\mathfrak{D}$ にふくまれることをいう), f が Δ において有界であることをいう. 領域 $\mathfrak{D}$ が 正則域であると云えば, $\mathfrak{D}$ に於て正則であって, $\mathfrak{D}$ を含むような領域 $\mathfrak{D}'$ (i.e. $\mathfrak{D} < \mathfrak{D}'$) が若しあれば, それに対しては決してそうでないような函数が, 少くとも一つ存在することを意味する.

領域 (R) に $O \subset \Delta \Subset (R)$ であるような点集合 Δ があって, (R) が正則域の部分領域であって, Δ は, (R) における有限個の正則函数 $f_i(P)$ と平面上の 有界閉領域 $\overline{A_i}$ (simplement connexe ou non) とによって ($i = 1, 2, \ldots, m$), $f_i(P) \in \overline{A_i}$ の形に定義出来るとき, Δ を domaine polyédral (又は誤解を生じるのを避けるために domaine polyédral fermé) と名づける. (領域の此の形は A. Weil に負ふ所である. H. Cartan, 上述第二論文, No. 21 参照.) 私達が始初に Mémoire I の Théorème II をたてたのは, 此の形の領域の上にであった. そして今再び同じことをしようとして居るのである. 所でそのためには不定域正則イデアルについて今少し研究しなければ, Mémoire VII でのべただけでは足りないし, 其の後 H. Cartan が得た結果を追加しても矢張り不充分なのである.

I. Idéaux holomorphes ayant les pseudobases locales.

2. Notions générales. — 解析函数を定義する際, Weierstrass は函数と領域とを合せ考えて要素とした. 解析函数の分野が代数函数のそれと著しく状景を異にする所以がここに現れている. 私達は此の思想を一層徹底させて, 領域に完全な自由度を与えよう. (有限) 複素空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に於て paire ordonnée (f, δ) を考える. ここに δ は 空間 (x) の任意の単葉領域 (connexe ou non), f は δ に於て正則な任意の函数である. δ は空集合であってもよいとして, $f = 0$ 又は $\delta = O$ ならば $(f, \delta) = 0$ と規約する. 0 以外のものに対しては, $(f, \delta) = (f', \delta')$ は $f = f'$, $\delta = \delta'$ を意味する. かようなものの積及び和を夫々次のように定義する.

$$(f_1, \delta_1) \cdot (f_2, \delta_2) = (f_1 \cdot f_2,\ \delta_1 \cap \delta_2), \quad (f_1, \delta_1) + (f_2, \delta_2) = (f_1 + f_2,\ \delta_1 \cap \delta_2)$$

(私達は $\delta_1 \cap \delta_2$ によって, δ_1, δ_2 の Behnke, Thullen の云う intersection のすべての和を表す.) そうすると, かような (f, δ) の全体を $\mathcal{O}$ とすれば, $\mathcal{O}$ は一つのリングを作る. これを有限空間 (x) に於ける l'anneau holomorphe de domaines indéterminés と名づけよう. 此のリング $\mathcal{O}$ の上に, 抽象代数学に従って, イデアルを考える. これが Mémoire VII で, 代数函数のイデ

アルを仲介としてのべた idéaux holomorphes de domaines indéterminés である. 此の論文で単に idéal といえば, 常に此の種のものであって, リングについても同様である.

空間 (x) の任意の idéal (I) は要素 0 を持つ. 故に, 規約によって, (I) は空間の任意の点において函数 0 を持つ. 然し, (I) はある点 (x^0) で 0 以外の函数を持たないかも知れない. この時 (x^0) を (I) の point lacunaire とよぶ. 虚点列の極限点は明らかに虚点である.

二つのイデアル $(I_1), (I_2)$ が領域 $\mathfrak{D}$ において équivalents とは, $\mathfrak{D}$ の各点に於て一方にぞくする函数は必ず他方にぞくすることを云ふ. これを $(I_1) \sim (I_2)$ で表す. 一点 (x^0) で $(I_1) \sim (I_2)$ とは, (x^0) の一つの近傍でそうであることを意味する.

かようなイデアルに関する私達の主問題は pseudobases locales を求めること である. (この言葉の説明をくり返そう. 空間 (x) にイデアル (I) が与えられたとき, 単葉領域 $\mathfrak{D}$ に有限個の正則函数 $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p)$ があって, 次の条件をみたしたとする: 1° $\mathfrak{D}$ の各点で $\Phi_i \in (I)$ $(i = 1, 2, \dots, p)$. 2° $\mathfrak{D}$ の任意の点で (I) にぞくする任意の函数 f は其の点で $f \equiv 0 \mod (\Phi)$. このとき $(\Phi_1, \dots, \Phi_p)$ を $\mathfrak{D}$ に於ける (I) の pseudobase であると云ふ. 点 (x^0) で (Φ) が (I) の pseudobase と云えば, その点のきまった近傍 V でそうなっていることである. かようなものを pseudobase locale と名づける.) そして此の度は, 私達のごく身近かにあって, すぐに必要な数種のイデアルについて此の問題を解こうというのである.

3. Principes généraux. — Mémoire VII の次の定理 (Théorème 4) から出発する.

Théorème — Étant données des fonctions F_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ holomorphes au voisinage d'un polycylindre fermé Δ, on peut trouver une solution formulaire de l'équation fonctionnelle $A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0$ au voisinage de Δ. Il en est de même pour les systèmes d'équations fonctionnelles linéaires homogènes simultanées. (Un polycylindre est un ensemble cylindrique dont les composantes sont des cercles.)

此の定理の要点は, équation fonctionnelle linéaire $A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0$ の δ に於ける solution を $(A_1, A_2, \dots, A_p)$ とするとき, (A_1, δ) のすべてからなるイデアルは pseudobases locales を持つということである. 此の種のイデアルを, 聯立方程式の場合をも含めて, Idéaux (L) と呼ぶことにしよう. 此の定理からすぐに導かれる一般原理をのべる.

1°. Corollaire de H. Cartan — $(I_1), (I_2)$ を有限空間 (x) に於ける二つの不定域正則イデアルとし $(I) = (I_1) \cap (I_2)$ とすれば (I) は明らかに正

則イデアルである. この (I) が点 (x^0) に於て pseudobase を持つためには, $(I_1), (I_2)$ が共にそうならば充分である. (H. Cartan, 第二論文)

証明は上述の定理からすぐに出来る.

2°. Corollaire 1. — 有限空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に不定域正則イデアル $(I) = \{(f, \delta)\}$ と一点 (x^0) とが与えられたとき, (x^0) の一つの近傍 V に於て正則な函数 $F(x)$, $\Phi_1(x)$, ..., $\Phi_p(x)$, $\Psi(x)$ によって, (I) を次のように transform して $(J) = \{(\varphi, \delta')\}$ を作る：

$$\varphi\Psi = fF + A_1\Phi_1 + \cdots + A_p\Phi_p, \quad \delta' = V \cap \delta \cap \alpha_1 \cap \cdots \cap \alpha_p,$$

ここに (A_i, α_i) $(i = 1, 2, \ldots, p)$ は空間 (x) の不定域正則リング $\mathcal{O}$ の任意の要素である. (J) は明らかに不定域正則イデアルを作る. 此の時若し (J) が (x^0) において pseudobase を持ち, 且つ若し一次函数方程式 $A_0F + A_1\Phi_1 + \cdots + A_p\Phi_p = 0$ の δ の一点 (x') における solution を $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ とするとき, A_0 が (x') に於て常に (I) にぞくするならば, (I) は (x^0) に於て pseudobase を持つ.

証明　(J) の (x^0) の近傍 V' $(V' \subseteqq V)$ における pseudobase を χ_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ として, 一次函数方程式

$$B_1\chi_1 + \cdots + B_q\chi_q = A_0F + A_1\Phi_1 + \cdots + A_p\Phi_p$$

を考える. 此の方程式の δ $(\delta \subseteqq V')$ に於ける solution を $(B_1, \ldots, B_q, A_0, \ldots, A_p)$ とし, (A_0, δ) の全体を (K) とすれば, (K) は定理によって (x^0) に於て pseudobase を持つ. 所で, (K) と (I) とを比較するに, 先づ (J) の定義によって, $(K) \supseteqq (I)$ である. 次に第二の条件によって, V' の任意の一点に於て (K) にぞくする函数は必らずこの点に於て (I) にぞくする. 故に上述のものは (x^0) に於ける (I) の pseudobase である.　C. Q. F. D.

3°. 次に此の度は使はないが, 将来有用だらうと思はれる一つの原理を, ごく簡単だから, 此の機会にのべておこう.

Corollaire 2. — 有限空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に不定域正則イデアル $(I) = \{(f, \delta)\}$ と一点 (x^0) とが与えられたとき, (x^0) の一つの近傍 V に於て正則な函数を $\Phi(x)$ とし, これによって次の二つのイデアル $(J) = \{(\varphi, \delta')\}$, $(K) = \{(\psi, \delta'')\}$ を作る：

$$\varphi = f + A\Phi, \ \delta' = V \cap \delta \cap \alpha\ ; \quad \psi\Phi = f, \ \delta'' = V \cap \delta,$$

ここに (A, α) は l'anneau $\mathcal{O}$ の任意の要素である. この時若し $(J), (K)$ が共に (x°) で pseudobase をもつならば (I) もそうである.

