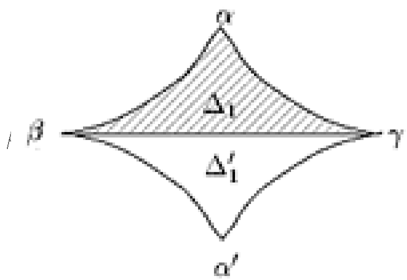
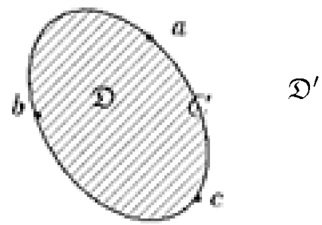
Introduction

1. Algebraic function の net



x-plane



y-plane

$y=R(x)$ を non-linear の rational function とし其の degree を ℓ とする. $R^{(-1)}(y)$ のすべての critical pts (図の a, b, c) を closed curve C で連ねよう. 但し C は everywhere smooth であって double pt. をもたないと考える. C によって分たれた y-plane の二つの部分を domains $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ としよう. relation $y=R(x)$ によって $\mathfrak{D}$ に correspond する x-plane の domains は ℓ 個 ある. 之を $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\ell$ としよう. 之等の domains は何れも simply connected であって, かつ一葉である. 其の boundary は critical pts に correspond する pts (図の α, β, γ) を除いて smooth であって, double pts をもたない. $\mathfrak{D}'$ に correspond する domains $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_\ell'$ についても全く同様である. 之等の domains を Polygons と云ひ critical pts に correspond する点を其の vertices と呼ばう.

3. 此の論文の目的・概要.

Algebraic function を $A(z)$ とする. 今 $A^{(i)}(z)$ を以て i が pos. int. であるときには其の order i の itérée を, i が negative であるときには inverse fn. $A^{(-1)}(z)$ の order $(-i)$ の itérée を, i が 0 であるときには z 自身を表はさう. rational function $R(z)$ についても同様の notation を用ひよう. $A^{(i)}(z) = R^{(j)}(z)$ をみたす pair of integers (i, j) が $(0, 0)$ 以外に存在するとき, 二つの functions は dependent であると云ひ, 然らざるとき independent であると云はう. (ここに $A^{(i)}(z)$ とは $A^{(i)}(z)$ によって示される fns の any one を意味する)

Algebraic function $A(z)$ と non-linear rational function $R(z)$ とが permutable であって, かつ independent であるときには, 之等の functions の net について上の MM. Julia et Ritt の theorem と同じ結論が得られる. 此處に述べんとする所のものである.

I. Composition de relations algébriques.

4. Dégénérations des degrés.

二つの algebraic relations

$$A_1(x) = y, \qquad A_2(y) = u$$

を合成したときの有様を明らかにしようと思ふ.

algebraic function を構成する analytic elements を algebraic element と ordinary element とに区分する. 今 $A_1(x)$ から ordinary element $y = E_1(x - x_0)$ を取り出し, $A_2(y)$ から ordinary element $u = E_2(y - y_0)$ を取り出して, 之を compose しよう. 此の爲には $E_1(0) = y_0$ であればよい. か様にして得た élément analytique composé を $u = E_3(x - x_0)$ とする. 之によって define せられた analytic function について考へよう. 先づ明らかに此の function は algebraic function である. 之を $A_3(x)$ としよう.

次に $u = A_3(x)$ の degrees を見よう. 此の爲には original element $E_3(x - x_0)$ から出発して analytic continuation を実地に行へばよい. relations $A_1(x) = y$, $A_2(y) = u$ の degrees を夫々$(\overset{m_1}{x}, \overset{n_1}{y})$, $(\overset{m_2}{x}, \overset{n_2}{y})$ としよう. 今 Riemann-surface $A_1(x) = y$ 上の一点 (x_0, y_0) に対して u の k 個の pts が correspond したとする. 勿論 $k \leqq n_2$ である. 此の k は Riemann-surface 上の有限個の singular pts を除いて一定の数であること analytic continuation によって明らかである. 勿論其の爲には点 (x_0, y_0) 自身が singular pt. であってはならない. 夫故点 x_0 に対して u の $n_1 k$ 個の pts が correspond する.

此の $n_1 k$ 個の pts は点 x_0 を最も一般の点と考えても, 尚すべて異なるとは云へない. 今 Riemann-surface $u = A_3(x)$ の pt. (x_0, u_0) に対して y の h 個の pts が応じたとする. 此の h も亦点 (x_0, u_0) が有限個の特別な点でない限り一定の数である. 夫故 $u = A_3(x)$ の degrees を $(\overset{m_3}{x}, \overset{n_3}{y})$ とすれば

$$n_3 = \frac{n_1 k}{h} \tag{1}$$

となる.

$n_3 < n_1 n_2$ のとき dégénération de degré が起ると云はう. 更に $k < n_2$ の爲に起る dégénération を de la première espèce と云ひ, $\dfrac{k}{n_2}$ を其の index と云はう. $h > 1$ の爲に起る dégénération を de la deuxième espèce と云ひ, h を其の index と云はう.

第一種の次数の低下が起るときには, 上に云った $A_2(y)$ の element $E_2(y - y_0)$ の撰擇によって結果の函数が異なるのが一般である. 之等

をすべて Fonction algébrique composée と呼び $A_2[A_1(x)]$ 或は簡単に $A_2 \cdot A_1(x)$ を以て表はさう. 第一種の次数の低下が起らなければ Fonction composée は unique に定まる.

第一種の次数の低下は analytic continuation によって明らかなるが如く, $A_1^{(-1)}(y)$ の critical pts と $A_2(y)$ の critical pts とが同じ位置に来ない限り決して起らない.

第二種の次数の低下は $A_1(z)$ に関する一点の conséquents immédiats の集りと $A_2(z)$ に関する何れかの点の antécédents immédiats の集りとの間に一点以上の一致があったときにのみ起る.

5. Relation entre les degrés.

Algebraic relations $A_2^{(-1)}(u)=y$, $A_1^{(-1)}(y)=x$ を compose するときの第一種の次数の低下の index を $\dfrac{g}{m_1}$ とすれば, 次の 3 つの式が得られる (勿論 fonction composée が前節の fonction composée の inverse fn. となる様にとる)

$$\frac{n_3}{n_1}=\frac{k}{h},$$

$$\frac{m_1}{n_2}=\frac{g}{k},$$

$$\frac{m_2}{m_3}=\frac{h}{g},$$

$$\therefore \quad \frac{m_3}{n_3}=\frac{m_1}{n_1}\frac{m_2}{n_2} \tag{2}$$

6. Relation entre les nombres de points critiques.

Algebraic element が s-valued であるとき, 其の element の order は s であると云ふ. $s-1$ を其の algebraic function のすべての algebraic elements に汎って sum up したものを其の function の critical pts の数と云ふ.

前々節の function $u=A_3(x)$ を $A_1(x)=y$ の Riemann-surface 上に於て位置の function として考へよう.

正確を期する爲 algebraic relation $A_1(x)=y$ の functions uniformisantes $x=f(t)$, $y=g(t)$ を採らう. 但し Riemann-surface x 上の任意の点のまわりと, 之に correspond する t の一点のまわりとは, 常に conformally に represent せられて居る様なものをとる. 即ち Riemann-surface x 上の ordinary pt. に於ては, 普通の意味に於て conformally に represent せられて居るし, s-sheets に汎る critical pts x_0 と t の corresponding pt. t_0

との関係は, t-plane の corresponding angle が $\dfrac{1}{s}$ になって居る様なものをとる. $g(t)$ についても同様である. か様な fonctions の存在することは我々のよく知る所である.

然るときは u は t の k-valued function である. 此のとき fonction $u(t)$ は t の existence domain 内に於て ordinary element と algebraic elememt としかもたない. 之等の algebraic elememts の orders から夫々1 を引いたものを Riemann-surface 全体に丁度 correspond する t の domain 全体に汎って sum up したものを Riemann-surface $A_1(x)=y$ 上に於ける u の critical pts の数と云はう.

$A_1(x)$ の critical pts の数を N_1, $A_3(x)$ の夫を N_3, Riemann-surface $A_1(x)=y$ 上に於ける u の critical pts の数を α, Riemann-surface $A_3(x)=u$ 上に於ける位置の function y の夫を β とすれば

$$N_3=\frac{kN_1-\beta+\alpha}{h} \tag{3}$$

であることを証明しよう. (此の際もし第一種の次数の低下が起るならば, 上の諸数は同一の system について取らなければならないこと勿論である.)

$A_1(x)=y$ の analytic element $y=E_1(x-x_0)$, $A_2(y)=u$ の analytic element $u=E_2(y-y_0)$ をとる. 但し $E_1(0)=y_0$ とする. 之をくみ合せて $A_3(x)=u$ の element $u=E_3(x-x_0)$ を得たとし, $E_3(0)=u_0$ とする. elements E_1, $E_1^{(-1)}$, E_2, $E_2^{(-1)}$, E_3, $E_3^{(-1)}$ の orders を夫々 t_1,s_1,t_2,s_2,t_3,s_3 とすれば, 前に (1) 式を得たときの論法を corresponding pair of pts x_0,y_0,u_0 のまわりの small domain 内に於ける analytic continuation に関して反覆して

$$t_3=\frac{t_1t_2'}{v}$$

が得られる. t_2', v は之等の corresponding small pairs of domains 内に於て夫々前の k,h と同様の meaning をもつ数である. 此の式を変形すれば

$$v(t_3-1)=t_2'(t_1-1)-(v-1)+(t_2'-1)$$

となる. 之をすべての algebraic elements の combination に汎って sum up すれば目的の式が得られる. C. Q. F. D.

ここに注意すべきは s_1 と t_2 との greatest common divisor を r とすれば

$$t_2'=\frac{t_2}{r}$$

なることである.

II. L'ensemble de points critiques.

7. Conditions.

Rational function を $R(z)$ とし algebraic function を $A(z)$ とする. $R(x)=y$, $A(y)=u$ なる composition に関しては第二種の次数低下は決して起らない. 之に反し $A(x)=y$, $R(y)=u$ なる composition に関しては第一種の次数低下は決して起らない. 夫故 $R\cdot A(x)$ は常に只一つの analytic function を意味する[1]. $A\cdot R(x)$ によって表はされる functions 中に $R\cdot A(x)$ と等しいものがあるとき, 二つの functions $A(z)$, $R(z)$ は permutable であると云はう.

以下我々は $A(z)$ と $R(z)$ とが permutable かつ independent で, 更に $R(z)$ が non-linear であるとの條件のもとに考へよう.

8. Genre de $A(z)$.

$A(z)$ の genre が 0 又は 1 であることを証明しよう.

$R(z)$ の degree を ℓ とし $y=A(x)$ の degrees を $(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})$ としよう. 先づ次の composition

$$R(x) = y, \quad A(y) = u$$

を fonction composée が $u=R\cdot A(x)$ となるものに関して見よう. 此のときの有様は次の図によって示すのが明らかであらう

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & \longrightarrow & y_1 & \longrightarrow & u_1, u_2, \cdots, u_k & & k \leqq n \\
x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1g} & \longleftarrow & y_1 & \longleftarrow & u_1 & & \\
x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2g} & \longleftarrow & y_2 & \swarrow & & & g \leqq \ell \\
\cdots\cdots\cdots & & \vdots & & & & \\
x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mg} & \longleftarrow & y_m & \swarrow & & &
\end{array}$$

$u=R\cdot A(x)$ の degrees を $(\overset{m_1}{x}, \overset{n_1}{u})$ とし, $A^{(-1)}(u)$ の critical pts の数を $2(m+p)$ とし, $A^{(-1)}\cdot R^{(-1)}(u)$ の夫を $2(m_1+p_1)$ とし, Riemann-surface $A(y)=u$ 上に於ける位置の fn. x の critical pts の数を α とすれば, formula (3) により

$$\begin{aligned} 2(m_1+p_1) &= g\cdot 2(m+p)+\alpha \\ \text{or} \qquad p_1 &= g\cdot p + \frac{\alpha}{2}\,. \end{aligned}$$

然るに formula (2) から

$$\frac{g}{n_1} = \frac{\ell}{n}\,.$$

---

[1] "第一種次数低下が起れば必ずことなった fns が出来る."

故に我々は若し必要ならば $R(z)$ の代りに其の itérée をとることが出来るから $g>1$ と考えて一般性を失はない．故に若し

$$p > 0 \quad \text{ならば} \quad p_1 > p$$

である．然るに composition

$$A(x) = y, \qquad R(x) = u$$

に於て, 第二種の次数の低下の Index を h とすれば Formula (3) から

$$2\left(\frac{n}{h} + p_1\right) = \frac{2(n+p) - \beta}{h}.$$

ここに β は Riemann-surface $u = R\cdot A(x)$ 上に於ける位置の fn. y の critical pts の数である．

$$\text{or} \qquad p_1 = \frac{p}{h} - \frac{\beta}{2h}$$

$$\therefore \qquad p_1 \leqq p$$

此の二つの不等式から $p \leqq 0$ をうる[2]. C. Q. F. D.

(この証明に independency は不必要である).

9. Permutabilité.

$A(z)$ は明らかに $R(z)$ の itérées と permutable である．

$A^{(-1)}(z)$ も亦 $R(z)$ と permutable である．

$R\cdot A(z)$ も亦 $R(z)$ と permutable である[3].

夫故 $A\cdot R(z)$ の内には必ず $R(z)$ と permutable のものがある．

次に $A(z)$ の itérées の permutabilité について見よう．$A(z)$ の order i の itérée $A^{(i)}(z)$ は一般に数個の analytic functions を表はす．之を $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_j(z)$ としよう．此の内の任意の 1 つ $A_{01}(z)$ をとれば

$$R \cdot A_{01} = A_{02} \cdot R$$

となる．ここに A_{02} も亦上の functions の 1 つであり, かつかかる A_{02} は unique に定まる．之を反覆して得らるるすべての fns を其の順に $A_{01}, A_{02}, \ldots, A_{0r}$ とすれば

$$R \cdot A_{0r} = A_{0s} \cdot R, \qquad s \leqq r$$

[2] "A が R のある itérée と permutable のときにも同じことが云える"

[3] 尚 A が $R^{(i)}$ と permutable ならば, $R\cdot A$ は $R^{(i)}$ と permutable である．

である.

$$\therefore \quad R^{(r-s+1)} \cdot A_{0s} = A_{0s} \cdot R^{(r-s+1)}$$

したがって $A^{(i)}(z)$ の内には必ず $R(z)$ のある itérée と permutable なものがある.

10. Fonctions réduites[4].

$R(z)$ と $A(z)$ から fonction composée をつくるとき, どちらの順に対しても次数の低下が起らなければ, $A(z)$ は $R(z)$ に関して réduite であると云ふ. ($A(z)$ が $R(z)$ と permutable ならば, 1 つの順の composition に対して次数の低下が起らなければ, 他の順の夫に対しても起り得ない). positive integer i を適当に大きくとれば, $R^{(i)}{\cdot}A(z)$ は必ず $R(z)$ に関して réduite である. 以下 $A(z)$ は $R(z)$ に関して réduite であると考へよう.

所で $A{\cdot}R \equiv R{\cdot}A$ であるから[5]

$$A \cdot R^{(2)} = R \cdot A \cdot R = R^{(2)} \cdot A.$$

然るに後者 $R^{(2)}{\cdot}A$ は unique な function を表す[6]. 夫故 $A{\cdot}R^{(2)}$ によって表はされる function は只 1 つしかない. 夫故第一種の次数低下は起り得ない[7].

即ち $A(z)$ が $R(z)$ に関して réduite ならば, $R(z)$ の any itérée に関しても réduite である.

