

1次ではない

有理函数と可換な代数函数

---

岡 潔

# 目 次

---

序文. .... 1.

## 第 I 部

### 第 I 章 – はじめに.

1. 3 平面間の代数的関係のサイクル. .... 4.  
2. 有理函数と代数函数の間の可換性. .... 10.

### 第 II 章 – 危点.

3. 代数的サイクルの種数. .... 13.  
4. 危点の集合. .... 15.

### 第 III 章 – POINCARÉ 函数.

5. 集合  $E_c$  が有限のときの不動点の性質. .... 19.  
6. Poincaré 函数. .... 24.  
7. 独立性の条件の拡張. .... 26.

## 第 II 部

### 可換な函数族 $P_R$ .

8. 命名. .... 28.

### 第 IV 章 – 危点の集合 $E_c$ .

9. 危点の集合  $E_c$ . 独立性の条件についての注意. .... 29.

### 第 V 章 – 特異頂点の集合 $E_s$ .

10. — ..... 34.

第 VI 章 – 通常頂点における角.

11.	第 1 性質の意味. ....	35.
12.	特別な場合. ....	37.
13.	固有既縮な函数の乗数の集合. ....	41.
14.	結論. ....	43.

第 VII 章 – 乗法定理についての注意.

15.	集合 $E_c$ が有限の場合の $R(z)$ の不動点. ....	43.
16.	Poincaré 函数の危点. ....	45.
17.	乗法定理. ....	46.

## — 序 文 —

1°

有理函数の可換性に関する研究は Julia 氏<sup>1</sup>によって着手され、可換性の生じるすべての場合を尽くして Ritt 氏<sup>2</sup>によって完結された。

Julia 氏の研究で私が非常に面白いと思うのは、結果それ自身ではなく、その結果に導く論理の進め方である。

彼はこの研究の中で、或る性質に基づく或る点集合を考え、その集合の性質を調べることで元の問題についての議論を展開した。

もっと正確に言うと、彼は主題として、二つの可換で独立な 1 次ではない有理函数の一方のイテレーションに関する真性特異点よりなる完全集合  $E'$  を取り上げ、結論としてこの集合  $E'$  は、それが平面全体になる場合を除いて、円または円弧でしかないことを示した。

この方法は、私には革命的 (novatrice) なものと思える。もしそれがそうでないなら、以下に述べる代数函数への拡張など、私は試みなかったであろう。

2°

私の論文は二つの部と七つの章から成っており、その IV, V および VI 章が最も重要である。先ずこれらを説明しよう。

私はここで、与えられた 1 次でない有理函数と可換な代数函数の全体からなる函数族を考えた。その有理函数を  $R(z)$  と表し、その函数族を  $P_R$  と表す。族  $P_R$  に関して危点 (point critique) とその直接過去 (antécédent immédiat) の性質に注目した。危点の集合を  $E_c$  と表し、その直接過去を頂点 (vertex) という言葉で表した。

頂点の性質としてその「種」と「角」、すなわちその頂点が  $E_c$  のどの点に対応するかということと、 $E_c$  の点における角  $\pi$  に対応する頂点での角は幾らかということとを考えた。

以上が私の研究対象であるが、次に、族  $P_R$  に課されている条件を示さなければならない。私は  $R(z)$  のイテレーションによって定義される Poincaré 函数の各々に関して、その Poincaré 函数が原点で持つ乗法定理に関する乗数の集合を考えた。そしてその集合の少なくとも一つが無限の導集合を持つとき、族  $P_R$  をコンプレックスであると言い、そうでないと

<sup>1</sup>Gaston Julia : Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles; Annales de l'École Normale Supérieure, 1922.

<sup>2</sup>Ritt : Permutable rational functions; Transaction of American Mathematical Society, 1923.

きはそれをシンプルと言うこととした。そして、私は族  $P_R$  がコンプレックスであるときにその性質を研究した。

私は先ず  $E_c$  の構造として、それが有限であることを得た。

頂点は、それと同種の頂点の角が零より大きい下限を持つかどうかによって、通常頂点と特異頂点に分けるのが妥当である。

次いで私は、特異頂点よりなる集合  $E_s$  を考えた。集合  $E_c$  が有限のときの特異頂点の性質に着目して、集合  $E_s$  は函数  $R(z)$  のイテレーションの族に関する除外値の集合と一致することを得た。

この二つの結果、特に前者の意味から、最終的に同じ種の通常頂点は、 $E_c$  の点以外、すべて同じ角を持つことを得た。

コンプレックスな族  $P_R$  のこれらの性質が主要な結果である。

3°

第 I 部は 三つの代数的対応によって作られるサイクルの研究から始まる。私は代数的関係の種数の類似としてサイクルの種数を考えた。

特に、サイクルの中で、一つは 1 次ではない有理函数であり、他のはその有理函数と可換な任意の代数函数のとき、そのサイクルの種数は 0 または 1 でなければならない。

いま 1 次ではない有理函数  $R(z)$  が或る代数函数と可換で独立と仮定する。(独立とは代数函数の任意のイテレーションのどれもが、その有理函数、その有理函数の逆函数および恒等函数  $z$  とは等しくないということの意味する。) そうすると、サイクルの種数について上に見たことから、 $P_R$  に関する集合  $E_c$  は有限であることが分かる。

次いで有限な集合  $E_c$  を持つ 1 次ではない有理函数  $R(z)$  の不動点の性質およびその函数  $R(z)$  と可換な代数函数の不動点の性質を研究した。それにより、もし 1 次でない有理函数  $R(z)$  が或る代数函数と可換で独立なら、函数族  $P_R$  はコンプレックスであることが導かれる。

上述の結果が主要なものであるが、しかし第 I 部の本当の意味は第 II 部のためにいくつかの点を準備することである。それらはもし、1 節のように二つの有理函数を考えるだけなら、すべてのことが必要になる訳ではない。上述の結果についても同様である。

4°

最後の章では、それ以前の章の結果を乗法定理の言葉で述べているに過ぎない。そのためには次の注意をするだけで十分である：もし或る有理函数  $R(z)$  に関して、集合  $E_c$  が有限なら、函数  $R(z)$  のイテレーションによって定義される Poincaré 函数は、特異頂点であると同時に  $E_c$  の点であるような点を除いて、逆函数の超越的分岐点を持たない。

最後に、私は二つの有理函数の一方を代数函数に変えて、Julia 氏と Ritt 氏によって得られた結果の最も重要な点がそのまま成立することを示した。

他方も有理函数であることを止めてしまえば、たとえ問題を乗法定理の形に置いたとしても、特別な場合以外は非常に難しいと私は思う。(勿論その場合、結論は同じようにはならない.)

最後に、私は Julia 氏の論文 “Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles” および前掲の論文に多くの点で支えられた。

# 第 I 部

## I. はじめに

### 1. 3 平面の間の代数的関係のサイクル.

1°

二つの代数的な関係

$$A_1(x) = y, \quad A_2(y) = z$$

によって対応する三つの平面  $x, y, z$  を考えよう.

これらの平面で対応する三つの点  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$  を考える. [訳注.  $y_0 = A_1(x_0), z_0 = A_2(y_0)$  となる点の組  $x_0, y_0, z_0$  を対応する点と言っている.] 一般にこれらの点の近傍に 1 対 1 の三つの対応が存在する. その対応のどれか一つが 1 対 1 にならない点の組は有限個である. 差し当たりこれらの点を曖昧点 (point ambigu) という言葉で言い表す.

曖昧点を避けて, 対応する点の組  $x_0, y_0, z_0$  を始点として取る. これらの始点から出発し, 曖昧点を避けて, それぞれ三つの対応する道  $L, L', L''$  を描く. 曖昧点を避けるためには, それらのどれか一つがその平面で曖昧点を通らなければ十分である. そうするとこれらの三つの道はそれらの内のどれか一つによって完全に定まる. 可変 (variable) な道  $L, L', L''$  の終点  $x, y, z$  を対応する点と考える. このようにして三つの平面  $x, y, z$  の間の対応は完全に定まる. この対応を三平面間の 代数的関係のサイクル と呼ぶ. [訳注. 複素 3 次元空間における既約な代数曲線によって表されるような関係である.]

2°

点  $x, y, z$  の中の一つを独立変数と考えると, 上に述べられたことは, [訳注. 他の二つの点をその函数と考えて,] 解析接続に過ぎない. この場合独立変数の平面に曖昧点の穴があると考えておけばよい.

点  $x$  を独立変数と考え, 点  $z$  を  $x$  の函数と考えると, 函数  $z(x)$  が得られ, 明かにこれはまた代数函数である. [訳注. 一般に,  $A_3(x)$  は  $A_1(x)$  と  $A_2(y)$  から一意的に定まるわけではない.] それを  $A_3(x)$  と表し, 函数  $y = A_1(x), z = A_2(y)$  の 合成函数 という言葉で表す. 函数  $A_3(x)$  が上記の合成函数の一つであることを

$$A_3(x) = A_2[A_1(x)]$$

または簡単に

$$A_3(x) = A_2 \cdot A_1(x)$$

と表す.

点の対  $(x, y)$  は関係  $A_1(x) = y$  の Riemann 面上の点と考えられる. もしそれを独立変数と考えるなら, 点  $z$  はその Riemann 面上の函数 である. [訳注. 一般に多価函数である.] それを  $z(x, y)$  と表す. 同様にそれぞれの Riemann 面上の函数  $x(y, z)$ ,  $y(z, x)$  を考えることができる.

3°

解析接続に関する幾つかの算術的な関係を調べよう.

考えを固定するため, オリジナルとして  $x$  平面を取る. この平面に始点  $x_0$  を含む単葉な領域  $\mathcal{D}$  を描く. 解析接続の道  $L$  をこの領域  $\mathcal{D}$  に制限する. この条件の下で, それぞれ点  $x'_0, y'_0, z'_0$  を端点とする対応する道の一組  $L_0, L'_0, L''_0$  を考える.

1° - 点  $x'_0, y'_0$  を不変にするような, 領域  $\mathcal{D}$  内の道の組によって, 点  $z'_0$  と結ばれる点 [訳注. 道  $L$  は  $\mathcal{D}$  内にあり, それと組み合わせられる道を  $L, L', L''$  としたとき,  $L, L'$  の始点と終点は共にそれぞれ  $x'_0, y'_0$  であり,  $L''$  の始点が  $z'_0$  である場合の  $L''$  の終点] の全体を考え, それを

$$z'_0, z'_1, \dots, z'_{\zeta_0-1}$$

と表す. [訳注. 多価函数  $z(x, y)$  の, Riemann 面の点  $(x'_0, y'_0)$  における, 値の全体である.] この数  $\zeta_0$  は明かに  $\mathcal{D}$  内の解析接続を許す. (勿論曖昧点を除いて) すなわち点  $x'_0, y'_0, z'_0$  によらない.

2° - 同様に点  $x'_0, z'_0$  を不変にする  $\mathcal{D}$  内の道の組によって, 点  $y'_0$  と結ばれる  $y$  平面の点の個数  $\eta_0$  を考える. この数  $\eta_0$  もまた領域  $\mathcal{D}$  内の解析接続を許す.

3° - 点  $x'_0$  を不変にする  $\mathcal{D}$  内の道によって, 点  $y'_0$  と結ばれる平面  $y$  の点の全体を考える. [訳注. 道  $L$  は  $\mathcal{D}$  内にあり, それと組み合わせられる道を  $L, L', L''$  としたとき,  $L$  の始点と終点は共に  $x'_0$  であり,  $L'$  の始点が  $y'_0$  である場合の  $L'$  の終点.] それらの点の個数  $n_{1,0}$  はやはり  $\mathcal{D}$  内の解析接続を許す.

4° - 同様に  $z$  平面で, 点  $x'_0$  を不変にする  $\mathcal{D}$  内の道で  $z'_0$  と結ばれる点を考えるなら, これらの点の個数  $n_{3,0}$  もまた  $\mathcal{D}$  内の解析接続を許す.

領域  $\mathcal{D}$  に関するこれらの四つの定数の間には明かに算術的關係

$$n_{3,0} = \frac{n_{1,0} \cdot \zeta_0}{\eta_0}$$



が存在する.

4°

もし領域  $\mathcal{D}$  として全平面  $x$  を取るなら, 曖昧点を除いて, 数  $n_{3,0}, n_{1,0}, \zeta_0, \eta_0$  に対応してそれぞれ数  $n_3, n_1, \zeta, \eta$  が得られる.  $n_1$  は函数  $A_1(x)$  が  $n_1$  価であることを意味する. この数をこの函数の多価性 (multiformité) と呼ぶ. 数  $n_3, \zeta, \eta$  はそれぞれ函数  $A_3(x), z(x, y), y(z, x)$  の多価性を意味する. それらの数の間には関係式

$$n_3 = \frac{n_1 \zeta}{\eta}$$

がある. それで次の命題が得られる.

I. 函数  $z(x), y(x)$  の多価性の比は函数  $z(x, y), y(z, x)$  の多価性の比に等しい.

函数  $A_2(y)$  の多価性を  $n_2$  とするとき, 不等式  $n_3 < n_1 \cdot n_2$  は合成函数  $A_3(z)$  が退化していることを意味する.

退化を, その原因によって, 次の 2 種に区別するのが妥当である. 不等式  $\zeta < n_2$  から生じるときはそれを第 1 種と言い, 不等式  $\eta > 1$  によって現われるときはそれを第 2 種と言う.

もし第 1 種の退化が生じないなら, 合成函数は一意的に決まる. そうでなければ一般に始点の選び方によって幾つかの合成函数ができる.

特に, もし函数  $A_2(y)$  のどの危点 [訳注. 分岐点の位置.] も函数  $A_1^{-1}(y)$  の危点の上に来ないなら, 合成函数  $A_2 \cdot A_1(x)$  に関する第 1 種の退化は生じない.

5°

三つの関係式

$$y = A_1(x), \quad y = A_2(x), \quad y = A_3(x)$$

の次数をそれぞれ

$$\left( \begin{matrix} m_1 \\ x, y \end{matrix} \right), \quad \left( \begin{matrix} m_2 \\ x, y \end{matrix} \right), \quad \left( \begin{matrix} m_3 \\ x, y \end{matrix} \right),$$

とし, 函数  $x(y, z)$  の多価性を  $\xi$  とするとき, 関係式

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{\zeta}{\eta}, \quad \frac{m_1}{n_2} = \frac{\xi}{\zeta}, \quad \frac{m_2}{m_3} = \frac{\eta}{\xi},$$

6

を知っている。したがって、

$$\frac{m_3}{n_3} = \frac{m_1}{n_1} \frac{m_2}{n_2}$$

が得られる。これを次の命題で表す。

II. もし函数  $A_3(x)$  が  $A_2 \cdot A_1(x)$  と表される合成函数の一つとすると函数  $A_3(x)$  の多価性とその逆函数の多価性の比は、函数  $A_1(x)$ ,  $A_2(x)$  に関する同種の比の積に等しい。

したがって多価性の比は合成函数  $A_2 \cdot A_1(x)$  のすべてに共通であり、退化にはよらない。[訳注. 1]

6°

今度は3節の領域  $\mathcal{D}$  を次のように取る。平面  $x, y, z$  にそれぞれ対応する点  $x_1, y_1, z_1$  を考える。これらの点是对应する点の極限点でもかまわない。言い換えると、点  $x_1, y_1, z_1$  の中に曖昧点があってもかまわない。次に、始点  $x_0, y_0, z_0$  はそれぞれ点  $x_1, y_1, z_1$  の十分近くにあると仮定する。(必要なら、それらの始点を対応する道によって移すことができる。) 点  $x_1$  の周りに始点  $x_0$  を含む単連結な領域  $\mathcal{D}$  を取る。この領域  $\mathcal{D}$  を十分小さく取って、その領域  $\mathcal{D}$  内には  $x_1$  以外に解析接続を拒む点 [訳注. 曖昧点] は存在しないとする。

この領域  $\mathcal{D}$  の中で、もし点  $x$  を独立変数と考えると、対応する点  $y$  は点  $x_1$  を中心とする函数  $y = A_1(x)$  の解析要素を定義する。それを  $E_{1,0}(x)$  と表す。同様に他の対応はそれぞれ点  $y_1, z_1$  を中心に持つ函数  $z = A_2(y)$ ,  $z = A_3(x)$  の解析要素  $z = E_{2,0}(y)$ ,  $z = E_{3,0}(x)$  を定義する。

この領域  $\mathcal{D}$  に関する数  $n_{1,0}$  は要素  $E_{1,0}(x)$  が  $n_{1,0}$  価であること、すなわち要素の位数を定義する。数  $n_{3,0}$  は要素  $E_{3,0}(x)$  の位数である。

さて、

$$E_{2,0}[E_{1,0}(x)] = E_{3,0}(x)$$

が得られる。したがって関係

$$n_{3,0} = \frac{n_{1,0} \cdot \zeta_0}{\eta_0}$$

は合成解析要素の位数である。

注意. もし要素  $E_{1,0}^{-1}(y)$ ,  $E_{2,0}(y)$  の位数をそれぞれ  $m_{1,0}$ ,  $n_{2,0}$  とし、これらの数の最大公約数を  $r$  とすると、数  $\zeta_0$  は

$$\zeta_0 = \frac{n_{2,0}}{r}$$

で与えられる。

引き続き前の領域  $\mathcal{D}$  での解析接続を考察する.