証明 (J) の (x^0) の近傍 V' $(V' \subseteqq V)$ に於ける pseudobase を $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ とすると, 各 Φ_i は (x^0) で $\Phi_i = F_i + A_i\Phi$ の形に表される. それ故 V' を充分小さくとれば, V' でそうである. それで, f を V' の一点 (x') で (I) にぞくする函数とすると f は (x') で

$$f = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_p F_p + (\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p)\Phi,$$

α_i $(i = 1, \ldots, p)$ は正則函数, の形にあらわされる. ここに於て

$$B = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p$$

とおけば (x') で $B\Phi \in (I)$, i.e. $(B) \in (K)$ でなければならない. 逆に此の二つのことが成立すれば, 明らかに f は (x') に於て (I) にぞくする.

V' を更に充分小さくとって, $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_q$ を V' に於ける (K) の pseudobase とすれば, 第二の条件は次のものと同等である：

$$\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p = \beta_1 \Phi_1 + \cdots + \beta_q \Phi_q,$$

ここに $\beta_1, \ldots, \beta_q$ は (x') における正則函数である. 此の二つが V' の任意の一点 (x') に於て, f が (I) にぞくするための必要充分条件である. かように (I) は V' において一つの (L) イデアルと $\sim$ であるから, 定理によって (x^0) において pseudobase をもつ. C. Q. F. D.

4. Quelques idéaux admettant les pseudobases locales. —

a. Idéaux géométriques de domaines indéterminés. — 空間 $(x_1, \ldots, x_n)$ の領域 $\mathfrak{D}$ に固有集合体 Σ を与える. このとき $\delta \subseteqq \mathfrak{D}$ であって, f が δ に於て Σ 上で恒等的に 0 になるような (f, δ) の全体を (I) とすれば, (I) は明らかにイデアルを作る. この (I) を Σ のイデアル とよび, この種のイデアルをおしなべて 幾何学的不定域正則イデアル と名づけよう. (H. Cartan は variété analytique のイデアルとよんでいる.)

Théorème de H. Cartan. — 幾何学的不定域イデアルは pseudobases locales をもつ. (H. Cartan の第二論文, No. 12 Théorème 2)

証明. Corollaire 1 による証明法をのべておこう. 上述の Σ 上の任意の一点を (x^0) として (I) が (x^0) で pseudobase を持つことをいえばよい. 私達は Weierstrass によって Σ が (x^0) の近傍に於て有限個の成分に分解されることを知っている. この各々において, それが矢張り固有集合であることはまだ知らないとして, Σ によって (I) を定義したと全く同様にして, V に於てイデアルを定義することが出来る. そうすると, V に於ては (I) は明らかに之等のイデアルの切断であるから, Cartan の系 によって, この各が (x^0) に於て pseudobase をもつことをいえばよい. だから, 改め

て Σ を V におけるある固有集合体の成分とし, (I) を V において定義せられた Σ のイデアルと見て, このことを云おう. Σ を p 複素次元とみる. $p=0$ のときは定理は明らかであるから, $0<p<n$ とする.

記号を簡単にするために, 改めて空間を $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ $(n>0,m>0)$ とし, Σ は n 次元 (私達はこの論文では常に複素次元を使ふ) であって, Σ 上に原点があって, その近傍が問題になっているものとしよう. Weierstrass によって, 必要ならば (x,y) に適当な non-singular な linear transformation を施し, 正数 r,ρ を充分小さく且つ適当にえらび, (γ) : $|x_i|<r$ $(i=1,\dots,n)$; (γ') : $|y_j|<\rho$ $(j=1,\dots,m)$ を考えると, Σ は (x) が (γ) にあるとき (γ') 内にしか点をもたず, 積領域 $[(\gamma),(\gamma')]$ に於て, (I) は次のような諸函数をもつことが分る :

$$F_i(x,y_i),\ \Psi_j(x,y_1,y_j)=y_j\frac{\partial F_1(x,y_1)}{\partial y_1}-\Phi_j(x,y_1)\ \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,n \\ j=2,\dots,m \end{pmatrix}$$

ここに $F_i(x,y_i)$ は y_i に関する polynome であって, 係数はすべて (γ) における正則函数, 特に最高次のそれは 1 である. $\Phi_j(x,y_1)$ は係数が (γ) における正則函数であるような y_1 の polynome である. 特に $F_1(x,y_1)$ については derivée $\dfrac{\partial F_1(x,y_1)}{\partial y_1}$ は成分 Σ 上で恒等的に 0 となることなく, (従って F_1 は multiple factor をもたず), $(x)\in(\gamma)$ において $F_1(x,y_1)=0$ が Σ の空間 (x,y_1) 上への 射影 となっているようなものである. (点集合 $\{(x',y')\}$ の空間 (x) 上への射影とは, 空間 (x) における点集合 $\{(x')\}$ を云う.)

(x',y') を $[(\gamma),(\gamma')]$ の任意の一点とし, $f(x,y)$ をこの点で (I) にぞくする任意の函数とすれば, Mémoire VII でのべた Théorème du reste[2] によって, この点で $f\equiv\varphi \mod (F_2,F_3,\dots,F_m)$ であるような φ を, 係数が (x') における (x) の正則函数であるような $y_2,y_3,\dots,y_m$ に関する polynome であって, 各次数は f 及び (x',y') に無関係なあるきまった上界をもつようにえらぶことが出来る. それ故 (x',y') 及び f に無関係な正の整数 λ を適当にえらぶと, (x',y') において $\left(\dfrac{\partial F_1(x,y_1)}{\partial y_1}\right)^{\lambda} f\equiv\psi \mod (F_2,\dots,F_m,\Psi)$ であるような ψ を (x,y_1) のみの正則函数であるようにえらぶことが出来る. この $\psi(x,y_1)$ は (x',y') において (I) にぞくするから, $F_1(x,y_1)$ の性質から, 明らかにこの点で F_1 によって divisible である. かようにきまった正の整数 λ が存在して, f を $[(\gamma),(\gamma')]$ の一点 (x',y') で (I) にぞくするような函数とすれば, $\left(\dfrac{\partial F_1(x,y_1)}{\partial y_1}\right)^{\lambda} f$ は常にこの点において $\equiv 0 \mod (F,\Psi)$ である.

[2]H. Cartan の第一論文参照

扨て, Corollaire 1 に従って, $(I) = \{(f, \delta)\}$ を次のように transform してイデアル $(J) = \{(\varphi, \delta')\}$ を作る：

$$\varphi = f\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^{\lambda} + A_1 F_1 + \cdots + A_{2m-1}\Psi_m,$$
$$\delta' = [(\gamma), (\gamma')] \cap \delta \cap \alpha_1 \cap \cdots \cap \alpha_{2m-1}.$$

そうすると, この (J) は $[(\gamma), (\gamma')]$ に於て pseudobase (F, Ψ) をもつ, それ故 (I) が (x^0) で pseudobase をもつためには, 第二の条件がみたされればよい. それをしらべよう. 一次函数方程式

$$A_0\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^{\lambda} + A_1 F_1 + \cdots + A_{2m-1}\Psi_m = 0$$

の $[(\gamma), (\gamma')]$ の任意の一点 (x') に於る任意の solution を $(A_0, A_1, \ldots, A_{2m-1})$ とすれば, $F_1, \ldots, \Psi_m$ は (x') に於て Σ 上で恒等的に 0 になり, $\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}$ はそうでないから, A_0 は (x^0) で Σ 上で恒等的に 0 になり, 従って (I) にぞくする. C. Q. F. D.

(I) が (x^0) で pseudobase をもつならば, (I) は不定域イデアルであるから, 其の base をつくっている函数の共通零点は Σ 外にはありえない. かようにして固有集合体の成分が矢張り固有集合体であることが自ら明らかになった.

<u>b. Projections.</u> — 有限空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ に不定域正則イデアル (J) があって, $\mathfrak{D}$ を空間 (x) の領域とするとき, $(x) \in \mathfrak{D}$ に於て pt. lacunaire を持たず, $(x) \in \mathfrak{D}$ に於ける (J) の fonctions の common zeros の集合 (i.e. 点 (x', y') で (J) にぞくする函数は此の点で必らず zéro になるような (x', y') の集合) を Σ とすれば Σ の y 平面上への射影 (上述) は有界であったとする. このとき空間 (x) の領域 $\mathfrak{D}$ に於て此の空間の不定域正則リング $\mathcal{O}$ の次のような部分集合 $(I) = \{(f, \delta)\}$ を考える： $\delta \subsetneqq \mathfrak{D}$ であって, $f(x)$ は $(x) \in \delta$ の <u>各点において</u> (J) にぞくする. (I) は明らかにイデアルを作る. 私達はこの (I) を $(x) \in \mathfrak{D}$ におけるイデアル (J) の射影と名づける.

<u>Théorème 1.</u> — <u>上述の projection (I) は, 若しもとのイデアル (J) が $(x) \in \mathfrak{D}$ の各点で pseudobase をもつならば, $\mathfrak{D}$ の各点に於て pseudobase をもつ.</u>

<u>証明.</u> $\mathfrak{D}$ の任意の一点を (x^0) とする. この (x^0) に於て (I) が pseudobase をもつことをいえばよい. それで $\mathfrak{D}$ を此の点を中心とする多円筒とみなし, 境界と共にもとの領域にふくまれると考えて支障ない. y 平面上に原点

を中心として充分大きな円 $\mathfrak{D}'$ を描き, Σ の射影が $\mathfrak{D}'$ の完全内部に落ちるようにする. (J) は積域 $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ の近傍の各点で pseudobase をもつとみてよい. そうすると Mémoire VII の Théorème 3 によって, (J) は $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ の近傍において pseudobase をもつ. これを $F,\Phi_1,\ldots,\Phi_p$ とする. これらの函数はいずれも $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ の近傍で正則であって, そこに於る common zeros の集合は Σ でなければならない. それで若し $F(x^0,y)\equiv 0$ ならば Φ_i のいずれかがそうでないから, $F(x^0,y)\not\equiv 0$ とみてよい. $\mathfrak{D}'$ は少しうごかしてよいから, $F(x^0,y)=0$ の根はその boundary 上にないとみてよい. $\mathfrak{D}$ は如何程小さくしてもよいのだから $\mathfrak{D}$ の近傍の各点でそうであるとみなし得る. そうすると $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ で $F=\omega F_1$ となる. ω は $(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$ で non-nulle な函数, F_1 は其の係数が $\mathfrak{D}$ で正則であるような y の polynome であって, 特に最高次の係数は 1 であって, (α) を $\mathfrak{D}$ の近傍の任意の定点とするとき, $F_1=0$ の根は $\mathfrak{D}'$ 内にしかないようなものである. それ故, 私達は F の代りに F_1 をとってよい. これを改めて F とする. F の y に関する次数を λ とすると, Théorème du reste によって, Φ_i $(i=1,\ldots,p)$ は何れも y に関する高々$\lambda-1$ 次の polynome であるとみなしてよい.

