解題に代えて[1]

西野利雄

はじめに.

1. 1930 年頃, 岡先生は留学中のパリで最初の研究論文

Fonctions algébriques permutables avec une fonction
rationnelle non-linéaire.

を執筆しておられます[2]. この論文はタイプで清書され, 一度 G. Julia 先生に提出されましたが, その後取り下げられて, 岡先生の御生前には遂に公表されませんでした. 岡潔先生遺稿集第六集に収録されています.

ここで, 先ずその結果だけをご紹介しましょう.

$R(x)$ を 1 次ではない有理函数, $A(x)$ を或る代数函数としますと, $R[A(x)]$ は常に唯一つの函数を定義しますが, $A[R(x)]$ は $R(z)$ を代入する分枝の選び方で複数の函数に分解することがあります. それで後者の函数の中に前者が含まれている場合 $R(x)$ と $A(x)$ は可換であると言うことにします.

このとき次に結果が得られます：

定理. 1 次でない有理函数と可換な代数函数は e^z, $\cos z$ および楕円函数の乗法定理によって得られるものしかない.

2. 岡先生はこの研究を「春の想いで」(4 頁) の中で次のように評しておられます.

『要するに「むつかしくて, うまく行けば綺麗で, 一般性は持って来そうもなく, 他の用 (効用) もありそうもない」と言う性質のものですが, かりに此の種のものを名づけて「遊離」した花のようなものと申しましょう.』

「春の想いで」(14 頁) にはさらに, この論文を発表しなかったことについて, その理由が二つ挙げられており, それは次の通りです：

1° 条件が不揃いで不安定なものであること.

2° 結果として, ある一群の函数が出てくるが, 上の拡張によって新しい函数群が出てこなかったこと.

---

[1] これは多変数函数論サマーセミナー (2001 年 8 月 3 日 ～ 5 日) における講演の原稿を少し修正したものである.

[2] この研究については, 1948 年に日本語で書かれた論文
Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, XI – Rappelées du printemps.
に詳しく紹介されています. この「春の想いで」は 岡潔先生遺稿集第四集 に収録されており, 現在奈良女子大学図書館の HP「岡潔文庫」でも公開されています. この講演でもここから多くの引用をしています.

この論文はタイプで清書され, リボンで閉じられて残されているということは, ご生前に先生から伺っていたのですが, 恥ずかしいことに, それを見せて頂く勇気はありませんでした.

1. 研究に至るまで.

研究内容の説明に入る前に, 岡先生がこの研究に到達されるまでの過程を簡単に振り返っておきましょう.

1. 岡先生が G. Julia に触れられた最初は多分 Julia の著書

Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé.

です. 先生はこの本の魅力の焦点として「春の想いで」(3頁) に次のように書いておられます.

『先生の本の p. 89 の No. 55 の始めから p. 90 の 6 行目迄, これは一寸「つるの巻き方, 鳥の飛び方」と言った感じの所ですが, ...「実に面白い」...「先生の数学の秘密」はここにあると思います. こうしますと研究対象が生きて動いて来る「ような気がする」のであります.』

これは Julia 先生の心理体験の, 岡先生による追体験なのでしょう. (ついでに言いますと「岡先生の数学の秘密」はここにあると思います.) それでその部分を紹介しておきます.

≪函数 e^z は或る例を与えてくれる：もし z が正の実軸上を無限大に行くと, e^z も正の実軸上を無限大に行く. もし z が負の実軸を描くと, e^z は正の実軸上を零に近づく. z が虚軸 (正または負) を描くと, e^z は半径 1 の円上を (正または負の方向に) 回り続ける. 最後に $z=x+iy$ が $e^x=a+b\cos\lambda y$ によって定まる曲線を描くなら, e^z は極座標で $\rho=a+b\cos\lambda\theta$ で定められる曲線を描く. この曲線は原点を中心とする半径 $a-b$ と $a+b$ の円の間をサイン曲線のように波うち, λ が無理数のときは, その円環を稠密に埋める.≫

2. 岡先生の書き残された数多くの研究資料の中に, 1927 年 4 月 3 日と日付の書かれた一冊のノートが残されています. 当時先生が読まれた幾つかの論文からの抜粋ですが, そこには

1. G. Julia, Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, (Journal de Liouville 1918. Tome premier)
2. H. Poincaré, Sur une classe nouvelle de trascendantes uniformes, (Jordan Journal 1890 p.313-365)
3. G. Julia, Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles, Annales de l'Ecore Normale Supérieure, 1922.

4. Ritt, Permutable rational functions, (Transction American Math. Soc. 1923)

等が含まれています. 岡先生は最初の研究を唯これだけの準備で始められたのだと思います. あまり多くの荷物を担いでいては, 未知の世界になど踏むことはできないというのが先生の持論でした.

3. 岡先生の論文の序文には大凡次のようなことが書かれています.