次に $A(z)$ の order i の itérée を考えよう. 今

$$A^{(i)}(z) = A_1(z),\ A_2(z),\ \ldots, A_j(z)$$

とする. 之等の functions any one を A_{01} とすれば

(a) $$R \cdot A_{01} = A_{0s} \cdot R$$

(b) $$A_{01} \cdot R = R \cdot A_{0t}$$

が成立する. ここに A_{0s}, A_{0t} はともに上の fns のいずれかである. 上の式に於て A_{0s} が unique に定まることは既に云った. 下の式に於て A_{0t} は一般に unique とすぐには断定できない. 今 $A_{01}{\cdot}R = R{\cdot}A_{02}$ をみたす any one を A_{02} とし $A_{02}{\cdot}R = R{\cdot}A_{03}$ をみたす any one を A_{03} とする. か様にして相異なる fns $A_{01}, A_{02}, \ldots$ を得たとする. 此の process を反覆すれば遂には同じ fn. が表はれなければならない. 然るに (a) の process が

[4] permutable とは別である.

[5] $R^{(i)}$ と permutable としてやって行ける.

[6] $R(x)=y$ の Riemann-surface は x によって uniformisieren されるから, u は此の面上で只一つの analytic fn. でなければならない

[7] $\because$ $R(z)$ が rational だから

unique であることから, 最初に表はれる function は A_{01} でなければならない. 之等の process (b) によって作らるる cycle of fns を

$$A_{01},\ A_{02},\ \ldots\ A_{0r}$$

とする. 然るときは, $A_{01}, A_{0r}, \ldots A_{02}$ は process (a) が unique であるから, 順位をも含めて A_{01} にのみ depend する. 即ち (b) の process も亦 unique である. 之は $A_{01}\cdot R$ が unique な function を表はすことを意味する. それ故 $A^{(i)}(z)$ によって表はさるる fns はすべて $R(z)$ に関して réduite である[8].

更に上の結果は $A^{(i)}(z)$ によって表はされる fns はすべて R のある itérées と permutable であることを示す.

11. Relation entre des points critiques.

以下我々は若し必要ならば $A(x)$ の代りに $R^{(i)}\cdot A(x)$ (i : pos. int.) をとることにより $y = A(x)$ の degrees $(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})$ に於て $m > n$ と考えよう[9].

さて composition $R(x) = y,\ A^{(-1)}(y) = u$ をみよう. 其の fonctions composées の内には必ず $R(z)$ のある itérée と permutable であり, 従って genre が 1 を越えないものがある. 夫についての composition の有様を次の図によって示さう

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & \longrightarrow & y_1 & \longrightarrow & u_1, u_2, \cdots, u_k & & k \leqq n \\
x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1g} & \longleftarrow & y_1 & \longleftarrow & u_1 & & \\
x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2g} & \longleftarrow & y_2 & \swarrow & & & g \leqq \ell \\
\cdots\cdots\cdots & & \vdots & & & & \\
x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{ng} & \longleftarrow & y_n & \swarrow & & &
\end{array}$$

之等について Formula (3) $N_3 = \dfrac{kN_1 - \beta + \alpha}{h}$ が如何になるかを見よう.

先づ第一の diagram については

$$N_3 = \alpha$$

をうる. 夫故

$$\alpha \leqq 2k.$$

然るに, 若し $A^{(-1)}(y)$ の critical pts の内, たとへ 1 つでも $R^{(-1)}(y)$ の critical pts に重ならないものがあれば

$$\alpha \geqq g$$

[8] 全く同様に $R^{(i)}$ に対しても réduite である

[9] A が R のある itérée と permutable とする.

である．故に若し

$$g > 2k$$

ならば $A^{(-1)}(y)$ の critical pts はすべて $R^{(-1)}(y)$ の critical pts に含まれる．

全く同様に第二の diagram から，若し

$$k > 2g$$

ならば，$R^{(-1)}(y)$ のすべての critical pts は $A^{(-1)}(y)$ の critical pts に含まれることが云はれる．然るに

$$\frac{g}{k} = \frac{\ell}{m}$$

である．故に

$$\frac{\ell}{m} > 2$$
$$\frac{\ell}{m} < \frac{1}{2}$$

なるに従ひ，或は $A^{(-1)}(z)$ の critical pts がすべて $R^{(-1)}(z)$ の critical pts に含まれ，或は後者が前者に含まれる．

次にこの不等式について見よう．我々は上の推論に於て $R(z)$ の任意の itérée を以て $R(z)$ におきかへることが出来る．此のとき ordre が充分大ならば $\dfrac{\ell}{m} > 2$ である．尚此のとき $A(z)$ の critical pts はすべて $R^{(-1)}(z)$ の critical pts に含まれる．

次に $A(z)$ の代りに其の任意の itérée を以てすることが出来る．此のとき其の order さへ充分大ならば $m > n$ なる故 $\dfrac{\ell}{m} < \dfrac{1}{2}$ であること formula (1) から明らかである．

12. L'ensemble de points critiques.

$R^{(-1)}(z)$ のすべての itérée の critical pts の ensemble を E_R で以て表はさう．$R^{(-1)}(z)$ の critical pts を $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ とすれば $R^{(-i)}(z)$ の critical pts は

$$\alpha_j,\ R(\alpha_j),\ \ldots,\ R^{(i-1)}(\alpha_j) \qquad j = 1, 2, \ldots, r$$

である．今 $\alpha_i, R(\alpha_i), R^{(2)}(\alpha_i), \ldots$ を suite (α_i) と呼ばふ．然るときは E_R は suite (α_i) $i = 1, 2, \ldots, r$ からなる．

次に $A^{(-1)}(z)$[10] のすべての itérées の critical pts の ensemble を E_A で表はさう．E_A の configuration は E_R の如く簡単ではない．

[10] $m > n$ réduite

今 E_A が無限個の点を含むと假定しよう．然るときは positive integer i を任意にあたへたとき E_A には必然次の 2 つの conditions をみたす pt. z_j が必ず存在する．

1. z_j は $A^{(-j)}(z)$ の critical pt. であって order が j 以下の $A^{(-1)}(z)$ の itérée の critical pts ではない．
2. z_j は $A^{(-1)}(z)$ の critical pts の $A(z)$ に関する order が i 又は夫以下の consequent ではない．

さて z_j 点に於ける $A^{(-j)}$ の algebraic element を考へ，夫によって z_j に correspond する点を z_0 とする．z_0 の $A(z)$ に関する consequent immediate を次々に適当にとれば，j 回の後 z_j に達する chain of pts を得る．之を $z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}, z_j$ としよう．所で ordinary elements を compose すれば algebraic elements は得られない．$\therefore$ condition 1 により z_s は $A^{(-s)}$ の critical pts である．次に condition 2 により此の chain of pts 中には相異なる pts が少なくとも $i+2$ 個ある．

然るに前節の結果により ensembles E_R, E_A は一致しなければならぬ．故に此の chain は suite (α_i) $(i=1,2,\ldots,r)$ の点からなる．今 $i+2>r$ としよう．然るにときは何れかの suite の少くとも 2 つのことなる点を含まねばならぬ．假りに之を suite (α_1) としよう．然るときは

$$
\begin{aligned}
z_s &= R^{(s')}(\alpha), \\
z_t &= R^{(t')}(\alpha), \\
s' &< t', \quad s \neq t
\end{aligned}
$$

が得られる．然るに

$$z_t = A^{(t-s)}(z_s).$$

今 $A^{(t-s)}=A_1$, $R^{(t'-s')}=R_1$ とおけば

$$R_1(z_s) = A_1(z_s).$$

然るに R_1 は R の itérée であることから

$$R_1^{(i)} \cdot R_1(z_s) = R_1^{(i)} \cdot A_1(z_s) = A_1 \cdot R_1^{(i)}(z_s).$$

之は $R_1^{(i)}(z_s)$ も亦 z_s と同じく次の方程式

$$R_1(z) = A_1(z)$$

の根であることを示す．同様にして此の方程式は

$$z_s,\ R_1^{(i)}(z_s),\ R_1^{(2i)}(z_s),\ \ldots\ldots$$

をすべて根としてもつ．然るに此の方程式が identity であることは我々が第七節にあたへた condition と背反するから，上の suite は有限個の相異なる pts を含むのみである．従って suite (α_1) は有限個よりなる．les ensembles E_R, E_A から suite (α_1) を除き去った残りについて全く同様のことが云ひ得られる．故に ensemble E_A が無限個の点よりなるとの假定はあやまりである．故に

$$E_R = E_A \quad : \quad \text{finite}$$

13.　Classification de points critiques.

R を其の itérée でおきかへることにより E_R の pts を整頓しよう．先づ R を其の itérée でおきかへることにより $R^{(-1)}$ の critical pts と E_R の pts とが一致すると考へられる．之等の pts は $R(z)$ の cycles invariables に屬するか，其の antécédents であるかのいずれかである．で $R(z)$ を復び其の itérée でおきかへることにより，E_R の pts は $R(z)$ の points invariables か，之等の critical pts の antécédents immédiats かいずれかにすることが出来る．

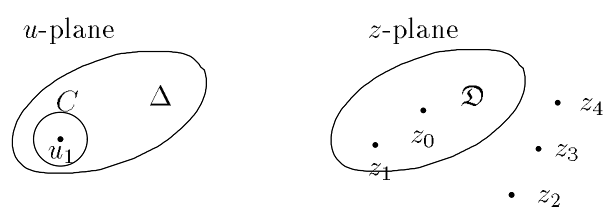
次に $R^{(-1)}(z)$ の critical pts を分類しよう．$R(z)$ の points invariables であるものを $R^{(-1)}(z)$ の points critiques invariables と云ひ，之等の critical pts の antécédents immédiats なるものを points critiques variables と云はう．更に points critiques invariables の 1 つをかりに a とすれば，pair of pts (a, a) によって定められる $R^{(-1)}(z)$ の analytic element が algebraic であるとき，之を singulier であると云ひ，然らざる pts critiques を ordinaire であると云はう．

III.　Points critiques singuliers.

14.　Points invariables de $R(z)$.

$R(z)$ の points invariables はすべて répulsifs なることを証明せん．但し Points critiques singuliers を除く．

$y = R(z)$ に於て y-plane と x-plane とを同じ non-singular linear transformation $y' = L(y)$, $x' = L(x)$ をほどこすも，かくて得る rational function は critical pts 及び invariant pts に関し $R(z)$ と全く同じ property を持つを以て，問題の critical pts は有限の位置にありと考ふることをう．之を z_0 とせん．更に z_0 を point critique singulier ならずと考へん．



z_0 のまわりに simply connected にして一葉よりなる domain $\mathfrak{D}$ をとり次の properties をもたしむることをう.

1° $\mathfrak{D}$ は z_0 以外に $R^{(-1)}(z)$ の critical pts を含まず.
2° $\mathfrak{D}$ は 3 つの invariant pts z_2, z_3, z_4 を含まず.
3° $\mathfrak{D}$ は repulsive invariant pt. z_1 を含む.

之等の性質をもつ domain $\mathfrak{D}$ をうるため $R(z)$ を其の itérée を以ておきかふるも, 上の定理は影響せらるることなし.

$$R^{(-1)}(z),\ R^{(-2)}(z),\ \ldots\ldots$$

の内, 点 z_0 に於て value z_0 をとるものを $\mathfrak{D}$ 内に於て考ふれば, 1° により, 之等はすべて uniform なり. 次に 2° により之等の suite de fonctions は 3 つの values z_2, z_3, z_4 をとることなし. 故に famille normale をつくる. 其の 1 つの uniformly に converge する Partial family をとり之を

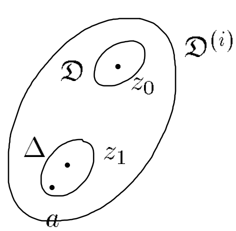
$$R^{(-i_1)}(z),\ R^{(-i_2)}(z),\ \ldots\ldots$$

とし, fonction limite を $\varphi(z)$ とせん. $\varphi(z)$ は fonction méromorphe なるか constante なるかいずれかなり. 先づ前者なりと假定せん. 然るときは $\varphi(z)$ は明らかに $\mathfrak{D}$ 内に於て biuniform なり. 故に $u=\varphi(z)$ により $\mathfrak{D}$ に correspond する u-plane の domain を Δ とすれば, Δ は一葉よりなる.

今 $\varphi(z_1) = u_1$ とし u_1 を center として Δ 内に circle C を 描けば, domains $R^{(-i_k)}(\mathfrak{D})$ は k をある一定数より大にとればすべて domain C を含む. 云ひ換ふれば domains $R^{(i_k)}(C)$ はすべて $\mathfrak{D}$ 内にあり. 依て pt. u_1 は $R(z)$ の itérées の集合に於ける essentially singular pts の集り E' なる能はず. 之は z_1 が $R(z)$ の repulsive invariant pt. なりとの假定と矛盾す. 故に $\varphi(z)$ は identically に 0 なり. 依て z_0 は repulsive なり. C. Q. F. D.

15. Existence de point invariable répulsif commun.

$R^{(-1)}(z)$ の critical pts を含まない simply connected domain に於て $A^{(\pm i)}(z)$ (i : pos. int.) は uniform である.



今 z_0 を $R(z)$ の repulsive invariant pt とし, $R^{(-1)}(z)$ の critical pt. でないとする. z_0 のまわりに $R^{(-1)}(z)$ の critical pts を含まない一葉の simply connected domain $\mathfrak{D}$ をとる. $R^{(i)}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}^{(i)}$ とする. (i : pos. int.) z_1 を $A(z)$[11]に関する z_0 の 1 つの antécédents immédiat とする. z_1 も亦 $R^{(-1)}$ の critical pt でないと見られる.

[11] réduite であればよい

$R(z)$ の itérées の exceptional pts は 2 をこえないから, z_1 が exceptional でない様に z_0 をとることが出来る. 然るときは i を充分大にすれば $\mathfrak{D}^{(i)}$ は z_1 を含む. 今 $A^{(-1)}(\mathfrak{D}) = \Delta$ とし, この branch に関して $A^{(-1)}(z_0) = z_1$ とする. $\mathfrak{D}$ を充分小さくとれば, Δ は一葉の domain であるのみならず, $\mathfrak{D}$ を充分小さくすると共に i を充分大にすることにより, $\mathfrak{D}^{(i)}$ は Δ を内に含むと考へてよい. 夫故 $R^{(i)} \cdot A$ は Δ 内に少なくとも 1 つの repulsive invariant pt. a をもつ. 此の $R^{(i)} \cdot A(z)$ は $A(z)$ と全く同様の性質をもつ. 以下之を改めて $A(z)$ と考へよう. $A(z)$ は次の如き ordinary element $E(z-a)$ をもつ

$$E(0) = a$$
$$|E'(0)| > 1.$$

Δ 内に於て E の itérées によって define せられる $A(z)$ の itérées を考へると, 之はすべて uniform の functions である. 然るに此の suite は famille normale をつくることが出来ない. 夫故此の a 点は $A(z)$ に関し E' の点が $R(z)$ に関して持つと全く同様の property をもつ.

次に suite de points a, $R(a)$, $R^{(2)}(a)$, ... を考へると, 之はすべて $A(z)$ の points invariables である. 夫故 i をある適当な pos. int. とすれば, $R^{(i)}(a) = b$ は R の cycle invariable の点である. 以下此の b 点を R の point invariable であると考へよう.

b は $R(z)$ の point invariable répulsif か point critique singulier か何れかである. 先づ後者であるとしよう. 然るときは domain $R^{(k)} \cdot A^{(j)}(\Delta)$ は Δ を如何に小にとるも, j 及び k が共にある pos. no. より大ならば, R の itérées に関する exceptional pts の附近をのぞき plane 全体を cover する.

然るに $A^{(j)} \cdot R^{(k)}(\Delta)$ は Δ が a の附近のある限られたる domain 内にあるときは k が j よりも充分大ならば a の附近を cover するにすぎない. 然るに $R^{(k)} \cdot A^{(j)}(\Delta) = A^{(j)} \cdot R^{(k)}(\Delta)$ であるから此のことは矛盾である. 夫故 b は $R(z)$ の repulsive invariant pt. である. 我々は $y = R(x)$ 及び $y = A(x)$ の y-plane, x-plane に同じ non-singular linear transformation を施して R 及び A を modify することにより $b=0$ と考へよう.

此の pt. 0 について見よう. 上にのべた所により $A(z)$ には次の如き analytic element $E_A(z)$ の存在すること明らかである.

1. $E(0) = 0$.
2. 0 の附近に如何に小な domain Γ をとるも, pos. int. i を充分大にとれば $E_A(\Gamma)$ は exceptional value の附近をのぞき plane 全体を cover する.