(x') を $\mathfrak{D}$ の任意の一点とし, $\varphi(x,y)$ を (x') で (J) にぞくするような y に関する高々$2\lambda-2$ 次の polynome とする. δ を (x') を中心とする充分小さな多円筒とする. そうすると, $(\delta,\mathfrak{D}')$ の近傍の各点で $\varphi\equiv 0 \mod (F,\Phi)$ であるから, Mémoire VII の Théorème 1 によって, $(\delta,\mathfrak{D}')$ で φ は

$$\varphi=c_0F+c_1\Phi_1+\cdots+c_p\Phi_p$$

の形に表される. ここに c_i $(i=0,1,\ldots,p)$ は正則函数である. Théorème du reste によって, $c_1,c_2,\ldots,c_p$ はいずれも y に関する高々$\lambda-1$ 次の polynomes とみてよい. そうすると c_0 は, $c_0=\Psi/F$ の形である, ここに Ψ は y に関する polynome, 其の係数は δ における (x) の正則函数である. また, δ の各 (x) に対し $F=0$ の根は $\mathfrak{D}'$ 内にしかなく, c_0 は $(\delta,\mathfrak{D}')$ で正則である. それならば, c_0 は y に関する polynome であることが分る. 何となれば, Ψ の y に関する最高次の係数を $a_0(x)$ とすると, δ で $a_0(x)$ が non-nulle ならば上のことは明らかである. そうでなければ, y に関する方程式 $\Psi(x,y)=0$ の任意の根を $\eta(x)$ とすると, $(x)\in\delta$ に於て, $\eta(x)$ は $a_0(x)\neq 0$ では多価正則函数であって, $a_0=0$ では $a_0\eta$ がそうなる. だから c_0 は y に関する polynome である. 次数は Ψ のそれが高々$2\lambda-2$ であるから, 高々$\lambda-2$ である. そうすると, 上の関係は $(x)\in\delta$ において成立する.

かように $(x)=(x')$ の近傍の各点で (J) にぞくするような, y に関する高々$2\lambda-2$ 次の polynome は必らず上の形に表される. 但し $c_0,c_1,\ldots,c_p$ は $(x)=(x')$ の近傍で正則な y に関する polynomes であって, 次数は c_0 は高々$\lambda-2$, 他はいずれも高々$\lambda-1$ である. 此の逆も亦明らかに真である.

今,

$$F=y^\lambda+A_1y^{\lambda-1}+\cdots+A_\lambda,\quad \Phi_i=A_{i1}y^{\lambda-1}+\cdots+A_{i\lambda}\quad (i=1,2,\ldots,p)$$
$$c_0=u_2y^{\lambda-2}+\cdots+u_\lambda,\qquad c_i=u_{i1}y^{\lambda-1}+\cdots+u_{i\lambda}$$
$$\varphi=B_0y^{2\lambda-2}+B_1y^{2\lambda-3}+\cdots+B_{2\lambda-2}$$

としよう. そうすると, 上述の必要充分条件は次のものと ～である：

$$\begin{cases} B_0=u_2+\sum A_{i1}u_{i1} \\ B_1=u_2A_1+u_3+\sum(u_{i1}A_{i2}+u_{i2}A_{i1}) \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{2\lambda-2}=u_\lambda A_\lambda+\sum u_{i\lambda}A_{i\lambda}. \end{cases}$$

故に, φが $(x)=(x')$ の近傍の各点で (J) にぞくするような (x) のみの fn. であるため, 云いかえると $\varphi(x)$ が (x') で (I) にぞくするための必要充分条件は, φが (u) とともに (x') に於て次の聯立一次函数方程式をみたすことである：

$$\begin{cases} u_2+\sum A_{i1}u_{i1}=0 \\ u_2A_1+u_3+\sum(u_{i1}A_{i2}+u_{i2}A_{i1})=0 \\ \varphi=u_\lambda A_\lambda+\sum u_{i\lambda}A_{i\lambda} \qquad\qquad (i=1,2,\ldots,p), \end{cases}$$

ここに (x') は $\mathfrak{D}$ の任意の点であって, A_j, A_{ij} $(j=1,\ldots,\lambda)$ は $\mathfrak{D}$ における (x) のきまった正則函数である. かように (I) は $\mathfrak{D}$ に於て一つの (L)–イデアルと ～であるから, 定理によって (I) は (x^0) に於て pseudobase をもつ. C. Q. F. D.

5. 第三種類のイデアルについて述べる前に少し準備する. これらは何れも其の後のためにも必要なのである.

1°. 先づ H. Cartan の次の lemme [3] に注目しよう.

Lemme de H. Cartan. — 有限空間 $(x_1,\ldots,x_n)$ $(n\geq 3)$ に次の形の三領域 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ を考える：

$$\begin{array}{lllll} (\Delta_1) & \rho_1<|x_1|<r_1, & |x_2|<r_2, & |x_3|<r_3, & (x_4,\ldots,x_n)\in\mathfrak{D} \\ (\Delta_2) & |x_1|<r_1, & \rho_2<|x_2|<r_2, & |x_3|<r_3, & (x_4,\ldots,x_n)\in\mathfrak{D} \\ (\Delta_3) & |x_1|<r_1, & |x_2|<r_2, & \rho_3<|x_3|<r_3, & (x_4,\ldots,x_n)\in\mathfrak{D} \end{array}$$

[3] H. Cartan, Note sur le premier problème de Cousin, 1938. C. R.

$\mathfrak{D}$ は単葉領域, r_i は正の定数, ρ_i は 0 又は正の定数 $(i = 1, 2, 3)$. $g_i(x)$ を $\Delta_j \cap \Delta_k$ で正則な函数とし (i, j, k は $1, 2, 3$ の任意の permutation), 恒等的に

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0$$

とする. そうすると, Δ_i で正則な函数 $h_i(x)$ をえらび $(i = 1, 2, 3)$, 恒等的に

$$g_1 = h_2 - h_3, \quad g_2 = h_3 - h_1, \quad g_3 = h_1 - h_2$$

となるように出来る.

さて, 空間 $(x_1, \ldots, x_n)$ の単葉領域 $\mathfrak{D}$ に固有集合体 S を考え, 其の特異点の集合を S_0 とする. 固有集合体 S 上の函数 u が 正則であるといえば, 1° u が S_0 以外で一価であって, かような各点の近傍で空間の正則函数の trace となっていること. 2° S_0 上の各点の近傍で有界であることを云ふ. u が S 上の点 M で正則であると云えば, M のある近傍でそうであることを云う意味である. S 上の点 M で正則な S 上の函数 u が, この点の近傍で空間の正則函数の trace となっているとき u は M で (H) 性をもつと名づけよう. S の点 M で正則な任意の S 上の函数が M で (H) 性をもつとき S の点 M は (H) 性をもつとよぶ. $\mathfrak{D}$ 内で S のすべての点が (H) 性をもつとき, S は $\mathfrak{D}$ で (H) 性をもつと云う. 上述の Cartan の lemme から (H) 性に関する次の結果が容易に得られる：

Lemme 1. 空間 $(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geq 3)$ の単葉領域 $\mathfrak{D}$ 内に固有面 S と S 上の正則函数 u と S 上の高々 $(n-3)$ (複素) 次元の固有集合体 S_0 とが与えられていて, S_0 外の任意の点で u が (H) 性をもつならば, S_0 上に於ても其の通りである.

証明　S_0 上の任意の点 (x_0) で u が (H) 性をもつことをいえばよい. 簡単のため (x^0) を原点と見る. 以下原点の近傍のみについてのべる. S_0 は高々$n-3$ 次元の固有集合体であるから (この論文では次元は常に複素次元である), (x) に適当な non-singular な linear transformation を施し, 正数 ρ, r 及び r' を適当にとって, 上述の Cartan の lemme に於て, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$, $r_1 = r_2 = r_3 = r$ とし $\mathfrak{D}$ を $|x_i| < r'$ $(i = 4, \ldots, n)$ とした領域 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ を考えたとき, 其の何れの近傍にも S_0 の点がないように出来る.

それで例えば Δ_1 の近傍に於ては, S の各点で u は空間 (x) の正則函数の trace となっている. それで problème (C_2) に関する Mémoire VII の Théorème 2 によって, Δ_1 の近傍に正則函数 $F_1(x)$ が存在して, u はその

trace となっていることが容易に分る. (この定理は閉多円筒についてしかのべられていないが, 今の場合は, 新しい複素変数 z を導入して $z=\dfrac{1}{x}$ を添える慣用の方法によって, すぐに此の場合へもって行ける.) Δ_2, Δ_3 に対しても同様であって, 函数 $F_2(x), F_3(x)$ が求められる.

