

はじめに

数千年前、人間が文明を持ち始めた頃から、数学は存在した。古代エジプトでは、ナイル河は毎年氾濫を起こして肥えた土を下流に広げたが、ナイル河の氾濫を予測するために天文観測が行われ、太陽暦が作られた。そして、氾濫が収まった後に農地を元通り配分するため、測量と幾何学が発達した。また、古代ギリシャのピタゴラス派は、「万物は数である」という哲学を持って数学を研究していた。タレスは哲学の父と呼ばれているが、タレスは數学者でもあった。数学は、人類の誕生以来続く文化である。

自然の営みを記述する学問としての「科学(サイエンス)」という言葉が使われ出したのは、19世紀になってからである。しかしながら、広い意味での科学は、古代文明の頃から存在する。アルキメデスは數学者であり科学者でもあった。アリストテレスは哲学者であると同時に科学者でもあり、アリストテレスの自然観は中世までは絶対的なものであった。17世紀のデカルトは、近代哲学の父であると同時に科学者でもあった。科学、哲学もまた、人類が作り出した文化である。

このように、古来、数学・科学・哲学は渾然一体のものであった。数学と科学(特に物理)はお互いに密接に関連し合いながら、しかしときには一見、お互いに何の関係もなく発展しながら突然、数学が科学の道具・言語として結びついたりしてきた。20世紀に入っての学問の発展による細分化・専門化のせいもあり、このような数学と科学の一体性は崩れていった。そして、中等教育においては「数学」、「理科」と分断されてきた。この数学・理科という分類は、学校教育においては有効な一面もあるが、「便宜的」なものである。科学が進歩して学際的な側面が一層強まっている現在、このような「教科」の縛りに縛られていたのでは、将来の人材育成にとってマイナスである。

2014年度に文部科学省からの補助金を受けて、奈良女子大学とお茶の水女子大学とに設置された「理系女子教育開発共同機構」は、中等教育及び高等教育の理数教育の改革を目指の1つとしている。この改革のためには、自然現象や現実社会を捉えるのに、自然科学や社会科学がどのような手段を用いるのか、数学がいかに道具・言語として有用であるかを体験・学習することが、非常に大事であると考える。数学と科学の一体性を感じ、数学と科学でこの社会・世界を見て解析する方法を学ぶことを目指して、「数理科学入門」のテキストを作成した。

本テキストでは、数式処理システムの *Mathematica* を利用して学習を進めるようになっている。これからは、このような ICT(Information & Communication Technology) の活用がますます重要となってくる。具体的な問題を、数学や ICT を利用してどのように考え、解析し、解決していくのかを学んでいただきたい。内容的には、中等教育、高等教育(教養教育)の両方で活用できると考えている。

2015年3月27日

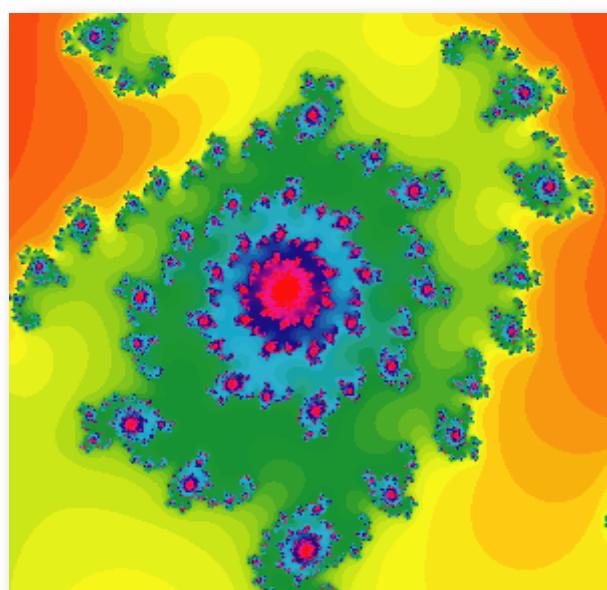
奈良女子大学 全学共通教授

吉田信也

※本テキストは、本学附属中等教育学校において行った2007年度の授業のテキストを改訂し、抜粋したものである。

目次

第 1 章 株と確率	1
§ 1 確率 $\frac{1}{2}$ の株売買	1
§ 2 理論的な考察	5
第 2 章 生態系の数理とカオス	8
§ 1 生態系	8
§ 2 モデルの視覚化	18
§ 3 カオス	22
§ 4 カオスとフラクタル	24
第 3 章 過去と未来を見通そう	28
§ 1 微分方程式	28
§ 2 ランチェスターの 2 次法則	32
§ 3 微分方程式を解く	35
§ 4 モデルの検証	39
§ 5 インフルエンザの流行	49
§ 6 もとの冷え方	61
§ 7 過去を見る	63
参考文献	67