『有理函数の可換性の研究は Julia 氏によって着手され, 可換性の生じるすべての場合を尽くして, Ritt 氏 によって完結された.

Julia 氏の研究で私が非常に面白いと思うのは, 結果それ自身ではなく, それに導く論理の進め方である.

この方法は, 私には革命的 (novatrice) なものと思える. もしそうでないなら, 以下に述べる, 代数函数への拡張など, 私は試みなかったであろう.』

これが岡先生の研究のモチーフでした.

2. 可換な有理函数. Julia のアイデア.

Julia のアイデアは二つの独立な乗法定理を持つ Poincaré 函数を研究する事ですが, その研究にイテレーションが活躍します. それで Julia は彼の論文の序文で, この研究がイテレーションそれ自身の問題と函数方程式に結びつく問題とに新たな光りを当てたことを強調しています. 以下断らなくても有理函数は 2 次以上とお考え下さい.

1. $f(t)$ を全平面における有理型函数, $R(x)$ を有理函数とするとき, もし, s $(|s|>1)$ を或る定数として, 函数方程式

$$f(st) = R[f(t)]$$

が成り立つなら, $f(t)$ は $R(x)$ による乗法定理を持つと言い, そのような $f(t)$ を $R(x)$ に関する Poincaré 函数, s をその乗法定理の乗数と呼ぶことにします.

$f(t)$ を $R(x)$ に関する Poincaré 函数としますと,

$$f(0) = R[f(0)], \qquad R'[f(0)] = s$$

ですから, $\alpha = f(0)$ は $R(x)$ の拡張型不動点です.

乗法定理を持つような有理型函数の抽象的な研究は多分 Poincaré に始まると思いますが, 前掲の論文で, Poincaré は乗法定理を持つというだけの有理型函数はそれほど特殊なものでないことを示しています. 具体的

に言いますと, 1 次でない任意の有理函数 $R(x)$ は必ず拡張型不動点を持ちます. それで

$$R(\alpha) = \alpha, \qquad |R'(\alpha)| > 1$$

としますと, $s = R'(\alpha)$ と置いて,

$$f(st) = R[f(t)], \qquad f(0) = \alpha, \quad f'(0) = 1$$

となる全平面で有理型な函数は常に存在すると言うのです. 証明は未定係数法です.

2.　二つの有理函数 $R_1(x)$, $R_2(x)$ が恒等式

$$R_1[R_2(x)] = R_2[R_1(x)]$$

を満たすとき, それらは可換であると言います. またそれらの各々のイテレーションの中に一致するものが無いとき, それらを独立であると言います.

ところで, 同じ一つの有理型函数が二つの独立な有理函数 $R_1(x)$, $R_2(x)$ による乗法定理を持つとしますと, その乗数を s_1, s_2 として,

$$f(s_1 s_2 t) = R_1[f(s_2 t)] = R_1 \cdot R_2[f(t)]$$
$$f(s_2 s_1 t) = R_2[f(s_1 t)] = R_2 \cdot R_1[f(t)]$$

となりますから, その二つの有理函数は可換でなければなりません. 他方, 二つの可換な有理函数 $R_1(x)$, $R_2(x)$ がありますと, 必要ならそれらの適当なイテレーションを取るとして, $R_1(x)$ の拡張型不動点で, $R_2(x)$ の不動点となるものを見つけることができます. それで, その不動点での $R_1(x)$ による Poincaré 函数 $f(t)$ を作りますと, $f(t)$ は $R_2(x)$ による乗法定理をも持ちます.

岡先生の論文の序文にありましたように, 可換な有理函数の研究は Julia に始まりますが, 前掲の二番目の論文で彼は, 二つの独立な有理函数による乗法定理を持つような有理型函数はごく限られたものしかないだろうことを予想し, 実際, その二つの有理函数が共に多項式の場合は e^z と $\cos z$ の倍角の公式から来るものしかないことを示しています.

3.　岡先生が革命的であると思われたその手法を簡単に紹介しましょう.

二つの有理函数 $R_1(x)$, $R_2(x)$ の各々のイテレーションの Julia 集合は, それらが可換なときには, 一致します. さらにそれらが独立なとき, その Julia 集合は全平面になるか, 実解析的な曲線になります.

他方, Fatou によって, 実解析的な曲線であるような Julia 集合は円 (直線) または円弧 (線分) でしかないことが知られています. このことから

Julia は, Julia 集合が円の場合, それに関する Poincaré 函数は本質的に e^z しかなく, それが円弧の場合, その円弧を実軸上の区間 $[-1,1]$ へ変換してくれば, それに関する Poincaré 函数は $\cos z$ になることを示したのです.

可換な有理函数の研究を完成さしたのは Ritt であり, その場合は上記の二つの函数以外に楕円函数が現われます. しかし, その手法はイテレーションではありませんでした.