次に此の element が ordinary であることを云はう.

今 $E_A(z)$ が algebraic であったとして, 之を rational part と algebraic part とに分って expand し

$$E_A(z) = r(z) + c_s z^{\frac{s}{n}} + c_{s+1} z^{\frac{s+1}{n}} + \cdots \qquad c_s \neq 0$$

としよう. ここに $r(z)$ は其の rational part を示し, s は pos. int. であり, $\dfrac{s}{n} \neq pos.\,int.$ であり, n はかくの如き pos. int. 中最小のものである. 次に

$$R(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

とすれば $|a_1| > 1$ である.

先づ $R \cdot E_A(z)$ を考へよう. ここに於て $z^{\frac{s}{n}}$ の coeff. は $a_1 c_s$ である. 次に $E_A \cdot R(z)$ を見れば其の $z^{\frac{s}{n}}$ の coeff. は $a_1^{\frac{s}{n}} c_s$ である.

$$\therefore \qquad a_1^{\frac{s}{n}} c_s = a_1 c_s$$

で $\dfrac{s}{n} = 1$ でなければならぬ. 即ち我々の假定はあやまりであって $E_A(z)$ は ordinary element である. か様に $R(z)$ と $A(z)$ とは common repulsive invariant pt. 0 をもつ.

16. Fonction de Poincaré commune.

$R'(0) = s$ とすれば $|s| > 1$ であるから, Poincaré の示した所により次の條件をみたす holomorphic element $f(t)$ は 1 つ存在し只 1 つに限る：

$$f(st) = R[f(t)]$$
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$$

analytic function $f(t)$ は明らかに $t = \infty$ を除いて uniform である. 之を $R(z)$ の repulsive invariant pt. 0 に於ける Poincaré の function と云ふ.

所で $t = 0$ の附近に於て

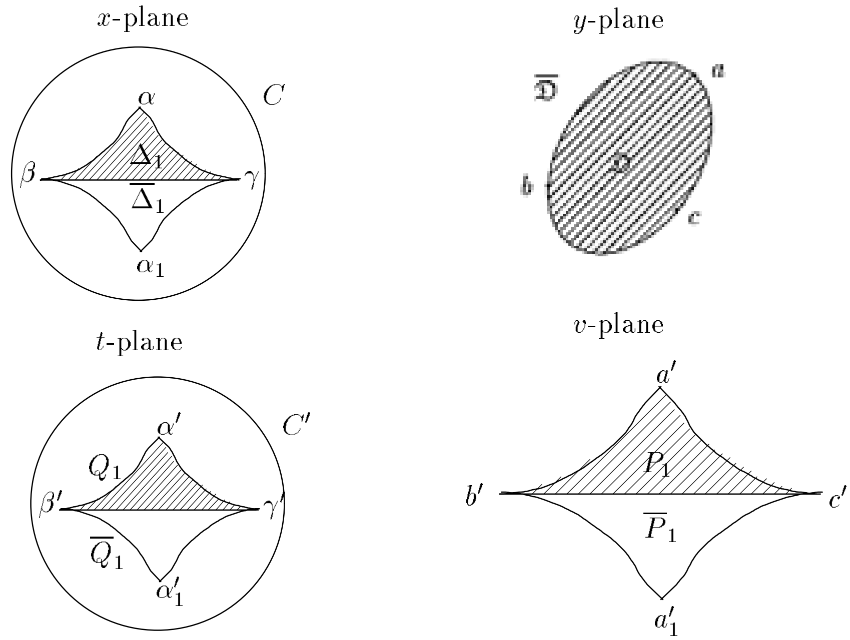
$$\begin{aligned} E_A \cdot f(st) &= E_A \cdot R[f(t)] \\ &= R \cdot E_A[f(t)], \end{aligned}$$

故に holomorphic element $E_A[f(t)]$ も亦上の functional equation をみたす. 故に今 $E_A'(0) = s'$ とすれば

$$E_A[f(t)] = f(s't)$$
$$\text{or} \qquad f(s't) = A[f(t)]^{12}.$$

[12] $s^i \neq s'^j$ である multiplicative independent.

17. Réseau de la fonction de Poincaré.



$y = R^{(i)}(x)$ (i : pos. int.) の Réseau を考える. 即ち $R^{(i)}$ の critical pts (図の a, b, c) を smooth でかつ double pt. をもたない closed curve で連ね y-plane を two parts $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ に分つ. 之等に correspond する x-plane の domains を夫々 $\Delta_1, \Delta_2, \ldots; \overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \ldots$ とする. これらの分割を夫々 $x = f(t)$, $y = f(v)$ なる relations により t-plane, v-plane に represent しよう.

先づ t-plane から始める. x-plane の 0 を center とする circle C 上及び C 内が $x = f(t)$ により t-plane の $t = 0$ のまわりの closed domain C' と bi-univoque な relation にあると考へよう. x-plane の Réseau の内 closed domain C にあるものは conformally に t-plane に represent せられる. 之等の polygons を $Q_1, Q_2, \ldots, \overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots$ としよう. 此の t-plane の分割を $v = s^i t$ なる relation により v-plane に represent し, かくて得る polygons を $P_1, P_2, \ldots, \overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ としよう.

然るときは $y = f(v)$ なる relation により $P_1, P_2, \ldots$ はいずれも $\mathfrak{D}$ に, $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ はいづれも $\overline{\mathfrak{D}}$ に correspond する. この分割は明らかに i に independent であるのみならず, i を大にすることにより v-plane の有限部分はことごとく分割しおわることが出来る.

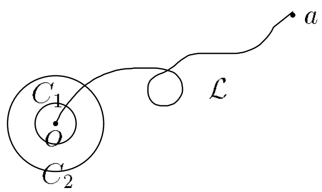
此の分割を $f(t)$ の Réseau と云はう. 上にのべた所をまとめて云へば, $f(t)$ の Réseau と $R(z)$ の itérées の pt. 0 のまわりの Réseau とは similar

である[13].

18. Valeurs assymptotiques de la fonction de Poincaré.

$f(t)$ の polygons の内には point at infinity まで拡がって居るものがあらう. Polygons のかかる部分は $R^{(-1)}$ の point critique singulier に correspond する vertex の附近に限ることを証明しよう. 之は $f(t)$ が $R^{(-1)}$ の point critique singulier 以外に valeurs assymptotiques を持たないと云ふのと同じことである.

今 z-plane に一点 a をとり, 0 を起点とし a を終点とする curve $\mathcal{L}$ を考へる. 但し $\mathcal{L}$ は stereographic projection による spherical image が Jordan's curve になる様なものであって, かつ $R^{(-1)}$ の critical pts を通過しないとする. 今 z-plane を $R^{(-1)}(z)$ によって次々に transform しよう. この各 process に於て $\mathcal{L}$ の imege の内 0 を起点とするものは只 1 つである. 之等を順に $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots$ としよう.



さて上述の定理を証明するには次のことを証すればよい：

$\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots$ が 0 に converge しなければ, a は $R^{(-1)}$ の point critique singulier である.

$R(z)$ の 0 に於ける analytic element を $E_R(z)$ としよう. 其の convergence circle 内に 0 を中心として充分小な circle C_1 を描けば, closed domain C_1 を $E_R^{(-1)}(z)$ で次々に transform すれば, 此の domain は regularly に 0 に tend する. C_2 を C_1 と concentric な domain C_1 内の circle とする.

今 $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots$ が 0 に converge しなかったとしよう. 然るときは C_1 の property から之等のいずれも closed domain C_1 外の点をもつ. 今 $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots$ が最初に circle C_2 と出會ふ点を夫々 $z_0, z_1, z_2, \ldots$ とし, 之に correspond する $\mathcal{L}$ 上の点を夫々 $z_0, z_0', z_0'', \ldots$ としよう. circle C_2 は circle C_1 と同じ property をもつから, 之等の pts は regularly に $\mathcal{L}$ 上を遠ざかる. 故にかならず unique な limit pt. をもつ. 之を ζ としよう. ζ は次の 2 つの property をもつ.

1. ζ 自身の images は常に C_1 外にある.
2. $\mathcal{L}$ 上に於て ζ より少しでも 0 に近い点の images はある順位から向ふはすべて C_2 内にある.

[13] $f(t)$ の Réseau については vertex の種類と其の angle と以外に polygon の pt. at ∞ty に tend する部分が問題になる.

ζ の images を $\zeta', \zeta'', \ldots$ とする. 今 ζ のまわりの domain $\mathfrak{D}$ 内に於て pair of pts (ζ, ζ'), (ζ', ζ''), ... によって define せられる $R^{(-1)}(z)$, $R^{(-2)}(z)$, ... の branches を考へる. 然るときは ζ の property により, 此の suite de fonctions は $\mathfrak{D}$ を如何に小にとるも famille normale をつくることが出来ない. 夫故上の suite de fonctions は uniform であってはならない. 尚 $\zeta', \zeta'', \ldots$ についても同様でなければならない. 之は ζ が $R^{(-1)}$ の point critique singulier でない限り不可能である. $\mathcal{L}$ に対する assumption により $\zeta = a$ でなければならない. C. Q. F. D.

19. Points critiques singuliers.

$R(z)$ の itérées の Réseau の vertices の内 point critique ordinaire に correspond するものと point critique singulier に correspond するものとは根本的に異なった性質をもつ. 前者は iteration の ordre を如何程ましても, ある一定の angle より sharp にならないに反し, 後者は iteration の ordre をますとともに如何程でも sharp になる. R の itérées の全体に関し z-plane に於て後者の l'ensemble を考へ, 之を E_s とする.

E_s は其の definition よりして transformations

$$[z \mid R(z)] \qquad \text{及び} \qquad [z \mid R^{(-1)}(z)]$$

に関して不変である. 更に上にのべた性質よりして transformations

$$[z \mid A(z)] \qquad \text{及び} \qquad [z \mid A^{(-1)}(z)]$$

に関して不変である.

$z = f(t)$ なる relation により t-plane に E_s の image をつくり, 之を $\mathcal{E}_s$ としよう. ($\mathcal{E}_s$ の様な Menge が存在しないことは後に明となる). $\mathcal{E}_s$ は transformations $[t \mid s^{\pm 1} t]$, $[t \mid s'^{\pm 1} t]$ に関して不変である.

然るに

$$R^{(i)}(z) = A^{(j)}(z)$$

をみたす pair of integers (i, j) は $(0, 0)$ 以外あり得ないから $s^i = s'^j$ をみたす pair of integers についても其の通りである. 夫故 $\log s$ の 1 つを α, $\log s'$ の 1 つを β とすれば, α, β, $2\pi i$ は independent である[14]. 夫故 pair of integers (i, j, k) を適当に選べば $\varepsilon > 0$ を如何に小にあとふるも

$$0 < |i\alpha + j\beta + k \cdot 2\pi i| < \varepsilon$$

ならしめることが出来る. i.e. $s^i s'^j \neq 1$ を如何程でも 1 に接近せしめうる. 依て $\mathcal{E}_s$ は isolated point をもたない. 故に E_s は $f(t)$ の exceptional

[14] 今三つの quantities α, β, γ をあたへたとき, $i\alpha + j\beta + k\gamma = 0$ をみたす pair of integers (i, j, k) が $(0, 0, 0)$ 以外になければ, α, β, γ は independent であると云ふ. (原 脚註)

value 以外に isolated point をもち得ない. 然るに $R^{(-1)}(z)$ の points critiques singuliers 自身は $R(z)$ の points invariables attractifs であるから, 明らかに E_s の isolated pts である. 夫故 $f(t)$ の exceptional values である. 然るに $f(t)$ の exceptional value の $R(z)$ に関する antécédents 及び conséquents はすべて $f(t)$ の exceptional values でなければならない. 夫故,

$R^{(-1)}(z)$ の points critiques singuliers と $f(t)$ の exceptional values とは一致する.

かつ $R^{(-1)}(z)$ の任意の point critique singulier の $R(z)$ に関する antécédents は自身以外にない[15].

IV. Points critiques ordinaires.

20. Cas spécial

此の章に於て $R(z)$ の itérées の réseau の vertices が其の $R^{(-1)}(z)$ の points critiques に位置するものを除いてすべて相等しいことを云はうと思ふ.

所で此のことは $R(z)$ と permutable で之に関して réduite な (従って permutable な) fonctions の ensemble が multiformity に関して上限を持たない場合には簡単に云ひ得る. 以下之を証明しよう.

先づ $R^{(-1)}(z)$ が pt. crit. sing. をもたないときを考へる. 今 multiformity がたえず increase して ∞ に tend する suite de fonctions indépendentes を $B_i(z)$ $(i = 1, 2, \dots)$ で表し, 之が n_i-valued であったとする. 其の $R^{(-1)}(z)$ の critical pts a_s に於ける analytic elements の最大の ordre を $\alpha_s^{(i)}$ としよう $(s = 1, 2, \dots, r)$. set of angles $\alpha_s^{(i)}$ $(s = 1, 2, \dots, r)$ の内無限回反覆せられるものを α_s $(s = 1, 2, \dots, r)$ としよう.

a_s に correspond する $R(z)$ の itérées の vertices の内 $R^{(-1)}(z)$ の critical pt. に位置せない any one の angle を $\dfrac{1}{\beta_s}2\pi$ とすれば

$$\beta_s = p\,\alpha_s, \qquad p\ :\ \text{pos. int.}$$

でなければならぬ. 故に $R^{(-1)}(z)$ の itérée の critical pts の数を考へ, 其の ordre ∞ty に於ける limit をとれば

$$\sum_{s=1}^{r} \frac{\alpha_s - 1}{\alpha_s} \leqq 2.$$

[15] 尚 E_s の点は $A(z)$ 又は $A^{(-1)}(z)$ で transform しても変らない. $\therefore$ $R^{(-1)}$ の singular critical pts の $A(z)$ の conséquents 及び antécédents はすべて $R^{(-1)}$ の singular critical pt. である.

一方同じことを fonctions indépendentes の集りに於てなせば

$$\sum_{s=1}^{r} \frac{\alpha_s - 1}{\alpha_s} \geqq 2.$$

故に共に等号をとらなければならぬ. 之は p's がことごとく 1 のときに限る.

$R^{(-1)}(z)$ が 1 つの point critique singulier を有するときも全く同様にして証明し得られる. $R^{(-1)}(z)$ が 2 つの point critique singulier をもてば, もはや夫以外に point critique をもたない. 之ですべての場合をつくした. C. Q. F. D.

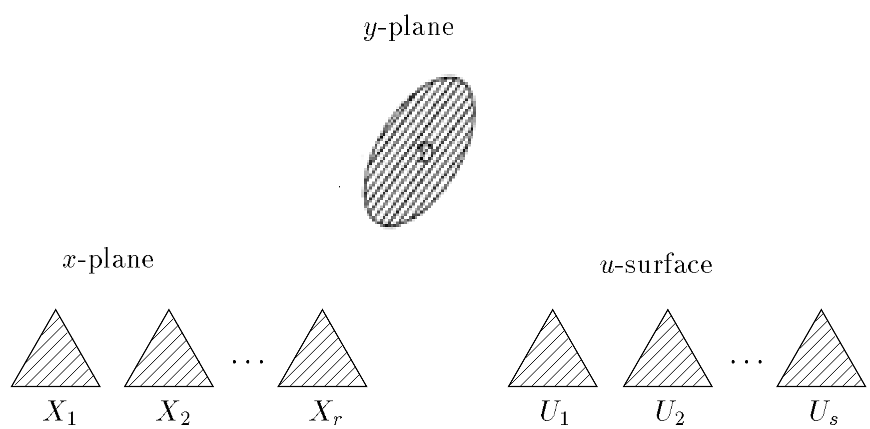
21. Correspondance entre deux réseaux.

前節の研究により我々は今後 $R(z)$ と permutable でかつ之に関して réduite な algebraic function の multiplicities は上限 N をもつと考へることが出来る.

$x=f(t)$, $y=f(s^i s'^j t)$ によって define せられる x の algebraic function y を fonction principale と云はう.