$\Delta_1 \cap \Delta_2$ で $F_1 - F_2$ を考えると, S 上で恒等的に 0 となるから, S の方程式を $F(x) = 0$ とし, F を

$$(C): \qquad |x_i| < r,\ |x_j| < r' \quad (i = 1, 2, 3;\ j = 4, \ldots, n)$$

の近傍において multiple factor を持たないような正則函数とすれば,

$$F_1 - F_2 = g_3 F,$$

g_3 は $\Delta_1 \cap \Delta_2$ で正則な函数, となる. 同様にして

$$F_2 - F_3 = g_1 F, \quad F_3 - F_1 = g_2 F,$$

g_1 は $\Delta_2 \cap \Delta_3$ で正則な函数, g_2 は $\Delta_3 \cap \Delta_1$ のそれである. 明らかに恒等的に

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0$$

であるから, Cartan の lemme によって, Δ_i $(i = 1, 2, 3)$ で正則な函数 $h_i(x)$ をえらび恒等的に

$$g_1 = h_2 - h_3, \quad g_2 = h_3 - h_1, \quad g_3 = h_1 - h_2$$

となるように出来る. それによって, $\Phi_i = F_i - h_i F$ $(i = 1, 2, 3)$ を考えると, この函数は Δ_i で正則であって, S 上で u となる. 更に恒等的に

$$\Phi_i - \Phi_j = (F_i - F_j) - (h_i - h_j)F = g_k F - g_k F = 0$$

となるから, これらの Φ_i は相寄って $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ に於ける唯一つの正則函数 Φ を規定する.

所で, それならば, F. Hartogs によって, Φ は上述の多円筒 (C) で正則でなければならない. Φ の S 上の trace を v とすると, $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ における S 上の部分で恒等的に $u = v$ である. 所で S の (C) 内の任意の成分は, (C) における有理型函数の極の位置と考えられるから, Hartogs によって上述の部分に必らず点をもつ. 故に (C) 内の S の部分全体で $u = v$ である. かように u は原点の近傍で $\Phi(x)$ の trace となっている.

2°. 空間 $(x_1, \ldots, x_n)$ の単葉領域 $\underline{\mathfrak{D}}$ 上に多葉領域 $\mathfrak{D}$ を考える. 但し $\mathfrak{D}$ は必しも connexe でなくてもよい. $\mathfrak{D}$ は有限葉であると考え, その葉数を

ν とする. $\mathfrak{D}$ 上の任意の点を P とし, 其の座標を (x) とする. $\mathfrak{D}$ 上に正則函数 $\eta_1(P)$, $\eta_2(P)$, $\ldots$, $\eta_m(P)$ を考える. ($\mathfrak{D}$ は connexe とは限らないから, たとえば η_1 は single analytic fn. を表すとは限らない.) $\mathfrak{D}$ の任意の composante connexe を $\mathfrak{D}'$ とするとき, $\mathfrak{D}'$ は解析関数 $\eta_1(P)$, $P \in \mathfrak{D}'$ の正則域の部分となっているものとする. 他の η_i $(i = 2, \ldots , m)$ に対しても同様とみよう. 何となれば, そのためにはごく小さい定数 c_i を適当にえらび, η_i の代りに $\eta_i + c_i\eta_1$ をとればよいのだから. 空間 $(x_1, \ldots , x_n, y_1, \ldots , y_m)$ に固有集合体 Σ : $y_i = \eta_i(P)$ $(i = 1, 2, \ldots , m)$ を考え, $\mathfrak{D}$ 上の点 $P(x)$ と Σ 上の点 $M(x, \eta)$ $(\eta_i = \eta_i(P))$ とを対応せしめる. (以下常にそうする.) そうすると, P に対しては常に唯一つの点 M が対応する. M に対しては必しもそうはならないが, 若し M に対して数個の P が対応するならば, Σ は M に於て数個の成分に分れる. それ故 Σ の特異点の集合と其の $\mathfrak{D}$ 上の image と以外では対応は 1 対 1 である.

これは先に多葉領域を考え, 次にこれに対応する固有集合体を作ったのであるが, 逆に空間 (x, y) に固有集合体が先に与えられたときも, 局所的に考え, 固有集合体として同次元の成分のみからなるものをとり, 其の次元を n として, (x, y) に適当な non-singular な linear transformation を行えば, これと上述のように対応する多葉領域 (connexe ou non) を作りうることを, 私達は <u>Weierstrass</u> によってよく知っている.

領域 $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ において, 次のような正則函数 $F(x, y)$ を考える : M を $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ 内の Σ 上の任意の点とし, u を M における Σ 上の任意の正則函数とすれば, Σ 上の函数 uF は M において (H) 性をもつ. かような函数を Σ に関する領域における (W)–函数と名づけよう. かゝる函数の全体は明らかに $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ における<u>不定域正則イデアルを作る</u>. (W)–函数中にどのようなものがあるかをみよう.

(x) 上の $\mathfrak{D}$ の ν 個の点を $P_1, \ldots , P_\nu$ として, $F_1(x, y_1) = \Pi[y_1 - \eta_1(P_i)]$ $(i = 1, \ldots , \nu)$ を作る. そうすると, 私達は <u>Weierstrass</u> によって次のことを知っている :

≪ $\mathfrak{D}$ において, 任意の正則函数 $u(P)$ は, 空間 (x, y_1) の函数 $\Phi(x, y_1)\Big/\dfrac{\partial}{\partial y_1}F_1(x, y_1)$ の固有面 $F_1 = 0$ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image である. ここに $\Phi(x, y_1)$ は y_1 に関する polynome であって, 係数は $\mathfrak{D}$ の基領域 $\underline{\mathfrak{D}}$ における正則函数である.≫

但し, Weierstrass は, <u>Osgood</u> の教科書によって見れば $\mathfrak{D}$ を connexe と仮定しているが, この仮定を取去っても証明はそのまま成立する. それ故明らかに <u>$\dfrac{\partial}{\partial y_1}F_1(x, y_1)$ は $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ における Σ に関する一つの (W)–函数である.</u> $\eta_2, \ldots , \eta_m$ についても同様である.

この種の (W)–函数を今少しよくみよう.

多葉領域$\mathfrak{D}$の 分岐面 (i.e. 分岐点の集合) をσとする. 私達はかような$\mathfrak{D}$についてはσは $\mathfrak{D}$ 上の固有面 (i.e. Σ 上の $(n-1)$ 次元の固有集合体のimage) であることをよく知っている. 固有面σの$\mathfrak{D}$における一つの成分を σ_0 とし, σ_0 上の σ の任意の 正則点 を P' とする (i.e. σ_0 が P' で正則であって, P' を通る他の分岐面の成分がないような点). そうすると, 空間 (x) の P' の近傍に適当な biunivoque な擬等角写像を施すことによって, σ_0 を $x_1=0$ とみてよい. そうすると分岐面 σ_0 の order をνとし $\sqrt[\nu]{x_1}=t$ とすれば, P' の近傍で $\eta_1(P)$ は $(t, x_2, \ldots, x_n)$ の正則函数となる. これをtについて展開して,

$$\eta_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \tag{1}$$

を得る. 係数は $(x_2, \ldots, x_n)$ の正則函数である. ここに於て二つの場合が起る.

α. $a_1 \equiv 0$ のとき.[4] このときは, 固有面 $F_1(x, y_1)=0$ を S_1 とし, S_1 上のσ_0に対応する点集合をT_0とすれば, S_1のT_0上のどの点も (H) 性を持ち得ないことが, 函数 $\sqrt[\nu]{x_1}=t$ を見れば直ちに分る. かような分岐面σ_0を函数η_1の第二種分岐面 と呼ぶ.

β. $a_1 \not\equiv 0$ のとき. このときは勿論σ_0上の一般の点に対しては $a_1 \neq 0$ である. S_1 上の P' に対応する点を M' とし, S_1 の M' の近傍の部分を成分に分ち, $\mathfrak{D}$ の P' の近傍に対応するものを S_{10} とする. そうすると, σ_0 上の $a_1 \neq 0$ である様な点に対応する S_{10} 上の点に於ては, S_{10} は $x_1 = \varphi(x_2, \ldots, x_n, y_n)$, φは正則函数, の形に表されるから, かような点は S_{10} の正則点である. それ故 S_{10} の特異点の集合は高々$(n-2)$ 次元であって, 従って lemme 1 によって, 之等の特異点は皆 (H) 性を持っている. かようなσ_0を函数η_1の 第一種分岐面 とよぶ.

領域$\mathfrak{D}$の点Pに対し, これと同じ座標をもつ他の点P'があって, $\eta_1(P)=\eta_1(P')$ となるとき, P を η_1 の等値点 と名づけよう. 等値点の集合は明らかに$\mathfrak{D}$上の固有面である. これを η_1 の等値面 と呼ぶ. 等値面の S_1 上の image に於ては, S_1 の少くとも二面が切りあっている. S_1 上のかような点は決して (H) 性をもたない. 何となれば, ここできり合う S_1 の面の一つの上で恒等的に 0, 他のすべての上で恒等的に 1 という函数を考えると, これは定義によって, 此の点の近傍に於ける S_1 上の正則函数であるが, この函数を trace とする空間 (x, y_1) の正則函数はあり得ないから. かようにして次のことが分った：

η_1の第二種分岐面及び等値面の点は何れも S_1 上の (H) 性をもたない点の image であって, かような image はこれ以外にない.

[4][編注] ここに「α, β は順序をふりかえて書いた方がよい」と記入してある.

Δ を $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ の完全内部に含まれるような空間 (x, y) の任意の領域とし $U(x, y)$ を, 其の Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image が η_1 の第二種分岐面及び等値面上で恒等的に 0 となるような, Δ における正則関数とする. そうすると, 正の整数 λ が存在して, U^λ は Δ に於ける Σ に関する (W)–函数である.