第1章 株と確率

§1 確率 $\frac{1}{2}$ の株売買

1-1 株はお好き？

株の売買には魅力を感じる人は、結構多いようだ。しかし、株で財産をなした人のことはあまり聞かない。株は儲からないようにできているのだろうか？ あるいは、儲かるとしても、その確率はどのくらいなのだろう？

ここでは、いくつかの株の値動きのゲームについて、数理的に考えていく。

[実験 1]

2人1組になって、次のようなルールで株の値動きのゲームをしよう。

- (1) 最初の所持している株式を8万円とする。
- (2) さいころを振って、奇数が出れば1万円上がり、偶数が出れば1万円下がる。
- (3) 所持金が10万円になるか、0円になればゲームオーバー。

1人がさいころを振り、もう1人が記録をとって、交代しながらこのゲームを何回も繰り返そう。

[予想] ゲームを始める前に、このゲームで10万円を得る確率を直観で予想せよ。

[考察 1] 実験 1 の結果から、気づいた点を述べよ。

[実験 2]

Mathematica を利用して、実験 1 のゲームを行ってみよう。

1. *Mathematica* で、0か1の乱数を10回発生させるには、次のようにする

```
In[1]:= Table[Random[Integer], {10}]
```

```
Out[1]= {0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0}
```

2. 1回のゲームを *Mathematica* で構成する

```
In[12]:= okane = 8;
While[okane < 10 && okane > 0,
  okane = okane + Random[Integer] * 2 - 1;
  Print[okane];]
```

7

8

9

10

[問 1] 実験 1 の 2. の命令を解読せよ。

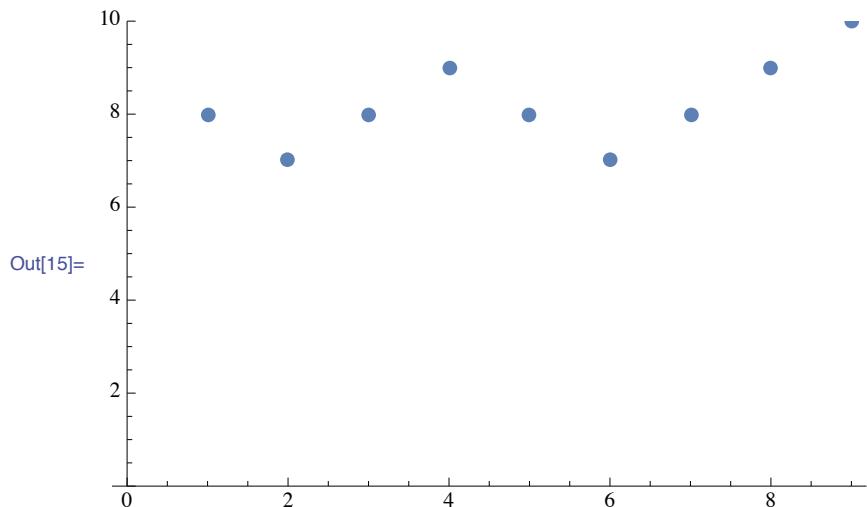
[考察 2] 実験 1 の 2. を繰り返し、その結果をノートに記録して考察せよ。

※直前の命令を複写するには、[Ctrl]+[L]とすればよい。

[実験 3]

Mathematica による実験 1 のゲームの推移を視覚化しよう。

```
In[13]:= okane = 8; kekka = {okane};  
While[okane < 10 && okane > 0,  
  okane = okane + Random[Integer]*2 - 1;  
  AppendTo[kekka, okane]]  
ListPlot[kekka, PlotRange → {0, 10}]
```



[問 2] 実験 3 の命令を解読せよ。

[考察 3] 実験 3 を繰り返し、その結果を考察せよ。また、最初の株価を変えて実験を繰り返して考察せよ。

1-2 関数を作る

- 人間が行うゲーム(株価の値動き)を、*Mathematica* に真似をさせて実験を繰り返した。このような操作を、シミュレーションといい、様々な自然現象や社会現象を解析していくうえで、重要な方法である
- 実験 2、実験 3 は、実験を行うたびに長い命令をコピーしなければならないし、最初の所持金を変えるには、「**okane = 8**」の部分を変えなければならなかつた。
- このようなときのために、*Mathematica* は自分で関数を作ることができる

[実験 4]