このような状況の下で, 上記のようなモチーフによる岡先生の研究が始まったのです.

3. 岡先生のアイデア.

Ritt の研究があるにも拘らず, 岡先生は Julia のアイデアを踏襲して Julia の問題を解決しようとされたのです. その方法を有理函数どうしの場合について紹介しましょう.

1. Poincaré 函数. 始めに或る有理函数 $R(x)$ と $R(x)$ に関する Poincaré 函数 $f(x)$ の関係を少し見ておきましょう.

$$f(st) = R[f(t)], \quad f'(0) = 1, \quad \alpha = f(0), \quad |s| > 1$$

とします.

先ず, $f'(0)=1$ ですから, t 平面の十分小さい円板 $\Delta : |t| < r$ は $f(t)$ によって x 平面の点 α の或る近傍 δ に 1 対 1 に写像されます. それで, j を任意の正の整数として, 円板 $\Delta^{(j)} : |t| < |s_1|^j r$ を考えますと, 写像 $y=f(t)$ による $\Delta^{(j)}$ の像と写像 $y=R^{(j)}(x)$ による δ の像は Riemann 面として一致します. j を限りなく大きくしていきますと $\Delta^{(j)}$ は全平面に収束しますから, その意味で, $R^{(j)}(x)$ の逆函数の Riemann 面は j と共に $f(t)$ の逆函数の Riemann 面に収束すると言えます.

Poincaré 函数 $f(t)$ にたいして,

$$f(st) \qquad と \qquad f(t)$$

が或る代数関係を持つとき, 複素数 s を簡単に $f(t)$ に関する乗数と言うことにし, 以下その乗数の全体を $\mathfrak{S}_f$ と表すことにします.

2. 最初の発見. さて, $R_1(x)$, $R_2(x)$ を可換で独立な二つの有理函数とし,

$$R_i(\alpha) = \alpha, \quad R_i'(\alpha) = s_i, \qquad (i = 1, 2)$$

とおいて, それらによる共通の Poincaré 函数を $f(t)$ としましょう.

ここで先ず各 $R_i(x)$ に対し, その任意のイテレーションの逆函数の分岐点の位置の全体を考えます. 先程の説明からも分かりますように, この各々は共通の Poincaré 函数 $f(t)$ の逆関数の分岐点の位置の全体と一致します. したがって, $R_1(x)$ に関するそれと $R_2(x)$ に関するそれが一致します. ここまでは Julia がすでに述べています. これを E_c と表しましょう.

岡先生は先ず次の事実を発見されました.

命題. 1 E_c は高々有限個の点よりなる.

これは, 散髪屋さんで耳掃除をしてもらっているときに, 突然分かったと言っておられました. この発見の追体験をしてみましょう.

有理函数の場合, E_c の構造は簡単で, $R_i(x)$ の導関数 $R_i'(x)$ の零点を $a_j^{(i)}$ $(j=1,\ldots,n_i)$ とし, 各 $a_j^{(i)}$ の $R_i(x)$ による未来の全体を $(a_j^{(i)})$ とするとき, E_c は

$$(a_j^{(i)}), \qquad (j=1,\ldots,n_i)$$

の全体と一致します. それで, 例えば $(a_1^{(2)})$ が異なる無限個の点を含むとしますと, $(a_j^{(1)})$ $(j=1,\ldots,n_1)$ の中の, 異なる無限個の点を含むどれかの中に $(a_1^{(2)})$ の点が無限に含まれなければなりません. そうしますと, それらの中に

$$R_1^{(k_1)}(a') = R_2^{(k_2)}(a') = a''$$

となるような2点 a', a'' が存在することになります. ことき, $R_1(x)$, $R_2(x)$ の可換性により

$$R_1^{(k_1)}(a'') = R_2^{(k_2)}(a'') = a''', \;\; R_1^{(k_1)}(a''') = R_2^{(k_2)}(a''') = a'''', \;\; \ldots$$

となります. これでは $R_1(x)$, $R_2(x)$ の独立性は保てません.

これなら, 証明の全体が瞬時に分かってしまったでしょう. 論文では, 一方が代数函数の場合で書かれていますから, この部分の証明もこれほど簡明ではありません.

3. 頂点の「種」と「角」. もう一度, 一つの有理函数 $R(x)$ を考え, その E_c は有限と仮定しましょう. E_c の点の全体を a_ν $(\nu=1,\ldots,n)$ とし, 簡単のため, それらはすべて有限の位置にあるとします. そして, 必要なら $R(x)$ の適当なイテレーションを考えて, E_c の点はすべて $R(z)$ の不動点またはその直接過去であると思っておきましょう.