$x_0, y_0$  を不変にする, 領域  $\mathcal{D}$  内の解析接続によって点  $z_0$  と結ばれるすべての点を取る. それを

$$z_0, z_1, \dots, z_{\zeta_0-1}$$

と表す.

函数  $z(x, y)$  によって点の対  $(x_0, y_0)$  に対応する点の中に, 上の点の組以外に点  $z'_0$  が存在すると仮定する. その点  $z'_0$  から, 上と同様の仕方での組

$$z'_0, z'_1, \dots, z'_{\zeta'_0-1}$$

を作ることができる.

この操作を繰り返して,  $z(x_0, y_0)$  で表される  $\zeta$  個の点のすべてを分割することができる. そして  $\kappa$  個の組ができたと仮定する. (勿論  $\kappa$  個の組の点はすべて異なる.)

もし 1 変数の代数函数の場合のような言い方を望むなら,  $\zeta - \kappa \neq 0$  のとき, 函数  $z(x, y)$  は Riemann 面上の点  $(x_1, y_1)$  で分岐点を持つと言うべきである. (もっと正確には  $y = E_{1,0}(x)$  によって表される Riemann 面の要素上の点  $(x_1, y_1)$  において.) さらに  $\zeta - \kappa$  個の単純分岐点 [訳注. 分岐指数 1 の分岐点] があると考えらるべきである. Riemann 面全体の単純分岐点の全てを数えるなら, 函数  $z(x, y)$  の分岐点の個数が得られる. それを  $N_z$  とする. 同様に函数  $x(y, z), y(z, x)$  の分岐点の個数を  $N_x, N_y$  と表す.

注意. - もし Riemann 面  $(x, y)$  の種数が 0 でなければ, 条件  $N_z = 0$  はその Riemann 面上での函数  $z(x, y)$  の一価性を示すのに十分ではない.

我々は数  $n_{3,0}, n_{1,0}, \zeta_0, \eta_0$  を持つ解析要素  $E_{1,0}(x), E_{2,0}(y), E_{3,0}(x)$  の組を得た. もしこの組を, 対応する可変な一組の道によって移すなら, 数  $n'_3, n'_1, \zeta', \eta'$  を持つ可変な要素  $E_1(x), E_2(y), E_3(x)$  の組を得る. [訳注. 対応する道  $L, L', L''$  に沿って  $E_{1,0}(x), E_{2,0}(y), E_{3,0}(x)$  を解析接続し, その終点  $x, y, z$  で得られる解析要素が  $E_1(x), E_2(y), E_3(x)$  である.] それらの可変な数の間には常に

$$\eta'(n'_3 - 1) + (\eta' - 1) = \zeta'(n'_1 - 1) + (\zeta' - 1)$$

なる関係がある. [訳注.  $\eta'n'_3 = \zeta'n'_1$  を書き換えただけである.]

少なくとも一つの要素が代数的であるようなすべての組  $(E_1, E_2, E_3)$  を考え、それらに対応するすべての等式を辺ごとに加えれば、次のような関係が得られる。

$$\sum_{E_1, E_2, E_3} \eta'(n'_3 - 1) + \sum_{E_1, E_2, E_3} (\eta' - 1) = \sum_{E_1, E_2, E_3} \zeta'(n'_1 - 1) + \sum_{E_1, E_2, E_3} (\zeta' - 1)$$

先ず和  $\sum_{E_1, E_2, E_3} (\zeta' - 1)$  を考える。組  $(E_{1,0}, E_{2,0}, E_{3,0})$  は上の代数的な組に含まれていると仮定してもよい。  $E_1 = E_{1,0}$  のとき、和  $\sum_{E_1, E_2} (\zeta' - 1)$  を考える。解析要素の組  $(E_1, E_2)$  と 7 節の点  $z(x_0, y_0)$  との間には 1 対 1 の対応がある。したがって

$$\sum_{E_1, E_2} (\zeta' - 1) = (\zeta_0 - 1) + (\zeta'_0 - 1) + \cdots = \zeta - \kappa$$

が得られる。このことから

$$\sum_{E_1, E_2, E_3} (\zeta' - 1) = N_z$$

が導かれる。

次に和

$$\sum_{E_1, E_2, E_3} \zeta'(n'_1 - 1) = \sum_{E_1} (n'_1 - 1) \cdot \sum_{E_2, E_3} \zeta'$$

を見る。ここから前と同じ理由で

$$\sum_{E_2, E_3} \zeta' = \zeta$$

が得られる。したがって、函数  $A_1(x)$  の分岐点の個数を  $N_1$  と表すと、

$$\sum_{E_1, E_2, E_3} \zeta'(n'_1 - 1) = \zeta N_1$$

である。

同様に函数  $A_3(x)$  の分岐点の個数を  $N_3$  と表すと、関係式

$$\eta N_3 + N_y = \zeta N_1 + N_z$$

が得られる。関係  $y = A_1(x)$ ,  $z = A_3(x)$  の種数をそれぞれ  $p_z, p_y$  とすると、最後に等式

$$2\eta(p_y - 1) + N_y = 2\zeta(p_z - 1) + N_z$$

が得られる。ここから次のことが証明される：

III.— Riemann 面上の函数  $z(x, y)$  に関して、もし多価性を  $\zeta$ 、分岐点の個数を  $N_z$ 、Riemann 面の種数を  $p_z$  とすると

$$q_z = \zeta p_z + \left( \frac{N_z}{2} - \zeta + 1 \right)$$

の形であって

$$q_x = q_y = q_z$$

なる性質を持つ数を考えることができる。

この値を共通の文字  $q$  で表し、“サイクルの種数” という言葉で表す。  
[訳注. 代数的関係のサイクルを複素 3 次元空間の既約な代数曲線で表したとき、その曲線の種数がこのサイクルの種数である.]

注意：1° – 特に例えば関係  $y = A_2(x)$  が恒等写像なら  $q = p_z$ 、すなわちサイクルの種数は代数的関係の種数に等しい。

2° – サイクルの種数は決して負にならない。

3° – サイクルの種数が常に整数かどうかを明かにするためには、数  $N_z$  が常に偶数かどうかを明かにしなければならない。

## 2. 有理函数と代数函数の間の可換性.

1°

二つの函数  $R(z)$ ,  $A(z)$  はそれぞれ有理函数と代数函数であると仮定する。

二つの関係

$$R(x) = y, \quad A(y) = z$$

を合成するとき、第 2 種の退化は起こらない。[訳注.  $n_1 = 1$  だから  $\eta = 1$  である.] すでに見たように、もし第一種の退化が起こらなければ、合成函数はただ一つしか存在しない。この特別な場合は逆の命題もまた正しい。

二つの関係

$$A(x) = y, \quad R(y) = z$$

を合成するとき、第一種の退化は起こらない。[訳注.  $n_2 = 1$  だから  $n_2 = \eta$  である.] したがって式  $R \cdot A(x)$  はただ一つの解析函数を表す。

上に見たことにより、可換性を次のように定義しよう：もし  $A \cdot R(z)$  と表される函数の中に函数  $R \cdot A(z)$  が存在するなら、函数  $R(z)$ ,  $A(z)$  は可換であると言う。

もし函数  $A(z)$  が  $R(z)$  のイテレーション (itérée), 例えば  $R^{(i)}(z)$  と可換なら、函数  $A(z)$ ,  $A^{(-1)}(z)$ ,  $R \cdot A(z)$  は  $R^{(i)}(z)$  の各イテレーションと可換である。

1次でない有理函数  $R(z)$  と、可換な代数函数  $A(z)$  が与えられたとし、  
函数の列

$$\dots, A \cdot R^{(-2)}(z), A \cdot R^{(-1)}(z), A(z), R \cdot A(z), R^{(2)} \cdot A(z), \dots$$

を考える。この各項は唯一の解析函数を表し、これらはまた函数  $R(z)$  と  
可換である。この列に対応して多価性の列

$$\dots, n_{-2}, n_{-1}, n, n_1, n_2, \dots$$

を考える。

明かに関係式

$$n_i \geq n_{i+1}, \quad i : \text{整数}$$

が得られる。すなわち左から右に進むとき、列は決して大きくはならない。  
しかも  $R(z)$  は1次ではないから、逆に進むとそれは無限に大きくなる。し  
たがって等式と不等式が存在する。[訳注. 2]

この列から  $R \cdot A_1(z)$  と同じ多価性を持つ函数  $A_1(z)$  を取る。[訳注. 列  
の或る函数  $A_1(z)$  とその右隣の函数  $R \cdot A_1(z)$  が同じ多価性を持つと仮  
定する.] それは合成函数  $R \cdot A_1(z)$  に関する退化は起こらないということ  
である。合成函数  $A_1 \cdot R(z)$  についても同じである。したがってもし函数  
 $A_1 \cdot R^{(2)}(z)$  の中から任意に函数  $A_2(z)$  を取れば

$$A_2(z) = R^{(2)} \cdot A_1(z)$$

が得られる。これは  $A_1 \cdot R^{(2)}(z)$  によって表される函数は唯一つしか存在  
しないことを示している。したがって函数  $A_1(z), R^{(2)} \cdot A_1(z)$  の多価性は  
また等しい。言い換えると、もし等式が一度現われると、それより右では  
不等式は現われない。[訳注. 3]

IV. — 1次でない有理函数  $R(z)$  と可換な代数函数  $A(z)$  に関して函数  
の列

$$\dots, A \cdot R^{(-2)}(z), A \cdot R^{(-1)}(z), A(z), R \cdot A(z), R^{(2)} \cdot A(z), \dots$$

を考えたとき、多価性は左から右の方には増加せず、さらに等式と不等式  
が隣り合うのはただ一カ所である。

等式と不等式を分ける函数を函数  $R(z)$  に関して固有既縮 (proprement  
réduite) であると言う。

一般に有理函数  $R(z)$  と代数函数  $A(z)$  の合成函数を作るとき、 $R(z)$  のいかなる階数の合成においても退化が現われないなら、函数  $A(z)$  は函数  $R(z)$  に関して既縮 (réduite) である と言う。

上の命題で、次の点を特に注意しよう。もし函数  $A(z)$  が有理函数  $R(z)$  と可換で既縮なら、 $R(z)$  のすべてのイテレーションに関しても同様である。

3°

引き続き有理函数  $R(z)$  に関して可換で既縮な代数函数  $A(z)$  を考える。 $i$  階のイテレーション  $A^{(i)}(z)$  から任意の函数  $A_1(z)$  を取る。このとき、イテレーション  $A^{(i)}(z)$  の中に

$$R \cdot A_1(z) = A_j \cdot R(z)$$

を満たす函数  $A_j(z)$  が存在し、それは唯一つである。さらに  $A^{(i)}(z)$  の中には少なくとも一つ

$$A_1 \cdot R(z) = R \cdot A_\kappa(z)$$

を満たす函数が存在する。

それで、次のような函数のサイクルを作ろう。イテレーション  $A^{(i)}(z)$  から

$$A_1 \cdot R(z) = R \cdot A_2(z)$$

を満たす函数  $A_2(z)$  を勝手に取る。

次に  $A^{(i)}(z)$  から

$$A_2 \cdot R(z) = R \cdot A_3(z)$$

を満たす函数  $A_3(z)$  を勝手に取る。

この操作を続けると、やがて同じ函数が現われる。ところで、この逆の過程は順次一意的な函数を定めるから、同じ函数が最初に現われるのは常に函数  $A_1(z)$  でなければならない。

したがって、勝手に選んで一つの函数のサイクル

$$A_1(z), A_2(z), \dots, A_s(z)$$

が得られる。

このサイクルは、逆サイクルが一意的だから、順序を含めて一意的に決まる。

このことから先ず

$$R^{(s)} \cdot A_1(z) = A_1 \cdot R^{(s)}(z)$$

すなわち  $R^{(s)}$  と  $A_1(z)$  は可換であることが導かれる. 次に  $A_1 \cdot R^{(s)}$  で表される函数の各々は  $R^{(s)} \cdot A_1(z)$  と等しい. これは函数  $A_1(z)$  が  $R^{(s)}$  に関して既縮であることを意味している. 函数  $R(z)$  の任意のイテレーションに関して明かにそうである. これを次の命題で示す.

V. - 代数函数  $A(z)$  が有理函数  $R(z)$  に関して可換で既縮なら,  $A(z)$  の各イテレーションは  $R(z)$  の或るイテレーションと可換で  $R(z)$  のイテレーションの各々に関して既縮である.

## II - 危点

### 3. 代数的サイクルの種数.

1°

$A(z)$  を代数函数,  $R(z)$  を有理函数とする. 函数  $A \cdot R(z)$  の中から任意に函数  $A_1(z)$  を取り, 三つの関係

$$R(x) = y, \quad A(y) = z, \quad A_1(x) = z$$

のサイクルを考える. このサイクルの種数  $q$  は

$$q = \eta p_y + \left( \frac{N_y}{2} - \eta + 1 \right)$$

で表される. ところでいまの場合, 最初の関係において第 2 種の退化は起こらない. すなわち  $\eta = 1$ ,  $N_y = 0$  である. したがって

$$q = p_y$$

が得られる. 言い換えると, サイクルの種数は合成函数  $A_1(z)$  のそれと等しい. さらに種数  $q$  は  $q = q_x$  によっても与えられるので

$$(p_y - 1) = \xi(p_x - 1) + \frac{N_x}{2}$$

が得られる. いま函数  $A(z)$  の種数  $p_x$  は 1 より大きいと仮定する. そうすると

$$p_y \geq p_x$$

が得られる. ここで等号は  $\xi = 1$  のときのみにかかる. ところで, 函数  $x(y, z)$ ,  $z(x, y)$  の多価性の比は函数  $x(y)$ ,  $z(y)$  の多価性の比に等しい. したがって, もし函数  $R^{-1}(z)$  の多価性が函数  $A(x)$  のそれより大きければ, 合成函数  $A \cdot R(z)$  の種数はすべて函数  $A(z)$  の種数より大きい.



次にサイクル

$$A(x) = y, \quad R(y) = z, \quad R \cdot A(x) = z$$

を考える. 全く同様に

$$(p_z - 1) = \eta(p_y - 1) + \frac{N_y}{2}$$

が得られる. ここで前の仮定から  $p_z - 1 > 0$  である. したがって

$$p_z \geq p_y,$$

すなわち合成函数  $R \cdot A(z)$  の種数は函数  $A(z)$  の種数より大きくはならない. なお, この結果に対しては, 函数  $A(z)$  の種数が 1 より大きいという仮定は必要ない. これを次のように示す.

VI. - それぞれ有理函数と代数函数である二つの函数  $R(z)$ ,  $A(z)$  が与えられたとし, 二つの函数列

$$1^\circ \quad A(z), R \cdot A(z), R^{(2)} \cdot A(z), \dots$$

$$2^\circ \quad A(z), A_1(z), A_2(z), \dots$$

を考える. ここで  $A_i(z)$  は合成函数  $A_{i-1} \cdot R(z)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  のどれかの函数を意味する.

(1) 第 1 列の中では函数の種数は増加しない. 第 2 列ではそれは減少しない.

(2)  $A(z)$  の種数と  $R^{(-1)}(z)$  の多価性が 1 より大きいとき, 第 2 列の函数の種数は無限に増大する.

この命題により直ちに次の命題が得られる.

VII - 1 次でない有理函数と可換な代数函数の種数は 0 または 1 である.