何となれば, λ を充分大きくとって, V_0 内の各点の近傍で, U^λ の Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image が, η_1 の第二種分岐面及び等値面上で, $\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}$ と少くとも同じ order の zeros をもつ (i.e. その固有面上の一般の点で前者が後者で割れる) ように出来る. M' を V_0 内の Σ 上の任意の一点とし, u を M' の近傍に於ける Σ 上の任意の正則関数として, uU^λ を考えると, Weierstrass と上にのべたこととによって, M' の近傍で Σ 上の函数 uU^λ は高々 $(n-2)$ 次元の点集合を除いて (H) 性をもつ. 故に Lemme 1 によって例外なくそうである.

6. c. Idéaux (Z). — 前節の 2° の始めにのべた $\mathfrak{D}$ 及び Σ を再び考える. 簡単のため $\mathfrak{D}$ は $\underline{\mathfrak{D}}$ の倍域であるとしよう. 局所的には常にそうなっているのだから. 此の多葉領域 $\mathfrak{D}$ 上に Cousin の第二問題でしたようにして zéros $(\mathfrak{z})$ を定義しようと云ふのであるが, このときは単葉領域のときと違って, localement に $(\mathfrak{z})$ を $\mathfrak{D}$ 上の唯一つの正則函数の zéros によって定義することは一般には出来ない. (実例は他の機会にのべる). それで $(\mathfrak{z})$ を localement に数個の正則函数の common zeros として定義することにしよう.

さて, $\mathfrak{D}$ 上の一つの $(\mathfrak{z})$ が, 局所的に空間 (x, y) の正則函数の Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image であるような数個の函数の共通零点として与えられているとする. この時空間 (x, y) に於て不定域正則リング $\mathcal{O}$ の次のような要素 (f, δ) の集合 (I) を考える : δ は $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ に含まれ, δ に於て f の Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image は zéros として少くとも $(\mathfrak{z})$ をとる. 此の (I) は明らかにイデアルを作る. この種のイデアルを Idéaux (Z) と名づけよう[5]

Théorème 2. — 上述の (Z)–イデアルは $(x) \in \mathfrak{D}$ の各点に於て pseudo-base をもつ.

証明. 1° 先づ 特別の場合 を説明する. 空間 (x, y) の領域 $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ に Σ に関する (W)–函数 $W(x, y)$ が存在して, 問題のイデアル (I) の函数の共通零点の集合を T とすれば, T の如何なる成分上に於ても W が恒等的に 0 でないとしよう.

[5] [編注] この定義は発表された仏文の VIII ではもっと詳しく述べられている.

T 上の任意の点を M_0 とする．M_0 に於て (I) が pseudobase をもつことをいえばよい．$F_1(x,y), F_2(x,y), \dots, F_p(x,y)$ を M_0 の近傍に於ける正則函数であって，其の Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image が (z) を localement に規定するようなものとする．定数 $c_1, c_2, \dots, c_p$ を適当に撰んで $F = c_1F_1 + \dots + c_pF_p$ を作り，$(\mathfrak{z})$ の分布されている $\mathfrak{D}$ 上の固有面を τ とすれば，F の Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image F' が τ 上では $(\mathfrak{z})$ と同じ order の zéros をもち，固有面 $\underline{\tau}$ の τ と異る成分上では決して恒等的に 0 にならないように出来る．$F' = 0$ の τ と異なる成分の和を τ' とし，(x) の正則函数 $\Phi(x)$ を $\underline{\tau}'$ 以外では non-nulle であって，τ' 上では少くとも F' と同じ order の zéros を持つように作る．

これらの函数 W, F, Φ によって，Corollaire 1 に従って，W, F, Φ がそこで正則なような M_0 の一つの近傍 V に於て $(V \subseteqq ((x) \in \mathfrak{D}))$，$(I) = \{(f, \delta)\}$ を次のように transform して $(J) = \{(\varphi, \delta')\}$ を作る：

$$\begin{aligned} &\varphi = f\Phi W + A_0F + \sum A_i\Psi_i \qquad (i = 1, \dots, \mu) \\ &\delta' = V \cap \delta \cap \alpha_0 \cap \alpha_1 \cap \dots \cap \alpha_\mu \end{aligned}$$

ここに (Ψ) は Σ に附随する幾何学的不定域イデアルの V における pseudobase であって，これは V を充分小さくとれば <u>Cartan の定理</u> によって存在する．(A_j, α_j) $(j = 0, 1, \dots, \mu)$ は何れもリング $\mathcal{O}$ の任意の要素である．

一般に函数 $\Psi(x,y)$ の Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image を Ψ' で表せば，上の relation は $\mathfrak{D}$ 上では

$$\varphi' = f'\Phi W' + A_0'F'$$

となるから，$\dfrac{\varphi'}{F'}$ は (δ' の Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image で) 正則であって，しかも (x,y) の正則函数の Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image である．故に局所的に $\varphi \equiv 0 \mod (F, \Psi_1, \dots, \Psi_\mu)$，かように (J) は pseudobases locales をもつ．それ故 Corollaire 1 の第二条件だけが問題である．

それで一次函数方程式

$$B\Phi W + A_0F + \sum A_i\Psi_i = 0$$

を V に於て考える．この方程式の V の任意の一点 (x', y') に於ける任意の solution を $(B, A_0, A_1, \dots, A_\mu)$ としたとき，B が (x', y') に於て (I) にぞくすることを云えばよい．これは (x', y') が T 上の点であるときだけが問題である．$\Psi_i = 0 \ \ (i = 1, \dots, \mu)$ とおくと，上の恒等式は

$$B'\Phi W' + A_0'F' = 0$$

となる. 所で, $\Phi W'$ の zéros は τ 上には分布されていないから, B' は (x') 上の問題の点の近傍で, zéros として少くとも $(\mathfrak{z})$ をもたなければならない. 故に定義によって B は (x', y') に於て (I) にぞくする.

一般の場合は, Théorème 1 によって, 此の特別の場合に帰着させようというのである.

2°. 説明を簡単にするため $\mathfrak{D}$ を connexe と考えよう. Cartan の Corollaire によって, こう仮定しても一般性は失はれない. 前節に見た所から, 第二種分岐面と等値面とが問題になることが分る. 先づ前者を処理しよう.

$\mathfrak{D}$ は, 小さくしてもよいのだから, 同じ性質の他の領域 $\mathfrak{D}'$ の完全内部にあるとみてよい. そうすると分岐面 $\underline{\sigma}$ の $\mathfrak{D}'$ に於ける成分の中 $\underline{\mathfrak{D}}$ を通るものは有限個である. これを $\underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_2, \ldots, \underline{\sigma}_q$ とする. $\underline{\mathfrak{D}}$ を多円筒とみてよい. そうすると Cousin によって, $\underline{\sigma}_1$ に対して, $\underline{\mathfrak{D}}$ で正則であって, $\underline{\sigma}_1$ で 1^{st} order の zéros をもち, 他で zero にならないような函数 $f(x)$ が存在する. $\underline{\sigma}_1$ 上には $\mathfrak{D}$ の分岐面が数個あるかも知れない. それらの order の最小公倍数を r とし,

$$\zeta(x) = \sqrt[r]{f(x)}$$

を考え, $\zeta(x)$ の正則域と $\mathfrak{D}$ との共通部分の任意の一つの composante connexe を $\mathfrak{D}^*$ とする. 一般には $\mathfrak{D}^*$ は $\mathfrak{D}$ の倍域であって, 特別の場合には相等しい. 新しく複素変数 z を導入して, 空間 $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z)$ に於て固有集合体 Σ :

$$y_i = \eta_i(P),\ z = \zeta(P),\quad (P \in \mathfrak{D}^*,\ \underline{P} = (x),\ i = 1, \ldots, m)$$

を考える.

$\mathfrak{D}$ 上に $(\mathfrak{z})$ を定義する機構は, $\mathfrak{D}^*$ 上に一つの zéros を定義する. これを $(\mathfrak{z}^*)$ とする. 空間 (x, y, z) の $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ に, $[\Sigma^*, (\mathfrak{z}^*)]$ によって規定せられる (Z)–イデアルを考えることが出来る. これを (I^*) とする. (I) と (I^*) との関係を見るに, (I) は明らかに (I^*) の projection である. 故に, 定理 1 によって, (I) が $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ の各点で pseudobase をもつことをいうためには, (I^*) がそうであることをいえばよい.

所で, 定数 c を適当にとり, $\eta^* = \eta_1 + c\zeta$ を作ると, この函数は $\mathfrak{D}^*$ を其の正則域の一部として持ち, $\underline{\sigma_1}$ 上で第二種の分岐点を持たない. この推理法を順次に $\underline{\sigma_2}, \ldots, \underline{\sigma_q}$ に及ぼすことが出来る. それ故, 私達は始めに遡って, η_1 が第二種分岐面をもたない と仮定して支障ない.