E_c を y 平面で考え, すべての a_ν $(\nu=1,\ldots,n)$ を通る滑らかな単純閉曲線 C を描きます. そして $y=R(x)$ による C の逆像を Γ としましょう. これは x 平面の網目状の曲線で, 平面全体を有限個の部分に分け, 分割された各部分は写像 $y=R(x)$ によって, y 平面の C で囲まれた内部ま

たはその外部に 1 対 1 に対応します. さらにこの各部分は曲線による多角形であって, E_c に対応する点がその頂点です. そして各頂点には, そこでの内角が同じ偶数個の多角形が集まっています.

それで, E_c の点の $R(x)$ によるすべての階数の過去を頂点と呼ぶこととし, その頂点 x' が E_c の点, 例えば a_j に対応しているなら, x' の「種」が a_j であると言い, そこに集まる曲線多角形のその点における内角が α のとき, x' は「角」α を持つと言うことにします.

E_c の点は $R(x)$ によってまた E_c の点に写るのですから, 或る点 a が $R(z)$ の或る階数のイテレーションによる頂点であれば, a はそれより大きいすべての階数のイテレーションによる頂点になります. そして, その頂点の「種」α が $R(z)$ の不動点なら, イテレーションの階数を上げても, a の「種」は変りません. さらに α が $R'(z)$ の零点でないときは, イテレーションの階数を上げたとき, その「角」も変りません. しかし, α が $R'(z)$ の零点のときは, イテレーションの階数を上げると,「角」はどんどん小さくなって, 零に収束します. それで

$$R(\alpha) = \alpha \qquad R'(\alpha) = 0$$

となる E_c の点を <u>E_c の特異点</u>と呼び, それ以外の E_c の点を <u>E_c の通常点</u>と呼ぶことにします. $R(z)$ のイテレーションの逆函数も E_c の点に分岐点を持つのですが, その分岐の位数は, 通常点の場合, そのすべてで有界であることを注意しておきます.

E_c の特異点は $R(z)$ の縮小型不動点です.

網目模様は $R(x)$ に関する Poincaré 函数 $f(t)$ によっても作られます. このときは t 平面が無限個の曲線多角形に細分されます.

$f(x)$ が除外値を持つことがあります. $f(x)$ の除外値の全体は $R(z)$ によって絶対不変 (過去も未来もそれ自身) ですから, それは E_c の点でなければなりません. このときは無限遠点を境界とする無限個の曲線多角形が現われます.

4. $\mathbf{E_c}$ の特異点. 今度は可換で独立な二つの有理函数 $R_1(x)$, $R_2(x)$ およびそれらの共通の Poincaré 函数 $f(t)$ を考えましょう. $R_1(x)$, $R_2(x)$ による乗法定理の乗数をそれぞれ s_1, s_2 としますと, $f(t)$ に関する乗数の集合 $\mathfrak{S}_f$ は, 任意の正または負の整数の組 i, j に対して, $s_1^i s_2^j$ を含みます. したがって $\mathfrak{S}_f$ は 1 を集積点に持ちます.

このことは t_0 を t 平面の任意の点とし, $a_0 = f(t_0)$ と置いたとき, $R_1^{(i)} \cdot R_2^{(j)}(a_0)$ の全体は a_0 を集積点に持つことを意味します.

さて, E_c の特異点 α の $R_1(z)$ によるすべての階数の過去の全体を考え, それを $E_s(\alpha)$ と表します. 容易に分かりますように, $E_s(\alpha)$ は $R_2(x)$

によって不変です. したがってもし $E_s(\alpha)$ の点 a が $f(t)$ の除外値でないなら, a はこの集合の孤立点ではありません.

他方, α は $R_1(x)$ の縮小型不動点ですから, $E_s(\alpha)$ は孤立点集合です. それで E_s の点はすべて $f(t)$ の除外値でなければならないことが分かります. 言い換えますと, そのような点は実は高々二つしかないというわけです. $f(t)$ が実際に除外値を持つ場合, もしそれが一つなら, $f(t)$ は整函数に帰着しますし, 二つ持つ場合は $f(t)$ は e^t に帰着します.

5. 第 2 の発見. このような状勢の中で, 岡先生は第 2 の発見をされました.

命題. 2 <u>$R_1(x)$ で考えるとして, 同じ「種」の頂点は, E_c に含まれる点は除外して, すべて同じ「角」を持つ</u>.

この発見について,「春の想いで」(10 頁) に大凡次のように書かれています.

『バスで雲仙岳に登る途中, トンネルを抜けて見晴らしのよい所へ出た途端に, 何に目をつければよいかが分かった. それで, 旅行中はこれ以上は考えないで, そのアイデアを大事に持ち帰り, 紀見峠の自宅に帰って, それを確かめた.』

1928 年の秋のことです.