2°

有理函数  $R(z)$  は 1 次ではなく, 代数函数  $A(z)$  は  $R(z)$  の  $i$  階のイテレーションと可換であると仮定する. 合成函数  $A^{-1} \cdot R(z)$  の中には  $R^{(i)}(z)$  の或るイテレーションと可換な函数  $A_1(z)$  が必ず存在する. この函数  $A_1(z)$  の種数は 0 または 1 である.

サイクル

$$R(x) = y, \quad A^{(-1)}(y) = z, \quad A_1(x) = z$$

を考える.

このサイクルの種数  $q$  は 0 または 1 である. さて種数  $q$  は

$$q = \zeta p_z + \left( \frac{N_z}{2} - \zeta + 1 \right)$$

で与えられるから,

$$N_z \leq 2\zeta$$

が得られる. 同様に [訳注.  $q = q_x$  により,]

$$N_x \leq 2\xi$$

である.

他方, もし函数  $A^{-1}(y)$  の危点の少なくとも一つが函数  $R^{-1}(y)$  の危点の外にあれば

$$N_z \geq \xi$$

である. したがってもし  $\xi > 2\zeta$  なら, 函数  $A^{(-1)}(y)$  のすべての危点は  $R^{(-1)}(y)$  の危点の集合に含まれる.

さて, 函数  $R^{(-1)}(z)$ ,  $A^{(-1)}(z)$  の多価性をそれぞれ  $l$ ,  $m$  と表すと

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{l}{m}$$

であった. それで次の命題が得られる.

VIII - 代数函数  $A(z)$  は有理函数  $R(z)$  の或るイテレーションと可換であり, 函数  $R^{(-1)}(z)$ ,  $A^{(-1)}(z)$  の多価性をそれぞれ  $l$ ,  $m$  とする.

1° もし  $l > 2m$  なら  $A^{(-1)}(z)$  のすべての危点は函数  $R^{(-1)}(z)$  の危点の集合に含まれる.

2° もし  $m > 2l$  なら  $R^{(-1)}(z)$  のすべての危点は函数  $A^{(-1)}(z)$  の危点の集合に含まれる.

#### 4. 危点の集合.

1°

有理函数  $R(z)$  のすべてのイテレーションの逆函数が持つ危点の集合を考え, それを  $E_c$  と表す. 前の命題より次のことが分かる.

IX. - もし有理函数  $R(z)$  が 1 次でないなら,  $R(z)$  と可換な代数函数の各々は危点を  $E_c$  の中にしか持たない.

引き続き函数  $R(z)$  は 1 次でないとして仮定して、函数  $R(z)$  と可換な代数函数  $A(z)$  を取る。もし函数  $R^{(i)} \cdot A(z)$  の中で、 $i$  を十分大きく取れば、函数  $R(z)$  と可換な函数  $A_1(z)$  で、函数  $R(z)$  に関して既縮であり、式  $y = A_1(x)$  の次数  $\binom{m}{x}, \binom{n}{y}$  は  $m > n$  を満たすようなものが得られる。

$A_1(x)$  のイテレーション達の逆函数に関する危点の集合を考え、それを一先ず  $E_{c'}$  と表す。

$A_1(z)$  の各イテレーションは函数  $R(z)$  の或るイテレーションと可換だから、 $E_{c'}$  は集合  $E_c$  に含まれる。 $i$  を正の整数として  $\binom{m_i}{x}, \binom{n_i}{y}$  を既約な関係  $y = A_1^{(i)}(x)$  の次数とする。そうすると

$$\frac{m_i}{n_i} = \left(\frac{m}{n}\right)^i$$

である。

したがって命題 VIII に戻って、集合  $E_c$  は集合  $E_{c'}$  に含まれることが分かる。

集合  $E_c$  と  $E_{c'}$  は一致する。

2°

集合  $E_c$  の構造を、先ず函数  $R(z)$  に関して、次に函数  $A_1(z)$  についてよく見よう。

点

$$a_1, a_2, \dots, a_r$$

を函数  $R^{(-1)}(z)$  の危点とする。点列

$$a_i, R(a_i), R^{(2)}(a_i), \dots$$

を考え、それを列  $(a_i)$  と呼ぶ。そうすると集合  $E_c$  は列

$$(a_1), (a_2), \dots, (a_r)$$

よりなる。

$E_c$  の函数  $A_1(z)$  についての構造はこれほど明白ではない。

集合  $E_c$  は無限と仮定する。 そうして次の事を証明しよう。

任意に与えられた正の整数  $M$  に関し、集合  $E_c$  は次の性質を満たす列  $(M)$  を含む。

1° 列  $(M)$  は少なくとも  $M$  個の異なる点を含む。

2° 列  $(M)$  の異なる任意の二つは函数  $A_1(z)$  の或るイテレーションで結ばれる.

実際, 集合  $E_c$  内に次の性質を持つ点  $z_i$  を見出すことができる. [訳注.  $i$  を任意に取っている.]

1° 点  $z_i$  は函数  $A_1^{(-i)}(z)$  の危点であり,  $i$  より小さい階数の  $A_1^{(-1)}(z)$  のイテレーションの危点ではない.

2°  $z_i$  は, 函数  $A_1(z)$  の逆関数の危点の,  $A_1(z)$  による, 階数が  $M$  より小さい未来の外にある.

始めの条件は集合  $E_c$  が無限集合であること自体を表しており, 第2の条件は単に有限個の点を避けて取ることを要求しているだけである.

点  $z_i$  を中心とする, 函数  $A_1^{(-i)}(z)$  の代数的要素を取り, それを  $E_i(z)$  と表す. この要素  $E_i(z)$  は函数  $A_1^{(-1)}(z)$  の要素  $E_{1,j}(z)$ ,  $j=1, 2, \dots, i$  によって

$$E_i(z) = E_{1,1} \cdot E_{1,2} \cdot \dots \cdot E_{1,i-1} \cdot E_{1,i}(z)$$

と分解するすることができる. 要素  $E_{1,i}(z)$  は  $z_i$  を中心に持つ. 要素  $E_{1,j}(z)$  の中心を  $z_j$ ,  $j=1, 2, \dots, i-1$  と表す. そうすると, 点列

$$z_1, z_2, \dots, z_i$$

が得られる.

先ず, この列の任意の2点は函数  $A_1(z)$  の或るイテレーションで結ばれる.

次に, 点  $z_i$  は第1の性質を持つから [訳注. 任意の  $j$  ( $1 \leq j < i$ ) に対して,]

$$E_{1,j+1} \cdot E_{1,j+2} \cdot \dots \cdot E_{1,i}(z)$$

で表される解析要素は通常 (正則または極) である. したがって解析要素

$$E_{1,1} \cdot E_{1,2} \cdot \dots \cdot E_{1,j}(z)$$

は代数的でなければならない. これは点  $z_j$  が集合  $E_c$  に含まれていることを示している. 以下同様である.

最後に, もしその列の中に高々  $M-1$  個の異なる点しか存在しないなら, 点  $z_i$  は点  $z_1$  の, 函数  $A_1(z)$  による高々  $M-1$  階の未来でなければならない. これは点  $z_i$  の第2の性質に反する. したがって, この列は少なくとも  $M$  個の異なる点を含む.

この列は, 列  $(M)$  の一つであることが分かった. これで証明すべきことはすべて述べられた.

さて、 $M > r$  と考えて、列  $(M)$  の一つを取る。この列は函数  $R(z)$  に関する同じ列の中 [訳注.  $(a_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) のどれか一つの中] に少なくとも二つの異なる点を持つ。

その列を  $(a_1)$  とし、その 2 点を  $z_0, z_1$  とする。点  $z_0, z_1$  は函数  $R(z)$  と  $A_1(z)$  の或るイテレーションによって同時に結ばれる。すなわち、

$$z_1 = R^{(s)}(z_0) = A_2(z_0)$$

の形の関係を持つ。 $A_2(z)$  は  $A^{(t)}(z)$  の形の函数の一つであり、 $s, t$  は 0 と異なる或る整数である。さらに  $s > 0$  であると考えることができる。

函数  $A_1(z)$  は函数  $R(z)$  に関して可換かつ既縮であるから、函数  $A_2(z)$  は  $R(z)$  の或るイテレーションと可換である。そのイテレーションの階数を  $j$  と表す。そうすると関係

$$R^{(j)} \cdot R^{(s)}(z_0) = R^{(j)} \cdot A_2(z_0)$$

から

$$R^{(s)}[R^{(j)}(z_0)] = A_2[R^{(j)}(z_0)]$$

が得られる。同様に列

$$z_0, R^{(j)}(z_0), R^{(2j)}(z_0), \dots$$

の点はすべて方程式

$$R^{(s)}(z) = A_2(z)$$

の根である。

二つの可能性だけがある：一つは函数  $R^{(s)}(z), A_2(z)$  が同じものである場合であり、もう一つは上の列が有限である場合である。 第 2 の場合は列  $(a_1)$  も有限である。

$A_1(z)$  の各イテレーションは  $R(z)$  のどのイテレーションとも一致しないと仮定する。そうすると、同様の議論を繰り返して、集合  $E_c$  は有限でなければならないことが分かる。我々の二つの仮定 [訳注.  $A_1(z)$  の各イテレーションが  $R(z)$  のどのイテレーションとも一致しないことと、 $E_c$  が無限集合であることと] は相いれないものである。[訳注. 4]

可換な有理函数  $R(z)$  と代数函数  $A_0(z)$  が与えられたとき、 $(0, 0)$  とは異なる整数の対  $(i, j)$  があって

$$R_0^{(i)}(z) = A_0^{(j)}(z)$$

となるかどうかによって、これらの函数は従属または独立と言う。ここで  $R_0^{(0)}(z)$ ,  $A_0^{(0)}(z)$  は恒等函数  $z$  を表し、 $A_0^{(i)}(z)$  は [訳注.  $A_0(z)$  の  $i$  階のイテレーションの] 或る函数を意味する。

1 節の函数  $A(z)$  は函数  $R(z)$  と独立であると仮定し、函数  $A_1(z)$  も同じ性質を持つことを示そう。

実際、もしそうでないと仮定すると、少なくとも一つ

$$A_1^{(j)}(z) = R^{(k)}(z) \quad (j, k) \neq (0, 0)$$

なる形の関係が得られる。函数  $R(z)$  は 1 次ではないから、整数  $j$  は 0 ではない。さて、

$$A_1(z) = R^{(i)} \cdot A(z)$$

であった。このことから函数  $A^{(j)} \cdot R^{(ij)}(z)$  は函数  $R^{(k)}(z)$  と同じである。このことから

$$A^{(j)}(z) = R^{(k-ij)}(z), \quad j \neq 0$$

となる。函数  $R(z)$ ,  $A(z)$  は独立だからこれは不可能である。このようにして次の基本命題が得られた。

X. – もし有理函数  $R(z)$  が 1 次ではなく、或る代数函数と可換で独立なら、この函数  $R(z)$  に関する危点の集合  $E_c$  は有限である。

5°

1 次でない有理函数  $R(z)$  が有限集合  $E_c$  を持つとき、 $E_c$  は函数  $R(z)$  に関する不変サイクルとその過去よりなる。

この不変サイクルの中に、もし乗数 0 を持つ [訳注. その点における  $R(z)$  の微分係数が 0 になる] ものがあれば、そのサイクルの点を 集合  $E_c$  の特異点と呼ぶ。

### III Poincaré 函数

---

#### 5. 集合 $E_c$ が有限のときの不動点の性質.

このパラグラフでは有理函数  $R(z)$  または  $R(z)$  と可換な代数函数に関する不動点の幾つかの性質を考える。函数  $R(z)$  は 1 次ではなく有限の集合  $E_c$  を持つと仮定する。

1°

$z_0$  を上記の函数  $R(z)$  の不動点で, 集合  $E_c$  の特異点ではないとする.  
 $z_0$  の周りに次のような単葉で単連結な領域  $\mathcal{D}$  を考える.

- 1° – 領域  $\mathcal{D}$  は,  $z_0$  以外には, 集合  $E_c$  の点を含まない.
- 2° – 函数  $R(z)$  の或る三つの不動点  $z_2, z_3, z_4$  を含まない.
- 3° – 同じ函数の拡張型不動点  $z_1$  を含む.

これらの性質を持つ領域を得るのに, もし必要なら, 函数  $R(z)$  のイテレーションを考える. すでに述べたことからこの操作は許される.

領域  $\mathcal{D}$  において, 点  $z_0$  での値が  $z_0$  であるような分枝による函数列

$$R^{(-1)}(z), R^{(-2)}(z), \dots$$

を考える. 領域  $\mathcal{D}$  の第 1 の性質から, この函数がすべて 1 価である事が分かる. 第 2 の性質により, この列は  $\mathcal{D}$  内で三つの値  $z_2, z_3, z_4$  を取ることができない. したがってこの列は  $\mathcal{D}$  で正規族をなす.

一様収束する部分列

$$R^{(-i_1)}(z), R^{(-i_2)}(z), \dots$$

を考える.

この部分列の極限函数  $\varphi(z)$  は  $\mathcal{D}$  内で定数ではないと仮定する. そうするとそれは有理型である. この部分列の族の各函数は  $\mathcal{D}$  内で両一価だから, 函数  $\varphi(z)$  も  $\mathcal{D}$  内で両一価である.  $u$  平面に  $u = \varphi(z)$  によって領域  $\mathcal{D}$  に対応する領域  $\Delta$  を考える. この領域はまた単葉である. 点  $u_1 = \varphi(z_1)$  を中心として  $\Delta$  内に円  $C$  を描く. 上記の部分列によって  $\mathcal{D}$  に対応する領域は, 明かに或る番号から先, 領域  $C$  を含む.

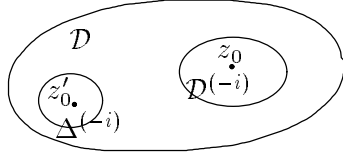
言い換えると,  $R(z)$  のイテレーションの無限列によって領域  $C$  に対応する領域は, 或る番号から先, すべて  $\mathcal{D}$  に含まれる. したがって  $u_1$  は  $R(z)$  のイテレーションの集合に関して真性特異点ではない. これは  $z_1$  が拡張型不動点であることに反する. したがって極限函数  $\varphi(z)$  は定数  $z_0$  である. そして不動点  $z_0$  は拡張型である.

XI – もし 1 次でない有理函数が有限の集合  $E_c$  を持てば, すべての不動サイクルは  $E_c$  の特異点を除いて拡張型である.

2°

上の命題は領域  $\mathcal{D}$  内の上記の函数列  $R^{(-i_1)}(z), R^{(-i_2)}(z), \dots$  が点  $z_0$  の近傍で定数  $z_0$  に一様収束することを示している. したがって, 正規族

に関するよく知られた性質により、領域  $\mathcal{D}$  においてもそうである。(領域  $\mathcal{D}$  の後の二つの条件は便宜上のものである。) 上記の列の函数  $R^{(-i)}(z)$  によって領域  $\mathcal{D}$  に対応する領域を  $\mathcal{D}^{(-i)}$  と表す。



いま、函数  $R(z)$  と可換な代数函数  $A(z)$  を考える。  $z'_0$  を点  $z_0$  の、函数  $A(z)$  に関する直接過去とする。

点  $z_0, z'_0$  は集合  $E_c$  の外にあると仮定する。(もし必要なら

$R(z)$  をそのイテレーションと取り替える)。領域  $\mathcal{D}$  を点  $z'_0$  を含むように取ることができる。

函数  $A^{(-1)}(z)$  の分枝で、点  $z_0$  に対応する点として  $z'_0$  を持つものを考え、それによって領域  $\mathcal{D}^{(-i)}$  に対応する領域  $\Delta^{(-i)}$  を考える。

もし  $i$  を十分大きくすると  $\Delta^{(-i)}$  は単葉になり、領域  $\mathcal{D}$  に含まれる。

二つの領域  $\Delta^{(-i)}$  と  $\mathcal{D}$  は函数  $R^{(i)} \cdot A(z)$  によって上のように対応する。これは領域  $\Delta^{(-i)}$  内にこの函数の一つ且つ唯一つの不動点があることを示している。[訳注.  $z$  が  $\Delta^{(-i)}$  の境界を一周するときの、函数  $R^{(i)} \cdot A(z) - z$  の偏角の変化量は  $2\pi$  である。] それを  $a$  と表す。この対応は点  $a$  のまわりの函数  $R^{(i)} \cdot A(z)$  の解析要素を定める。それを  $E(z)$  で表す。要素  $E(z)$  は点  $a$  で絶対値が 1 より大きい微分係数  $E'(a)$  を持つことが知られている。不動点  $a$  は集合  $E_c$  の点ではない。

3°

さらに函数  $R^{(i)} \cdot A(z)$  は函数  $R(z)$  に関して既縮であると仮定する。この函数を簡単のため  $A_1(z)$  と表す。  $A_1(z)$  の各イテレーションは函数  $R(z)$  と可換であり、  $E_c$  の点を含まない単連結な任意の領域内で [訳注. 各分枝、特に  $E(z)$  は] 一価である。

点  $a$  のまわりに  $E_c$  の点を含まない任意の単連結領域  $\Delta$  を考え、その領域内で

$$E(z), E^{(2)}(z), \dots$$

で定義される  $A_1(z)$  のイテレーションの列を考える。この列は  $\Delta$  内で一価な函数の列であるが、微分係数  $E'(a)$  の絶対値が 1 より大きいことから、これは正規族であることはできない。したがって、1 次ではない有理函数のイテレーションの集合に関する真性特異点について見たように、点  $a$  のまわりで取られるイテレーションの列は高々二つの値を除いてすべての値を取る。

点列

$$a, R(a), R^{(2)}(a), \dots$$



を考える. この列の各点は函数  $A_1(z)$  の不動点である.