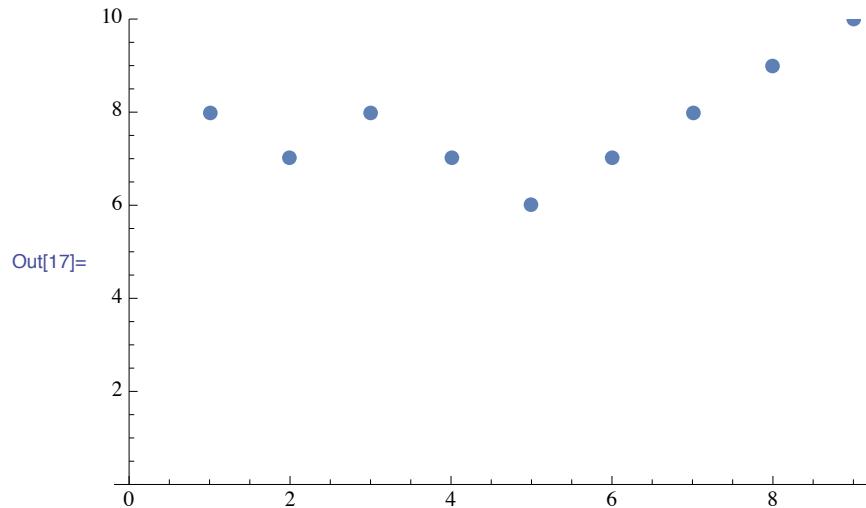
実験 1 のゲームをシミュレーションする関数を作成しよう。

1. 関数を作成する

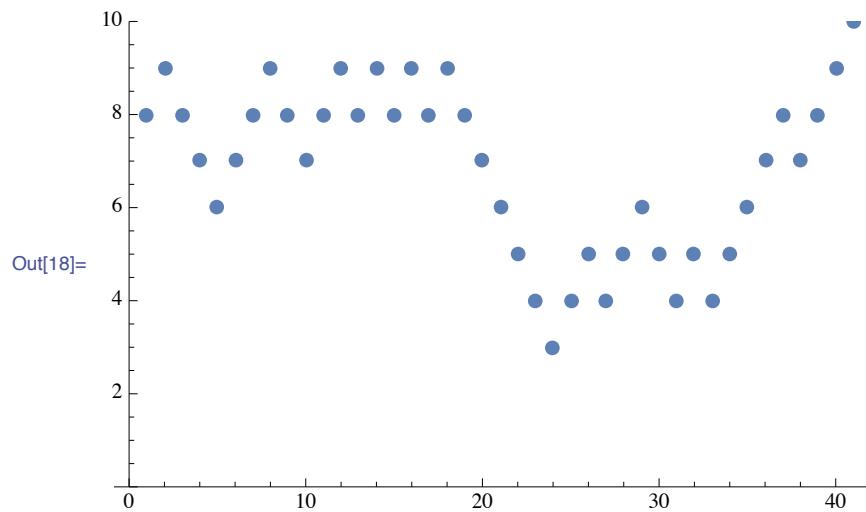
```
In[16]:= evenodd[okane_] := Module[{lst, x},
  x = okane; lst = {x};
  While[x < 10 && x > 0, x = x + Random[Integer] * 2 - 1;
    AppendTo[lst, x]];
  ListPlot[lst, PlotRange -> {0, 10}]]
```

2. 関数で実験を行う

```
In[17]:= evenodd[8]
```



```
In[18]:= evenodd[8]
```



[問 3] 実験 4 の関数を解読せよ。

[考察 4] 関数 evenodd の値を変えて実験を繰り返し、その結果を考察せよ。

- ゲームのシミュレーションを繰り返しているが、何か法則性は見つかっただろうか？
- 視覚化(グラフ)だけではよくわからないときは、やはり数値計算も行ってみよう

[実験 5]

実験 1 のゲームで、10万円を得て勝つ確率を計算する関数を作成しよう。

1. 関数を作成する

```
In[19]:= kake1[okane_, kai_Integer] := Module[{lst, x, k, i, kachi},
  k = kai; kachi = 0;
  Table[
    x = okane; lst = {x}; i = 0;
    While[x < 10 && x > 0,
      x = x + Random[Integer] * 2 - 1; i = i + 1;
      AppendTo[lst, x]];
    If[x == 10, kachi = kachi + 1], {k}];
  Print["Win=", kachi, " ", "Pr=", N[kachi / kai]]]
```

2. 関数で実験を行う

```
In[21]:= kake1[8, 20]
Win=19 Pr=0.95

In[22]:= kake1[8, 30]
Win=25 Pr=0.833333

In[23]:= kake1[8, 100]
Win=75 Pr=0.75

In[24]:= kake1[8, 200]
Win=149 Pr=0.745

In[25]:= kake1[8, 500]
Win=401 Pr=0.802

In[26]:= kake1[8, 1000]
Win=804 Pr=0.804
```

[問 4] 実験 5 の関数 **kake1** を解読せよ。

[考察 5] 関数 **kake1** の変数の値を変えて実験を繰り返し、その結果を考察せよ。そして、最初の所持金が n 円であり、 A 円になったときにゲームをやめるとすると、 A 円を得る確率はいくらになると予想できるか。