ところで, もしこれが成り立ちますと, $f(t)$ による頂点についてもそうであることが分かります. それを言い直しますと, $f(t)$ の逆函数は, E_c の各点 a_j の上で, すべての分枝が同じ位数 α_j の分岐をするということになります. このような場合, a_j が超越的分岐点のときは $\alpha_j = \infty$ と考えて, 等式

$$\sum_j \frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j} = 2$$

が成り立つことはよく知られています. このことから, Poincaré 函数 $f(t)$ をすべて決定することは容易です. すなわち, 上の命題が証明されれば問題はすべて解決するのです.

6. 何に目をつければよいか. 前節の岡先生の言葉, “何に目をつければよいか” を想像してみましょう. 目標は同じ「種」の頂点は (E_c の点を除いて) すべて同じ「角」を持つと言うことですが. それを保証するものは $R_1(x)$, $R_2(x)$ の可換性以外にはありません.

三つの平面 x, y, z と, さらに平面 u を考え, y 平面に E_c の通常点 y_0 を取ります. そして u 平面に点 u_0 を取って,

$$R_1 \cdot R_2(u_0) = R_2 \cdot R_1(u_0) = y_0$$

であったとし, $x_0 = R_2(u_0)$, $z_0 = R_1(u_0)$ と置きます.

ここで x_0, z_0 が共に E_c に属していないとしますと, x_0 の「角」と z_0 の「角」は等しくなります.

このことの証明自体は難しくありません. x_0 から y_0 を経由して z_0 に至る写像は, y_0 が E_c の点であるため, 分かり難いですが, x_0 から u_0 を経由して z_0 に至る写像は, u_0 が E_c の点でないため, 局所的に 1 対 1 であることは容易に分かります. そうすると「角」は等しくなります.

上の命題を言い換えますと, もし $y_0 = R_2(z)$ となる z の中に E_c に属さない点 z_0 が存在し, 合成函数 $R_2^{(-1)} \cdot R_1(x)$ による対応で $y_0 = R_1(x)$ を満たすすべての x が z_0 に対応するなら, 命題 2 は完全に証明されることになります.

この部分は岡先生の論文の最も重要な章の始めに, 一方が代数函数の場合として書かれています. それでおそらくこれがそうなのでしょう.

5. 問題の解決.

前節のアイデアを得たとしても, 命題 2 の解決は容易ではないと私には思えます. 以下, 岡先生の論文に従って, その大凡の道筋を紹介しましょう.

1. 代数関係のサイクル. 先ず岡先生のアイデアにしたがって, 三つの平面の代数関係のサイクルついて述べましょう. この定義は多少曖昧ですが, 定義があるから実体があるのではなく, 実体があるから定義があるのだというのが岡先生の立場です. その実体は心の奥底から呼び出されてくるのだと言われています.

$A_1(x)$, $A_2(x)$ をそれぞれ代数函数とし, 三つの複素平面 x, y, z を考えて, 代数的対応

$$(1) \qquad A_1(x) = y, \qquad A_2(y) = z$$

を考えます.

対応は, 先ず, x 平面の任意の点 x_0, x_0 上の $A_1(x)$ の任意の分枝 $E_1(x)$ の値 $y_0 = E_1(x_0)$ および y_0 上の $A_2(y)$ の任意の分枝 $E_2(y)$ の値 $z_0 = E_2(y_0)$ の組 (x_0, y_0, z_0) を起点として定め, それらを同時に解析接続して得られる組 (x, y, z) として表現されます. この対応を三平面の代数関係のサイクルと呼ぶことにします.

$P_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ をそれぞれ複素変数 x, y の既約な多項式として, 方程式 $P_i(x, y) = 0$ を y で解いて得られる代数函数が上記の函数であるとし, その x に関する次数および y に関する次数をそれぞれ m_i, n_i とします

サイクルとは別に局所的な合成函数 $E_2 \cdot E_1(x)$ を解析接続して代数函数 $A_3(x) = A_2 \cdot A_1(x)$ が得られます. それで $A_3(x)$ を定義する x, z の多項式を $P_3(x, z)$ とし, それの x に関する次数および z に関する次数をそれぞれ m_3, n_3 とします.

三平面の代数関係のサイクル $(x,\, y,\, z)$ の全体は, 複素 3 変数の空間 (x, y, z) における複素 1 次元の解析集合を作ります. それを Σ と表します. そして Σ の, 複素 2 変数の平面 (x, y), (y, z), (x, z) への射影をそれぞれ σ_z, σ_x, σ_y と表します. それらは多項式 $P_1(x, y)$, $P_2(y, z)$, $P_3(x, z)$ の零面であり, したがって代数函数 $y = A_1(x)$, $z = A_2(y)$, $z = A_3(x)$ のグラフです.