この列の点, 例えば  $R^{(i)}(a)$  を考える. 函数  $A_1(z)$  は函数  $R(z)$  に関して可換で既約だから,  $j$  を正の整数とすると, 函数  $R^{(i)} \cdot A_1^{(j)}(z)$  と函数  $A_1^{(j)} \cdot R^{(i)}(z)$  はすべて等しい. したがって函数の列

$$\begin{aligned} R^{(i)} \cdot A_1(z), R^{(i)} \cdot A_1^{(2)}(z), \dots \\ A_1 \cdot R^{(i)}(z), A_1^{(2)} \cdot R^{(i)}(z), \dots \end{aligned}$$

は等しい. さて点  $a$  のまわりで第 1 の列は高々二つの値を除いてすべての値を取る. したがって次のことが言える.

イテレーションの列  $A_1(z), A_1^{(2)}(z), \dots$  は  $R^{(i)}(a)$  のまわりで高々二つの値を除いてすべての値を取る.

4°

点  $a, R(a), R^{(2)}(a), \dots$  はすべて函数  $A_1(z)$  の不動点であるが, ある番号から先は,  $R(z)$  の或るイテレーションの不動点でもある. そのイテレーションを  $R_1(z)$  と表す.

上の点列の中で共通の不動点  $b$  を考える. この不動点  $b$  は函数  $R_1(z)$  に対して拡張型であることを言おう.

点  $b$  は集合  $E_c$  の特異点であると仮定する. [訳注. 帰謬法の仮定である.  $E_c$  の特異点以外の不動点は拡張型である.] そうすると, 点  $b$  のまわりの領域  $\Delta$  が取れて, その中で, 点  $b$  での値が  $b$  であるような函数列

$$R_1^{(-1)}(z), R_1^{(-2)}(z), \dots$$

は定数  $b$  に一様収束する.

さて函数列  $A_1(z), A_1^{(2)}(z), \dots$  は点  $b$  の近傍で高々二つの値を除いてすべての値を取る. このことから, 以下で, この列の一つの函数  $A_2(z)$  が領域  $\Delta$  内で  $R(z)$  のイテレーションの或る真性特異点  $z_0$  を値として取ると仮定することができる.

函数  $A_1(z)$  は函数  $R(z)$  に関して可換で既縮だから, 函数  $A_2(z)$  は  $R_1(z)$  の或るイテレーションに関して可換で既縮である. それを  $R_2(z)$  と表す. そうすると,  $j$  を任意の正の整数とするとき,  $A_2 \cdot R_2^{(j)}(z)$  は唯一つの函数  $R_2^{(j)} \cdot A_2(z)$  を表す. すなわち二つの函数列

$$\begin{aligned} R_2 \cdot A_2(z), R_2^{(2)} \cdot A_2(z), \dots \\ A_2 \cdot R_2(z), A_2 \cdot R_2^{(2)}(z), \dots \end{aligned}$$

は等しい.

さて、第1の列は  $\Delta$  内で高々二つを除いてすべての値を取る。そしてこの性質は項の有限個を取り除いても変わらない。にも拘らず第2の列は値  $A_2(b)$  に一様収束する。このように仮定は矛盾である。すなわち点  $b$  は 函数  $R_1(z)$  の拡張型不動点である。

5°

ここで、 $E(b) = b$  であるような点  $b$  のまわりの  $R_1(z)$  の解析要素を  $E(z)$  で表す。  $b$  のまわりの  $A_1(z)$  の解析要素  $E_1(z)$  で、 $E_1(b) = b$  であるようなものを考える。

函数  $A_1(z)$  は 函数  $R_1(z)$  と可換だから、点  $b$  のまわりで

$$E \cdot E_1(z) = E_2 \cdot E(z)$$

となるような解析要素  $E_2(z)$  を持つ。要素  $E_2(z)$  の中心は  $b$  でなければならず、 $E_2(b) = b$  である。

したがって 函数  $A_1(z)$  は点  $b$  のまわりで

$$E_R \cdot E_A(z) = E_A \cdot E_R(z)$$

なる解析要素  $E_A(z)$  を持つ。ここで  $E_R(z)$  は  $E(z)$  の或るイテレーションである。

最後に、要素  $E_A(z)$  は両1価であることを示そう。計算の簡単のため、 $b = 0$  と仮定する。これは独立変数の平面と函数の平面の同じ適当な変換で容易に実現できるし、この章のすべての性質ではそのような変換をしても構わない。

そうすると 要素  $E_R(z)$  は

$$E_R(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad |a_1| > 1$$

なる形を持つ。

要素  $E_A(z)$  は代数的で、位数  $n$ ,  $n > 1$  と仮定する。そうするとそれは

$$E_A(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_r z^r \\ + c_1 z^{\frac{s}{n}} + c_2 z^{\frac{s+1}{n}} + \dots, \quad c_1 \neq 0$$

なる形を持つ。この中で項はべきの増大順に並んでおり、 $\frac{s}{n}$  は最初の有理数べきを表す。

合成要素  $E_R \cdot E_A(z)$  の展開の中で  $z^{\frac{s}{n}}$  の係数は  $a_1 c_1$  であり、要素  $E_A \cdot E_R(z)$  のそれは  $c_1 a_1^{\frac{s}{n}}$  である。したがって

$$a_1 c_1 = c_1 a_1^{\frac{s}{n}}, \quad |a_1| > 1, \quad c_1 \neq 0,$$

でなければならない。これは  $\frac{s}{n} \neq 1$  なので、不可能である。したがって  $E_A(z)$  は通常要素である。同じ議論によって  $b \neq 0$  が得られる。解析要素  $E_A(z)$  はこのように両一価である。

この結果を次のように表す。

XII — もし、代数函数  $A(z)$  が有限の  $E_c$  を持つ有理函数  $R(z)$  と可換なら、函数列

$$A(z), R \cdot A(z), R^{(2)} \cdot A(z), \dots$$

の中に解析要素  $E_A(z)$  で、 $R(z)$  のあるイテレーションの解析要素  $E_R(z)$  と次の関係にあるものが存在する。

- 1° 要素  $E_A(z)$ ,  $E_R(z)$  は両一価である。
- 2° 二つの要素は同じ中心  $z_0$  を持ち、さらに  $z_0 = E_R(z_0) = E_A(z_0)$  である。
- 3° 二つの要素は可換である。

## 6. Poincaré 函数

1°

$z_0$  を有理函数  $R(z)$  の拡張型不動点とする。

先ず、 $z_0 \neq \infty$  と仮定する。この場合、もし微分係数を  $R'(z_0) = s$  とすると  $|s| > 1$  である。したがって Poincaré<sup>3</sup>の証明により、独立変数  $t$  の正則要素  $f(t)$  で

$$\begin{aligned} f(st) &= R[f(t)] \\ f(0) &= z_0, \quad f'(0) = 1 \end{aligned}$$

を満たすものが唯一つ存在する。

解析函数  $f(t)$  は全平面で一価でなければならない。この函数  $f(t)$  を有理函数  $R(z)$  に関する、拡張型不動点  $z_0$  における Poincaré 函数と呼ぶ。

次に、 $z_0 = \infty$  とする。もし

$$\begin{aligned} L(z) &= \frac{1}{z} \\ L \cdot R \cdot L(z) &= R_1(z) \end{aligned}$$

と置くと、点  $z = 0$  は  $R_1(z)$  の拡張型不動点である。すなわち微分係数を  $R_1'(0) = s$  と置くと、 $|s| > 1$  である。函数  $R(z)$  に戻すと

$$R(z) = \frac{1}{s}z + a_0 + a_1 \frac{1}{z} + \dots$$

<sup>3</sup>H. Poincaré : Sur une classe nouvelle de transcendentes uniformes, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1890.

が得られる.

函数  $R_1(z)$  に関する点  $z = 0$  での Poincaré 函数  $f_1(t)$  を考えて

$$L[f_1(t)] = f(t)$$

と置く. そうすると,

$$f(st) = R[f(t)]$$
$$f(t) = \frac{1}{t} + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

が得られる.

この解析要素は上の条件を満たすから, 明かに解析要素は  $f(t)$  しか存在しない. この解析函数  $f(t)$  を  $R(z)$  の拡張型不動点  $z = \infty$  における Poincaré 函数 と呼ぶ.

2°

いま, 函数  $R(z)$  は点  $z_0$  で解析要素  $E_R(z)$  を持ち, それは代数函数  $A(z)$  の解析要素  $E_A(z)$  と共に命題 XII の三つの性質, 両一価性, 不動性, 可換性を持つと仮定する. そうすると

$$E_A[f(st)] = E_A \cdot R[f(t)] = R \cdot E_A[f(t)]$$

が得られる. 言い換えると, 解析要素  $E_A[f(t)]$  は  $f(t)$  と同様の性質を持つ.

したがってもし,  $z_0 \neq \infty$ ,  $E'_A(z_0) = s'$  なら,

$$E_A[f(t)] = f(s't),$$

または

$$f(s't) = A[f(t)]$$

である.

もし  $z_0 = \infty$  で

$$E_A(z) = \frac{1}{s'}z + a'_0 + a'_1 \frac{1}{z} + \dots$$

なら 同様に

$$f(s't) = A[f(t)]$$

が得られる.

このようにして, 函数  $f(t)$  は原点で  $R(z)$ ,  $A(z)$  に関する二つの乗法定理を持つことが分かった. 数  $s, s'$  を乗法定理の, または解析要素  $E_R(z)$ ,  $E_A(z)$  の 乗数 と呼ぶ.

第2部で Poincaré 函数をしばしば採用する. これは点の近傍における可換な函数の集合の振る舞いを詳しく見ることを意味する.

## 7. 独立性の条件の拡張.

1°

もし 1 次でない有理函数  $R(z)$  と代数函数  $A(z)$  が可換で独立なら,  $i$  を任意の正の整数とすると, 函数  $R(z)$  と  $R^{(i)} \cdot A(z)$  もそうである. したがって 命題 XII により, もし 1 次でない有理函数  $R(z)$  が或る代数函数と可換で独立なら,  $R(z)$  のイテレーションの集合の中に, その解析要素  $E_R(z)$  と代数函数の解析要素  $E_A(z)$  とが, 命題 XII で述べられた三つの性質および第 4 の性質: 要素  $E_R(z)$  は  $E_A(z)$  と独立である を持つものが存在する. [ $E_R^{(i)}(z) = E_A^{(j)}(z)$  を満たす整数の対  $(i, j)$  が  $(0, 0)$  以外に存在しないとき, 二つの要素  $E_R(z), E_A(z)$  は独立であると言う.]

逆が成り立つかどうかは自明ではない.

2°

$s, s'$  をそれぞれ要素  $E_R(z), E_A(z)$  の乗数とする. 一般に,  $s^i = s'^j$  となる整数の対  $(i, j)$  が  $(0, 0)$  以外に存在しないとき, この乗数は独立であると言う.

要素の独立と乗数の独立は明かに同じことを意味する. したがって, 上記の乗数  $s, s'$  は独立である.

いま,  $i, j$  を任意の整数として  $s^i s'^j$  の形の乗数の集合を考える.  $\alpha, \beta$  をそれぞれ  $\log s, \log s'$  の一つの値とする. 乗数  $s, s'$  の独立性は整数の組  $(i, j, k)$  で

$$i\alpha + j\beta + k2\pi\sqrt{-1} = 0$$

を満たすものは  $(0, 0, 0)$  以外に存在しないことを意味している. したがって, よく知られているように, 正の数  $\varepsilon$  をいかに小さく取っても, 整数の組  $(i, j, k)$  で

$$0 < |i\alpha + j\beta + k2\pi\sqrt{-1}| < \varepsilon$$

を満たすものが存在する. 言い換えると, 乗数の集合は点 1 を極限に持つ.

逆にもし上の乗数の集合が 1 を極限に持てば, 乗数  $s, s'$  は独立である.

もし乗数の集合が極限 1 を持てば, それは無限個の極限值を持ち, 逆も成り立つ.

3°

いま, Poincaré 函数  $f(t)$  が原点で持つすべての乗法定理に関する乗数の集合を考える. もしその集合の二つの乗数, 例えば  $s, s'$  が独立なら, その集合は無限個の極限点を持つ. 逆の命題が正しいかどうかは自明ではない.

1次でない有理函数  $R(z)$  と可換な代数函数の族を考え,それを  $P_R$  と表す. さらに,  $R(z)$  のイテレーションにより定義される Poincaré 函数の全体を考え, 各 Poincaré 函数が原点で持つ乗法定理に関する乗数の各集合を考える. そのような集合の少なくとも一つが無限個の点よりなる導集合を持つとき,  $P_R$  はコンプレックスであると言い, そうでないとき  $P_R$  はシンプルであると言う. この命名により, 次の命題を得る.

XIII – もし 1次でない有理函数  $R(z)$  が或る代数函数と可換で独立なら, 函数の集合  $P_R$  はコンプレックスである.

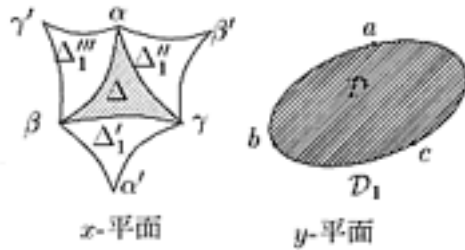
## 第 II 部

### 可換な函数族 $P_R$

#### 8. 命名

1°

$R(z)$  を 1 次でない有理函数とする. 関係  $y = R(z)$  によって対応する



二つの平面  $x, y$  を考え,  $y$  平面に,  $R^{-1}(y)$  の危点のすべてを通るような, 各点で唯一の接線を持つ単純閉曲線を描き,  $y$  平面を二つの領域  $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1$  に分ける. そうすると  $y = R(z)$  によってそれぞれの領域  $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1$  に対応する  $x$  平面内の領域

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \dots; \quad \Delta_1, \Delta_1', \Delta_1'', \dots$$

は単葉で, 単連結であり, それらの境界は高々危点に対応する点のみで特異点として角張った点を持つ. [図の中で  $\alpha, \beta, \gamma$ ]. したがってこの領域は多角形の形を成し, これらの角張った点を頂点とすることができる. この頂点に対しては, その頂点がどの危点に対応しているかということと, 対応する危点における角  $\pi$  に, その頂点におけるどのような大きさの角が対応するかということとを考えることができる. [訳注. 曲線多角形の, その頂点における内角のことである.]

2°

この第 2 部では 1 次でない有理函数  $R(z)$  と可換な代数函数の族  $P_R$  の性質を, その族  $P_R$  がコンプレックスであるという条件の下で調べる.

族  $P_R$  に関する危点の集合  $E_c$  を考える. (正確に言うと, 或る点は, それが族  $P_R$  の函数の危点であるがどうかにしたがって  $E_c$  に含まれるかどうかが決まる.) [訳注. 平面の点で, その上に  $P_R$  の或る函数の危点が存在するようなものの集合.]

$P_R$  の函数によって  $E_c$  の点に対応する点を 頂点 と呼ぶ. 頂点に対して 種と角, すなわちその頂点が  $E_c$  のどの点に対応するかということと,  $E_c$  のその点における角  $\pi$  にその頂点におけるどのような大きさの角が対応するかということとを考える. 同じ点が頂点としては異なる種と角を持

つかかもしれない。[訳注.  $P_R$  の異なる函数によって, または  $P_R$  の同じ函数の異なる分枝によって.]