[問 5] 考察 5 の予想が正しいことを、*Mathematica* で簡単に調べる方法を考えよ。

§ 2 理論的な考察

2-1 漸化式

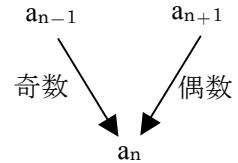
■*Mathematica*による実験で、次の予想が成り立ちそうだ

実験 1 のゲームを、最初の所持金を n 万円で始めて、所持金が A 万円または 0 円になったときにゲームを終了するとき、所持金が A 万円になる(勝つ)確率は $\frac{n}{A}$ である。

- Mathematica*によれば、確実に成り立ちそうであるが、数学的にはまだ推測であり、証明しない限り定理ではない
- そこで、理論的・数学的に考えて、上の予想が正しいことを示す
- 実験 1 のゲームのように、次々と状態が変化していく様子、つまり 1 回目、2 回目、…、 k 回目、…の状態を考える必要があるときは、漸化式が便利である

[問 6] 実験 1 のゲームにおいて、所持金が n 万円のときから A 万円になって勝つ確率を a_n とおく。

- (1) a_0, a_A の値を求めよ。
- (2) 右の図を参考にして、 a_n を a_{n-1}, a_{n+1} で表せ。
- (3) $b_n = a_n - a_{n-1}$ とおくとき、 b_{n+1}, b_n の関係を求めよ。
- (4) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (5) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。



■問 6 により、実験 1 のゲームに関する次の定理が成り立つ。

[定理 1]

所持金 n 万円から始めて、さいころを振ってその目が奇数であれば 1 万円を得て、偶数であれば 1 万円を失うゲームを行う。目標額が A 万円であるとき、 A 万円を得る確率は $\frac{n}{A}$ である。

[問 7] 実験 1 のゲームにおける期待値を求めよ。

■問 7 により、散々苦労してゲーム(賭け)を頑張っても、平均的には最初の所持金と変わらないことが示された！

2-2 平均の回数

- 実験 1 のゲームで勝つ確率はわかったが、勝つまでに振るさいころの回数はどうなるだろう？
- 何か規則性があるのか、ないのか、まずは Mathematica で実験してみよう

[実験 6]

実験 1 のゲームで、最初の所持金、最終の金額、さいころを振る回数を入力し、勝った回数とその確率、および勝つまでに振ったさいころの平均回数を出力する関数を作成しよう。

1. 関数 `kake1` を改良して、`kake2` を作成する

```
In[31]:= kake2[okane_, owari_, kai_Integer] := Module[{lst, x, k, i, kachi, wa},
  k = kai; kachi = 0; wa = 0;
  Table[
    x = okane; lst = {x}; i = 0;
    While[x < owari && x > 0,
      x = x + Random[Integer] * 2 - 1; i = i + 1;
      AppendTo[lst, x]];
    If[x == owari, kachi = kachi + 1; wa = wa + i], {k}];
  Print["Win=", kachi, " ", "Pr=", N[kachi / kai], " ",
    "回数=", N[wa / kai]]]
```

2. 関数で実験を行う

```
In[32]:= kake2[8, 10, 10^4]
Win=8005 Pr=0.8005 回数=9.6876

In[33]:= kake2[5, 10, 10^4]
Win=4962 Pr=0.4962 回数=12.4012

In[34]:= kake2[5, 10, 10^6]
Win=500 221 Pr=0.500221 回数=12.508
```

[問 8] 実験 6 の関数 `kake2` を解読せよ。

[考察 6] 関数 `kake2` の変数の値を変えて実験を繰り返し、その結果を考察せよ。特に、`kake2[8,10,10^4]` と `kake2[4,5,10^4]` のように、勝つ確率が同じである実験結果を比較して考察せよ。

[問 9] 考察 6 の予想が正しいことを、Mathematica で簡単に調べる方法を考えよ。

2-3 再び漸化式

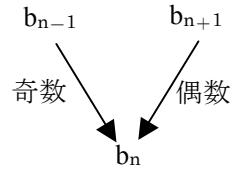
■Mathematicaによる実験で、次の予想が成り立ちそうだ

実験1のゲームを、 n 万円で始めて A 万円で終わるときと、 nk 万円で始めて Ak 万円で終わるときとでは、さいころを振る回数は k^2 になる。

- これもやはり、数学的にはまだ推測であり、証明しない限り定理ではない
- そこで、理論的・数学的に考えて、上の予想が正しいことを示そう
- 実験1の確率を考えたときと同様に、次々と状態が変化していく様子を考える必要があるので、やはり漸化式を利用して考えよう

[問10] 実験1のゲームにおいて、所持金が n 万円のときから A 万円になって勝つときのさいころを振る回数を b_n とおく。

- (1) b_0, b_A の値を求めよ。
- (2) 右の図を参考にして、 b_n を b_{n-1}, b_{n+1} で表せ。
- (3) $c_n = c_n - c_{n-1}$ とおくとき、 c_{n+1}, c_n の関係を求めよ。
- (4) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
- (5) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。



■問10により、実験1のゲームに関する次の定理が成り立つ。

[定理2]