サイクル $(x,\, y,\, z)$ の各変数をそれぞれ 他の二つの変数の函数とみなしたものをそれぞれ $x(y, z)$, $y(x, z)$, $z(x, y)$ としますと, これらはそれぞれ σ_x, σ_y, σ_z 上の多価函数と考えられ, それらの函数のグラフは共に Σ になります. したがってそれらの函数の多価性を ξ, η, ζ としますと, これらは Σ をそれぞれ σ_x, σ_y, σ_z 上の被覆面とみなしたときの被覆度になります. それで関係式

$$n_1 \zeta = n_3 \eta, \qquad n_2 \xi = m_1 \zeta, \qquad m_3 \eta = m_2 \xi$$

が得られます. これらは Σ と複素平面 $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ との交点数を二通りに数えたものです. これらの関係式から等式

$$\frac{m_3}{n_3} = \frac{m_1}{n_1} \frac{m_2}{n_2}$$

が得られます. 代数関係のサイクルは $A_1(x)$, $A_2(y)$ によって一意的に定まるわけではありませんが, この等式はその作り方にはよりません.

Σ の種数 (コンパクト Riemann 面と考えて) を岡先生はサイクルの種数と呼んでおられます. それは 3 通りに計算され, 例えば, Σ を σ_z の被覆面と見たときは, σ_z の種数 p_z, 被覆度 ζ および函数 $z(x, y)$ の σ_z 上の分岐指数の総和 N_z によって

$$q = \zeta\, p_z + (\frac{N_z}{2} - \zeta + 1)$$

と表されます. ここでは触れませんが, この公式から有理函数と可換な代数函数についての幾つかの基本的な性質が導かれます.

2. 有理函数と代数函数の可換性. 合成函数 $A_3(x)$ の多価性 n_3 は一般に $n_1 n_2$ です. しかしときとして $A_3(x)$ は退化し, n_3 は $n_1 n_2$ の約数になります. その原因は $\zeta < n_2$ となることから来る場合と $\eta > 1$ となること

から来る場合があります. この前者から来る退化を 分解 と言い, 後者から来る退化を 縮退 と言うことにしましょう.

そうしますと, 直ぐに分かりますように, $A_1(x)$ が有理函数の場合は, 分解は起こりますが, 縮退は起こらず, 逆に $A_2(y)$ が有理函数の場合は縮退は起こりますが, 分解は起こりません.

以後 $R(x)$ は有理函数を表し, $A(x)$ は代数函数を表すとします. そして $A{\cdot}R(x)$ で表される函数の中に $R{\cdot}A(x)$ が含まれているとき, $R(x)$ と $A(x)$ は可換であると言うことにします. $R(x)$ と $A(x)$ が可換なら $R(x)$ と $A^{(-1)}(x)$ および $R(x)$ と $R{\cdot}A(x)$ も可換になります. 面白いのは, 任意階数の $A(x)$ のイテレーションで得られる任意の函数は $R(x)$ の或るイテレーションと可換になります.

さらに $A(x)$ の任意のイテレーションで得られる函数が $R(x)$ や $R^{(-1)}(x)$ の如何なるイテレーションとも一致せず, さらに恒等函数 x とも一致しないとき, $R(x)$ と $A(x)$ は 独立 であると言うことにします.

$y=R(x),\ z=A(y)$ による代数関係のサイクルのうちで, 合成函数 $A{\cdot}R(x)$ が $R{\cdot}A(x)$ に一致するものを可換なサイクルと呼ぶことにします.

3. 既縮と固有既縮. 有理函数と代数函数の合成の退化に関して一つ重要な概念があります.

可換な, 有理函数 $R(z)$ と代数函数 $A(z)$ の組が与えられたとして, 函数の列

$$\cdots,\ A{\cdot}R^{(-2)}(z),\ A{\cdot}R^{(-1)}(z),\ A(z),\ R{\cdot}A(z),\ R^{(2)}{\cdot}A(z),\ \cdots,$$

を考えます. これらの各々はすべて唯一つの函数です. それでこれらの函数の多価性を調べますと, 左へ進めば無限に大きくなりますが, 右へ進むとき, あるところまでは次々と減少し, 一度同じ多価性のものが続いて現われると, それ以後, 多価性は一定になります. 多価性が下がらないということは退化しないということです. それでこの多価性が一定になる最初のものを$R(z)$ に関して固有既縮であると言います. 一般に, 代数函数 $A(x)$ を $R(z)$ に代入してもその多価性が下がらないとき $A(z)$ は$R(z)$ に関して既縮であると言うことにします.

$A(y)$ が $R(z)$ に関して既縮だとしますと,

$$R(x)=y, \qquad A(y)=z$$

で与えられるサイクルは一意的に決まります. したがって $z_0=A(y_0)$ としたとき, (y_0,z_0) には $y_0=R(x)$ となるすべての x が対応します. このことと前節の結果を合わせますと, $R(z)$ に関して既縮な代数函数によって,E_c のすべての点が E_c 外の点に写せるなら, 命題 2 は証明されることが分かります.