我々は集合  $E_c$  が有限であることを見た。したがって  $E_c$  の点を, 4 節のように, 函数  $R(z)$  に関して特異点と通常点に分けることができる。それに対応する  $E_c$  の点が特異点か通常点かによって頂点を 特異頂点 または 通常頂点 と言う。

#### IV – 危点の集合 $E_c$

##### 9. 危点の集合 $E_c$ . 独立性の条件についての注意.

1°

危点の集合  $E_c$  は  $R^{(-1)}(z)$  のイテレーションのそれに一致することが分かっている。

命題 X を同じ筋道を辿って一般化しよう。

2°

族  $P_R$  にコンプレックスであるという性質を与える Poincaré 函数を  $f(t)$  とする。[訳注. 乗数の集合が 1 を極限に持つような Poincaré 函数.] 簡単のため  $f(t)$  は原点で  $R(z)$  に関する乗数  $s$  の乗法定理を持つと仮定する。( $s'$ ) を原点で  $f(t)$  に許される乗数の集合とする。( $s'$ ) は点 1 を極限点に持つから, 任意の正の整数  $i_0$  に対して, ( $s'$ ) の乗数  $s'$  を

$$1 < |s'|^i < |s| \quad i = 1, 2, \dots, i_0$$

となるように取ることができる。  $x = f(t), y = f(s'^i t), i = 1, 2, \dots, i_0,$  によって, 点  $t = 0$  の周りに定義される函数  $y(x)$  は  $R(x)$  のすべてのイテレーション,  $R^{(-1)}(x)$  のすべてのイテレーションおよび恒等函数  $x$  とは等しくない。

次に,  $j_0$  を正の整数として, 関係  $x = f(t), y = f(s^{j_0} s'^i t)$  によって点  $t = 0$  の周りに定義される代数函数  $y = A_0(x)$  を考え, そのイテレーションの列

$$A_0(z), A_0^{(2)}(z), A_0^{(3)}(z), \dots$$

を作る。  $A_0^{(i)}(z)$  は関係  $x = f(t), y = f[(s^{j_0} s')^i t]$  によって点  $t = 0$  の周りに定義される代数函数である。函数  $A_0^{(i)}(z), i \leq i_0,$  およびその逆函数は  $R(z)$  のすべてのイテレーション,  $R^{(-1)}(z)$  のすべてのイテレーションおよび恒等函数  $z$  とは等しくない。この列のすべての函数は  $R(z)$  と可換であるから, 列の函数の逆函数の危点集合は  $E_c$  に含まれる。



$l$  を  $R(z)$  の次数とし,  $y = A(x)$  の次数  $(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})$  は,

$$\frac{m}{n^2} > 4l^2$$

を満たすと仮定する. このことは, 乗数  $s^{j_0} s'$  中の  $j_0$  を十分大きく取ることで常に実現できる. さて,  $y = A_0^{(i)}(x)$  の次数  $(\overset{m_i}{x}, \overset{n_i}{y})$  は  $\frac{m_i}{n_i} = \left(\frac{m}{n}\right)^i$  を満たす. したがって

$$m_i > 2l^{2i}$$

が得られる. これは  $A_0^{(-i)}(z)$  の危点集合が  $R^{(-2i)}(z)$  のそれを含むことを意味する. それで 函数列  $A_0(z), A_0^{(2)}(z), A_0^{(3)}(z) \dots$  の逆函数の危点集合は  $E_c$  であることが導かれる.

$A_0^{(p)}(z), A_0^{(q)}(z)$  を上記の列の,

$$q \geq 2p$$

となるような二つの函数とする. 次数  $m_q$  は少なくとも  $2l^{2q}$  より大きい. それで次数  $m_q$  は区間

$$2l^{q'} < m_q \leq 2l^{q'+1}$$

の中にあると仮定する.

さて

$$\frac{m_q}{n_q} = \frac{m_p}{n_p} \left(\frac{m}{n}\right)^{q-p}, \quad n_p \leq n^p$$

であった.

$$\begin{aligned} \therefore m_q &\geq m_p \left(\frac{m}{n^2}\right)^p > m_p \cdot 4l^2. \\ \therefore m_p &< \frac{1}{2} l^{q'-1}. \end{aligned}$$

このことは  $A_0^{(-q)}(z)$  の危点集合は  $R^{(-q')}(z)$  の危点を含み,  $A_0^{(-p)}(z)$  の危点は  $R^{(-q'+1)}(z)$  の危点集合に含まれることを示している. 他方,  $R^{(-q')}(z)$  の危点集合は  $R^{(-q'+1)}(z)$  の危点集合と, それらの  $R(z)$  による直接未来からなる. したがって  $A_0^{(-q)}(z)$  の危点集合は  $A_0^{(-p)}(z)$  の危点集合を含み, 集合  $E_c$  が無限のときは, 前者は後者の外に点を持つ.

3°

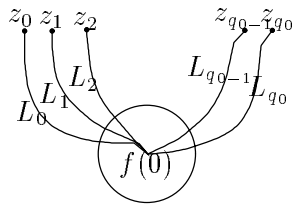
$a_1, a_2, \dots, a_r$  を  $R^{(-1)}(z)$  の危点とする. 集合  $E_c$  は列  $(a_1), (a_2), \dots, (a_r)$  よりなる.  $(a_i)$  は点列  $a_i, R(a_i), R^{(2)}(a_i), \dots$  のことである.

いま  $E_c$  は異なる無限個の点を含むと仮定する. これは函数  $A_0^{(-i_0)}(z)$  が函数  $A_0^{(-p)}(z)$ ,  $p \leq \frac{i_0}{2}$  の危点とは異なる危点を持つことを示している. したがって,

$$\frac{i_0}{2} < q_0 \leq i_0$$

なる区間内に, 函数  $A_0^{(-q_0)}(z)$  が, 函数  $A_0^{(-p)}(z)$ ,  $p = 1, 2, \dots, q_0 - 1$  の危点集合の外に危点  $z_{q_0}$  を持つような, 数  $q_0$  を見出すことができる.

函数  $A_0^{(-q_0)}(z)$  の, 中心  $z_{q_0}$  の代数的要素  $E_{q_0}(z)$  を取る.  $y = E_A(x)$  を  $x = f(t)$ ,  $y = f(s^{j_0} s' t)$  によって点  $t=0$  の周りに定義される解析要素とする.  $A_0^{(-q_0)}(z)$  の Riemann 面上で  $E_A^{(-q_0)}(z)$  から  $E_{q_0}(z)$  への解析接続の道として, 函数  $A_0^{(-i)}(z)$   $i = 1, 2, \dots, q_0$  の危点を避けた道  $L_{q_0}$  を描くことができる. そうすると, 写像  $z' = A_0^{(-i)}(z)$ ,  $i = 1, 2, \dots, q_0$  による  $L_{q_0}$  の



像の中で,  $L_{q_0}$  の始点  $f(0)$  の近傍を  $z' = E_A^{(-i)}(z)$ ,  $i = 1, 2, \dots, q_0$  によって写像することから決められる道  $L_{q_0-i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, q_0$  を一意的に定めることができる. この道  $L_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, q_0 - 1$  の終点を  $z_i$  と表す. そのようにして点列

$$z_1, z_2, \dots, z_{q_0}$$

が得られる. これをよく見よう.

道  $L_0, L_1, \dots, L_{q_0}$  の中の任意の二つ  $L_j, L_k$  は  $L_k = A_0^{(k-j)}(L_j)$  によって結ばれる. これは点  $f(0)$  の近傍を見れば明らかである. したがって列の任意の二点  $z_j, z_k$ ,  $j \neq k$  は

$$A_0^{(i)}(z), \quad i = 1, 2, \dots, q_0 - 1$$

の形の函数で結ばれる.

さらに, 点  $z_{q_0}$  の性質により, この点列は  $E_c$  に含まれている.

4°

いま,

$$r < \frac{i_0}{2}$$

と仮定する. そうすると  $r < q_0$  となる. 点列  $z_1, z_2, \dots, z_{q_0}$  に関して次の二つの場合がある.

第1の場合. 列が二つ以上の同じ点を含む. この場合, 列は函数  $A_0^{(i)}(z)$   $i = 1, 2, \dots, q_0 - 1$  のどれかの不動点を含む. その点とその函数をそれぞれ

れ  $z_h$  と  $A_0^{(k)}(z)$  とすると, 点列  $z_h, R(z_h), R^{(2)}(z_h), \dots$  のすべての点は  $A_0^{(k)}(z)$  の不動点である. したがって, この列は  $R(z)$  のイテレーションの不動点を含む. その点およびその函数をそれぞれ  $R^{(p)}(z_h)$  と  $R^{(q)}(z)$  とすれば

$$R^{(p)}(z_h) = R^{(p+q)}(z_h)$$

が得られる. したがって  $z_h = A_0^{(h-q_0)}(z_{q_0})$  により

$$R^{(p)}(z_h) = A_0^{(h-q_0)}[R^{(p)}(z_{q_0})] = A_0^{(h-q_0)}[R^{(p+q)}(z_{q_0})]$$

が得られる. このことは点列

$$R^{(p)}(z_{q_0}), R^{(p+q)}(z_{q_0}), R^{(p+2q)}(z_{q_0}), \dots$$

が方程式

$$R^{(p)}(z_h) = A_0^{(h-q_0)}(z)$$

の根であることを意味している. したがって列  $(a_1), (a_2), \dots, (a_r)$  の中で点  $z_{q_0}$  を含むものは異なる点が有限個である.

第2の場合. 列  $z_1, z_2, \dots, z_{q_0}$  の全ての点が異なる. この場合  $r < q_0$  だから列  $(a_1), (a_2), \dots, (a_r)$  の一つ, 例えば  $(a_1)$  は列  $z_1, z_2, \dots, z_{q_0}$  の異なる二つの点, 例えば  $z_j, z_k$  を含む. すなわち, 点  $z_j, z_k$  の一つ, 例えば  $z_j$  は

$$R^{(u)}(z) = A_0^{(v)}(z), \quad u, v : \text{整数}$$

$$u > 0, \quad 0 < |v| < i_0$$

の形の方程式の根である. ところで, 函数  $A_0^{(v)}(z)$  は  $R(z)$  と可換であるから, 点列

$$z_j, R(z_j), R^{(2)}(z_j), \dots$$

はすべて上記の方程式の根である. しかも  $0 < |v| < i_0$  だから, 函数  $R^{(u)}(z)$  と  $A_0^{(v)}(z)$  は一致しない. したがって  $(a_1)$  は有限である.

どちらの場合も, 列  $(a_1), (a_2), \dots, (a_r)$  の一つは有限である. 考えを固定するため, その列を  $(a_1)$  と仮定する. さらに  $(a_1)$  の異なる点の個数を  $r_1$  とし, 函数  $R^{(-2p_0)}(z)$  は  $(a_1)$  のすべての点を危点として持つと仮定する.

いま,  $(s')$  の一つの乗数  $s'$  を, 対応する数  $i_0$  が不等式

$$\frac{i_0}{2} > r + r_1,$$

$$\frac{i_0}{2} > p_0$$

を満たすように取る. (これは乗数  $s'$  を点  $t = 0$  の近傍で  $x = f(t)$ ,  $y = f(s'^i t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, i_0$ , によって定められる函数  $y(x)$  が  $R(z)$  のすべてのイテレーション,  $R^{(-1)}(z)$  のすべてのイテレーションおよび恒等函数  $z$  と一致しないように取ることを意味する.) この乗数  $s'$  から出発して上記のような点列

$$z_1, z_2, \dots, z_{q_0}$$

を作る. 他方, 数  $q_0$  は区間  $\frac{i_0}{2} < q_0 \leq i_0$  中にある. したがって, 不等式

$$q_0 > r + r_1,$$

$$q_0 > p_0$$

が得られる.

この第 1 の不等式は, 点列  $z_1, z_2, \dots, z_{q_0}$  がすべて異なるときは, 列  $(a_2), (a_3), \dots, (a_r)$  の一つが有限であることを意味する.

第 2 の不等式は, 列  $z_1, z_2, \dots, z_{q_0}$  が同じ点を含むなら同じ結論になることを意味する. 実際  $A_0^{(-p_0)}(z)$  の危点の集合が  $R^{(-2p_0)}(z)$  の危点を, したがって列  $(a_1)$  を含むことから, 点  $z_{q_0}$  は  $(a_1)$  の外になければならない.

この論法を繰り返して, 集合  $E_c$  は無限という仮定が矛盾であることが分かる. このようにして  $P_R$  の第 1 の性質が得られる.

性質 I. 危点の集合  $E_c$  は有限である.

5°

#### 独立性の条件についての注意

$E_1(z)$  を, 1 次でない有理函数  $R_0(z)$  の, 中心が  $z_0$  の解析要素とし,  $E_2(z)$  を同じ中心  $z_0$  の代数函数の解析要素とする. 要素  $E_1(z), E_2(z)$  は次の条件を満たすと仮定する.

- 1°  $E_1(z), E_2(z)$  は両一価である.
- 2° それらは  $z_0$  を共通の不動点とする.  
[すなわち  $z_0 = E_1(z_0) = E_2(z_0)$ ]
- 3° それらは可換である.
- 4° それらは独立である.

そうすると, 上記と全く同様に同じ結論を得る: 函数  $R_0(z)$  に関する分岐点の集合  $E_c$  は有限である. 命題 XI により, このことは, 点  $z_0$  が  $R_0(z)$  の拡大型不動点であることを示す. その結果 函数  $R_0(z)$  に関する可換な函数族  $P_{R_0}$  はコンプレックスになる.

## V. 特異頂点の集合 $E_s$

10. —

1°

函数族  $P_R$  に関する特異頂点の集合を考え、それを  $E_s$  と表す.

$R(z)$  のイテレーションの族に関する同じ集合、正確に言うと  $E_c$  の特異点とそれの  $R(z)$  に関するすべての階数の過去よりなる集合を考え、それを  $E_{s'}$  と表す.

$a$  を  $E_c$  の特異点とする.  $R(z)$  の或るイテレーションがその点  $a$  を乗数 0 の不動点に持つと考えることができる. したがって、点  $a$  に位置する集合  $E_{s'}$  の頂点は角において下限 0 を持つ.  $E_{s'}$  のすべての点は点  $a$  と同じ性質を持つ. しかも、それは  $E_{s'}$  の点に 固有の性質 であり、これによって  $E_{s'}$  の点を特徴付けることができる.

$z_0$  を  $E_{s'}$  の任意の点とする.  $A(z)$  を  $R(z)$  と可換な任意の代数函数とし、二つの点  $z_0, z'_0$  は  $z'_0 = A(z_0)$  で結ばれていると仮定する. そうすると、函数  $R^{(i)} \cdot A(z)$  は  $A \cdot R^{(i)}(z)$  に含まれているのだから、 $i$  を任意の正の整数とすると、2 点  $R^{(i)}(z_0), R^{(i)}(z'_0)$  はまた同じ関係で結ばれる. このことは点  $z'_0$  がまた集合  $E_{s'}$  の点に固有の性質を持つことを示している. 言い換えると、集合  $E_{s'}$  は変換  $z' = A(z)$  を許す. このことから集合  $E_s, E_{s'}$  は一致することが分かる.

2°

もう一度点  $a$  の近傍をよく見よう. 簡単のため、 $a$  は  $R(z)$  の不動点であると考えておくことができる. 実際、点  $a$  は常に  $R(z)$  の或るイテレーションの不動点であり、さらに  $R(z)$  の或るイテレーションのイテレーションよりなる族の特異頂点の集合  $E_{s''}$  は集合  $E_{s'}$  と同じである.

点  $a$  の周りに単連結で単葉な領域  $\Delta$  を考える. 点  $a$  は  $R(z)$  の縮小型不動点だから、もし領域  $\Delta$  を十分小さく取ると、変換  $z' = R^{-1}(z)$  で  $\Delta$  内に来る点はすべて  $\Delta$  内になければならない.

ところで、 $E_s$  は  $E_c$  の特異点から出発して、変換  $z' = R^{-1}(z)$  を無限回繰り返して得られる. したがって上記の事実は  $E_c$  の特異点は集合  $E_s$  の中で孤立していることを示している. 函数  $R(z)$  に関する  $E_s$  の構造から  $E_s$  のすべての点も孤立点であることが分かる.