所持金 n 万円から始めて、さいころを振ってその目が奇数であれば1万円を得て、偶数であれば1万円を失うゲームを行う。目標額が A 万円であるとき、 A 万円を得るまでに振るさいころの回数は、
である。

[問11] 定理2の結果を利用して、Mathematicaで実験1のゲームのさいころを振る回数の大きくなる様子を調べよ。

第2章 生態系の数理とカオス

§ 1 生態系

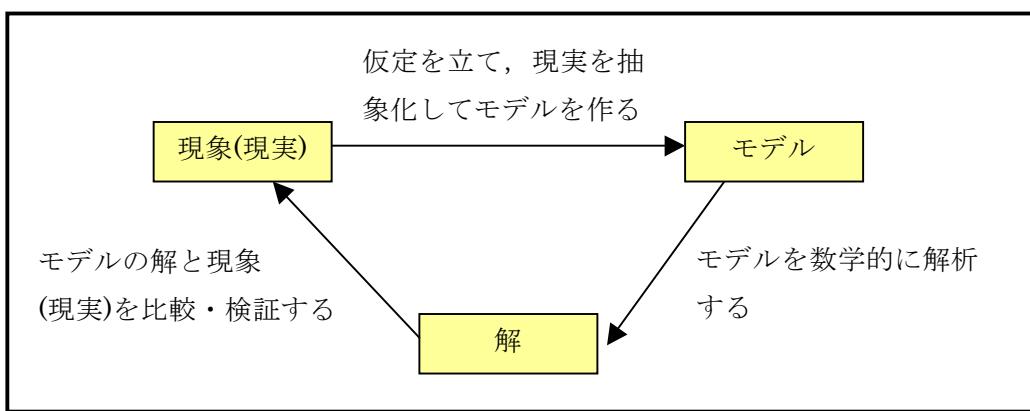
1-1 モデル化

なぜ生き物の数は、時間とともに変動するのだろう？ また、その変動の様子も様々であるが、それはどうしてだろう？

ここでは、上のようなことを、実際に生き物の数を調査するだけではなく、数理的な方法で探っていく。

■生物の個体数の変化の様子をより良く理解するために、**数理的手法**を用いる

■下図のように、現象(現実)を抽象化して**モデル**をつくり、そのモデルを数学的に解析して解を求め、その解が現象(現実)を表現できているかを検証する



■モデルの解と現実が合わないときは、仮定を変更してモデルを作り直し、改めて解析を行って解を求める

■以上のサイクルを繰り返しながら、生き物の数の変動の様子を探っていく

1-2 一定倍のモデル

まずは、簡単なモデルを考えよう。

■生物の個体数が増えていくとき、一定時間に一定倍になると仮定してみる

[例 1] 1 個の個体が、一定時間間隔に同期して(一斉に)分裂し、2 個の個体になるモデルを考える。

時刻 t のときの個体数を $a(t)$ とし、最初の個体数を $a(0)=1$ とすると、

$$a(1)=2a(0)=2$$

$$a(2)=2a(1)=4$$

$$a(3)=2a(2)=8$$

.....

[問 1] 例 1 のモデルにおいて、 $a(10)$ を求めよ。また、 $a(t)$ と $a(t+1)$ の関係を求め、 $a(t)$ を t の式で表せ。

[問 2] 例 1 のモデルの $a(t)$ の値を、 $0 \leq t \leq 10$ の範囲でグラフとしてプロットしてみよ。

[実験 1]

例 1 のモデルを, *Mathematica* で実験してみよう。

- 一定時間で 2 倍になるモデルを, 定式化する。

```
In[1]:= a[t_] := 2 a[t - 1]
a[0] = 1;
```

- a(10)を計算する。

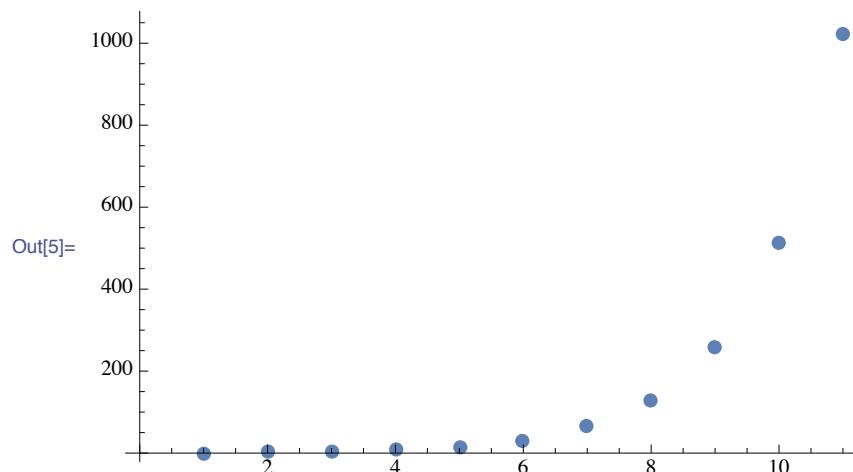
```
In[3]:= a[10]
```

```
Out[3]= 1024
```