$R^{(-1)}(z)$ の critical pts の性質により $R^{(2)}(z)$ の Réseau について, 其の corresponding vertices に於ける angles が $R^{(-1)}(z)$ の critical pts を除いてすべて等しいことが云へるならば $R(z)$ の any iterate についても同じことが云へる. 夫故今後 $R^{(2)}(z)$ を改めて $R(z)$ と考へよう.

扨て $y=R^{(i)}(z)$ の réseau と fonction principale réduite $y=B(u)$ の réseau との correspondance を見よう.



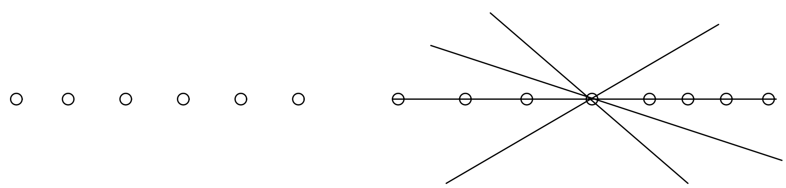
y-plane に於ける $R^{(-1)}(y)$ のすべての critical pts を smooth でかつ double pt をもたない closed curve でむすび, y-plane を two parts に分ち, 其の一つを domain $\mathfrak{D}$ とする. $\mathfrak{D}$ に correspond する x-plane の polygons を $X_1, X_2, \ldots, X_{\ell i}$ とし, $B(u)$ の Riemann surface の polygons

を $U_1, U_2, \ldots, U_m$ とする．今 u-surface の任意の一つの polygon を U_1 とし，fonction principale compsée により $(U, \mathfrak{D})$ に correspond する x-plane のすべての polygons を考へ，之を $X_1, X_2, \ldots, X_r$ とする．之を U_1 に correspond する Système de polygones と呼び，U_1 を其の Polygone déterminatif と呼ばう．同様に X_1 を Polygone déterminatif とする Système de polygones $U_1, U_2, \ldots, U_s$ を考へることが出来る．

Polygone déterminatif U_1 の一つの vertex が $R^{(-1)}$ の critical pt. に位置しないときは，之に correspond する Système de polygones $X_1, X_2, \ldots,$ X_r の corresponding vertices は $R^{(-1)}$ の critical pt. に在るものを除いてすべて same angle で，上の polygone déterminatif の vertex の angle に等しい．u-surface に於ける Système de polygones についても同様である．此の property から $R(z)$ の Réseau の similarity を云はん爲には Système de polygones に関する諸数をよく見なければならぬ．

1 つの Système de polygones S をとる．先づ S に含まれる polygon の数が考へられる．

Polygones déterminatifs　　　Système de polygones


S

次に S に correspond する polygones déterminatifs の数が考へられる．最后に S の 1 つの polygon を含む Système de polygones の数が考へられる．

之等の数は analytic continuation によって明らかなるが如く，二つの réseau とそのいずれに S があるかと云ふことにのみ depend する．勿論 S にも depend しないが，便宜上之等を夫々 S に関する 1st, 2nd and 3rd indices と呼ばう．

S に関する 2nd index と 3rd index との積は S と異なる surface に於ける Système de polygones に関する 1st index である．

$B(u)$ を n-valante とすれば nr, s は夫々 fonction principale composée の x, u の degrees である．

次に $R^{(i)}(x)$ の réseau を $x' = R^{(-1)}(x)$ を以て transform し x'-plane と u-surface との関係に於て X_1 の一つの polygone transformé $X_1'(R(X_1') = X_1)$ を polygone déterminatif とする système de polygones $U_1', U_2', \ldots, U_s'$ を考へよう．明らかに此の système de polygones は前の Système de polygones の内に含まれる．之を Système rèduit de polygones と呼ばう．

之は X_1 及び X_1' に depend する. 尚 $s \geqq s' \geqq \dfrac{s}{\ell}$ である.

u-surface の system についても $B(u)$ が fonction réduite であるから全く同じことが云へる.

22. Cos spécial.

前節の Système de polygones に関して特別の場合を考へよう. 既に前章に於て知れるが如く, Polygone déterminatif の 1 つの Vertex が $R^{(-1)}$ の point critique singulier でなければ之に応ずる Système de polygones の corresponding vertices についても, 1 つも point critique singulier に位置するものがない. 更に point critique ordinaire に於ける fonctions principales の algebraic elements の ordre は $R^{(-1)}(z)$ によって定められる上限をもつことは此の章の始めに於て見た. 夫故 fonctions permutables réduites の multiformités が上限 N をもつことから Polygone déterminatif の $R^{(-1)}$ の point critique singulier に位置しない vertex に correspond する Système de polygones の vertices の内, $R^{(-1)}$ の point critique に位置するものの数は上限をもつ. これを ω としよう.

今 x-réseau に於て一つの Système de polygones $S(x)$ を考へ, 其の 1st, 2nd & 3rd indices を夫々 r, p, q としよう. 更に u-Réseau に於ける Système de polygones の 1st index を s としよう.

今若し

$$(a) \qquad p > \omega$$

ならば $S(x)$ の中にある corresponding vertices は其の $R^{(-1)}$ の point critique にあるものを除いて Same angle である.

更に若し

$$(b) \qquad r > \ell\,\omega$$

ならば $S(x)$ の any polygone déterminatif の $R^{(-1)}(z)$ による transformées の集りを考ふれば, 其の corresponding vertices の angles はすべて等しい. 但し $R^{(-1)}$ の points critiques に位置するものは除く. 残る所は只 u-réseau には r $B(u)$ を何ととっても常に $R^{(-1)}$ の任意の point critique に位置する vertex があると云ふことを云へばよい. 之は $R^{(-i)}\cdot B(u)$ の critical pts は u-réseau の vertex 以外にないことと, i を充分大にすれば $R^{(-i)}\cdot B(u)$ の critical pts は $R^{(-1)}$ の critical pts と一致することとから明らかである.

次に condition (a) を変形しよう. 先づ $p \cdot q = s$ である. 更に $q < (\ell^i)^{\ell^i}$ である. 故に condition (a) は次の condition (c) を以ておきかえてよい

$$(c) \qquad s < \omega (\ell^i)^{\ell^i}$$

23. Existence du cas précédents.

次に前節の conditions (b), (c) をみたす如き pair of functions $R^{(i)}(x)$ 及び $B(u)$ の存在を云はう.

先づ principal function を其の degrees が共に如何程でも大きくなる様に撰びうることを証明しよう.

$$y = A_1(x),\ y = A_2(x),\ \ldots\ldots$$

を suite infinie de fonctions principales とし, 其の degrees を夫々

$$(\overset{m_1}{x}, \overset{n_1}{y}),\ (\overset{m_2}{x}, \overset{n_2}{y}),\ \ldots\ldots$$

とし $m_i \geqq n_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ とする. $y = A_i(x)$ が $x = f(t)$, $y = f(s_i t)$ で define せられたとするとき, s_i を $A_1(x)$ の multiplicateur と云ふ. 更に上の suite が multiplicateur について regularly に 1 に converge するとしよう. 今 n_i が上限 n_0 をもつとする. 之が不可能であることを云へばよい.

扨て $y = A_1(x)$ について見るに $f(t_0) = 0$, $t_0 \neq 0$ とすれば $f(s^i t_0) = 0$ であるから $f(s_1 s^i t_0) = A_1(0)$ は i の如何に関せず高々 n_0 個の点しか表はさない. 故に $f(s_1 s^i t_0)$ $i = 0, 1, \ldots, n_0$ の内には必ず相等しい点がある. 此の点は $R(z)$ の ordre が n_0 をこえない invariant cycle に属し, 従って或る定まった points の 1 つである. $y = A_2(x)$, $y = A_3(x)$, $\ldots$ についても同様である. しかも

$$s_1 s^i t_0,\ s_2 s^i t_0,\ s_3 s^i t_0,\ \ldots$$

はすべてことなった点であって, しかも点 $s^i t_0$ に converge する. かかる無限個の点に於て $f(t)$ が有限個の値をとることは不可能である. C. Q. F. D.

次に第 10 節に於てのべた fonction réduite を更に明らかに見よう. $C(z)$ を任意の principal function としよう. suite de fonctions principales $R^{(j)} \cdot C(z)$ $(j$: integer) を n_i-valente とするとき

$$\cdots\ n_{-2} \geqq n_{-1} \geqq n_0 \geqq n_1 \geqq n_2 \cdots$$

であるのみならず $n_j = n_{j+1}$ ならば, 夫から右方はたへず等号である. 従って $n_j > n_{j+1}$ ならば夫から左方はたへず不等号である. すべてが等号或は不等号ではあり得ないから, 必ず境目の数がある. 今 j_0 を $n_{j_0} = n_{j_0+1}$ なる最小の数としよう. このとき principal function $R^{(j_0)} \cdot C(z)$ を $R(z)$ に関して proprement réduite であると云はう.

さて $M > 1$ を如何に大きくあたへても其の degrees が共に MN より大なる fonction principale を考へることが出来る. 此の fonction を

$x = R^{(-i)} \cdot B(u)$ としよう．ここに $B(u)$ は $R(z)$ に関して proprement réduite であって，i は pos. integer である．i が pos. integer であることは fonctions réduites の集りが multiformité に於て上限 N をもつとの assumption から明らかである．

さて $R^{(i)}(x)=y,\ y=B(u)$ に於て x-réseau, u-réseau に於ける Système de polygones の 1st index を夫々 r_i, s_i とする．

$$r_i > M, \qquad s_i > M$$

である．

$R^{(j)}(x)=y,\ y=B(u)$ $j = i, i-1, \ldots, 0$ に於ける同様のものを r_j, s_j とすれば

$$r_i > r_{i-1} > \cdots > r_1 > r_0 = 1$$
$$s_i \leqq s_{i+1} \leqq \cdots \leqq s_1 \leqq s_0$$

である．M を充分大にとれば conditions (b), (c) をみたす r_j, s_j が上の suites 中にあること明らかである：

(b) $$r_j > \ell\,\omega$$

(c) $$s_j > \omega\,(\ell^j)^{\ell j}$$

依て次の結論が得られる．

$R(z)$ の any iterate の réseau に於て corresponding vertices は其の $R^{(-1)}$ の critical pts に位置するものを除いてすべて same angle である．

24.　Similarités des réseaux.

我々が上に $R(z), A(z)$ を以て表はす fns は，第 7 節に與へた $R(z)$, $A(z)$ を以て表はせば $R^{(i)}(z)$, $A^{(j)} \cdot R(z)$, $(i, j$: pos. integer or zero$)$ である．次に始めの $R(z)$, $A(z)$ について其の réseaux を見よう．

先づ $R(z)$ の itérées の réseaux を見るに，明らかに其の polygons は similair である．但し E_R に於ける vertices を除く．

次に réseaux $R^{(h)}(x)=y,\ A(x)=y$ を見るに，$u=u_0$ を任意の polygon U_0 の E_R の点でない vertex とすれば，h を充分大にすれば U_0 に correspond する Système de polygones の u_0 に correspond する vertices の内には E_R に位置しないものが必ずあるから，u_0 の angle は夫等の相等しい angle に等しい．$R(z)$ の itérée と permutable な $A(z)$ の itérée についても同様である．

$A^{(\pm 1)}(z)$ の itérées の内 $R(z)$ の任意の itérée と permutable なものの réseau は similair な polygons をもつ．但し E_R の点は例外である．

V. Fonctions de Poincaré.

25. Réseau de la fonction de Poincaré.

第16節に於て define した Poincaré の function $f(t)$ について見よう. 此の function は第7節に与へた $R(z), A(z)$ に関して multiplication-theorems をもつ[16].

$$\begin{array}{lll} f(st) = R^{(i)} \cdot f(t) & |\,s\,| > 1 & i : \text{pos. int.} \\ f(s't) = A^{(j)} \cdot f(t) & |s'| > 1 & j : \text{pos. int.} \end{array}$$

此の $f(t)$ の Réseau を見るに当って $t=0$ が $R^{(-1)}$ の itérées の point critique の集り E_R の点であるときと, 然らざるときとに区別する.

1° $t=0$ が E_R の点でないとき.
$f(t)$ の Réseau は同種類の vertex に於て同じ angle をもつ. $f(t)$ の polygon が pt. at infinity に tend することあらば, 此の部分に correspond する $f(t)$ の limiting value は必ず $f(t)$ の exceptional value である.

今 E_R の点を $a_1, a_2, \ldots, a_r$ とし, $R(z)$ の itérées の réseaux の集りに於て, 之に correspond する vertex の最小の angle を $\dfrac{\pi}{\alpha_i}$ としよう. α_i を a_i の ordre と云はう. 明らかに

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i} = 2.$$

$\therefore$ 次の六つの場合のみ生ずる.

$I.$	$r = 4;$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 2$ のとき
$II.$	$r = 3;$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = \infty$ のとき
$III.$	$r = 3;$	$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 6$ のとき
$IV.$	$r = 3;$	$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = \alpha_3 = 4$ のとき
$V.$	$r = 3;$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 3$ のとき
$VI.$	$r = 2;$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \infty$ のとき

2° $t = 0$ が E_R の pt なるとき.
このときは0は invariable でかつ ordinaire である. 其の ordre を α とすれば $f(t)$ の Réseau は $t=0$ を除いて $f(t)$ と同じ property をもつ. $t=0$ に於ける angle は此の際 π であって $\dfrac{\pi}{\alpha}$ ではない.

26. Existences des fonctions ayant les réseaux précédents.

[16] 但し $f(0)$ を 0 ならしめるため R, A が夫々 non-singular linear fn. L によって $L^{-1}RL,\ L^{-1}AL$ の形に modify せられて居るかも知れない.

若し $\varphi(t)$ と云ふ uniform な function があって, 其の Réseau の angle, 其の vertices に correspond する点及び其の valeur assymptotique に関して $f(t)$ と全く同様の property をもつならば, $f(t)=\varphi(at+b)$ の形であること明瞭である. ここに a, b は constants である.

先づ上の 1° の場合から始める.

1°　　の場合には

$$t=\int_0^u \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}}$$

の inverse function を $u=\varphi(t)$ と採ればよい.

　　の場合には, $x=1$, $x=1$, $x=\infty$ を夫々$y=a_1$, $y=a_2$, $y=a_3$ に transform する non singular linear function を $y=L(x)$ とすれば

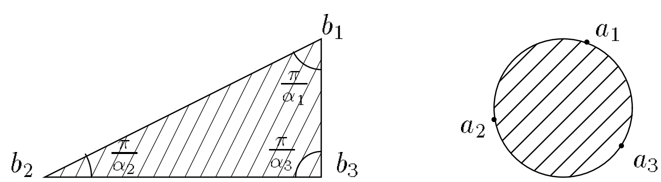
$$L(\cos t)=\varphi(t)$$

ととればよい.

　　,　,　の場合にはいずれも

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}=1$$

である. 故に今 angle が夫々$\dfrac{\pi}{\alpha_1}$, $\dfrac{\pi}{\alpha_2}$, $\dfrac{\pi}{\alpha_3}$ である様な Triangle



b_1, b_2, b_3 を考へることが出来る. 今 a_1, a_2, a_3 を通る circle を考へると, 此の circle 内又は circle 外の domain を Triangle 内の domain に transform し, かつ a_1, a_2, a_3 を夫々 b_1, b_2, b_3 に transform する conformal representation の function が存在する. 此の inverse function を $u=\varphi(t)$ とすれば求むるものである.

VI の場合には, $x=0$, $x=\infty$ を夫々 $y=a_1$, $y=a_2$ に transform する non-singular linear transformation を $y=L(x)$ とすれば $L(e^t)=\varphi(t)$ とすればよい.

2°　$\varphi(t)$ に於て vertex b が angle $\dfrac{2\pi}{\alpha}$ であるとしよう. t-plane に linear transfomation をほどこすことにより, 此の vertex が 0 にあると見てよい. 之を $\varphi_1(t)$ としよう. 然るときは　の場合には $\varphi(t)$ が

$$L[\varphi_1(t)]=\mathcal{P}[L_1(t)].$$

ここに L, L_1 は各々 non-singular linear function, $\mathcal{P}$ は Weierstrass の $\mathcal{P}$-function の形であることから, 他の場合には $\varphi_1(t)$ がすべて conformal representation により define せられた function であることから $\varphi_1(t^{\frac{1}{\alpha}})$ は uniform な function である.