4. 可換な有理函数. 以後は独立で可換な有理函数の場合に限定して紹介します.

i, j を二つの正の整数として, 合成函数

$$A_{i,-j}(x) = R_1^{(i)} \cdot R_2^{(-j)}(x)$$

を考えます. そして i を十分大きく取って, この函数は $R_1(x)$ に関して既縮であるとします. 先ずこのような函数で E_c の通常点を E_c 外の点に写すことができるかどうかを考えます. ここで Poincaré 函数 $f(t)$ の助けを借りましょう.

$R_1(x)$, $R_2(x)$ の共通の Poincaré 函数 $f(t)$ は $A_{i,-j}(x)$ による乗法定理も持ち, $R_1(x)$, $R_2(x)$ による乗法定理の乗数をそれぞれ s_1, s_2 としますと, $A_{i,-j}(x)$ によるそれは $s_1^i s_2^{-j}$ になります.

それで $f(t)$ に関する乗数の集合 $\mathfrak{S}_f$ はすべての $s_1^i s_2^{-j}$ を含みますから, それは 1 を集積点に持ちます. ここで既縮な $A_{i,-j}(x)$ に対応する乗数のみの集合 $\mathfrak{S}^*$ を考えましょう. このとき, 次のことが言えます.

<u>もし,$\mathfrak{S}^*$ も有限の集積点を持つなら, 所期の函数を見つけることができる</u>.

実際, そのような集積点の一つを α とします. そして y_0 を E_c の通常点, t_0 を $y_0 = f(t_0)$ となる点として, $f(\alpha t_0) = z^*$ としますと, z^* のいくら近くにも $A_{i,-j}(y)$ による y_0 の像が存在します. 他方, E_c は有限ですから, それらの中に E_c に属さない点が必ず存在します.

すなわち, この場合は命題 2 は証明されます. それで残るのは, $\mathfrak{S}^*$ が有限の集積点を持たない場合です. このときは i が無限大になります. すなわち $A_{i,-j}(x)$ を $R_1(x)$ に関して固有既縮に取るとして, その多価性を n, その逆函数の多価性を m とするとき, 比 m/n の上限は無限大になります.

5. 最後の難関. ここからが最後の難関です.

改めて, $R_1(x)$ を次数 l $(l > 1)$ の有理函数とし, 簡単のため, $A(z)$ を $R_1(x)$ に関して固有既縮な前節の形の代数函数として, その多価性を n_1, それの逆函数の多価性を m_1 とします.

三つの平面 x, y, z の他にもう一つの平面 u を考え, j を或る正の整数として, 代数関係の可換なサイクル

$$R_1^{(j)}(x) = y, \qquad y = A(z), \qquad z = R_1(u)$$

を考えます. 前節とは y と z が逆になっていることを注意して下さい. なお, $A(z)$ は既縮ですから, $A \cdot R_1$ は唯一つの函数です. したがってサイク

ル (y, z, u) によって (y_0, z_0) に対応する u の点は $z_0 = R_1(u)$ となる l 個のすべてです. それを u_k $(k=1,2,\ldots,l)$ とします.

y_0 を E_c の通常点とし $y_0 = A(z)$ となる z の一つを z_0 とします. サイクル $(x,\ y,\ z)$ によって $(y_0,\ z_0)$ に対応する x が決まりますが, それを

$$X_0\ :\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{\xi-1}$$

とし, これを岡先生にしたがって, $(y_0,\ z_0)$ によって定まるシステムと呼ぶことにします. 合成函数 $R_1^{(i)} \cdot A(z)$ の多価性を n_3 としますと,

$$n_3 = \xi\, n_1$$

です.

仮定により, $A(z)$ は固有既縮ですから, n_3 は j と共に必ず増大します. したがって ξ もそうです. このことは $A(z)$ をどう取っても, それが固有既縮であるかぎり, j がある数を越えるなら, ξ は予め定められた一定数を越えるということを意味します. さらに ξ が一定数を越えると X_0 は必ず E_c 外の点を含みます.

次にサイクル $(x,\ y,\ u)$ によって, $(y_0,\ u_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, l)$ に対応する x を

$$X_k'\ :\ x_0',\ x_1',\ \ldots\ x_{\xi'-1}$$

とします. これは X_0 の部分システムです. しかも k を変えたときのそれらの和集合は X_0 になります. それでその個数 ξ' は不等式

$$\xi \leqq l\,\xi'$$

を満たします.

このことから j が一定数以上であれば, $R(z)$ に関して既縮な $A(z)$ をどう取ろうと, システム X_0 および部分システム X_k' $(k=1,2,\ldots,k)$ はすべて E_c 以外の点を持つことが分かります. 以下, このような j を固定して考えます.