3°

いま、函数族  $P_R$  がコンプレックスであることを示す Poincaré 函数  $f(t)$  を取る. 変換  $z = f(t)$  により  $z$  平面の集合  $E_s$  に対応する点集合  $\mathfrak{E}_s$  を  $t$  平面で考える.

原点において、函数  $f(t)$  の持つ乗法定理の乗数の集合の中から任意に乗数  $s'$  を取り、関係の組  $x = f(t)$ ,  $y = f(s't)$  による代数函数  $y = A(x)$  を考える。集合  $E_s$  は写像  $y = A(x)$  を許すから、集合  $\mathfrak{E}_s$  は変換  $t' = s't$  を許す。

さて、乗数の集合は点 1 を極限点に持つ。したがって、集合  $\mathfrak{E}_s$  は、もし存在すれば、孤立点を含むことはない。他方  $E_s$  は孤立点なのだから、これは不可能である。

このようにして、集合  $E_s$  は  $f(t)$  の除外値に含まれる事が分かった。この値は  $R(z)$  のイテレーションの族の真性特異点の集合における、その除外値よりなる。[訳注.  $R(z)$  のイテレーションの族の真性特異点とはその Julia 集合のことである。Julia 集合の任意の点の近傍で  $R(z)$  のイテレーションが決して取らない値は、Poincaré 函数の除外値である。] そしてその除外値は  $E_c$  の特異点である。これは次の第 2 の性質を示す。

性質 II. —  $P_R$  の特異頂点の集合  $E_s$  は  $R(z)$  のイテレーションの族の真性特異点の集合におけるその族の除外値よりなる。

## VI — 通常頂点における角

### 11. 第 1 性質の意味

1°

$R_1(z)$  を  $R(z)$  の任意のイテレーション、 $A(z)$  を  $R(z)$  と可換な任意の代数函数として、関係

$$y = R_1(x), \quad y = A(z)$$

による三つの平面  $x, y, z$  の対応を考える。平面  $x, z$  の間の関係としては一般に幾つも存在するが、それらの中から  $R(z)$  と可換なものを取るものとする。そのような関係は唯一つ、すなわち

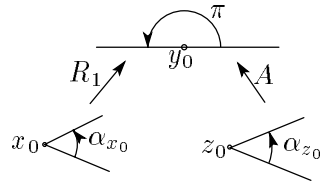
$$z = R_1 \cdot A^{(-1)}(x)$$

でなければならないことを示そう。

実際、平面  $x, z$  の間の関係は  $A^{(-1)} \cdot R_1(x)$  の形である。函数  $A^{(-1)} \cdot R_1(x)$  の中から  $R(z)$  と可換な函数  $A_0(z)$  を勝手に取る。そうすると函数  $R_1 \cdot A_0(z)$  は函数  $A_0 \cdot R_1(x)$  と  $R_1 \cdot A^{(-1)} \cdot R_1(x)$  の中に同時に含まれる。言い換えると、これらの二つの函数の集まりの中に少なくとも一つ等式  $A_0 \cdot R_1(x) = R_1 \cdot A^{(-1)} \cdot R_1(x)$  が存在する。このことから  $A_0(x) = R_1 \cdot A^{(-1)}(x)$  が得られる。これが証明すべき事であった。

したがって、先の約束の下で、平面  $x, y, z$  の間の対応は与えられた二つの関係で完全に決まる。このようなサイクルを簡単のために 可換サイクル と呼ぶ。

上記のように対応する平面  $x, y, z$  の中で、対応する三つの点  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$  を考える。基準として点  $y_0$  において角  $\pi$  を取り、点  $x_0, z_0$  においてそれぞれそれに対応する角  $\alpha_{x_0}, \alpha_{z_0}$  を考える。



もし各点  $x_0, z_0$  が集合  $E_c$  の外にあれば等式

$$\alpha_{x_0} = \alpha_{z_0}$$

が存在する。[訳注. 5]

2°

幾つかの特別な点を注意する。

1° 三つの点  $x_0, y_0, z_0$  の中に、少なくとも一つ、集合  $E_s$  の点でないものがあれば、他のどれも  $E_s$  の点ではない。それでもし点  $y_0$  が  $E_s$  の外にあれば、函数  $R_1(x)$  による、点  $y_0$  の直接過去であって、集合  $E_c$  内にあるものの個数は、 $R(x)$  のイテレーションの族の中で明かに上限を持つ。(  $m$  重の点を  $m$  個と数えて。 ) [訳注. 6] したがって、 $y_0, z_0$  を勝手に与えたとき、 $x_0$  を  $E_c$  の外に取るためには、イテレーションの階数を十分大きく取りさえすれば良い。したがって、 $R(z)$  のイテレーションの族に関して、もし同じ種の通常頂点が  $E_c$  の点以外ですべて同じ角を持つなら、函数族  $P_R$  に関して同様である。 [訳注.  $z_0$  を  $P_R$  の函数  $A(z)$  による通常頂点としたとき、上記のように対応する  $x_0$  を  $E_c$  の外に取れる.]

2° 不等式  $\alpha_{x_0} \leq \alpha_{z_0}$  を得るためには、点  $x_0$  が  $E_c$  に含まれていないことだけで十分である。 [訳注. 等式のときの訳注で考えた写像  $z = A^{(-1)} \cdot R_1(x)$  は、今の場合、多対1である.] したがって、 $P_R$  の通常頂点における角は、集合として零でない下限を持つ。 [訳注.  $E_c$  の通常点の上での分岐の位数は有界である.]

3° もし  $A^{(-1)}(z)$  が  $R(z)$  に関して既縮なら、その約束 [訳注.  $R \cdot A^{(-1)}(x)$  として  $R(x)$  と可換なものを取ると言う約束.] は必要ではなく、ただ一つのサイクルしか存在しない。言い換えると、可換なサイクルでは  $y_0, z_0$  が与えられたとき、点  $x_0$  としては  $R_1(z)$  に関する点  $y_0$  の任意の直接過去を取ることができる。したがって、 $R(z)$  に関する可換で既縮な代数函数の族に関して、もし  $E_c$  の通常点の各々が  $E_c$  の外に少なくとも一つ直接未来を持てば、 $R(z)$  のイテレーションの族に関する通常頂点の

前述の同角性を証明することができる. [訳注. 次の節に第 2 の特別な場合という言葉が出てくるが, ここで述べたことが第 1 の特別な場合である.] [訳注. 7]

## 12. 特別な場合

1°

反対方向 [訳注.  $y = R(x)$  の方向に対して  $y = A(z)$  の方向.] への通常頂点の同角性を証明できる第 2 の特別な場合を見つけよう.

この節で述べるのは, 1 節の特別な場合なので, そこでと同じ複雑さ, すなわち曖昧点の問題に出会うであろう. しかしこれらの点の個数は有限なので, 対応を適当に選ぶことで簡単にそれを排除することができる. それで, 記述を簡単にするため, 曖昧点には触れない.

2°

ホモジニアス・システム. — 前節の可換サイクルで結ばれた 3 平面  $x, y, z$  を考える. Riemann 面  $(y, z)$  上の多価性  $\xi$  の函数  $x(y, z)$  を考える. [訳注. 対応する 3 点を  $x, y, z$  とするとき,  $x$  は Riemann 面  $(y, z)$  上の多価函数であり, その多価性を  $\xi$  としている.]  $y = y_0, z = z_0$  を対応する点の対とするとき, 点  $(y_0, z_0)$  における  $x(y, z)$  の値の列を

$$x_0, x_1, \dots, x_{\xi-1}$$

とする. [訳注. 函数  $x(y, z)$  が Riemann 面  $(y, z)$  上の点  $y = y_0, z = z_0$  で分岐しているときは, この  $\xi$  個がすべて異なるわけではない.] 我々の研究対象である, このような点の列を システム と呼ぶ. 上記の点列をシステム  $X_0$  と表す.

もし点  $y_0$  で, 基準として角  $\pi$  を取り, 平面  $x, z$  の対応する角を考えると, 前節の等式  $\alpha_{x_0} = \alpha_{z_0}$  は次の事を示している.

$z_0$  が  $E_c$  の外にある限り, システム  $X_0$  の点における角と点  $z_0$  における角は,  $E_c$  の点を除いて, すべて等しい.

システム  $X_0$  のこの性質が実際に意味を持つためには次の条件が満たされていることが必要十分である :

1° システム  $X_0$  は少なくとも一つ  $E_c$  外の点を持つ.

2° 点  $y_0$  と共にシステム  $X_0$  を定義する  $z$  平面の点の中に少なくとも一つ  $E_c$  外の点が存在する. [訳注. そのような  $z$  平面の点は  $z_0$  しかないわけではない.]

システムがこの二つの条件を満たすとき, それを ホモジニアス であると呼ぶ.

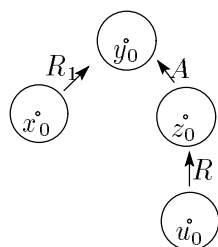


簡約システム. - いま, 第 4 の平面  $u$  を, 関係

$$z = R(u)$$

によって付け加える.

平面  $y, u$  の間の対応および平面  $u, x$  の間の対応としては, やはり  $R(z)$  と可換なものを取る. そうすると, 平面  $x, y, z, u$  の間の対応は一意的に定まる. (以下では, 新しい平面  $u$  に関する曖昧点に対する注意も必要になる.)



$u_0$  を平面  $u$  の, 点  $y_0, z_0$  に対応する点とする. 関係  $z_0 = R(u_0)$  が存在する.  $x$  平面で点  $y_0, u_0$  によって定まるシステム  $X'_0$  を考える. 点  $y_0$  に対応する点  $x = x'_0$  がシステム  $X'_0$  に含まれるためには, 点  $x'_0, u_0$  によって定まる関係が  $R(z)$  と可換なこと, すなわち, 関係

$$R_1 \cdot A^{(-1)} \cdot R^{(-1)}(x'_0) = u_0$$

が存在することが必要十分である. 他方, 点  $x'_0, u_0$  は, それがこの関係を満たす限り, また

$$R_1 \cdot A^{(-1)}(x'_0) = z_0$$

を満たす. 言い換えると, システム  $X'_0$  は  $X_0$  に含まれる.  $X'_0$  を  $R(z)$  による  $X_0$  の簡約システムと呼ぶ.

特に, もし函数  $A(z)$  が  $R(z)$  に関して既縮なら, 点  $u_0$  として, 函数  $R(z)$  による, 点  $z_0$  の任意の直接過去を取ることができる. [訳注. 今度は,  $A^{(-1)}(z)$  がではなく,  $A(z)$  が  $R(z)$  に関して既縮であると考えている.]

このことから, 次の特別な場合が得られる:

函数  $A(z)$  は既縮と仮定し,  $z$  平面で  $E_c$  の通常点の中から任意に点  $z_0$  を取る. もし点  $z_0$  に対応する  $x$  平面のシステム  $X_0$  とその  $R(z)$  によるすべての簡約システム  $X'_0$  がホモジニアスなら, 函数  $R(z)$  に関する同じ種の通常頂点は,  $E_c$  の点を除いて同じ角を持つ. [訳注. 8]

### ホモジニアスの第 1 条件.

引き続き同じ状態: 可換なサイクルで結ばれた三つの平面  $x, y, z, x$  平面の任意のシステム  $X_0, R(z)$  に関する  $X_0$  の任意の簡約システム  $X'_0$  を考える. この状況の下で函数  $A(z)$  は  $R(z)$  に関して固有既縮と仮定す

る。さらに以下の研究で、システム  $X_0$  は  $E_s$  の点を含まないと仮定することが許されるとする。

この仮定のもとで、上記の特別な場合が存在するための十分条件を簡単に、次の形に書くことができる。

- 1° システム  $X_0, X'_0$  はホモジニアスの第 1 条件を満たす。
- 2° それらはホモジニアスの第 2 条件を満たす。

$n$  を  $A(z)$  の多価性とする。  $nv$  を  $z$  平面の、点  $y = y_0$  に対応する  $E_c$  上にある点の個数とする。 [訳注.  $A(z) = y_0$  となる点の内、  $E_c$  の点の上にあるものを、重複度を込めて数えている.] もし点  $y_0$  が  $E_s$  の点でないなら、数  $v$  は函数族  $P_R$  内で上限  $w$  を持つ。 実際、前節で、  $P_R$  の通常頂点における角は零でない下限を持つことを見た。 [訳注.  $E_c$  の点の個数は有限だし、重複度は上限を持っている.]

可変 (variable) なシステム  $X_0$  が  $E_c$  外に点を持つためには、

$$\xi > w$$

であれば十分である。 [訳注. 今の場合、上記の  $A(z)$  に当たるものは有理函数  $R_1(x)$  なので、  $n=1$  である.] 同様に可変な簡約システム  $X'_0$  に対する同じ十分条件は

$$\xi' > w$$

で与えられる。  $\xi'$  は  $X'_0$  の点の個数である。

ところで、  $l$  を  $R(z)$  の次数とすると、不等式

$$l\xi' \geq \xi$$

が得られる。 実際、  $X_0$  の点は Riemann 面  $(y, z)$  上で、点  $(y_0, z_0)$  を不変にする解析接続に対して推移的だから、 [訳注. 函数  $x(y, z)$  は Riemann 面  $(y, z)$  上、一続きの多価函数である.] すべての  $R(z)$  による  $X_0$  の簡約システムの全体の和集合は元のシステム  $X_0$  を含む。 [訳注.  $\xi$  個の点が高々  $l$  個の組に分かれているだけである.] したがって、ホモジニアスの第一条件に対する十分条件は

$$\xi > lw$$

で与えられる。

$n\xi_i$  を函数  $A \cdot R^{(-i)}(z)$   $i = 1, 2, \dots$  の多価性とする。 [訳注.  $y = R^{(i)}(x)$ ,  $y = A(z)$  による可換サイクルで、Riemann 面  $(y, z)$  上の多価函数  $x(y, z)$  の多価性を  $\xi_i$  としている.] 函数  $A(z)$  は  $R(z)$  に関して固有既縮と仮定したから

$$1 < \xi_1 < \xi_2 < \dots$$

が得られる.

したがって, ホモジニアスの第一条件を満たすためにはイテレーション  $R_1(z)$  の階数を, 函数  $R(z)$  の構造のみによって定まる一定の正の整数より大きく取れば十分である. このことから  $R_1(z)$  の次数  $l_1$  は一定以下と仮定することが許される.

5°

ホモジニアスの第二条件.

先ず, 解析接続に対する或る定数を導入しよう. 一先ず  $X_0$  の位置を固定する.

$$z_0, z_1, \dots, z_{p-1}$$

を, 各々は点  $y_0$  と共にシステム  $X_0$  を定める  $z$  平面の点の全体とする. [訳注. 9] もし  $y$  平面に, 点  $y_0$  から始まり, 任意の点  $y_0''$  に終わる道を描くと, システム  $X_0$  の点の一つの列  $X_0''$  に至る. その道に対応する  $z$  平面の道によって点  $z_0, z_1, \dots, z_{p-1}$  の到達する点を

$$z_0'', z_1'', \dots, z_{p-1}''$$

とする.

$X_0''$  の点列は明かに一つのシステムを作る. 列  $z_0'', z_1'', \dots, z_{p-1}''$  の各点は点  $y_0''$  と共にシステム  $X_0''$  を定める. なおそれらの道は曖昧点には触れないと考えている. 点  $z_0, z_1, \dots, z_{p-1}$  はすべて異なるのだから, 点  $z_0'', z_1'', \dots, z_{p-1}''$  もまた異なる. 言い換えると,  $z$  平面に少なくとも  $p$  個の点で,  $y_0''$  と共にシステム  $X_0''$  を定めるものが存在する. しかもこの過程は可逆的である. このことは数  $p$  は可変なシステム  $X_0$  に対して定数であることを示している..

$\zeta$  を  $z$  平面内で点の対  $x_0, y_0$  に対応する点の個数とする. すなわち, 函数  $z(x, y)$  の多価性である. [訳注.  $y = R^{(i)}(x)$ ,  $y = A(z)$  による可換サイクルで, Riemann 面  $(x, y)$  上の多価函数  $z(x, y)$  の多価性を  $\zeta$  としている.] 数  $q$  を

$$\zeta = pq$$

で定める.

この数  $q$  は与えられた点を含む  $x$  平面内の異なるシステムの個数を表す. (二つのシステムは, 異なる点を含むとき且つそのときのみ異なるという.) このことは

$$q < l_1(l_1 - 1) \cdots 2 \cdot 1$$

であることを示している. [訳注. システムは  $y_0 = R_1(x)$  を満たす  $l_1$  個の  $x$  から取り出された  $\xi$  個の  $x$  の組なのだから, この不等式は随分粗い

評価である.] ところで, 仮定から次数  $l_1$  は限られており, したがって, 数  $q$  も限られている.