3°. y_1 平面上に原点を中心にして充分大きな円 (C) を描き, 其の boundary を C とする. そうすると (x) が $\underline{\mathfrak{D}}$ の近傍にあるとき $\eta_1(x)$ はすべて (C) 内に入る. $\mathfrak{D}$ を ν 葉として, 前節の 2° で作ったように, $F_1(x, y_1) =$

$\Pi[y_1 - \eta_1(P_i)]$ $(i = 1, \ldots, \nu)$ を作る．そうすると積集合 $(\underline{\mathfrak{D}}, C)$ の近傍において $F_1 \neq 0$ である．non-singular な linear transformation によって，(x, y_1) を少し変えて (x', y_1') としても，このことは変らない．所で，$F_1(x', y_1')$ が $(\underline{\mathfrak{D}}, C)$ で 0 でなければ，y_1' に関する方程式 $F_1(x', y_1') = 0$ は (x') が $\underline{\mathfrak{D}}$ にあるとき (C) に於て同数の根を持ち，これらは (x') の多価正則函数である．それ故，かような transformation を行っても状況は少しも変らない．$y_i' = y_i$ $(i = 2, \ldots, m)$ として，この transformation が 空間 (x, y) に対して行はれ，これを (x', y') に変えたものと考える．所で，$\eta_1(P)$ は第二種分岐面をもたないから，上述の transformation を適当にえらべば，$(\mathfrak{z})$ の分岐せられて居る固有面 τ と，新しい分岐面 σ とは，如何なる成分も共有しないように出来ることが容易に分る．だから始めからそんな風に与えられていると仮定して支障ない．

<u>4°</u>．(x') を $\underline{\mathfrak{D}}$ の $\underline{\sigma}$ 外の任意の一点として，$\mathfrak{D}$ で正則であって，P_1, P_2 で相異なる値をとる函数 $\zeta(P)$ を求める問題について考えよう．η_1 を (x) について微分すると，導函数は σ 外で正則である．σ 上ではどうかと云うに，σ の正則点では極をもつ (i.e. localement に二つの正則函数の比として表される) ことがすぐ分る．それで疑問の点の集合は高々$(n-2)$ 次元であって，$\mathfrak{D}$ は到る処 ν 葉であるから，一価有理型函数に関する <u>E. E. Levi の定理</u> によって，導函数は σ で極をもつに過ぎない．所で，η_1 は $\mathfrak{D}$ を其の正則域の部分としているのであるから，η_1 及びその導関数の中には P_1, P_2 で異なる値をとるものが必ずある．これを $\xi(P)$ としよう．$\underline{\mathfrak{D}}$ は多円筒とみているから，Cousin によって $\underline{\sigma}$ で 1^{st} order の zéros をもち，$\underline{\sigma}$ 外で 0 にならないような，$\underline{\mathfrak{D}}$ における正則函数 $f(x)$ を求めることが出来る．正の整数 λ を充分大きくとって $f^\lambda \xi = \zeta$ を考えると，この函数は $\mathfrak{D}$ で正則であって，$\zeta(P_1) \neq \zeta(P_2)$，即ち required fn. である．

τ と σ とは共通成分をもたないから，このことから次のような函数 $\zeta(P)$ の存在することが容易に分る： ζ は $\mathfrak{D}$ を其の正則域の部分としてもち，其の等値面と τ とは共通成分をもたない．Théorème 1 によって，上に 2° で推理したようにして，η_1 自身がこの性質をもつと仮定して支障ないことが分る．

そうすると，η_1 は第二種分岐面を持たず，其の等値面と $(\mathfrak{z})$ との関係は上のようであるから，前節の終りで見たことによって，目下の場合には，1° でのべた条件をみたすような (W)–函数の存在することが分る．従って (I) は各点で pseudobase をもつ． C. Q. F. D.

<u>II. Lemme fondamental et ses applications.</u>

<u>7.</u> <u>Préliminaires.</u> Mémoire VII で見たことと，上に追加した所によっ

て, lemme fondamental を立てようといふのであるが, そのためには (W)–函数について今少ししらべなければならない. その準備から始める. 次の proposition 及びその証明方法は, これにつゞく lemme 同様 Y. Akizuki に負ふ.

<u>有限空間 $(x_1, \ldots, x_n)$ の単葉領域 $\mathfrak{D}$ に二つの正則函数 $F_1(x)$, $F_2(x)$ があたへられてゐて, $F_1(x)$ は $\mathfrak{D}$ で 0 にならない. c を常数として $F(x) = cF_1(x) + F_2(x)$ を作る. $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D}_0 \Subset \mathfrak{D}$ である様な任意の領域とする. このとき $\mathfrak{D}_0$ に於て $F = 0$ が multiple factor をもつか又は固有面 $F = 0$ が特異点をもつかする様な c は有限個である.</u>

<u>証明</u>　c をして総ての複素数値を parcourt させたとき, F がそこで higher order の zéros をもつ様な固有面及び $F = 0$ の特異点総てからなる $\mathfrak{D}$ に於る点集合を S とする. S の方程式は

$$cF_1(x) + F_2(x) = 0, \quad c\frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

から c を消去したものである. 別に函数 $t(x) = -F_2(x)/F_1(x)$ を考へる. F_1 は $\mathfrak{D}$ で 0 でないから, t は $\mathfrak{D}$ で正則である. 導函数 $\dfrac{\partial t}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を考へる. そうすると恒等的に

$$tF_1 + F_2 = 0$$

であるから恒等的に

$$\left(t\frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\right) + F_1\frac{\partial t}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

である. 故に S 上では恒等的に $\partial t/\partial x_i = 0$.

今ある c_0 に対して $c_0F_1 + F_2 = 0$ 上に S に属する点が $\mathfrak{D}_0$ 内にあったとして, その一つを (x^0) とする. S は固有集合体であるから Weierstrass により $\mathfrak{D}$ に於て成分に分解できる. (x^0) を通る任意の成分の一つを S_0 とする. さうすると S_0 上で恒等的に $\partial t/\partial x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ であるから S_0 上で

$$t = c_0$$

でなければならない. 又 F_1 は 0 でないから, 異った c の値に対して同じ S の点が対応することは出来ない. それでかういふことになった. 命題にあたへられた様な特異性をもつ c を singular とよぶことにすると, 一つの singular な c に対しては, $\mathfrak{D}_0$ に成分をもつ様な S の (解析的) 成分が少く共一つ対応し, その時異った c に対しては, 異った成分が対応しなければ

ならない. 所で S のか様な成分は有限個であるから, singular な c も有限個でなくてはならない. C. Q. F. D.

Lemme de Bertini–Akizuki 有限空間 $(x_1, \dots, x_n)$ の単葉領域 $\mathfrak{D}$ に固有集合体 S と正則函数 $F_1(x), \dots, F_\nu(x)$ があたへられてゐる. S の特異点の集合を S_0, F_i $(i=1,\dots,\nu)$ の共通零点の集合を T とする. この時常数 c_i を適当にえらんで $F = c_1F_1 + \cdots + c_\nu F_\nu$ を作り, 次の条件を満す様に出来る：

1° $F=0$ と S の交りを Σ とすれば, Σ は $S_0 \cup T$ 以外で特異点をもたない.

2° F の S 上の trace は $S_0 \cup T$ 外で 1^{st}order の zéros しか有しない. 尚この目的に適しない様な $(c_1, \dots, c_\nu)$ は, 之等を独立変数と見た空間に於て, $1^{\grave{e}re}$ catégorie にぞくする点集合を作るにすぎない.

証明 (x^0) を $S_0 \cup T$ 外の $\mathfrak{D}$ の任意の一点とし, V を (x^0) の一つのきまった近傍とする. 上の proposition が V に於て成立することをいへばよい. (Borel–Lebesgue の lemme と $1^{\grave{e}re}$ catégorie の性質による)

V を次の様にとる： (x^0) が S 外にあるならば, V を S の点を含まない様にさえとれば上の命題は明に成立する. それで (x^0) が S 上にあるとして, (x^0) は T 外にあるから, F_i $(i=1,\dots,\nu)$ の少く共一つは (x^0) の近傍で 0 にならない. たとへば, F_1 がさうであったとしよう. V で F_1 が $\neq 0$ となる様にする. 次に (x^0) は S_0 外にあるから, S は (x^0) の近傍で regular である. その次元を λ $(0 \leq \lambda < n)$ とする. 必要ならば (x) に適当な non-singular な linear transformation をほどこせば S は (x^0) の近傍で次の形に表される.

$$(1) \qquad x_{\lambda+i} = \varphi_i(x_1, \dots, x_\lambda) \qquad i = 1, 2, \dots, \mu,\ \lambda + \mu = n$$

$\lambda > 0$ ならば φ_i は $(x_1^0, \dots, x_\lambda^0)$ の近傍に於る $(x_1, \dots, x_\lambda)$ の正則函数, $\lambda = 0$ ならば φ_i は常数である. それで r, r' を適当にとり, (γ) : $|x_i - x_i^0| < r$, (γ') : $|x_j - x_j^0| < r'$ $(i=1,\dots,\lambda : j=\lambda+1,\dots,n)$ を考へると, 領域 $[(\gamma), (\gamma')]$ で S は上の形に表され, 特に (γ) に於る φ_k $(k=1,\dots,\mu)$ の価は $|x_{\lambda+k} - x_{\lambda+k}^0| < r'$ 内にしかない様に出来る. $V = [(\gamma), (\gamma')]$ ととる.

V に於る required condition は何かといふと, F, F_i $(i=1,2,\dots,\nu)$ に (1) を代入した函数を $\Phi(x_1,\dots,x_\lambda)$, $\Phi_i(x_1,\dots,x_\lambda)$ とすれば, 聯立方程式

$$\Phi = c_1\Phi_1 + \cdots + c_\nu\Phi_\nu = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{\nu} c_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,\dots,\lambda)$$

が (γ) で解をもたないことである.

(δ) を $(\delta) \Subset (\gamma)$ である様な $(x_1^0, \dots, x_\lambda^0)$ を中心とする一つの直円筒とする．さうすると，閉領域 $(\overline{\delta})$ に於て，この条件を満たす様な (c) の集合は明に開集合である．だから $(\overline{\delta})$ でこの条件を満たさない様な (c) の集合は，若し non-dense ならば $1^{i\grave{e}re}$ catégorie にぞくする．私達は (δ) の半径をたとへば (γ) のそれの半分にとって，V の代りに $[(\delta), (\gamma')]$ をとってもよい．それ故，$(\overline{\delta})$ で上の条件を満足しない様な (c) の集合が non-dense であることをいへばよい．所で (γ) で Φ_1 は $\neq 0$ であるから，前の proposition によって，$c_2, \dots, c_\nu$ をどうきめても，$(\overline{\delta})$ で $(c_1, c_2, \dots, c_\nu)$ が条件を満さない様な c_1 は有限個であるから，条件を満さない様な (c) の集合は明に non-dense である．　　C. Q. F. D.