- a(0)から a(10)までの値を計算し, それらの値をプロットする。

```
In[4]:= d1 = Table[a[t], {t, 0, 10}];
```

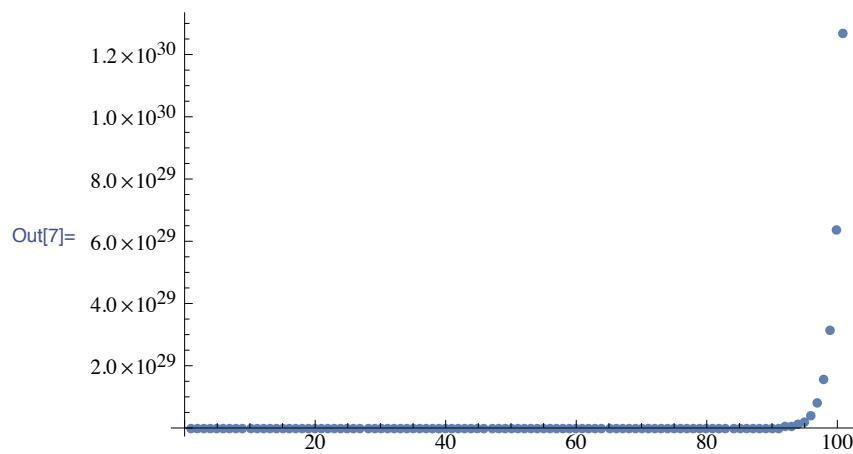
```
In[5]:= ListPlot[d1, PlotRange -> All]
```



- a(0)から a(100)までの値を計算し, それらの値をプロットして線で結ぶ。

```
In[6]:= d1 = Table[a[t], {t, 0, 100}];
```

```
In[7]:= ListPlot[d1, PlotRange -> All]
```



[考察 1] 実験 1 の結果から、気づいた点を述べよ。

[問 3] 1 個の個体が、一定時間間隔に同期して分裂し、 r 個の個体になるモデルを考える。

このモデルで、時刻 t のときの個体数を $b(t)$ とし、最初の個体数を $b(0)=b$ とする。

- (1) $b(t)$ と $b(t+1)$ の関係を求め、 $b(t)$ を t の式で表せ。
- (2) r の値によって、 $b(t)$ の値がどのように変化するかを予想せよ。
- (3) (2)の予想が正しいかどうかを、*Mathematica* によって確認せよ。

■以上の結果をまとめると、次のようになる。

[定理 1]

1 個の個体が、一定時間間隔に同期して(一斉に)分裂し、 r 個の個体になるモデルを考える。

時刻 t のときの個体数を $a(t)$ とし、最初の個体数を $a(>0)$ とすると、

$$a(t+1) =$$

そして、この生物モデルでの r の値による個体数の増え方は、次のようになる。

- (i) $r >$ のとき、 $a(t)$ は
- (ii) $r =$ のとき、 $a(t)$ は
- (iii) $0 < r <$ のとき、 $a(t)$ は

(証明)