故に

$$f(t) = \varphi_1(at^{\frac{1}{\alpha}}).$$

27. Disscussion sur théorèmes de multiplication.

次に上の形の $f(t)$ がはたして

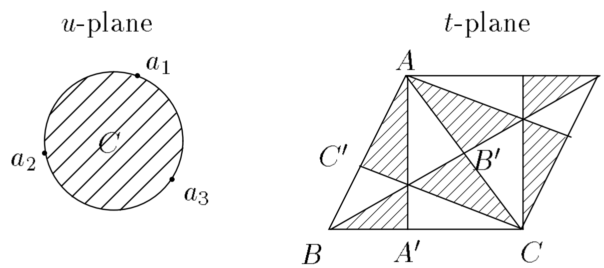
$$f(s_1 t) = R_1 f(t), \qquad |s_1| > 1$$
$$f(s_2 t) = A_1 f(t), \qquad |s_2| > 1$$

の形の multiplication-theorem をもつか否かを吟味しなければならぬ. ここに R_1 は non-linear rational fn. であって, A_1 は R_1 と independent な algebraic fn. である.

所が $f(t)$ が上の形の multiplication-theorem をもつならば, $f(t^{\frac{1}{\alpha}})$ は (若し夫が uniform ならば) 必ず上の形の multiplication-theorems をもつ. $\therefore$ 1° の場合のみについて吟味すればよい.

最も複雑な場合の例として Case を取って云へば, 他は自ら明らかであらう.

の場合 $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 6$ のとき.



1° の場合を考へる. u-plane に於て a_1, a_2, a_3 を通る circle 内の domain C を考へ, $u = f(t)$ により之に correspond する t-plane の polygons を見る.

今 D を a_2 に correspond する vertex とすれば, D を頂点とする 6 つの polygons がよって D を中心とする正三角形 A, B, C をつくる. 其の辺の中心を夫々 A', B', C' とする.

今 Vectors

$$\begin{aligned} B'C' &= \omega_{11}, & C'A' &= \omega_{12} \\ A\,D &= \omega_{21}, & B\,D &= \omega_{22} \\ B\,C &= \omega_{31}, & C\,A &= \omega_{32} \end{aligned}$$

を考へ, B 点の affix を t_0 として, 次の 3 組の pts を考へる：

$$\begin{aligned} x &= m_1\omega_{11} + m_2\omega_{12} + t_0 \\ y &= m_1\omega_{21} + m_2\omega_{22} + t_0 \\ z &= m_1\omega_{31} + m_2\omega_{32} + t_0. \end{aligned}$$

ここに m_1, m_2 は any integers である. set of pts x は C に応ずる polygons が 2 又は其の整数倍だけあつまった vertex の集りである. set of pts y は 3 について同様のものを示す. set of pts z は C に応ずる polygons が 6 個あつまった vertices の集りである.

今 s を 1 より大な any positive integer とすれば elliptic fns $f(st), f(t)$ は same period をもつから

$$f(st) = A[f(t)]$$

なる algebraic fn. A がある.

更に set of pts sx, sy, sz がすべて set of pts x, y, z に含まるるならば, A は rational function である. 此の爲には pt. st_0 が set of pts z に含まるればよい. 式にかけば

$$(s-1)t_0 = m_1\,\omega_{31} + m_2\,\omega_{32}$$

である. 同様に s' を他の any pos. int. とすれば, 第二の condition

$$(s'-1)t_0 = m'_1\,\omega_{31} + m'_2\,\omega_{32}$$

が得られる. t_0 が之を同時にみたす爲には

$$(s'-1) = m(s-1), \quad (m : \text{pos. int.})$$

であればよい. か様な set of integers

$$s,\ s',\ \ldots$$

の内に於て $s^i = s'^j$ $(i, j :$ pos. ints$)$ をみたさないものはいくらでもある.

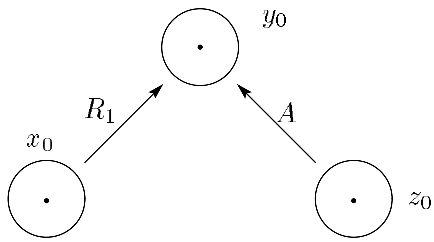
Conclusion.

algebraic fn. $A(z)$ が non-linear rational function $R(z)$ と permutable かつ independent ならば, i, j を pos. integers とするとき

$$f(st) = R^{(i)} f(t)$$
$$f(s't) = A^{(j)} f(t)$$

なる multiplication-theorem をもつ fonction de Poincaré $f(t)$ が存在する. 此の $f(t)$ は第 26 節にあげた 6 つの types のいずれかでなければならぬ. かつ之等の types のいずれの内にも上の conditions をみたす function が存在する.

[断片　その一]



か様に対応せしめられた平面内に一対の相応ずる点 x_0, y_0, z_0 を考へる. 此の時之等の点より出ずる相対応する éléments de ligne を假想して單一性の欠はれることを避けよう.

之等の点の内何れか 1 つが集合 E_s の点でなければ E_s の不変性からすべてが E_s の点でない. このとき $R_1(z)$ の iteration の ordre を充分大にすれば $y=A(z)$ 上の点 (y_0, z_0) を何ととっても x_0 として E_c 外の点を取ることが出来る. 所で：

x_0 が E_c の点でなければ centre を y_0 とする éléments analytiques (y_0, x_0), (y_0, z_0) の ordre を夫々α_{x_0}, α_{z_0} とすれば

$$\alpha_{x_0} = p\,\alpha_{z_0}, \qquad p \ \text{正の整数} \tag{4}$$

である.

特に z_0 も亦 E_c 外の点ならば

$$\alpha_{x_0} = \alpha_{z_0}. \tag{5}$$

2°　Systèmes de points Z, X.

上の三平面間の関係を今少しく精密に見よう. 函数 $z(x, y)$ によって点 (x_0, y_0) に応ずるすべての点をとり, 之を

$$Z_0 : \quad z_0, z_1, \ldots, z_{\zeta-1}$$

とする. かかるものを主体として考察するため, かかるものを Systèmes de points Z と名づけよう. 尚今後点 y_0 はたえず固定して考へる. 依て x_0 を Z_0 に応ずる point déterminatif と呼ばう. 更に Z_0 内の点及びその point déterminatif については, y_0 に於ける angle π に応ずる angle を単に其の点に於ける angle とよばう. (5) に依て：

Système Z_0 に応ずる point déterminatif x_0 が E_c の点でなければ Z_0 の点及びその points déterminatifs の中, E_c の点でないものはすべて等角である.

次に Système Z に屬する二三の数を考へよう. 先づ ζ は Z に屬する数である. 之を Système Z の 1^{er} index と云はう. 次に y_0 を固定したとき Système Z_0 に応ずる points déterminatifs の数を ζ_1 とする. 此の数 ζ_1 は prolongement analytique によって明らかなるが如く, y_0 及び z_0 に無関係である. 之を Système Z の 2^{me} index と云はう. 次に y_0 を固定したとき一点 z_0 を含む Système Z の数を ζ_2 としやう. 此の ζ_2 も亦 y_0 及び z_0 に無関係である. 之を Système Z の 3^{me} index と云はう.

x-plane に於て同様にして Systèmes de points X を考ふれば, 上と全く同様の性質をもつ. 其の 1^{er}, 2^{me}, 3^{me} index をそれぞれ ξ_1, ξ_2, ξ_3 としよう.

之等の index の間に次の関係がある

$$\zeta_1\zeta_2 = \xi\,,$$
$$\xi_1\xi_2 = \zeta\,.$$

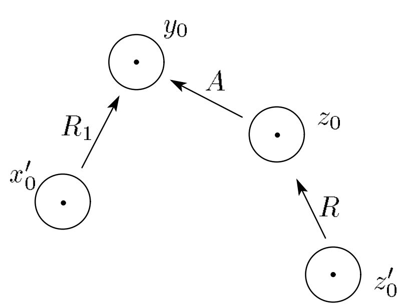
尚 $A(x)$ の multiformité を n とし $z = R_1\cdot A^{(-1)}(x)$ の degrès を $(\overset{m_1}{x}, \overset{n_1}{y})$ とすれば

$$m_1 = n\xi\,,$$
$$n_1 = \zeta\,.$$

3° Systèmes réduits.

z-plan を $z' = R^{(-1)}(z)$ により z'-plan に移す. $A\cdot R(z)$ によって表はさるる函数の内 $R(z)$ と permutable なものは $R\cdot A(z)$ 以外にあり得ないから, 三平面 x, y, z 間の関係と同じ性質をもつとの條件のもとに, 三平面 x, y, z' 間の関係は確定する. 此のとき x-plan に於て (z_0, y_0) に対し Système de points X_0 が応じたとし (z'_0, y_0) に対し Système de points X'_0 が応じたとして, 其の間の関係を見よう. 但し z'_0 は z_0 の $R(z)$ に関する 1 つの antécédent immédiat である.

先づ z'_0 は $R\cdot A(z'_0) = y_0$ をみたさなければならぬ. 故に X_0 を定めたとき, 一般に z_0 の任意の antécédent immédiat ではあり得ないことを注意しよう.



今 X'_0 の一点を x'_0 とする. 然るときは $z' = A_0(x)$ とすれば $z'_0 = A_0(x'_0)$ である. 依て $z = R(z'_0)$, $x = x'_0$ は $z = R\cdot A_0(x)$ をみたす. 然るに假定により $A_0(x)$ は $R(x)$ と permutable であるから

$R\cdot A_0(x)$ も亦 permutable である. 之は $z=R\cdot A_0(x)$ が z-plan と x-plan との間の関係式であることを示す. 故に x_0' は X_0 の点である. 依て：

X_0' は X_0 に含まれる.

Système X_0' を $R(z)$ に関する Système X_0 の 1 つの Système rèduite であると云ふ.

特に $A(z)$ が $R(z)$ に関する fonction réduite である場合を見よう.

先づ z_0' は z_0 の任意の antécédent immédiat と取ってよい. 次に Système réduit X' の 1^{er} index を ξ' として ξ との関係を見よう. 此の爲 z-plan, z'-plan にある (x_0, y_0) に応ずる Systèmes de points Z_0, Z_0' を比較しよう.

上と全く同様に Z_0' の一点を z_0' とすれば $R(z_0')$ は Z_0 の点である. 故に Z_0' は Z_0 の antécédents immédiats からなる.

今 Z_0' 中に $R(z_0')$ の antécédents immédiats が c 個あったとする. prolongement analytique によって明らかなるが如く, 此の c は $x_0, y_0, R(z_0')$ に無関係である. 故に Z_0' の 1^{er} index を ζ' とすれば

$$\zeta' = c\,\zeta.$$

更に $z' = R_1\cdot A^{(-1)}\cdot R^{(-1)}(x)$ の degrè を $(\overset{m_2}{x}, \overset{n_2}{z'})$ とすれば $R\cdot A(z)$ の multiformité は假定により n であるから

$$m_2 = n\xi'$$
$$n_2 = \zeta'\ .$$

然るに

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1}{n_1}\ \frac{1}{\ell}$$
$$\therefore\quad \xi' = \xi\ \frac{c}{\ell}$$

を得る. 即ち ξ' は $\dfrac{\xi}{\ell}$ より小さくならない.

17. Vertex ordinaires.

函数 $R(z)$ に関して permutable かつ réduite な代数函数を $B(z)$ とし, 其の multiformité を n とする. かかる函数の集合に於て n が limité のときと然らざるときとに区分しよう.

1°　n の集合が limité でない場合.

此のとき事態は簡單である. 今 E_R の points ordinaires を

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r$$

とし, 点 a_i, $i=1,2,\dots,r$ に於て $B(z)$ のもつ éléments analytiques の ordres の内, 最大のものを α_i とする.

さて前節の 1° に於ける三平面 x, y, z を relations

$$R_1(x)=y, \quad B^{(-1)}(z)=y$$

によって対応せしむれば $B(z)$ は réduite であるから, 平面 x, z の間の relation は只一種しか存在し得ない. 故に x_0 を a_i に応ずる任意の点とし $R_1^{(-1)}(y)$ の éléments analytique (a_i, x_0) の ordre を β とすれば x_0 が E_c の点でない限り

$$(4') \qquad \beta = p\,\alpha_i \qquad i=1,2,\dots,r; \qquad p \text{ 正の整数}$$

なる関係が成立する. 尚 a_j に応ずる x-plan の点の内, E_c に位置するものの数は (m-ple point を m 個と数へて) iteration の ordre と j とに無関係な上限 ω をもつ.

式 $(4')$ によって函数 $B(z)$ の集合に於て上の paires de ordres maximums $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ を考ふれば, 之は唯有限個の variétés をもつ. 故に $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ をもつ fonctions réduites の集合に於て multiformités が上限をもたぬと考へることが出来る. 之等の函数及び其の multiformités を矢張り $B(z)$ 及び n を以て代表せしめよう.

扨て E_c の point singuliers は $R(z)$ の itérées の集合に関する valeurs exceptionnelles と一致する. 故に 2 個の点を越えない. 以下其の数によって区別しよう.

先づ E_c が point singulier を持たない場合を考へる. 式 $(4')$ によって $R_1^{(-1)}(y)$ の points critiques の数を計算すれば次の不等式を得る. 但し $R_1(y)$ の degré を ℓ_1 とする.

$$\sum_{i=1}^{r}(\ell_1-\omega)\frac{\alpha_i-1}{\alpha_i} \leqq 2(\ell_1-1).$$

此處に於て iteration の ordre を ∞ に tendre せしむることが出来る

$$\therefore \qquad \sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i-1}{\alpha_i} \leqq 2$$

一方 $B(y)$ の points critiques の数を計算すれば

$$\sum_{i=1}^{r} n\frac{\alpha_i-1}{\alpha_i} \geqq 2(n-1)$$

此處に於て n を ∞ に tendre せしむることが出来る

$$\therefore \qquad \sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i} \geqq 2.$$

$$\therefore \qquad \sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i} = 2$$

でなければならぬ．之は $(4')$ に於ける p's がすべて 1 でなければ不可能である．

次に E_c が唯 1 つの point singulier を持つ場合に於ては $R_1^{(-1)}(y)$ は其の点に於て $(\ell_1 - 1)$ 個の points critiques を持つから, 前の場合と全く同様にして

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i} = 1$$

を得る．此の式は此の場合に於て $(4')$ に於ける $p's$ がすべて 1 であることを示す．

最后に E_c が 2 つの points singuliers を持つとすれば E_c の点は之以外にない．故に：

n の集合が上限を持たない場合には $R(z)$ の itérée の集合に於て同種類の vertex ordinaire は等角である．但し E_c に位置するものを除く．

2°　n の集合が上限をもつ場合

此の場合には三平面 x, y, z を考へ, 次の関係式によって結ぶ

$$y = R_1(x),$$
$$y = B(z).$$

此處に $R_1(x)$ は $R(x)$ の itérée であり $B(z)$ は $R(z)$ に関して permutable et réduite な fonction algébrique である．plans x, z の relation としては $R(z)$ と permutable なものをとる．か様に結ばれた三平面に関して一対の Systèmes de points (X, Z) を考へる．

集合 E_s の不変性よりして Paire de systèmes (X, Z) は E_s の点のみよりなるか E_s の点が 1 つもないか何れかである．

X の点の内集合 E_c の points ordinaires に位置するものの数を考ふれば (勿論 m 重点を m 個と数へて) かかる数の集合は上限 ω_1 をもつ．次に Z について同じ数を考へる．所で函数 $B(z)$ の集合に於て其の surface de Riemann の枚数は假定によって上限をもつ．かつ vertex の angle は E_s に於けるものを除いて下限をもつこと 前節の式 (4) によって明らかであ

る. 依てかかる数の集合も亦上限 ω_2 をもつ. ω_1, ω_2 の大なる方をとり ω とする.