さて, ホモジニアスの第二条件を満たすためには

$$p > nw$$

であることが十分である. このためには比  $\frac{\zeta}{n}$  を十分大きく取ればよい. 他方,  $m$  を  $A^{(-1)}(z)$  の多価性とすれば,

$$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{m}{l_1}$$

である. したがって比  $\frac{m}{n}$  を十分大きく取ればよい. [訳注.  $\frac{\zeta}{n} = \frac{\xi}{l_1} \frac{m}{n}$  であるが, 一般に  $\xi \leq l_1$  である.]

この証明法は  $R(z)$  のイテレーションを許す. それで次の第 2 の特別な場合が見出された.

$A(z)$  を  $R(z)$  による固有既縮な任意の函数とする.  $(x, y)$  を関係

$$y = A(x)$$

の次数とする. もし, 比  $\frac{m}{n}$  が  $A(z)$  のような函数族で制限されていないなら,  $R(z)$  のイテレーションの族に関する同じ種の通常頂点は,  $E_c$  の点を除いて同じ角を持つ.

### 13. 固有既縮な函数の乗数の集合.

$(s')$  を  $R(z)$  の或るイテレーションの Poincaré 函数  $f(t)$  の, 原点における乗法定理に関する乗数の集合で, 1 を極限点に持つものとする. 簡単のため, このイテレーション自身を函数  $R(z)$  とする.

$s'$  を  $(s')$  の任意の乗数とする.  $s$  を  $(s')$  に含まれる  $R(z)$  の乗数とする.  $s'$  を

$$s' = s^i s''$$

と分解することができる.  $i$  は整数であり  $s''$  は関係の対  $x = f(t)$ ,  $y = f(s''t)$  によって定義される函数  $y(x)$  が  $R(z)$  に関して固有既縮なものになるような乗数である. そうしてこのような方法で  $(s')$  に対応する乗数  $s''$  の集合  $(s'')$  を考える. [訳注. 上記の  $R(x)$  に関して固有既縮な代数函数  $A(x)$  の乗数である.]

さて、集合  $(s')$  は 1 を極限点に持つ。したがって、無限集合である  $(s'')$  も極限点を持つ。[訳注. 極限点が無限遠点のときも含めて.] その位置によって二つの場合に分かれる。

第 1 の場合. – 集合  $(s'')$  が有限の位置に極限点を持つ場合. –

$s''_0$  を  $(s'')$  の有限の極限点とする.  $z_0$  を  $E_c$  の任意の通常点とする. 点  $z_0$  は,  $f(t)$  の除外値ではないから,  $f(t_0) = z_0, t_0 \neq 0$  となるような点  $t_0$  に対応している. 実際,  $R(z)$  は 1 次ではないから, 函数  $f(t)$  は無限遠点を真性特異点に持っている. それで  $t$  平面に  $s''t_0$  のような点の集合を考えると, それらは  $s''_0t_0$  を極限点に持つ. したがって,  $z$  平面の点集合で  $t$  平面のこの集合に  $z = f(t)$  で対応するものは  $E_c$  の外に点を持つ. [訳注. そのような  $z$  の集合は異なる無限個の点を含む.] これは 11 節の第 1 の特別な場合である. [訳注. 関係の対  $x = f(x), y = f(s''t)$  によって定義される函数  $A(z)$  は  $R(z)$  に関して固有既縮である. 他方  $z_0$  を  $E_c$  の通常点とし,  $z_0 = f(t_0)$  と置けば,  $A(z_0) = f(s''t_0)$  であり,  $A(z_0)$  は  $E_c$  には含まれない.]

第 2 の場合. –  $(s'')$  が無限遠点のみを極限点に持つ場合. –

集合  $(s')$  に含まれる乗数  $s'$  で, 点 1 の周りの有限な領域にあり,  $x = f(t), y = f(s't)$  で定まる代数関係で, 変数  $x, y$  の次数をそれぞれ  $m, n$  としたとき,  $m \geq n$  を満たすものを選ぶ. 乗数  $(s')$  の中で上記の  $s'$  のような乗数は部分集合  $(s')_0$  を作る.

集合  $(s')_0$  はまた 1 を極限点に持つ. したがって,  $(s')_0$  から上記の関係  $s' = s^i \cdot s''$  によって対応する  $(s'')$  の部分集合  $(s'')_0$  は無限個の乗数を含み, したがって無限遠点を極限点に持つ.  $(s')_0, (s'')_0$  を結ぶ関係  $s' = s^i s''$  における整数  $i$  は下限  $-\infty$  を持つ. 何故なら,  $s'$  は有界な領域に含まれているが,  $s''$  はそうではなく,  $|s| > 1$  だからである.

いま  $\binom{m'}{x}, \binom{n'}{y}$  を  $x = f(t), y = f(s''t), s'' \in (s'')$  によって定まる代数関係の次数とする.

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} l^i \geq 1$$

$$\therefore \frac{m'}{n'} \geq l^{-i}$$

が得られる. これは,  $R(z)$  による固有既縮な任意の函数を  $A(z)$  と表し, 関係  $y = A(x)$  の次数を  $\binom{m'}{x}, \binom{n'}{y}$  と表すなら, 比  $\frac{m'}{n'}$  の集合の上限は無関係大であることを示している. これは前節の第 2 の特殊な場合である.

このようにして, 11 節の注意により, 函数族  $P_R$  の第 3 の性質が見出された.

性質 III. – 可換な函数族  $P_R$  で, 同じ種の通常頂点は  $E_c$  の点を除き, 同じ角を持つ.

## 14. 結 論

1°

“結論”という表題のもとで、次の二つの定理を述べる。結果はこれだけではないが、しかし、見てきたように、これが一連の節全体の目標である。

定理 I. – もし 1 次でない有理函数  $R(z)$  が或る代数函数と可換で独立なら、 $R(z)$  に関する函数族  $P_R$  はコンプレックスである。

定理 II. – もし 1 次でない有理函数  $R(z)$  に関する可換な函数族  $P_R$  がコンプレックスなら、函数族  $P_R$  は次の性質を持つ。

1° 危点の集合  $E_c$  は有限である。

2° 同じ種の頂点は、 $E_c$  の点を除いて、同じ角を持つ。

2°

コンプレックスであるという条件についての注意。

第 IV 章で得た例のように、コンプレックスであるという条件は函数族  $P_R$  が命題の性質をもつための絶対的に必要な条件ではない。それにたいする主要な理由は次の通りである。

コンプレックスである条件は  $E_s$  の点を含まない 1 次でない有理函数  $R(z)$  の或る不動サイクルにおいて拡張型であることを仮定している。にも拘らず、それは  $R(z)$  に関する集合  $E_c$  が有限であるだけで必然的に得られる。

第 IV 章に戻り、集合  $E_c$  が有限と言う命題の証明法を見よう。コンプレックスである条件は、ここでは  $i_0$  のような正の整数の集合が有界でないという点のみで使われている。これはこの証明法に対して十分であるだけである。

上記の事実にも拘らず、 $P_R$  がコンプレックスであるという形が  $P_R$  の性質に直接触れているという理由で、私はこの形の条件を採用した。

---

VII – 乗法定理についての注意。

15. 集合  $E_c$  が有限の場合の  $R(z)$  の不動点。

1°

1 次でない有理函数  $R(z)$  が有限集合  $E_c$  を持つと仮定する。  $E_c$  の特異点よりなるサイクルを除いて、 $R(z)$  の不変サイクルはすべて拡張型である。この拡張性をさらに詳しく見よう。

$a$  を  $R(z)$  の任意の拡張型不動点,  $b$  を任意の点として,  $a, b$  に関し,  $a$  より始まって  $b$  に終わる曲線  $L$  を考える. その立体射影による Riemann 球面への像は Jordan 曲線である. 簡単のため, この曲線  $L$  は二つの端点以外は  $E_c$  を構成する有限個の点を通らないと仮定する.

平面の列

$$z, z', z'', \dots$$

を考え, 二つの隣接した平面  $z^{(i)}, z^{(i+1)}$  は  $z^{(i+1)} = R^{(-1)}(z^{(i)})$  で結ばれているとする. この各平面で, 点  $a$  を始点とする  $L$  の像は一意的に定まる. その像の列を

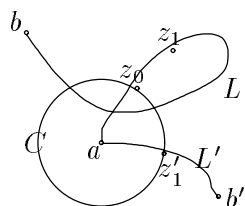
$$(a) \quad L', L'', L''', \dots$$

と表す. この列 (a) の収束をよく見よう.

列 (a) は点  $a$  に一様収束しないと仮定する.

$E(z)$  を  $R^{(-1)}(z)$  の  $a$  における解析要素で,  $E(a) = a$  となるものとする. 点  $a$  は  $R(z)$  の拡張型不動点だから,  $E(z)$  の収束円に含まれる同心円  $C$  を, 開領域  $C$  が閉領域  $E(C)$  を含むように見つけることができる.

$z_0$  を点  $a$  から出発して曲線  $L$  を描くとき, 円周  $C$  と交わる最初の点とする.  $z'_1$  を  $L'$  のそれ,  $z''_2$  を  $L''$  のそれ等々すると, 点列  $z_0, z'_1, z''_2, \dots$  が得られる. 曲線  $L$  上に対応する点列



$$z_0, z_1, z_2, \dots$$

を考える.

この列の中で点は円  $C$  の性質から曲線  $L$  上で, 点  $a$  から遠のく. しかも列 (a) の収束の仮定から, この列は無有限個の点を含む. したがって, 点列は  $L$  上のただ一点を極限点に持つ. それを  $\zeta$  と表す. 点  $\zeta$  は次の性質を持つ.

1° 列 (a) の曲線上の  $\zeta$  の像はすべて領域  $C$  の外にある.

2°  $L$  上にある, 点  $a$  と  $\zeta$  の間の任意の点の, (a) 上への像は  $a$  に正則に収束する.

いま,

$$\zeta', \zeta'', \zeta''', \dots$$

を点  $\zeta$  の列 (a) 上への像とする. 点  $\zeta$  のまわりの領域  $\mathcal{D}$  を考え, その領域内で  $R_0^{(-i)}(\zeta) = \zeta^{(i)}$  となる函数  $R^{(-i)}(z)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , の分枝  $R_0^{(-i)}(\zeta)$  を考える. そうすると函数の列

$$R_0^{(-1)}(z), R_0^{(-2)}(z), \dots$$

が得られる.

$\zeta$  の性質から, この列の函数は領域  $\mathfrak{D}$  がいかに小さくとも, そこで正規族をつくることはできない. これは列の函数が一価であるとき, 不可能である. 点列  $\zeta', \zeta'', \dots$  についても同様である. このことは点  $\zeta$  は  $E_c$  の特異点であることを示している. 曲線  $L$  についての仮定から,  $\zeta = b$  でなければならない.

曲線  $L$  の像の列  $(a)$  は,  $b$  が  $E_c$  の特異点である場合を除いて, 点  $a$  に一様収束する.

2°

超越的分岐点.

$z = \varphi(t)$  を全有限領域内での  $t$  の有理型函数とする. 逆函数  $t = \varphi^{(-1)}(z)$  が Riemann 面上の点  $z_0$  で (正則または極の) 通常要素を持たないとき,  $z_0$  は  $\varphi^{(-1)}(z)$  の分岐点と呼ばれる. もし分岐点がそのまわりで代数的要素を持てばその分岐点は代数的と言い, そうでないときは, 超越的と言う.

いま  $f(t)$  を  $R(z)$  の, 点  $a$  における Poincaré 函数とする. 函数  $f(t)$  は

$$f(st) = R[f(t)], \quad |s| > 1$$

の形の乗法定理を持つ.

逆函数  $t = \varphi^{(-1)}(z)$  の Riemann 面上, 点  $(t = 0, z = a)$  を始点と考える. もし曲線の列  $(a)$  が点  $a$  に一様収束するなら, 曲線  $L$  の終点  $b$  は超越分岐点ではない. したがって次のことがわかる.

XIV. – もし有理函数  $R(z)$  のイテレーションに関する危点の集合  $E_c$  が有限なら,  $R(z)$  のイテレーションに関する Poincaré 函数は  $E_c$  の特異点以外に逆函数の超越分岐点を持たない.

#### 16. Poincaré 函数の危点

1次でない有理函数  $R(z)$  に関する函数族  $P_R$  は複素である  
と仮定する.  $P_R$  の任意の函数  $A(z)$  に関する列

$$A(z), R \cdot A(z), R^{(2)} \cdot A(z), \dots$$

の函数は  $R(z)$  の或るイテレーションとともに共通の Poincaré 函数を持つことが分かっている. したがって乗法定理に関する  $A(z)$  の性質を明かにするためには 共通の Poincaré 函数を明かにすればよい.

$a$  を  $R(z)$  の乗数  $s$  の拡張型不動点とする.  $f(z)$  を  $R(z)$  の点  $a$  における Poincaré 函数とする.



$f^{(-1)}(t)$  の超越的分岐点は  $f(t)$  の除外値と一致することが分かっている。 さらに  $f^{(-1)}(t)$  の代数的分岐点の性質をよく見よう。

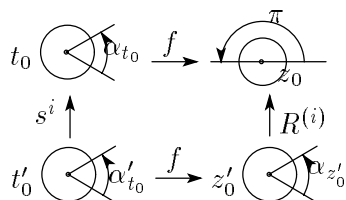
$i$  を正の整数とし、関係

$$z = f(t), \quad z' = f(t'), \quad t = s^i t'$$

で結ばれた四つの平面  $z, z', t, t'$  を考える。このことから

$$z = R^{(i)}(z')$$

が得られる。



この平面  $z, z', t, t'$  の中で、四つの対応する点をそれぞれ  $z_0, z'_0, t_0, t'_0$  とする。点  $z_0$  のまわりに基準として角  $\pi$  を取り、点  $z'_0, t_0, t'_0$  における対応する角をそれぞれ  $\alpha_{z'_0}, \alpha_{t_0}, \alpha_{t'_0}$  とすると

$$\alpha_{t_0} = \alpha_{t'_0}$$

である。

もし点  $z_0, t_0$  を固定して  $i$  を無限に大きくすると、点  $t'_0, z'_0$  は、 $t'_0 = 0$  のときを除いて、それぞれ点  $0, a$  に限りなく近づく。したがって  $i$  が十分大きく、 $t_0 \neq 0$  のとき

$$\alpha_{z'_0} = \alpha_{t'_0}$$

$$\therefore \alpha_{t_0} = \alpha_{z'_0}$$

が得られる。ここで点  $z'_0$  は  $E_c$  の外にある。このことは次のことを示している。

$f^{(-1)}(t)$  の代数的危点は  $E_c$  の通常点と一致する。さらに、同じ危点  $a$  における  $f^{(-1)}(t)$  の解析要素は、 $a$  を中心とする解析要素であって、 $a$  で値  $a$  を取るようなものがもしあれば、それを除いて、すべて同一の位数を持つ。この例外の解析要素は常に通常である。

この例外を除くためには、 $f(t)$  の代わりに、 $i$  を適当な正の整数として、函数  $f(t^i)$  を取れば良い。

## 17. 乗法定理

1°

前節の研究から定理 II は次の形にすることができる。

定理 III.-  $t$  の全有限領域に原点で乗法定理を持つ有理型函数  $\varphi(t)$  が与えられたとき、もし  $\varphi(t)$  が原点における乗法定理に関して条件

- 1° 1次でない有理函数の乗法定理が存在する.
- 2° 乗数の集合は点  $0, \infty$  以外に極限点を持つ.

を満たすなら、 $\varphi(t)$  は次のような性質を持つ.

- 1° 逆函数  $\varphi^{(-1)}(t)$  の危点は平面上有限個の位置にしかない.
- 2° 函数  $\varphi^{(-1)}(t)$  は  $\varphi(t)$  の除外値以外に超越的分岐点を持たない.
- 3° 函数  $\varphi^{(-1)}(t)$  は、中心で値  $0$  を取る解析要素を除いて、平面上の同じ位置において、同じ位数の代数的要素を持つ. しかも、この例外は函数  $\varphi(t)$  の中で、 $p, q$  を正の整数とし、 $t' = t^{\frac{p}{q}}$  の形の適当な変換によって、一価性を失うことなく除去することができる.