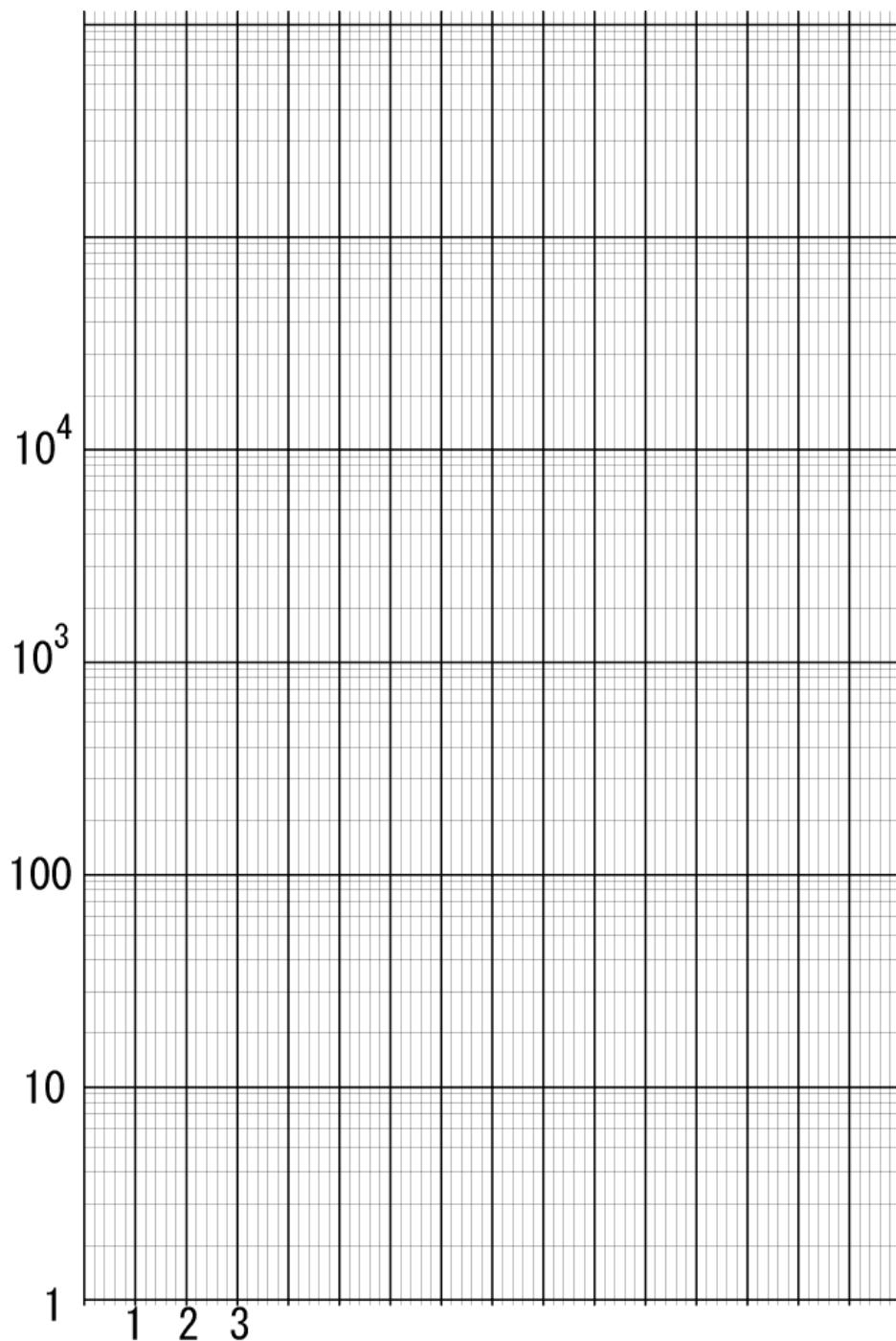
(証明終わり)

1-3 片対数グラフ

ちょっと個体数増加のモデルとは離れて、便利なグラフの描き方について学ぼう。

■例 1 や問 3 のような指數関数的増加の場合には、値の増加や減少のスピードが急激で、普通のグラフ用紙にグラフを描くのは難しくなる

■そこで、次のようなグラフ用紙(☆)を利用する



[問 4] 上のグラフ用紙(☆)の目盛りの構造を解析し、横軸、縦軸の目盛りを完成せよ。

[問 5] 例 1 のモデルを表す式 $y=2^t$ のグラフを、 グラフ用紙(☆)に描け。そして、 そのグラフの形がどのようになるかを予想せよ。

[問 6] グラフ用紙(☆)に、 $y=2^t$ のグラフを描いたとき、 縦軸の目盛り Y の表す本当の値を求めよ。そのことで、 問 5 の予想が正しいことを証明せよ。

■(☆)のような、 片方の軸の目盛りが対数の値で目盛られているグラフ用紙を、 **片対数グラフ用紙**といい、 そこに描いたグラフを**片対数グラフ**という

■指數的変化のように、 値の変化が急激過ぎて普通のグラフでは解析しづらいときには、 片対数グラフが用いられることが多い

[定理 2]

指數関数 $y=a^t$ の片対数グラフを描くと、 直線となる。

(証明)

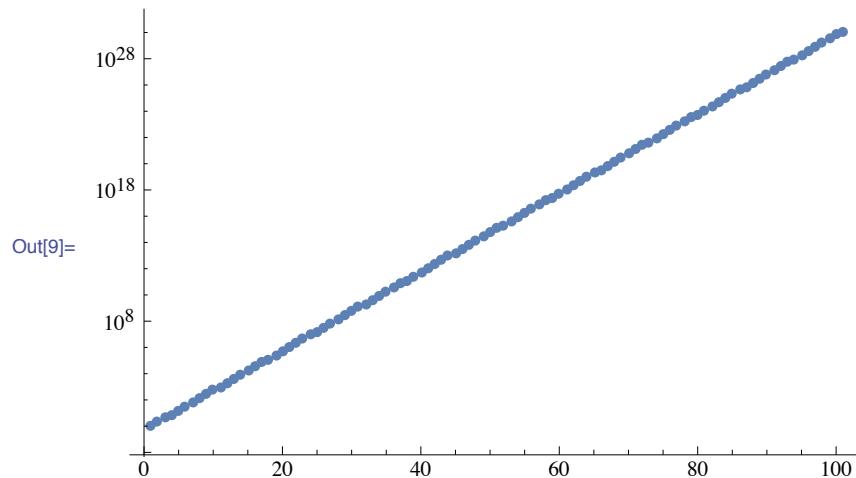
(証明終わり)