扨て (X, Z) を固定して考へよう. 今

$$z = a$$

を E_c の任意の point ordinaire とし $z = a$, $y = y_0$ に応ずる Système を

$$X_0 \ : \ x_0, \ x_1, \ \ldots, \ x_{\xi-1}$$

とする. 更に $z' = R^{(-1)}(z)$ とし

$$z' = a'$$

を $R(z)$ に関する a の任意の antécédent immédiat とすれば, $y = B(z)$ は fonction réduite であるから, $z' = a'$, $y = y_0$ に応ずる Système de points を考へることが出来る. 之を

$$X_0' \ : \ x_0, \ x_1, \ \ldots, \ x_{\xi'-1}$$

としよう. X_0' は上に示した如く X_0 の点よりなる.

先づ (X, Z) に次の條件を假定する：

$$(C_1) \qquad \xi_1 > \omega$$

然るときは X_0 に応ずる points déterminatifs の内には E_c に位置しないものが必ずある. 故に X_0 の点は E_c に位置するものを除いて同じ角を持つ.

更に次の條件を假定する：

$$(C_2) \qquad \xi > \ell\,\omega$$

ここに ℓ は $R(z)$ の degré である. 然るときは X_0 は E_c に位置しない点を必ず持つ. かかる点の angle を α とする. 更に $\xi' \geqq \dfrac{\xi}{\ell}$ であるから X_0' も亦 E_c に位置しない点を持つ. 其の angle は勿論 α である. 故に X_0' の points déterminatif a' が若し E_c の点でなければ其の angle は α である. 故に：

(X, Z) の集合の内に conditions (C_1), (C_2) をみたすものがあれば $R(z)$ の同種類の vertex ordinaire は等角である. 但し E_c に位置するものを除く.

次に condition (C_1) を変形しよう. 先づ

$$\xi_1 \, \xi_2 = \zeta$$

である．更に x-plan の一点 x_0 を含む Systèmes de points の数が ξ_2 であって, かかる Systèmes は此の際 $y=R_1(x)$ であるとすれば必ず $R_1(z)$ に関する点 $R_1(x_0)$ の antécédents immédiats のみよりなるから $R_1(x)$ の degrè を ℓ_1 とすれば

$$\xi_2 < \ell_1^{\xi}$$

である．故に (C_1) に代ふるに次の條件を以てすれば充分である．

$$(C_3) \qquad \zeta > \ell_1^{\xi}\omega$$

3° Condiotions (C_2), (C_3) をみたす (X, Z) の存在.

$R(z)$ が点 z_0 に於て代数函数 $A(z)$ と permutable et indépendante であるとすれば, 此の点に於ける $R(z)$ に関する fonction de Poincaré $f(t)$ は次の形の théorèmes de multiplication を持つことを見た：

$$\begin{aligned} f(s\,t) &= R[f(t)], \\ f(s't) &= A[f(t)]. \end{aligned}$$

更に (p, q) を $(0, 0)$ と異なる整数の一対とすれば, 点 $s^p s'^q$ の集合は決して 1 を含まず, かつ 1 を point limit として持つことを見た．故に上の集合より régulièrement に 1 に converger する次の suite de points を撰ぶことが出来る：

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_i,\ \ldots.$$

ここに於て

$$x = f(t), \qquad y = f(s^i t)$$

によって決定せらるる函数を $y=A_i(x)$ とし, 其の degrès を $(\overset{m_i}{x}, \overset{n_i}{y})$ とする．上の suite を適当に撰んで

$$m_i \geqq n_i, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

ならしめることが出来る．ここに於て n_i が上限 n_0 を持つと假定しよう．扨て $f(t)$ は $R(z)$ が non-linéaire なるため $t=\infty$ に於て point singulier essentiel を持つ．故に次の如き点 t_0 が存在する：

$$f(t_0) = z_0, \qquad t_0 \neq 0.$$

然るときは正の整数 i を如何にとるも

$$\begin{aligned} f(s^i t_0) &= z_0, \\ f(s_1 s^i t_0) &= A_1(z_0). \end{aligned}$$

即ち $s_1 s^i t_0,\ i=1,2,\ldots$ に於て $f(t)$ の取る値は n_0 個を越えない．故に t-plan に points

$$s_1 t_0,\ s s_1 t_0,\ \ldots,\ s^{n_0} s_1 t_0.$$

を考ふれば $z=f(t)$ なる relation によって之に応ずる z-plan の n_0+1 個の points の内, 相異なるものは n_0 を越えない．かつ之等の points の任意の二つは $R(z)$ の ordre が n_0 を越えない itérée によって結ばれて居る．故にかかる点の内には少なくとも 1 つ $R(z)$ のか様な itérée の point invariable がある． s_1 の代りに $s_2, s_3, \ldots$ を取っても同様である． 所で Suite de points

$$s_1 s^i t_0,\ s_2 s^i t_0,\ s_3 s^i t_0,\ \ldots$$

の点はすべて相異なり, しかも régulièrement に $s^i t_0$ に converger する．依て $f(t)$ は points

$$t_0,\ s t_0,\ \ldots,\ s^{n_0} t_0$$

のあるものを limites とする無限個の点に於て只有限個の値を取らなければならぬ．之は不可能である．故に：

正の数 M を如何に大きくあたふるも, Suite de fonctions

$$A_1(x),\ A_2(x),\ \ldots$$

の内には其の multiformité 及び其の inverse の multiformité が同時に M を越えるものがある．

扨て M に 1 つの固定した値を與へたとき, 之に応じて上の條件をみたす上の suite の fonction の 1 つを $A_0(z)$ とする． 之は勿論 $R(z)$ と permutable である．依て $R(z)$ に関して $A_0(z)$ より作った fonction proprement réduite を考へることが出来る．之を $B_0(z)$ とすれば

$$\begin{aligned} & A_0(z) = R^{(i)} \cdot B_0(z) \\ \text{or} \qquad & A_0(z) = B_0 \cdot R^{(-i)}(z). \end{aligned}$$

ここに i は 0 又は正の整数である．所で此の際 $R(z)$ に関して permutable et réduite な fonctions の集合は multiformité に於て上限をもつから, M を其の上限より大に撰べば決して前者ではあり得ない．

$$\therefore \qquad A_0(z) = B_0 \cdot R^{(-i)}(z) \qquad i\ :\ \text{fixé}$$

次に 3 plans x, y, z を relations

$$y = R^{(i)}(x)$$
$$y = B_0(z)$$

で結び, 之に応ずる Systèmes X, Z の 1^{er} indices を夫々$\xi^{(i)}$, $\zeta^{(i)}$ とする. $B_0(z)$ の multiformité はある一定数を越えないから

$$\xi^{(i)} > M_0, \qquad \zeta^{(i)} > M_0$$

に於て M_0 は如何程でも大きく撰びうる正数である.

$$\begin{aligned} &y = R^{(j)}(x) \qquad j = i, i-1, \ldots, 0 \\ &y = B_0(z) \end{aligned}$$

に於ける同様のものを $\xi^{(j)}, \zeta^{(j)}$ とすれば

$$\begin{aligned} &\xi^{(i)} > \xi^{(i-1)} > \cdots > \xi^{(1)} > \xi^{(0)} = 1 \\ &\zeta^{(i)} \leq \zeta^{(i-1)} \leq \cdots \leq \zeta^{(1)} \leq \zeta^{(0)} \end{aligned}$$

が得られる. 前者が等号を取らないのは $B_0(z)$ が $R(z)$ に関して proprement réduite である爲である. 依て M_0 を充分大きく取れば次の conditions をみたす $\xi^{(j)}, \zeta^{(j)}$ が上の suites 中に存在する

$$\begin{aligned} &\xi^{(j)} > \ell\ \omega \\ &\zeta^{(j)} > \ell^{\,j\xi^{(j)}} \cdot \omega \end{aligned}$$

之は conditions (C_2), (C_3) に外ならない.

所で此の $2^\circ, 3^\circ$ に於ける証明法は $R(z)$ を其の任意の itérée を以ておき換へることを許容する. 之と 1° に於ける結論とによって：

$R(z)$ の itérées の集合に於て E_c に位置しない同種類の vertex ordinaires はすべて等角である.

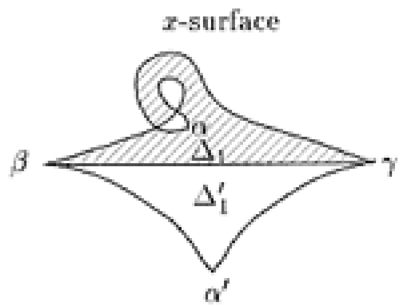
然るに前節の式 (5) と此の式に関する注意とによって上の性質を $R(z)$ と permutable な代数函数の集合に迄拡張することが出来る. 故に

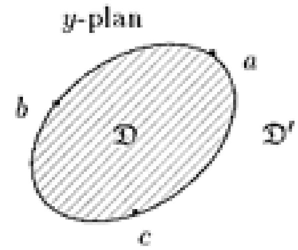
IX　non-linéaire な有理函数 $R(z)$ が一点に於てある代数函数と permutable et indépendante ならば, $R(z)$ と permutable な代数函数の集合に於て E_c に位置しない同種類の vertex ordinaires はすべて等角である.

[断片　その二]

Introduction

1. Réseaux des fonctions algébriques.





$y = A(x)$ を algébraic function とする. $A^{(-1)}(y)$ のすべての points critiques (図の a, b, c) を courbe férmée C で連ねよう. 但し C は各点に於て只一本の tg. を持つと考へよう. C によって分たれた二つの domaines を $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ とする. $\mathfrak{D}$ に応ずる surface de Riemann x の domaines を $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ とし, $\mathfrak{D}'$ に応ずるものを $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots$ とする. 之等の domaines は何れも Simplemen t connexであって, 其の frontière の各点は, 若し其の上に $A(x)$ の point critique が無ければ $A^{(-1)}(y)$ の points critiques に応ずる点 (図の α, β, γ) を除いて surface de Riemann 上に於て只一本の tg. をもち, forme polygonale を呈する. 依て之等の domaines を $A(x)$ の polygones と云ひ, $A^{(-1)}(y)$ の points critiques に応ずる点を vertices と云はう. Surface de Riemann x は之等の polygones によって完全に分割せられる. か様に分割せられた x-surface を $A(x)$ の Réseau と呼ばう. 尚同じ point critique に応ずる vertices を同一種類であると云はう.

特に $A(x)$ が rational であるときには其の polygones は何れも一葉であって x-plane を完全に分割する.

2. Théorème de MM. Julia et Ritt.

上の言葉によって MM. Julia et Ritt の定理を云ひ表はせば次の如くなる：

non-linéaires な fonctions rationnelles $R_1(z), R_2(z)$ が permutables かつ indépendantes ならば $R_1(z)$ の itérées の réseaux の集合に於て

1°　Points critiques の集合は有限である.

2°　同一種類の vertices は same angle である. 但し points critiques の集合に於けるものは例外である.

之が MM. Julia et Ritt によって述べられたと同じことを意味することは, 第五章に於て述べんとするが如く, 上の $1^\circ, 2^\circ$ の性質を持つ fn. rationelle

の itérée によって définir せらるる fonctions de Poincaré は其の valeurs exceptionnelles 以外に逆函数の points critiques transcendants を持ち得ないことから明らかである.

3. Généralisation.

自分は此の定理を次の形に証明した

I. $R_1^{(-1)}(z)$ の itérées に関する points critiques の集合と $R_2^{(-1)}(z)$ に関する夫とは identiques である. 之を E_c を以て表はす. 之等の集合の構造から E_c の内には次の形の方程式をみたす点 z_0 が必ずある

$$R_1^{(i)}(z) = R_2^{(j)}(z)$$

ここに $R_1^{(i)}(z)$, $R_2^{(j)}(z)$ は $R_1(z)$, $R_2(z)$ の夫々 ordre i, j の itérée を表はす. 故に

$$z_0,\ R_1(z_0),\ R_1^{(2)}(z_0),\ \ldots$$

はすべて上の方程式の根である. $R_1(z)$ と $R_2(z)$ とは indépendantes であるから, 上の suite de points は有限である. 夫故 E_c は有限である.

次に $R_1(z)$ の itérées の réseaux の集合に於て同種の vertices の angles が下限を持つものと持たぬものとに区別し, 前者を vertices ordinaires 後者を vertices singuliers と云ふ.

II. Vertices singuliers の集合を E_s を以て表はす. R_1 のある itérée と R_2 の夫とは共通な point invariable répulsif を持つこと明らかである. 其の点に於ける共通な fonction de Poincaré を $f(z)$ とする. $z{=}f(t)$ なる rélation によって z-plan に於ける E_s の t-plan に於ける image を考へ, 之を $\mathcal{E}_s$ とする. $\mathcal{E}_s$ の transformaion に対する不変性は $\mathcal{E}_s$ が point isolé を持たないことを示す. 然るに之は $\mathcal{E}_s$ の definition から不可能である. 夫故 $\mathcal{E}_s$ に屬する点は一点もない. 云ひ換へると $\mathcal{E}_s$ は $f(t)$ の valeurs exceptionnelles よりなる.

III. 正の整数 i, j を如何に採っても

$$R_1^{(i)}(x) = R_2^{(j)}(y)$$

によって définir せられる function の内には R_1 と permutable なものが必ずあって, 其の points critiques 及び逆函数の夫がすべて E_c に含まれることが容易に知り得られる. 此の性質を基本として $R_1^{(i)}(x)$, $R_2^{(j)}(y)$ の réseaux の対応関係を少しく精密に観察することにより, vertices ordinaires は E_c に位置するものを除きすべて等角であることを知る.

上の証明の主要点は始めに與へた函数が二つとも rationnelles であることを必要としない. かくて我々は次の定理を得る：

Fonction algébrique $A(z)$ と fonction rationnelles non-linéaire $R(z)$ とが permutables かつ indépendantes ならば, $R(z)$ と permutables な fonctions の résuaux の集合に於て

1° points critiaues の集合は有限である.
2° 同種の vertices は上の集合に於けるものを除き等角である.

此の定理の証明が以下に述べんと欲する所のものである.

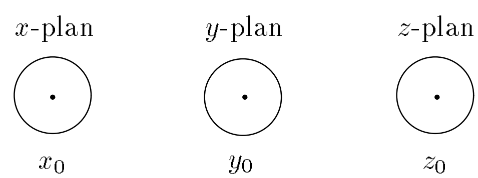
I. Elémentaires sur les fonctions algébriques composées[17].

二つの代数函数を合成して得る函数は明らかに代数函数である. 逆に任意の代数函数は常に二つの代数函数の合成函数と考へられる. 此の際二つの代数函数を定め其の合成の順序を定めても尚合成函数として数個の fonctions algébriques を得ることあるは人のよく知る所である.

始めの二つの代数函数を $y = A_1(x)$, $z = A_2(y)$ とするとき fonctions composées を $z=A_2[A_1(x)]$ 或は簡単に $A_2 \cdot A_1(x)$ を以て表はさう.

Foncions initiales と fonctions composées との間に於ける簡単な二三の基礎的関係を明らかにするのが此の章の目的である.

4. Fonctions algébriques composées.



先づ fonction composée を定義しなければならぬ. $A_1(x)=y$ 上の点を (x_0, y_0) とすれば有限個の points singuliers を除いて x-plan の点 x_0 のまわりと y-plan の点 y_0 のまわりとは biunivoque な対応関係を持つ. しかも有限個の points singuliers を除いて, 対応関係は只一種である. か様な点をしばらく point ordinaire と呼ばう.

(x_0, y_0) を $A_1(x)=y$ 上の point ordinaire とし, (y_0, z_0) を $A_2(y)=z$ 上の point ordinaire とすれば, x-plan の点 x_0 のまわりと z-plan の点 z_0 のまわりとは y-plan の点 y_0 のまわりとの関係を仲介として只一種の対応関係をもつ. 点 x を variable indépendante と考ふれば, かくの如くして只一つの élément analytique が定まる. かかる éléments analytiques

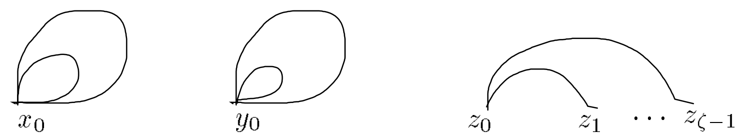
[17] uniformisierung の fn. をとり, かつ証明法を統一した方がよいと思ふ.