この定理を証明するためには以下に証明する二つの注意をするだけで十分である.

函数  $\varphi(t)$  が 1 次でない有理的な乗法定理

$$\varphi(st) = R[\varphi(t)]$$

を持つと仮定する. ここで、 $R^{(i)}(z) = z$  ではないから、零と異なる整数  $i$  に対し、乗数  $s$  は条件

$$s^i = 1$$

を満たすことはない.

計算を簡単にするため、 $\varphi(0) = 0$  と仮定する. これは適当な一次変換で  $\varphi(t)$  を変換することで常実現される. その結果  $R(0) = 0$  である.

原点における  $\varphi(t)$  の逐次微分係数について

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \dots = \varphi^{(p-1)}(0) = 0 \quad \varphi^{(p)}(0) \neq 0$$

と仮定する.

乗法定理を  $q$  回微分して

$$s^q \varphi^{(q)}(0) = R'(0) \varphi^{(q)}(0) + \sum C_{ij\dots k} \varphi^{(i)}(0) \varphi^{(j)}(0) \dots \varphi^{(k)}(0)$$

$$i + j + \dots + k = q \quad i < q, j < q, \dots, k < q$$

が得られる.  $C_{ij\dots k}$  は有限の定数である.

この等式で  $q = p$  と置くと

$$s^p = R'(0)$$

が得られる.

$q$  が  $p$  の整数倍と異なる数であり,  $r$  が  $p$  の整数倍と異なる  $q$  より小さい任意の数ならば  $\varphi^{(r)}(0) = 0$  であると仮定する. そうすると

$$s^q \varphi^{(q)}(0) = R'(0) \varphi^{(q)}(0)$$

$$\therefore \varphi^{(q)}(0) = 0$$

が得られる. したがって数学的帰納法により, この等式は正しい.

したがって, 全有限領域における有理型函数  $\Phi(t)$  で

$$\varphi(t) = \Phi(t^p)$$

を満たすものを見出すことができる. これは値  $\varphi(0)$  が何であってもそうである. この函数  $\Phi(t)$  は原点を, 方程式  $\Phi(t) = \Phi(0)$  の単根として持ち, 乗法定理

$$\Phi(s^p t) = R[\Phi(t)]$$

を持つ.

一般に, もし函数  $\varphi(t)$  が原点で乗数  $s'$  を持つなら,  $\Phi(t)$  は原点で乗数  $s'^p$  を持つ. したがって函数  $\Phi(t)$  は  $\varphi(t)$  と同じ性質を持つ.

この定理を証明するためには, 函数  $\Phi(t)$  が  $R(z)$  の Poincaré 函数であることを示せば十分である. それはもし  $|s^p| > 1$  なら実現される.

さて, 函数  $\Phi(t)$  は, 無限遠点が真性特異点であろうとなかろうと, 高々二つを除いてすべての値を取る. したがって, 点  $t_0, z_0$  が存在し, 必要なら  $R(z)$  のイテレーションを取るとして, それによって,

$$\Phi(t_0) = z_0, \quad R(z_0) = z_0, \quad t_0 \neq 0$$

となると仮定することができる.

いま, 点列

$$t_0, s^p t_0, s^{2p} t_0, \dots$$

を考える. ここで函数  $\Phi(t)$  はただ一つの値  $z_0$  を取る.

この列の極限点に関して, 三つの可能性がある. 一つは極限点が存在しないこと. これは  $s^i = 1$  を満たす正の整数  $i$  を生むことで不可能である. 二つ目は有限の領域内に少なくとも一つ極限点が存在すること. これは函数  $\Phi(t)$  が全有限領域で有理型であることから不可能である. したがって唯一の可能性は無限遠点が唯一の極限点であること. これは  $|s^p| > 1$  を与える. このようにして Julia 氏が注意した  $|s^p| > 1$  が得られる. C. Q. F. D.

注意. - この定理でもし原点で  $s$  と独立な乗数が存在すれば, 函数  $\varphi(t)$  が全有限領域で有理型という条件は必要ではない. 証明には  $\varphi(t)$  が原点のまわりで有理型というだけで十分である.

2°

定理 III の補足. - 定理 III の函数  $\varphi(t^{\frac{1}{l}})$  を  $\Phi(t)$  と表す. 引き続き函数  $\Phi(t)$  は 1 次でない有理函数  $R(z)$  に関する乗法定理を持つと仮定する.  $a_1, a_2, \dots, a_r$  を  $R(z)$  に関する点集合  $E_c$  とする. 点  $a_i$  における  $\Phi^{(-1)}$  の解析要素の共通の位数を, もしそれがあれば, 点  $a_i, i = 1, 2, \dots, r$  の位数と呼ぶ. それを  $\alpha_i$  と表す. 存在しないときは  $\infty$  を位数と呼ぶ.  $l$  を  $R(z)$  の次数とする.  $l > 1$  である. もしイテレーション  $R^{(j)}(z)$  の危点を数えれば, 数

$$\sum_{i=1}^r l^j \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i} \quad \text{と} \quad 2(l^j - 1)$$

の差は階数  $j$  によらず限られていることが分かる. したがって等式

$$\sum_{i=1}^r \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i} = 2$$

が得られる. このことから次の六つの可能な場合が得られる.

I.	$r = 4;$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 2.$
II.	$r = 3;$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 2, \alpha_3 = \infty.$
III.	$r = 3;$	$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 6.$
IV.	$r = 3;$	$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \alpha_3 = 4.$
V.	$r = 3;$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 3.$
VI.	$r = 2;$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \infty.$

3°

もし  $\Phi(t)$  のそれと平面上同じ危点を持ち, 危点に関して  $\Phi(t)$  と同じ性質を持ち, 各危点で  $\Phi(t)$  と同じ位数を持つ函数  $\Psi(t)$  が存在したとすると, 明かに

$$\Phi(t) = \Psi(at + b)$$

となる.  $a, b$  は定数である.

上の各場合について, 函数  $\Psi(t)$  を見出そう.

I.- 函数  $u = \Psi(t)$  は積分

$$t = \int_0^u \frac{dz}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)}}$$

で与えられる.  $a_i$  は  $\Psi^{(-1)}(u)$  の危点である.

$$II. - \Psi(t) = \cos t$$

III, IV, V. - 函数  $\Psi(t)$  は各々三角領域を円に等角写像する楕円函数の中から見出すことができる.

$$VI. - \Psi(t) = e^t$$

函数  $\Psi(t)$  の各々の逆函数の危点を平面上で  $\Phi(t)$  のそれに合わせるためには、函数  $\Psi(t)$  を適当な 1 次変換で写せばよい. 実際 II ~ VI の場合、平面上の異なる危点の個数は 3 を越えない.

4°

このように 2 節の六つの場合は、危点のあり方としては実際に存在することを見た. それでそれらが乗法定理に関しても存在することを示そう. すなわち各場合で対応する函数の中に、少なくとも一つ、定理 III の条件を満たすものが存在する. このためには  $\Phi(t)$  の各タイプの函数が二つの 1 次ではない独立な有理的乗法定理を適当な点で持つことを示せばよい.

二つの平面  $t, z$  を  $z = \Psi(t)$  でつなく.  $t$  平面で  $z$  平面の点  $a_i, i = 1, 2, \dots, r$ , に対応する点を位数  $\alpha_i$  の点と呼ぶ.

零ではない任意の整数  $s$  が与えられたとき、 $\Psi(st)$  は  $\Psi(t)$  の代数函数によって表される. この代数函数が有理函数であるためには、平面  $t$  内の位数  $\alpha_i$  の任意の点  $t_i$  に対応して点  $st_i$  が位数として  $\alpha_i$  の整数倍を持つべき. これを証明するのは容易である.

XV. - 定理 III において、 $p, q$  を正の整数、 $a, b$  を定数として、函数  $\varphi(t)$  に

$$t' = t^{\frac{p}{q}}$$

$$t' = at + b$$

なる二つの形の変換を許すなら、函数  $\varphi(t)$  としてはただ六つのタイプが存在するに過ぎない.

## 訳 注

[訳注. 1] サイクルと名付けられている, 対応する点の組  $x, y, z$  の全体は, 複素 3 変数の空間  $(x, y, z)$  における複素 1 次元の解析集合を作る. それを  $\Sigma$  とし,  $\Sigma$  の複素 2 変数の平面  $(x, y), (y, z), (x, z)$  への射影をそれぞれ  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  とすると, それらは, それぞれ代数函数

$$y = A_1(x), \quad z = A_2(y), \quad x = A_3(z)$$

のグラフである. したがって,

$n_1, m_1$  はそれぞれ  $\sigma_1$  と複素直線  $x = \text{const}, y = \text{const}$  との交点数,

$n_2, m_2$  はそれぞれ  $\sigma_2$  と複素直線  $y = \text{const}, z = \text{const}$  との交点数,

$n_3, m_3$  はそれぞれ  $\sigma_3$  と複素直線  $x = \text{const}, z = \text{const}$  との交点数

である.

さらに,  $x(y, z), y(x, z), z(x, y)$  はそれぞれ  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  上の函数であり, それらのグラフは共に  $\Sigma$  になる. したがってそれらの函数の多価性  $\xi, \eta, \zeta$  はそれぞれ  $\Sigma$  を  $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1$  上の被覆面とみなしたときの枚数である.

関係式

$$n_1\zeta = n_3\eta, \quad n_2\xi = m_1\zeta, \quad m_3\eta = m_2\xi$$

はそれぞれ  $\Sigma$  と複素平面  $x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$  との交点数を二通りに数えたものである.

なお後に出てくるサイクルの種数は  $\Sigma$  に対応する Riemann 面の種数である.

[訳注. 2]  $R(z)$  を 1 次でない有理函数,  $A(z)$  をそれと可換な代数函数とする. 第 1 章第 5 節の記号  $n_i, m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) および  $\xi, \eta, \zeta$  をそのまま使う.

1.  $R \cdot A(z)$  は第 1 種の退化をしない.  
一般に  $\zeta \leq n_2$  であるが, 今の場合  $n_2 = 1$  だから  $n_2 = \zeta$  である.
2.  $A \cdot R^{(-1)}(z)$  は第 1 種の退化をしない.  
一般に  $m_1\zeta = n_2\xi$  であるが, 今の場合  $m_1 = \xi = 1$  だから  $n_2 = \zeta$  である.
3.  $R \cdot A(z)$  の多価性は  $A(z)$  の多価性以下である.  
一般に  $n_1\zeta = n_3\eta$  であるが, 今の場合  $n_2 = \zeta = 1$  だから  $n_1 = n_3\eta$  であり,  $n_1 \geq n_3$  である.
4.  $A(z)$  の多価性は  $A \cdot R^{(-1)}(z)$  の多価性以下である.  
一般に  $m_1\zeta = n_2\xi, n_1\zeta = n_3\eta$  であるが, 今の場合  $m_1 = \xi = 1$  だから  $n_3\eta = n_1n_2$  である. 他方一般に  $\eta \leq n_1$  だから  $n_3 \geq n_2$  である.

5.  $A \cdot R^{(-i)}(z)$  の多価性は  $i$  と共に限りなく増大する.

一般に

$$\frac{n_3}{m_3} = \frac{n_1}{m_1} \frac{n_2}{m_2}$$

であるが,  $m_1 = 1$  であり,  $n_2, m_2$  は一定であるが,  $n_1$  は限りなく増大するから,  $n_3$  もそうである.

[訳注. 3]  $R \cdot A(z)$  と  $A(z)$  とが同じ多価性を持つとする. 一般に  $R \cdot A(z)$  は第 1 種の退化はしないが, 今の場合 第 2 種の退化もしない.  $A \cdot R(z)$  は一般に第 2 種の退化はしないが, 今の場合 第 1 種の退化もしない. したがってこれは唯一つの函数を表わす. いま函数  $A \cdot R^{(2)}(z)$  を考えると,

$$A \cdot R \cdot R(z) = R \cdot A \cdot R(z) = R \cdot R \cdot A(z)$$

だから, それは唯一つ定まる. すなわちこの函数も第 1 種および第 2 種の退化をしない. 言い換えると  $A \cdot R^{(2)}(z)$  の多価性は  $A(z)$  の多価性と  $R(z)$  の多価性の積に等しい. 他方  $R(z)$  の多価性は 1 だから  $A \cdot R^{(2)}(z)$  の多価性と  $A(z)$  の多価性は等しい.

[訳注. 4] この部分がこの研究における二つの発見の一つである. ただしその発見では函数  $A(z)$  も有理函数の場合である.

二つの 1 次でない有理函数  $R_1(z), R_2(z)$  が可換であるとし,  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) および  $b_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) をそれぞれ  $R_1(z), R_2(z)$  の逆函数の分岐点の位置,  $(a_j)$  ( $b_j$ ) を本文と同様にそれらの点の  $R_1(z)$  および  $R_2(z)$  による未来の全体とするとき, もし, 例えば  $(b_1)$  が異なる点の無限列なら, それらは  $(a_j)$  のどれか, 例えば  $(a_1)$  の中に無限個現われる. それは列  $(a_1)$  の中に

$$R_1^{(\nu p)}(a'_1) = R_2^{(\nu q)}(a'_1) \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

となる点  $a'_1$  が存在することを意味する. ここで  $p, q$  は共に正の整数である.

一方が代数函数の場合はこれほど単純ではなく, 少し工夫されているが,  $R(z)$  の逆函数の分岐点の位置の個数  $r$  より長く, どの二つも  $A(z)$  の適当なイテレーション (正または負の) で結ばれる異なる  $E_c$  の点の列があれば, 有理函数のときと同様の結果に導かれる.

[訳注. 5] この部分がこの研究における二つの発見の二つ目のものである.

$y$  平面に  $x_0 = A(y^*), z_0 = R_1(y^*)$  となる点  $y^*$  を取れば,  $y^*$  は  $E_c$  の点ではない. したがって写像  $z = A^{(-1)} \cdot R_1(x) = R_1 \cdot A^{(-1)}(x)$  は  $x_0$  の近傍で 1 対 1 である.

$A(z)$  が有理函数  $R_2(z)$  の場合, もしその逆函数  $R_2^{(-1)}$  が  $R_1(x)$  に関して既縮なら, このことだけで問題は解決している.

[訳注. 6]  $R_1(x) = y_0$  を満たす点  $x$  の内,  $E_c$  に含まれるものの個数を重複度を込めて数えている.  $E_c$  の点の個数は有限であるが, 一般には,  $R_1(x)$  の次数が大きくなっても  $R_1(x) = y_0$  を満たす異なる点の個数は増えない. しかし今の場合,  $R(x)$  のすべてのイテレーションに対して, 通常頂点における角は 0 でない下限を持つ. 言い換えると,  $R_1(x) = y_0$  を満たす点の重複度は上限を持つ. したがって,  $R_1(x)$  の次数が, その上限と  $E_c$  の点の個数との積より大になれば  $R_1(x) = y_0$  を満たす  $x$  の中に  $E_c$  に含まれないものが存在する.

このことは後にも何度か使われる.

[訳注. 7] 少し分かりにくい表現であるが,  $E_c$  の各通常点  $a$  に対し,  $R(z)$  に関して可換で既縮な代数函数  $A^{(-1)}(z)$  が存在して,  $a$  の  $A^{(-1)}(z)$  による像が  $E_c$  の外にあるなら, 上述の同角性を証明することができる, というのである.

[訳注. 8] もう少し正確に言うと,  $u$  平面で考えられた, 種  $z_0$  の頂点についてである. 問題の等角性を  $u$  平面における頂点, すなわち  $R(u) = z_0$  を満たすような  $u$  達について証明しようとしているのである.

[訳注. 9] Riemann 面  $(y, z)$  の点  $(y_0, z')$  における, 函数  $x(y, z)$  の  $\xi$  個の値が  $X_0$  であるような  $z'$  の全体.  $A(z)$  の逆函数の多価性を  $m$  とするとき, Riemann 面  $(y, z)$  は  $y = y_0$  上に  $m$  個の点が存在し, それに対応する  $z$  の異なる個数は少なくとも  $m/n$  はある. そしてその  $m$  個の各点で函数  $x(y, z)$  は  $\xi$  個の値を取るが, その値は  $R_1(x) = y_0$  を満たす  $l$  個の値のどれかである. したがって  $m$  が大きいときは同じ  $\xi$  個の組が現われる. しかもその同じ組の個数はすべての組に対して同じである. したがって  $p$  は  $m/n$  と共に増大する.

本文では少し異なる説明がなされている.