8. (W)–函数についてしらべよう．No. 5 の 2° でのべた状勢を再び考へる．簡単に繰返さう．空間 (x) に多葉領域 $\mathfrak{D}$ (connexe ou non) を考へ，$\mathfrak{D}$ は単葉領域 $\underline{\mathfrak{D}}$ の倍域であって有限葉であるとし，その葉数を ν とする．$\mathfrak{D}$ 上に正則函数 $\eta_1(P), \dots, \eta_m(P)$ を考へる．$\mathfrak{D}$ の任意の composante connexe $\mathfrak{D}'$ は解析函数 $\eta_1(P)$, $P \in \mathfrak{D}'$ の正則領域の部分であって，その完全内部にあるとする．他の任意の η_i $(i = 2, \dots, m)$ に対しても同様であると見做してさしつかへない．空間 (x, y) に固有集合体 $y_i = \eta_i(x)$ $(i = 1, \dots, m)$ を考へる．この状況に対して $(x) \in \mathfrak{D}$ の完全内部に含まれる様な空間 (x, y) の単葉領域 Δ に於て，Σ に関する (W)–函数が問題になってゐるのであって，次のことを見た： $U(x, y)$ をその Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image が η_1 の第二種分岐面及び等値面上で恒等的に 0 になる様な Δ に於る正則函数とすれば，正の整数 λ をえらんで，U^λ が Δ に於る Σ に関する (W) -函数である様に出来る．

Δ を次の様にとろう： $\underline{\mathfrak{D}}_0$ を $\underline{\mathfrak{D}}$ の完全内部に含まれる様な直円筒とする．(別に直円筒でなくてもよいのだが，それで充分であって，やゝ簡単だから) $\mathfrak{D}_0$ を $\mathfrak{D} \cap \underline{\mathfrak{D}}_0$ とする．(C_i) を円 $|y_i| < R$ とし，円周を C_i で表わす $(i = 1, \dots, m)$．R を十分大きくとって，(x) が $\mathfrak{D}_0$ の近傍にあるとき，$\eta_i(P)$ $(\underline{P} = (x))$ は (C_i) 内にある様にする．(y) に於る積域 $[(C_1), \dots, (C_m)]$ を (C) と略記する．Δ として積域 $[\mathfrak{D}_0, (C)]$ をとる．$\mathfrak{D}$ の (x) 上の ν 個の点を $P_1, P_2, \dots, P_\nu$ とし，$F_i(x, y_i) = \Pi[y_i - \eta_i(P_j)]$ $(j = 1, 2, \dots, \nu)$ を作る．固有集合体 T ： $F_i(x, y_i) = 0$ $(i = 1, \dots, m)$ を $x \in \mathfrak{D}$ に於て考へると，Σ は T の成分の幾つかの和である．i を $1, 2, \dots, m$ の任意の一つとすれば，点集合 $(\mathfrak{D}_0, C_i)$ (i.e. $(x) \in \mathfrak{D}_0$, $y_i \in C_i$) の近傍に T の点はない．non-singular な linear transformation によって (x, y) を (x', y') に変へても，その変へ方が十分小さければ，このことは変らない．(i.e. $(x') \in \mathfrak{D}_0$, $y_i' \in C_i$ の近傍に T の点はない) 所でこの条件が満されるならば，聯立方程式 $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$ を $\mathfrak{D}_0$ の近傍に於て (y') についてとき得ることが容易に分る．それで (x, y) を (x', y') に変へても T の状況は

変化しない．従ってその成分の和である Σ についても同様である．(但し (x') は $\mathfrak{D}_0$ の近傍にあるとする)．この注意から次のことが分る．

$\Delta = [\mathfrak{D}_0, (C)]$ に於る, Σ に関する (W)–函数 の共通零点の集合を T とし, Σ の特異点の集合を S_0 とすれば, $T \subseteq S_0$ である．

先づ $T \subsetneqq \Sigma$ である．何となれば, (x', y') を Σ 外の Δ の任意の一点とせば, Δ は直円筒だから, Δ で正則であって, Σ で 0 になり, (x', y') で 0 にならない様な函数が存在する．(Cartan の定理と Mémoire VII の Théoreme 3 とによる)．この函数は定義によって (W)–函数であるから, M_0 を Δ 内の Σ 上にあって, S_0 に属さない様な任意の一点とし, M_0 が T に属しないことをいへばよい．

上に説明した transformations 中から一つを適当に選んで (x, y) にほどこすと, M_0 は Σ の正則点であるから, M_0 に対応する $\mathfrak{D}$ の点 P_0 が $\mathfrak{D}$ の分岐点でない様になる．P_0 上の $\mathfrak{D}$ の他の点を $P_1, \ldots, P_\nu$ とする．そうすると, M_0 は Σ の正則点であるから, i を $i = 1, 2, \ldots, \nu$ の任意の一つとしたとき, (P_0, P_i) に対して η_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ の何れか一つは異った値をとる．それで常数 c_j を適当にえらんで $\zeta = \Pi c_j \eta_j$ を作ると, ζ の等値面は P_0 を通らない．

常数 c_1 を充分 1 に近くとり, $c_2, \ldots, c_m$ を充分小さくとってよいから, η_1 自身がこの性質をもつと見做してよい．所で Δ は直円筒であるから, Δ の近傍で正則であって, Σ 上の η_1 の第二種分岐面及び等値面の image で 0 になり, M_0 で 0 ならないような正則函数 $U(x, y)$ は必ずある．(Cartan の定理と Mémoire VII の Théorème 3 とによる)．それ故前に見たことから, M_0 で 0 にならない様な (W)–函数の存在することが分る．

さて次の lemme を証明しよう．

Lemme 2. 上述の状況に於て, $U(x, y)$ を Δ の近傍で正則であって, Σ の特異点の集合 S_0 で 0 になる様な任意の函数とし, λ を適当な正の整数とすれば, U^λ は Δ に於る Σ に関する (W)–函数になる．[6]

証明. Δ' を Δ と同心であって $\Delta' \Supset \Delta$ である様な直円筒とし, Δ' に於る Σ に関する (W)–函数全体を考へて $\{W\}$ で表すと, その共通零点の集合 T の Δ の近傍の部分は $\{W\}$ にぞくする有限個の函数の共通零点の集合となってゐる．$T \subsetneqq S_0$ であって, $\{W\}$ は定域正則イデアルを作るから, Lemme de Akizuki により $\{W\}$ の中には次の様な函数 W_0 が存在する：Δ の近傍に於て, W_0 の Σ 上の trace は S_0 以外で simple zeros しかもたず $W_0 = 0$ と Σ との交りは S_0 以外で singular point をもたない。この交りの Δ' に於る成分中には, S_0 に含まれるものがあるかも知れない．さうでない様な総ての成分の和を Σ' とする．

[6] 此の証明は Hilbert の Nullstellensatz に相当するものを使ふのがよいと思ふ．

$W_0=0$ と Σ との交りの $\mathfrak{D}$ 上の image を見るに, S_0 のある composantes の image s と, Σ' の image σ とからなる. それで W_0 の Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image を w とすれば, w は s 上であるきまった order の zeros をもち, σ で 1^{st} order の zeros をもつ. 但し $\mathfrak{D}_0$ の近傍に於てのことである. それで正の整数 μ が存在して, U^μ の Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image を v とすれば, v は $\mathfrak{D}_0$ の近傍に於ては, s 上で少なく共 w と同じ order の zeros をもつ.

Δ の近傍の Σ 上の任意の一点を M_0 とし, u を M_0 の近傍に於る Σ 上の任意の正則函数とする. u の $\mathfrak{D}$ 上の image を同じ文字で表さう. 若し u が Σ' 上で 0 となるならば, $vu=\alpha w$ となる. ここに α は M_0 に対応する $\mathfrak{D}$ 上の点の近傍に於る $\mathfrak{D}$ 上の正則函数である. 故に vu は Σ 上の函数と見ると M_0 に於て (H) 性をもつ.

所で Σ' のどの成分も Σ の特異点集合 S_0 に含まれないから, u は Σ' 上の正則函数と見ることが出来る. 今正の整数 ν が存在して, Σ' 上の函数 $U^\nu u$ が Δ の近傍の Σ' の各点で (H) 性をもつ と仮定しよう. さうすると, Δ は直円筒であるから, Δ の近傍で正則であって, Σ' 上で $U^\nu u$ となるような函数の存在が容易に分る. (Cartan の定理と Mémoire VII の Théorème 3 と 2 とによる). 此の函数を A とし, その Σ 上の trace の $\mathfrak{D}$ 上の image を α とする. μ, ν の大きい方を λ とし, $\lambda-\nu=\nu'$ とすると

$$U^\lambda u-U^{\nu'}\alpha$$

は σ 上で 0 となり, s 上で少く共 U^μ と同じ order の zeros をとるから, Σ 上の函数と見ると Σ 上の各点で (H) 性をもつ. 従って $U^\lambda u$ についても同様である. 故に任意の u に対して上の仮定が満たされるならば, U^λ は Δ の近傍に於る (W)–函数である.