によって定めらるる fonctions analytiques を fonctions composées と呼ばう.

Fonction composée は一方の, 例へば第一の対応関係 (x_0, y_0) の採り方を許容すること明らかである. 之が代数函数であることも亦明らかである.

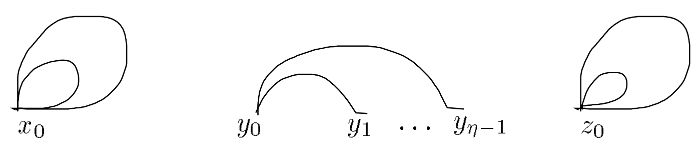
上の (x_0, y_0, z_0) によって定めらるる fonction composée を $A_3(x)$ とし其の multiformité を見よう. 之が爲には point initial x_0 から出発して prolongement analytique を実行すればよい. 先ず prolongement analytique を許容する二つの数を與へよう.

1°



$A_1(x)=y$ の surface de Riemann 上に於て点 (x_0, y_0) より出でて, 再び此の点に帰る途を描く時, z は之に対応して z_0 より出づる途を描く. か様な途の端点がすべてで ζ 個あったとする. surface de Riemann 上の点はすべて連結されて居るから, prolongement analytique によって明らかなるが如く, 此の数 ζ は $A_1(x)=y$ の面上に於て有限個の points exceptionnels を除いて一定である. 勿論点 (x_0, y_0) が此の意味に於ける point exceptionnel でないと考へてのことである. 此の ζ を Surface de Riemann (x, y) 上に於ける位置の fonction z の multiformité と云はう. 尚此の fonction を簡單の爲 $z(x, y)$ 或は $z(y, x)$ を以て表はさう. ζ は $A_2(y)$ の multiformité に等しいか, 或は之より小である. 特に $A_2(y)$ の points critiques が一つも $A_1^{(-1)}(y)$ の points critiques と一致しなければ ζ は $A_2(y)$ の multiformité に等しい.

2°



$A_3(x)=z$ 上の点 (x_0, z_0) を起点として此の surface 上に prolongement analytique を行った際, 之に対応する y_0 を起点とする途が η 個の端点をもったとする. 此の η は前の ζ と全く同様に Riemann 面上に於て一定の数である. 但し此の面上に於て有限個の例外の点をもつこと, 及び点 (x_0, z_0) 自身がかかる例外の点であってはならないこと勿論である. η を fonction $y(z, x)$ の multiformité と呼ばう.

扨て $A_1(z), A_2(z), A_3(z)$ の multiformité を夫々 n_1, n_2, n_3 とすれば，次の égalité を得る

$$n_3 = \frac{n_1 \zeta}{\eta}. \tag{1}$$

Fonctions composées が数個ある際には此の式に於ける n_3, ζ, η は同一系統に屬するものを採らなければならないこと云ふ迄もない．

$\zeta < n_2$ となるとき dégénération de la 1[er] espèce が起ると云ひ，$\eta > 1$ となるとき dégénération de la 2[ème] espèce が起ると云はう．第一種の還元が起らなければ Fonction composée は必ず只一つである．

(1) 式を言葉を以て云ひ表はせば次の如くなる．fonctions $y(x)$ と $z(x)$ との multiformités の比は fonctions $y(z, x)$ と $z(x, y)$ との夫に等しい．然るに points initials x_0, y_0, z_0 のまわりに於ける 3 つの correspondances initials は全く対稱である．依てか様な形の式が總計 3 つ得られる．即ち $A_1(x) = y, A_2(y) = z, A_3(x) = z$ の degrèes を夫々 $(\overset{m_1}{x}, \overset{n_1}{y}), (\overset{m_2}{y}, \overset{n_2}{z}), (\overset{m_3}{x}, \overset{n_3}{z})$ とし，fonction $x(y, z)$ の multiformité を ξ とすれば

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{\zeta}{\eta}, \qquad \frac{m_1}{n_2} = \frac{\xi}{\zeta}, \qquad \frac{m_2}{m_3} = \frac{\eta}{\xi}\,.$$

之により degrès の間の関係式 (2) をうる．

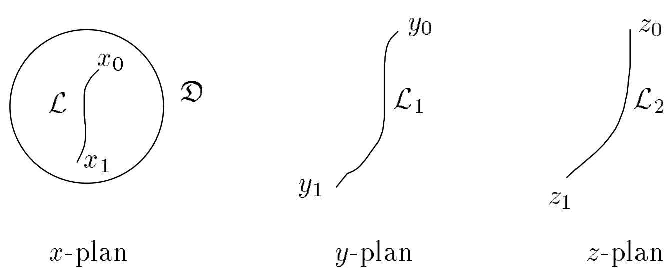
$$\frac{m_3}{n_3} = \frac{m_1}{n_1}\,\frac{m_2}{n_2}\,. \tag{2}$$

5. Relation entre les nombres de points critiques.

前節に於ては x-plan 全体に於て prolongement analytique を行ひ，式 (1) を得た．x-plan に於て point initial x_0 のまわりに一葉よりなる domaine $\mathfrak{D}$ をとり prolongement analytique を其の内に制限したときも尚同様の結果を得る． 即ち此のとき (1) 式の数 n_1, n_3, η, ζ に相当する数を夫々 $n'_1, n'_3, \eta', \zeta'$ とすれば，之等は何れも有限個の点を除いて $\mathfrak{D}$ 内に於ける prolongement analytique を許容し，從って次の関係をもつ

$$n'_3 = \frac{n'_1 \zeta'}{\eta'} \tag{1'}$$

扨て pts initials x_0, y_0, z_0 より出ずる相対応する三つの途 $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ をとり，其の端点を夫々 x_1, y_1, z_1 とする．



x-plan　　y-plan　　z-plan

次に x_1 のまわりに simplement connexe かつ一葉よりなる domaine fermé $\mathfrak{D}$ を描く. $\mathcal{L}$ は $\mathfrak{D}$ 内にあると考へて支障ない.

此の節に於て以下 points x_1, y_1, z_1 とよぶときは夫々より出ずる途 $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ を合せ考へよう. 單一性に於て欠くることを恐れるからである.

$\mathfrak{D}$ を充分小さくとれば n_1 は点 x_1 のまわりと点 y_1 のまわりとの correspondance によって決定せられる $A_1(x)$ の élément analytique の multiformité, 云ひ換ふれば ordre を表す. n_3' は $A_3(x)$ の élément (x_1, z_1) の夫である. Surface de Riemann (z, x) 上の pt. (z_1, x_1) のまわりと y-plan の pt. y_1 のまわりとの correspondance を, 前者を variable indépendante と考ふるとき fonction $y(z, x)$ の élément analytique と云ひ, 其の multiformité η' を其の ordre と云はう. Surface de Riemann 上の位置の fonction について一般にかく呼ばう. 然るときは ζ' は pt. (x_1, y_1) のまわりと pt. z_1 のまわりとの対応関係によって定めらるる $z(x, y)$ の élément analytique の ordre である.

Fonction algébrique の élément analytique は其の ordre が 1 より大なるか, 1 に等しいかに從ひ algébrique 或は ordinaire と云はれる. élément analytique の ordre より 1 を減じたものを代数函数のすべての éléments analytiques に汎って取った somme を nombre de points critiques と云ふ. Surface de Riemann 上の位置の関数についても全く同様の名稱を用ひよう.

扨て $(1')$ を変形して次の如くする.

$$\eta'(n_3' - 1) + (\eta' - 1) = \zeta'(n_1' - 1) + (\zeta' - 1)$$

pairs de points (x_0, y_0, z_0) の全体についてかかる式をつくるとき直ちに $0=0$ とならないものは有限個にすぎない. 其の全体を辺々相加ふれば

$$\eta N_3 + N_y = \zeta N_1 + N_z$$

となる. ここに N_1, N_3, N_y, N_z は夫々 fonctions $A_1(x)$, $A_3(x)$, $y(z, x)$, $z(x, y)$ の nombre de points critiques である. 更に $y = A_1(x)$, $z = A_3(x)$ の genre を夫々 p_z, p_y とすれば (1) 式を考慮に入れることにより, 次の式 (3) をうる.

$$2\eta(p_y - 1) + N_y = 2\zeta(p_z - 1) + N_z. \tag{3}$$

最后に ordres の間の関係式 $(1')$ に於て $A_1^{(-1)}(y)$ の element (y_1, x_1) の ordre を m_1', $A_2(y)$ の element (y_1, z_1) の ordre を n_2' とし m_1' と n_2' との最大公約数を r とすれば

$$\zeta' = \frac{n_2'}{r}$$

であることに注意しよう.

II. Ensemble de points critiques.

此の章に於ては二次以上の有理函数と代数函数とが permutables かつ indépendantes ならば, 其の fonction rationnelle と permutable な fonctions algébriques の集合に於て points critiques の集合は有限であることを云はふと思ふ.

6. Définitions et propriétés préliminaires.

Fonctions $R(z), A(z)$ を夫々 rationnelle et algébrique とする

Fonctions composées

$R(x)=y,\ A(y)=z$ なる relations を composer する際には第二種の還元は決して起らない. 我々は第一種の還元が起らなければ fonction composée は只一つである事を知って居る. 此の際には更に第一種の還元が起れば fonctions composées は只一つでない事が得られる.

$A(x)=y,\ R(y)=z$ なる relations を composer するときには第一種の還元は決して起らない. 故に $R\cdot A(x)$ は常に只一つの fonctions analytique を意味する.

Permutabilité

$A\cdot R(z)$ なる形の fonctions の内に fonction $R\cdot A(z)$ と等しいものがあるとき $A(z)$ と $R(z)$ とは permutable であると云ふ.

$A(z)$ が $R(z)$ の itérée $R^{(i)}(z)$ と permutable ならば, $A(z)$, $A^{(-1)}(z)$, $R\cdot A(z)$ は何れも $R^{(i)}(z)$ の任意の itérée と permutable である.

Fonctions réduites

$R(z)$ と $A(z)$ とから fonction composée をつくる際どちらの順に対しても還元が起らなければ $A(z)$ は $R(z)$ に関して réduite であると云ふ.

$A(z)$ が $R(z)$ と permutable ならば, 一方の順に composer する際還元が起らなければ他方に関しても決して起らない. $A(z)$ が $R(z)$ と permutable かつ réduite であるとき, 次の二つのことが云ひ得られる.

1° $A\cdot R^{(2)}(z)$ で表はされる任意の一つの fonction を $A_1(z)$ とすれば $A\cdot R(z)$ は只一つの fonction を表はし, $R\cdot A(z)$ と等しいから

$$A_1(z) = A\cdot R^{(2)}(z) = R\cdot A\cdot R(z).$$

然るに $R\cdot A\cdot R(z)$ は只一つの fonction を表はす. 故に $A\cdot R^{(2)}(z)$ で表はされる fonction は只一つしかない. 夫故 $R^{(2)}(x)=y,\ A(y)=z$ を composer する際還元は起り得ない. $R^{(3)}(z)$ 以下についても同様である. 故に $A(z)$

が $R(z)$ に関して permutable かつ réduite ならば, $R(z)$ の任意の itérée に関しても réduite である.

2° $A(z)$ の ordre i の itérées $A^{(i)}(z)$ の任意の一つを $A_1(z)$ とすれば

$$R \cdot A_1(z) = A_j \cdot R(z)$$

をみたす fn. $A_j(z)$ は $A^{(i)}(z)$ 中に 1 つ只 1 つ存在する. 次に $A_1 {\cdot} R(z)$ によって表はされる任意の 1 つの fn. をとった際

$$A_1 \cdot R(z) = R \cdot A_k(z)$$

をみたす fonction $A_k(z)$ も亦必ず $A^{(i)}(z)$ 中に存在する. 之が只 1 つとは, 今直ぐには云へない.

今 $A_1{\cdot}R{=}R{\cdot}A_2$ をみたす $A^{(i)}(z)$ 中の一つの fonction を A_2 とする. 次に $A_2{\cdot}R{=}R{\cdot}A_3$ をみたす $A^{(i)}(z)$ 中の一つの fonction を A_3 とする. か様にして $A_1, A_2, A_3, \ldots$ を得たとする. 之を反覆すれば遂には同じ fonction が現はれなければならない. 然るに上に見た如く, 此の process の逆は unique に fonction を定めるから, 最初に現はれる同じ fonction は常に A_1 でなければならない. か様にして得る 1 つの cycle de fonctions を

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_s$$

とする. 然るときは $A_1, A_s, A_{s-1}, \ldots, A_2$ は順位をも含めて A_1 にのみ dépendre する. 特に A_2 は確定する. 云ひ換ふれば $A_1 \cdot R(z)$ は只一つの fonction を表はす. 依て $A_1(z)$ と $R(z)$ とから fonctions composées をつくる際, 第一種の還元は起り得ない. $A_2(z)$ 以下の fonctions についても同様である. 夫故 $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_s(z)$ の multiformités を夫々 $n_1, n_2, \ldots, n_s$ とすれば

$$n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots \leqq n_s$$

を得る. 然るに $n_s \leqq n_1$ であるからすべて等号をとらねばならぬ. 故に $A_1(z)$ は $R(z)$ に関して réduite であるから $R(z)$ の任意の itérée に関しても同様である. 次に $R^{(s)} {\cdot} A_1(z) = A_1 \cdot R^{(s)}(z)$ をうる. 即ち $A_1(z)$ は $R^{(s)}(z)$ と permutable である. 依て：

$A(z)$ が $R(z)$ に関して permutable かつ réduite ならば $A(z)$ の任意の itérée は $R(z)$ の任意の itérée に関して réduite であり, $R(z)$ の適当な itérée と permutable である.

Fonctions proprement réduite

$A(z)$ を $R(z)$ と permutable とし, 更に $R(z)$ を non-linéaire とするとき, 次の suite infinie de foncitons

$$\ldots\ A{\cdot}R^{(-1)}(z),\ A(z),\ R{\cdot}A(z),\ R^{(2)}{\cdot}A(z),\ \ldots$$

を考へよう. か様な suite は只 1 つしかない. かつ其の任意の fonction は $R(z)$ と permutable である. 今其の multiformités を表はす suite を

$$\dots\ n_{-2},\ n_{-1},\ n,\ n_1,\ n_2,\ \dots$$

とすれば

$$n_i \ \geqq\ n_{i+1} \qquad (i : \text{entire})$$

である. すべてが不等号をとることは明らかに不可能. 更に $R(z)$ が non-linéaire であるから composition に関する次数の間の関係式により, i を $-\infty$ に tendre すれば n も ∞ に tendre する. 依てすべてが等号をとることも不可能である. 然るに上の propriété 1° により, ある所で等号をとれば夫より右方はすべて等号をとることを知る. 依て等号と不等号とは截然と二つに区分せられる.

今 n_{i_0} を $n_{i_0} = n_{i_0+1}$ をみたす最小の整数とするとき $R^{(i_0)}\!\cdot\! A(z)$ (quand $i_0 \geq 0$) 或は $A\cdot R^{(i_0)}(z)$ (quand $i_0 < 0$) を $R(z)$ に関して proprement réduite であると云ふ.

10.[18] Classification de l'ensemble de points critiques E_R.

E_R が fini であるときに之を分類しよう．このとき E_R は次の性質をもつこと明らかである：

1° $R^{(-1)}(z)$ のある ordre 以上の itérées はいずれも E_R を points critiques として持つ.

2° E_R は R の cycles invariables とかかる E_R の点の antécédents とよりなる.

依て $R(z)$ の適当な itérée $R^{(i)}(z)$ は次の性質をもつ.

1° $R^{(-i)}(z)$ は E_R をすべて points critiques としてもつ.

2° E_R は $R^{(i)}$ に関して points invariables か, 又はかかる E_R の点の antécédents immédiats か何れかである.

か様な性質を有する $R(z)$ の itérée をとることを簡単に E_R の structure を simplifier すると云はう.