次に y_0 と共に X_0 を定める z の全体を

$$z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{p-1}$$

とします. 言い換えますと, サイクル $(x,\ y,\ z)$ によって $(y_0,\ z')$ に対応する x の点が丁度 X_0 となるような点 z' の全体です. $A(z)$ の逆函数の多価性は m_1 ですから, $A(z)$ によって y_0 には m_1 個の z' が対応しています. その各 z' に対し, サイクル $(x,\ y,\ z)$ によって $(y_0,\ z')$ に対応する x は, $y_0 = R_1^{(j)}(x)$ となる l^j 個の点の中の ξ 個です. そのような組み合わせ

は高々 j^ξ 個しかありません. したがって $m_1 > j^\xi$ なら, 同じ組を持つ z' が複数個現われます. このとき同じ組が現われる回数はすべての組に対して同じです. それで, m_1/n_1 が十分大きい $A(z)$ を取ります, 上記の p は予め与えられた数より大になり, その p 個の z 中に E_c 以外の点を含むことになります.

これで命題 2 は完全に証明されました.

いま z_0 を E_c の通常点とし, 上記のような j と $A(z)$ を取ります. そうしますと z_0 を「種」とする $R_1(u)$ による頂点は E_c に属するものを除いてすべて同じ「角」を持ちます.

あとがき.

1. 「春の想いで」(13 頁) には,『別証明の方 (二つの可換な有理函数の場合) はこんな風にすらすら済んで, 世に言う収穫を得たのですが, その拡張の方 (一方が代数函数および共に代数函数の場合) はそうは行きませんでした.』と書いておられます. このような関係は「上空移行の原理」にも現われますが, 私は岡先生の全論文中でこの論文が最も難しいと思っています. それについて「春の想いで」(12 頁) には次のような一節があります.

『私たちは次の二つの「心構え」を持って数学に臨んだのであります :

1° 若し私たちが数学をするに値しないことが分かれば直ぐに止めよう.

2° 其の代わり若し数学が私たちがするに値しなかったならばこのときはサッサとやめよう.

こんな風でした. これを添えるとよくお分かりになりませう.』

岡先生は同じ「春の想いで」(12 頁) に, 何時かこの論文を公表すると書いておられ, その理由として次の三つを挙げておられます.

1° これが私達の数学研究史 (流れ) の「メロディー」であること (より長い生命).

2° これを入れなければ後の流れの姿 (ハーモニー) が分りにくくなること (前身).

3° 一変数は勿論多変数の特別の場合であって, 私たちは私たちの研究分野, 多変数解析函数のそれの特別の一区画たるこの一変数の所に, 歴史的な行きがかり等から, 特に多くの人たちが努力したことを知っていますから, よしその大部分は無自覚に流行を追った取るに足らぬものであるにせよ, 其の中には本当によいものもまじっていますから, それを高い眼から見て, 拾いだすこと, 更にそれを一般の場合にのばしうるかどうか, 或

いは, でなければどんな問題が生まれ出るかをしらべることと, これらのことをもしたいと考えていること (祖先の供養).

しかし, この論文が公表されることはありませんでした.

2. 後年の岡先生の随筆「春宵十話」に『職業にたとえれば, 数学に最も近いのは百姓だといえる』と書かれています. この言い方は決して奇をてらったものではありません. 「問題は, 解くのではなく, 解けるのだ」と言われています. よく「育てる」という言葉が使われますが, 生物は自ら「育つ」のであり, 正確には「育つようにする」でしょう. 先生の先の言葉の背後には「数学は自ら育つものである」という洞察があるのです.

1948 年の暮れに岡先生の書かれた日本語の論文[3]の序文に次のような一節があります.

『私は H. Poincaré の提出した ≪ 数学上の発見は如何ようにして起こるか ≫ と云ふ問題に強い共鳴を感じ, 私の力の及ぶ限りこれを解決して置こうと決めて居るのであります. (Voir par exemple : フィヒテ, 全知識学の基礎) (此の問題を Problème P とよぶことにします). そうしますとこれと並んで次の問題のあることにお氣づきになりませう :
Problème Q — ≪ 数学上の研究はどのように生ひ立つか. ≫ (Voir par exemple : ジイド, 贋金作りの日記). この Problème P, Q の関係ですが, たとへば個体の発生は種属のそれを簡潔な筆致で繰り返して見せてくれますように, 此の二つの問題は非常によく似ているとしか感じられません. 私の経驗では, どこをしらべて見ても皆然うです. それで両者は本質的には同じであると仮定しませう. むしろ飜へして, その同一の部分を以て, 二者の本質を仮りに定義しませう.』

岡先生の研究では, 最初から研究対象を Problème P の材料として選ばれています. そしてこの節の始めに述べた岡先生の言葉は, このように捉えられたポアンカレの問題への一つの回答なのでしょう.

以 上

[3] Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VIII–Un problès d'existence intérieure (岡潔先生遺稿集第参集収録).