それ故上記の仮定が問題であるが, Σ' の特異点の集合を S'_0 とすれば Δ の近傍に於ては $S'_0\subset S_0$ であるから, このことは言ひかへると次の様になる： 若し Σ の次元が $n-1$ のとき proposition が正しければ n のときも真である. 所で $n=1$ のとき明に命題は真である. 故に一般にさうである.

C. Q. F. D.

9. Lemme fondamental　有限複素空間 $(x_1,\dots,x_n)$ 上に domaine polyédral Δ があたへられてゐる. Δ は多価正則函数 $f_1(x)$ の正則域の部分領域 (R) (connexe ou non) に対して, $\Delta\Subset(R)$ なる関係におかれ, 次の形に表される：

$$x_i\in A_i,\ f_j(P)\in B_j,\ P\in(R)\quad(i=1,\dots,n;j=1,\dots,m)$$

ここに $f_j(P)$ は (R) 上の正則函数で, A_i,B_j は平面上の有界閉領域である. 私達は A_i,B_j が孰れも simply connected であると仮定しよう. 然し

同じ種類の仮定が今一度繰返される. 本当はこの種の仮定は不必要なのである. では何故かう仮定するかといへば, それは Mémoire VII で諸定理を閉直円筒に対してしか証明しなかったからである. (閉直円筒と閉筒状域 (A, B) とは, A_i, B_j が総て simply connected ならば A_i 或は B_j の近傍は等角写像によって円に移せるから, 本質的には同じものである.) それにかう仮定しても応用に殆ど不便がない様だからである.

複素変数 $(y_1, \ldots, y_m)$ を導入し, 空間 (x, y) に閉筒状域 (A, B) (i.e. $x_i \in A_i,\ y_j \in B_j$) と固有集合体 Σ; $y_j = f_j(P)$ $(P \in (R),\ \underline{P} = (x),\ j = 1, \ldots, \nu)$ を考へる. さうすると, Δ と Σ の (A, B) 上の部分が対応し, 特に一方の境点に対しては他方の境点が対応する.

A_i^0, B_j^0 を $A_i \supset A_i^0,\ B_j \supset B_j^0$ である様な simply connected な平面上の閉領域とし, これによって (R) 上に次の形に定義される点集合 Δ_0 を考へる.

$$x_i \in A_i^0,\ f_j(P) \in B_j^0 \quad (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$$

Δ_0 は矢張り domaine polyédral であって, $\Delta_0 \subset \Delta$. この Δ_0 は指示せられた性質をもつ限り全く任意と考へる.

u を Δ_0 の近傍に於る (R) 上の任意の正則函数とすると, u はそのまゝ Σ 上の正則函数と見做すことが出来る. $U(x, y)$ を (A, B) の近傍で正則であって, Σ の特異点の集合 S_0 で 0 となる様な函数とする. か様な函数は不定域幾何学的イデアルに関する Cartan の定理と Mémoire VII の Théorème 3 とによって必ず存在する. それで Lemme 2 により正数 λ を適当にえらべば Σ 上の函数 $U^\lambda u$ は u の如何にかゝはらず localement に空間 (x, y) の正則函数の trace になってゐる. 所で, Σ に附随する不定域幾何学的イデアルは, Cartan の定理によって, pseudobases locales をもつ故, Mémoire VII の定理 3 によって (A, B) の近傍で pseudobases をもつ. それ故 Mémoire VII の Théorème 2 によって, (A^0, B^0) の近傍で正則であって, Σ 上で $U^\lambda u$ となる様な函数 $F(x, y)$ が存在する.

所で Σ 上の trace の (R) 上の image が $U^\lambda u$ のそれ u_0 と, 少く共同じ zéros を持つ様な (x, y) に於る不定域正則リング $\mathcal{O}$ の部分集合は, (A, B) の近傍に於て一つの (Z)–イデアルを作る. これを (I) とする. (I) は定理 2 により pseudobases locales をもつ故, Mémoire VII の定理 3 により, (A, B) の近傍で pseudobases をもつ. これを $(\Phi_1, \ldots, \Phi_\mu)$ としよう. さうすると, F は (A^0, B^0) の近傍で (I) にぞくするから, その各点で $F \equiv 0 \mod (\Phi)$ である. 故に Mémoire VII の定理 1 によって, (A^0, B^0) の近傍で globalement にさうである. Φ_i $(i = 1, \ldots, \mu)$ は総て (I) に属するから, 其の Σ 上の trace の (R) 上の image は Δ の近傍で u_0 によって divisible である. 以上を簡単に formuler しておこう.

Lemme fondamental　空間 (x) に多葉領域 (connexe ou non) (R) の部分として, domaine polyédral が上の形にあたへられたとき, 上に説明したようにして, 空間 (x,y) に閉筒状域 (A,B) と固有集合体 Σ とを作る. さうすると, Δ の近傍に於る (R) 上の正則函数 u_0 と (A,B) の近傍に於る正則函数 $\Phi_i(x,y)$ $(i=1,2,\ldots,\mu)$ とが存在して, Φ_i の Σ 上の trace の (R) 上の image は u_0 によって divisible であって, 次の様な働きをする :
Δ_0 $(\Delta_0 \subset \Delta)$ を上に述べた様な, それ以外では任意の domaine polyédral とし, これに対しては閉筒状域 (A^0,B^0) を作る. u を Δ_0 の近傍に於る (R) 上の任意の正則函数とする. さうすると, (A^0,B^0) の近傍で正則な函数 $F(x,y)$ が存在して, Σ 上で $F=uu_0$ となり, globalement に $F\equiv 0 \mod (\Phi)$ である.

次にこの lemme を私達の problèmes principaux へどの様に appliquer するかを簡単に示しておこう.

10.　Problème de Cousin　空間 (x) に domaine polyédral が上述の形にあたへられてゐる. 但し A_1 は閉円である. x を実部と虚部に分ち, $x=X+iY$ とする. ε を十分小さな正の数とし, Δ の $X\le\varepsilon$ の部分を Δ_1, $X\ge-\varepsilon$ のそれを Δ_2 とする. Δ_1 も Δ_2 も空集合ではないと考へる. $\Delta_1\cap\Delta_2=\Delta_0$ とする. u を Δ_0 の近傍に於る (R) 上の正則函数とする.

Théorème 3.　此の状況に於て, Δ_1 の近傍に (R) 上の正則函数 u_1 が, Δ_2 に対しては u_2 が存在して, 恒等的に $u_1-u_2=u$ となる.

証明.　A_1^0 を閉円 A_1 の $-\varepsilon\le X\le\varepsilon$ の部分とし, $A_k^0=A_k$ $(k=2,\ldots,n)$, $B_j^0=B_j$ $(j=1,2,\ldots,m)$ とすればこれらの (A^0,B^0) によって, 上にのべた様にして作った domaine polyèdral が今のべた Δ_0 である. 特に A_1^0 は simply connected である. これらに対して lemme fondamental が成立する. (A,B) の $X\le\varepsilon$ の部分を (A',B'), $X\ge-\varepsilon$ のそれを (A'',B'') とし, (A^0,B^0) の近傍で恒等的に

$$F=A_1\Phi_1+A_2\Phi_2+\cdots+A_\mu\Phi_\mu$$

とする. A_i $(1=1,2,\ldots,\mu)$ は正則函数である. さうすると Cousin によって, (A',B') の近傍で正則な函数 A_i' と (A'',B'') の近傍で正則な函数 A_i'' とが存在して, 恒等的に

$$A_i'-A_i''=A_i \quad (i=1,2,\ldots,\mu)$$

となる.

$$F'=\sum A_i'\Phi_i,\quad F''=\sum A_i''\Phi_i$$

とすると, F', F'' は夫々 (A', B'), (A'', B'') の近傍で正則な函数であって, 恒等的に $F=F'-F''$ となる. F', F'' の Σ 上の trace の (R) 上の image を夫々 f', f'' とすると, これらは夫々 Δ_1, Δ_2 の近傍で正則な (R) 上の函数であって, 恒等的に $f'-f''=u_0 u$ となる. 所で f', f'' は何れも u_0 によって divisible であるから, $f'=u_0 u_1$, $f''=u_0 u_2$ とすれば, u_1, u_2 は夫々 Δ_1, Δ_2 の近傍で正則であって, 恒等的に

$$u_1 - u_2 = u$$

となる. C. Q. F. D.

11. Développement des fonctions.

Théorème 4. Lemme fondamental の状況に於て, $\varepsilon > 0$ を任意にあたへると, Δ_0 の近傍に於る (R) 上の任意の正則函数 $u(P)$ に対し, Δ の近傍に於る (R) 上の正則函数 $v(P)$ が対応して, Δ_0 の近傍では $|u(P)-v(P)| < \varepsilon$ となる.

証明. F を (A^0, B^0) の近傍で globalement に $F = \sum A_k \Phi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$ の形に表す. A_k は正則函数である. A_i^0, B_j^0 $(i=1, 2, \ldots, n; j=1, 2, \ldots, m)$ は何れも simply connected であるから, 任意にあたへた $\varepsilon' > 0$ に対し, fonctions entières $B_k(x, y)$ が対応して (A^0, B^0) の近傍で

$$|A_k(x, y) - B_k(x, y)| < \varepsilon'$$

となる.

$$G(x, y) = \sum B_k \Phi_k$$

とし, G の Σ 上の trace の (R) 上の image を $g(P)$ とすれば, $g(P)$ は Δ の近傍で正則であって, u_0 によって divisible である. それで

$$g = u_0 v$$

とすれば, v は Δ の近傍で正則である.

所で, F の Σ 上の trace の (R) 上の image は uu_0 であるから, あたへられた ε に対し, ε' を適当に小さくとっておけば, Δ_0 の近傍で $|u-v| < \varepsilon$ となることは明である. C. Q. F. D.

(1950. 11. 4. (土))