$R(z)$ の二つの itérées $R^{(i)}(z)$, $R^{(j)}(z)$ $(j > i)$ によって E_R の構造が単純化されたとしよう．このとき E_R のある point が invariable であるか否かは, 之等の itérées に無関係である．何となれば此の分類は E_R のある点が $R(z)$ に関して cycles invariables に屬するか否かなる分類と一致するからである．更に E_R の点 b が

$$R^{(i)}(b) = a, \qquad a \neq b$$

であったとしよう．然るときは a は $R^{(i)}(z)$, $R^{(j)}(z)$ に対して共に point invariable でなければならないから

$$R^{(j-i)}(a) = a$$

である.

$$\therefore \quad R^{(j)}(b) = a$$

故に E_R の構造の単純化は itération の ordre に無関係である.

E_R の点を其の構造を単純化する itérée $R^{(i)}(z)$ によって分類しよう. E_R の点を $R^{(i)}(z)$ の points invariables であるか否かによって invariable と variable とに分つ．更に E_R の point invariable a を採って, 点 a を点 a に移す $R^{(-i)}(z)$ の élément analytique が algébrique であるか否かによって二つに区分する．此の分類も亦 itération の ordre に無関係である．前者を singulier であると云ひ, E_R の然らざる点を ordinaire であると云はう.

[18]編注 7,8,9 は欠けている.

[断片　その三]

IV.　Vertex ordinaires

non-linéaire な有理函数 $R(z)$ が, ある代数函数と一点に於て permutable et indepéndante ならば $R(z)$ の itérées の集合に於て E_c に位しない同種類の vertex ordinaire はすべて等角であることを云はう.

16.　Correspondance entre trois plans.

1°　Correspondance entre x, y, z.

$R(z)$ を今まで考へ来つた通り non-linéaire な有理函数であって, 一点に於てある代数函数と permutable et indepéndante であるとする. 然るときは $R(z)$ に関する E_c は fini であって, $R(z)$ と permutable な代数函数の points critiques はすべて E_c に含まれる. 以下此の性質を敷衍しよう.

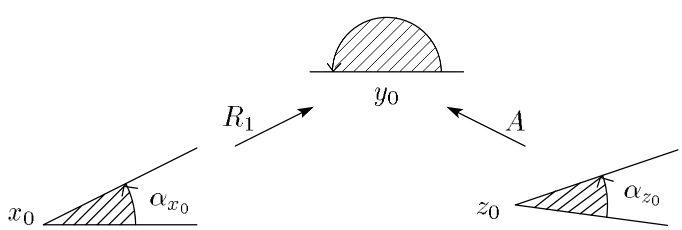
x, y, z 三平面の間に次の関係を持たしめる.

$$y = R_1(x), \qquad y = A(z)$$

ここに $A(x)$ は $R_1(x)$ と permutable な代数函数である. かくても尚 plans x, z の間の関係として一般に数個のものが存在する. 依て其の内 $R(z)$ と permutable なものを取ると約束しよう. か様な relation は

$$z = R_1 \cdot A^{(-1)}(x)$$

以外にあり得ない[19]から, 三平面の間の関係は始めの二つの関係式によって一意に定まる.



か様に対応せしめられた三平面 x, y, z 内に一対の相応ずる点 x_0, y_0, z_0 を考へる. 尚 y_0 のまわりの角 π に応ずる角を夫々$\alpha_{x_0}, \alpha_{z_0}$ とする.

[19] $A \cdot R(z) = A_0(z)$ が $R(z)$ と permutable ならば

$$R \cdot A_0 = A_0 \cdot R \quad \text{but} \quad R \cdot A_0 = R \cdot A \cdot R$$
$$\therefore \quad R \cdot A \cdot R = A_0 \cdot R \qquad \therefore \quad A_0 = R \cdot A.$$

若し x_0, z_0 が共に E_c の点でなければ

$$\alpha_{x_0} = \alpha_{z_0} \tag{4}$$

である. 尚 x_0 が E_c の点でないとの條件について考へよう.

之等の一対の点 x_0, y_0, z_0 の内何れか 1 つが集合 E_c の point singulier でなければ, すべて E_c の point singulier でない. 所で y_0 が E_c の point singulier でなければ, 其の R_1 に関する antécédents immédiats の内 E_c に位置するものの数を考ふれば (point multiple を multiplement に数へて) かかる数は $R(z)$ の itérées の集合に於て上限をもつこと明らかである. 故に y_0, z_0 を如何にとっても, R_1 の itération の ordre を充分大にとれば x_0 として必ず E_c 外の点を撰ぶことが出来る.

更にもし x_0 が E_c の点でさへなければ

$$\alpha_{x_0} \leqq \alpha_{z_0}$$

である. 故に：

$R(z)$ と permutable な代数函数の集合に於て, vertex ordinaires に於ける angles は下限をもつ.

2° Premier cas spésial.

特に $A^{(-1)}(y)$ が $R(z)$ に関して réduite ならば

$$z = A^{(-1)} \cdot R_1(x)$$

は只 1 つの fonction を意味する. 故に x_0, y_0, z_0 が一対の相応ずる点であるため x_0 のみたすべき條件は, 夫が y_0 に応ずる点であると云ふ以外にない. 故に (4) 式によって：

Premier cas spésial : $R(z)$ に関する permutables et réduites な函数の集合に於て E_c の何れの point ordinaire について見るも, 其の conséquents の内に E_c の点でないものがあるならば, $R(z)$ の itérées の集合に於て E_c に位置しない vertex ordinaire はすべて等角である.

3° Deuxième cas spésial.

一対の点 x_0, y_0, z_0 の内 z_0 として E_c の 1 つの point ordinaire を取らう. このとき paire de points y_0, z_0 に応ずる x-plan のすべての点をとり, 之を

$$X_0 \ : \ x_0, \ x_1, \ \ldots, \ x_{\xi-1}$$

とする. 但し m-ple points を m 個の点と考へる. 之等の点の数 ξ は屡々用ひ来ったが如く, Surface de Riemann 上の位置の fonction $x(y, z)$ の

multiformité である. 次に y-plan の点 y_0 とともに suite de points X_0 を定むる z-plan の点をすべてとり, 之を

$$z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{p-1}$$

とする. m-ple points を m points と考へること上の通りである.

今 $A(z)$ の multiformité を n とし, 上の suite de points 中 E_c に位置するものの数を nv とする. 更に X_0 中 E_c に位置するものの数を u とする. 然るときは pt. z_0 は E_c の point singulier でないから

$$u \leqq w, \qquad v \leqq w$$

を同時にみたす一定数 w が $R_1(x)$ 及び $A(z)$ と無関係に存在する.

今第一の假定として

$$p > nw$$

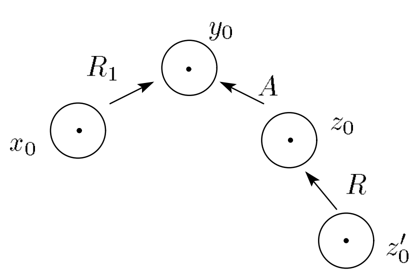
であったとしよう. 然るときは y_0 に於ける angle π を規準にとれば之に応ずる angles について：

Suite de points X_0 の点は其の E_c に位するものを除いて相等しい角をもつ.

かかる角が存在したとして之を α としよう.

次に $z' = R^{(-1)}(z)$ なる関係により z'-plan を考へる.

今 z_0' を $R(z)$ に関する z_0 の 1 つの antécédent immédiat とする. paire de points (y_0, z_0') に関して trois plans x, y, z' に於て上と同様の事を考へうるための condition nécessaire et suffisante は



$$R \cdot A(z_0') = y_0$$

である. 依て z_0' を任意の antécédent と考へうるため, 第二の假定を設け $A(z)$ は $R(z)$ に関して réduite であるとしよう.

さて x, y, z' 三平面をすべて $R(z)$ に関して permutable な relations によって結び $y=y_0$, $z'=z_0'$ に対応する x-plan の点の集りを考へ, 之を X_0' とする.

所で y_0 の $R_1(z)$ に関する antécédents immédiats の集りに於て一点 α をとるとき, α が X_0 の点なるための condition nécessaire et suffisante は α が次の equation をみたすことである：

$$z_0 = R_1 \cdot A^{(-1)}(\alpha).$$

同様に a が X'_0 の点なるための condition nécessaire et suffisante は a が次の equation をみたすことである.

$$z'_0 = R_1 \cdot A^{(-1)} \cdot R^{(-1)}(a).$$

然るに a が下の equation をみたすならば, 必ず上の equation をみたす. 故に Suite de points X'_0 は suite de points X_0 に含まれる.

今 Suite de points X'_0 を

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{\xi'-1}$$

としよう. ξ' と ξ との関係を見なければならぬ.

今 fonction $z(x,y)$ 及び $z'(x,y)$ の multiformités を夫々 ζ, ζ' とし $R(z)$ の degrè を ℓ とすれば Fonction composée の degrès の比を表はす式 (2) は次の如くなる

$$\frac{n\xi'}{\zeta'} = \frac{n\xi}{\zeta}\ \frac{1}{\ell}$$

所で明らかに $\zeta \leqq \zeta'$ であるから, 次の式をうる：

$$\frac{1}{\ell}\,\xi \leqq \xi' \leqq \xi.$$

此處に於て第三の假定を置かう：

$$\xi > \ell w.$$

然るときは X'_0 は必ず E_c 外の点を含む. 其の angles はすべて α である. 從って y-plan の y_0 のまわりの angle π に応じる z'_0 に於ける angle も亦 α でなければならぬ.

故に Paire de fonctions $R_1(z), A(z)$ の集合の内に假定 1,2,3 を同時にみたすものが存在するならば $R(z)$ の vertex ordinaires の内, E_c に位置しないものの angle はすべて α である.

次に第一の假定を変形しよう.

上の如く連結せられた 3 plans x, y, z 内に互に対応する途を描く. 点 x_0, y_0 を不変におく途によって suite de points X_0 と連結せらるる Suite de points の相異るものをすべてとり, 之を

$$X_0,\ X_1,\ \ldots,\ X_{q-1}$$

とする. (ここに X_1 と X_0 とが相異るとは X_1 中に X_0 にない点を含むことを意味する). 然るときは明らかに y_0 とともに X_1 を定むる点の数は矢張り p である

$$\therefore\quad p\,q = \zeta.$$

尚 $R_1(z)$ の degrè を ℓ_1 とすれば, 明らかに

$$q < \ell_1^{\xi}$$

依て第一の假定に代ふるに次の假定を以てすることが出来る

$$\zeta > nw\ \ell_1^{\xi}.$$

Deuxième cas spésial : $A(z)$ として fonction réduite をとったとき, 1° に述べたるが如く連結せられた一対の三平面 x, y, z の集合に於て

$$\xi > \ell w, \quad \zeta > nw\ \ell_1^{\xi}$$

を同時に充すものがあれば $R(z)$ の同種類の vertex ordinaires は E_c に位するものを除いて等角である.

17. Existence d'un de deux cas précédents.

$R(z)$ が point ordinaire z_0 に於て代数函数 $A_0(z)$ と permutable et indepéndante であるとすれば, 此の点に於ける $R(z)$ に関する fonction de Poincaré $f(t)$ は次の形の théorèmes de multiplication を持つことを見た

$$f(st) = R[f(t)],$$
$$f(s't) = A_0[f(t)].$$

更に (p, q) を $(0, 0)$ と異なる整数の一対とすれば, 点 $s^p s'^q$ の集合は決して 1 を含まず, かつ 1 を point limite として持つことを見た. 故に上の集合より régulièrement に 1 に converger する次の suite de points を撰ぶことが出来る.

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_k,\ \ldots$$

ここに於て

$$x = f(t), \qquad y = f(s_k t)$$

によって決定せらるる relations algébriques の degrès を $(\overset{m_k}{x}, \overset{n_k}{y})$ とすれば, 上の suite の limit が 1 であることから之を適当に撰ぶことにより

$$m_k \geqq n_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

であると考へて支障ない.

次に s_k を次の如く表はすことが出来る

$$s_k = s^{i_k} \cdot s'_k.$$

ここに i_k は整数であって s'_k は

$$x = f(t), \qquad y = f(s'_k t)$$

によって決定せらるる fonction $y(x)$ が $R(x)$ に関して proprement réduite である様なものである.

さて, か様な s'_k によって表はさるる点の集合は infini でなければならぬ. 故に必ず points limites をもつ. 其の 1 つを s'_0 とし, 之について二つの場合に分つて考へる.

1° $|s'_0| \neq \infty$ のとき.

集合 E_c の任意の point ordinaire を a とする. a は $f(t)$ の point exceptionnel ではあり得ない. かつ $R(z)$ は non-linéaire であるから $f(t)$ は point à l'infini に於て point singulier essentiel を持つ. 故に次の如き t_0 は必ずある.

$$f(t_0) = a, \qquad t_0 \neq 0$$

次の suite de points

$$s'_1 t_0,\ s'_2 t_0,\ \ldots$$

を考ふれば, 之は pt. $s'_0 t_0 \neq \infty$ を一つの point limite としてもつ無限個の点よりなる. 故に $f(t)$ が之等の点に於てとる値の内には E_c の点でないものが必ずある. 故に此の場合には Premier cas spécial が存在する.

2° $|s'_0| = \infty$ のとき.

このときには整数 i_k の集合は下限をもたない.

言葉を換へて云へば, 今 $R^{(i)}(z)$ を $R(z)$ のある itérée とし $A(z)$ を之と permutable な代数函数とする. 3 plans x, y, z を relations

$$y = R^{(i)}(x)$$
$$y = A(z)$$

によって前節に於て述べたが如く結び, ここに於ける fonctions $x(y,z)$, $z(x,y)$ の multiformité を夫々 ξ_i, ζ_i とし, 更に $A(z)$ の multiformité を n とする. 然るときはこの場合には $M > 0$ を如何に大きく與ふるも次の conditions を同時に充すものが必ずあることを示して居る：

(1°) $i > M$.

(2°) $A(z)$ は $R(z)$ に関して proprement réduite である.

(3°) $\zeta_i \geqq n\xi_i$.

依て

$$y = R^{(j)}(x) \qquad j = i, i-1, \ldots, 0$$
$$y = A(x)$$

に於ける multiformités を ξ_j, ζ_j とすれば

$$\xi_i > \xi_{i-1} > \cdots > \xi_1 > \xi_0 \equiv 1$$
$$\zeta_i \leqq \zeta_{i-1} \leqq \cdots \leqq \zeta_1 \leqq \zeta_0$$

が得られる. 前者が等号を取らないのは $A(z)$ が $R(z)$ に関して proprement réduite である為である.

此處に於て Deuxième cas spécial の存在を云ふ為には次の如き ξ_j の存在を云へば充分である.

$$\xi_j > \ell w, \quad \xi_i > w\ \ell^{j\xi_j}$$

之は ξ's に関する suite が等号をとらないことから i を充分大にすることにより必ず達せられる. 故に

$R(z)$ が non-linéaire であって point ordinaire に於てある代数函数と permutable et indépendante ならば, $R(z)$ の同種類の vertex ordinaire の内, E_c に位しないものはすべて等角である.

此の証明法は $R(z)$ を其の任意の itérée を以て置き換へることを許容する. 更に前節の式 (4) と此の式に関する注意とにより, 此の性質を $R(z)$ と permutable な代数函数に迄拡張することが出来る. 故に：

IX　non-linéaire な有理函数 $R(z)$ が point ordinaire に於てある代数函数と permutable et indépendante ならば, $R(z)$ と permutable な代数函数の集合に於て E_c に位しない同種の vertex ordinaire はすべて等角である.

18.　Conclusion.

以上の研究の結果を次の二つの定理にまとめることが出来る：

Théorème I.　代数函数 $A(z)$ が non-linéaire な有理函数 $R(z)$ と permutable ならば $A(z)$ の itérées 及び其の inverses の内には $R(z)$ のある itérée と identique なものがあるか, 然らずば suite de fonctions

$$A(z),\ R\cdot A(z),\ R^{(2)}\cdot A(z),\ \ldots$$

の内には $R(z)$ のある itérée と point ordinaire に於て permutable et indépendante なものがある.

Théorème II.　non-linéaire な有理函数 $R(z)$ がある代数函数と point ordinaire に於て permutable et indépendante ならば $R(z)$ と permutable な代数函数の集合に於て

1°　Points critiques の集合 E_c は fini である.

2°　E_c に位しない同種の vertex はすべて等角である.