[実験 2]

例 1 のモデルの片対数グラフを、 *Mathematica* で描いてみよう。

リスト d1 を片対数グラフとして描く。

In[9]:= `ListLogPlot[d1, PlotRange -> All]`



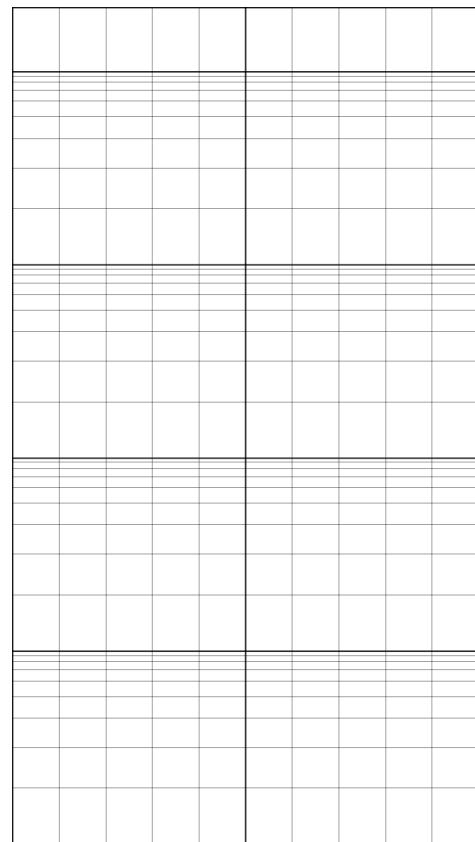
1-4 離散時間モデル

■1-3 で考えたような指数増加モデルは、成長過程にある生物集団をよく説明でき、繁殖や死亡が同期して起こる生物(昆虫や鳥など)のモデルとしてよく用いられる

[問 7] 次の表は、Lack(1954)によるキジの個体数増加のデータである。

年	1937	1938	1939	1940	1941	1942
個体数	8	30	81	282	705	1325

- (1) 横軸に年、縦軸に個体数をとったグラフを、左下のグラフ用紙に描いてみよ。
- (2) 片対数グラフを、右下のグラフ用紙に描いてみよ。
- (3) 2つのグラフから、キジの個体数の増加について考察せよ。
- (4) (3)の考察が妥当であることを、計算で確かめよ。



[問 8] Mathematica で、問 7 のキジのデータを $d2 = \{8, 30, 81, 282, 705, 1325\}$; として、問 7 と同様の作業・考察をせよ。

■1.3 のモデルの式 : $a(t+1)=ra(t)$, $a(0)=a$ では、時刻 t のときの個体数を $a(t)$, 1 個の個体が一定時間間隔に同期して r 個の個体になるとを考えたので、 $a(t)$ は 0 以上の整数値でなければならない

■しかし、 $a(t)$ を 単位面積あたりの個体密度と考えれば、 $a(t)$ は 0 以上の実数値として考えてよいので、これ以降は個体密度に着目してモデルを考える

1-5 指数増加モデルの改良

■1-3 で考えたような指数増加モデル

$$a(t+1) = r a(t), \quad a(0) = a \quad \cdots (1.1)$$

を解くと、

$$a(t) = a r^t \quad \cdots (1.2)$$

となつた

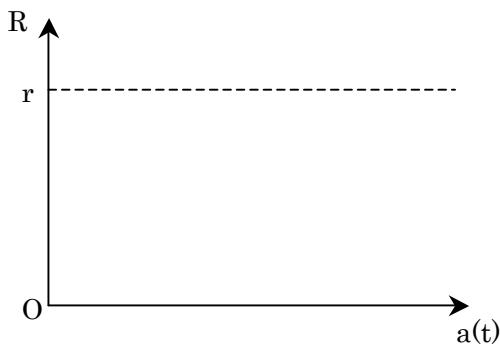
■この指数増加モデルには、次のような問題点がある

- $r > 1$ のとき、個体密度が発散してしまう、すなわち、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $a(t) \rightarrow \infty$ となるが、これは現実的ではない
- これは、個体の増殖率が一定の r であるとしたことによる
- 現実は、食料の不足や人口の増加に伴う環境の悪化、エネルギーの供給不足等で、増殖率の r は一定ではないと思われる

■そこで、増殖率が個体密度によって変化するモデルを考えるが、モデル化ではできるだけ単純なものから考えるのが普通である

[問 9] 増殖率 R が個体密度 $a(t)$ によって変化する場合、 R と $a(t)$ の簡単な関係としてはどのようなものが考えられるか。

[問 10] 増殖率 R と個体密度 $a(t)$ との関係を下の図に書き込み、 R を $a(t)$ の式で表せ。



■問 10 で考えたモデルは、個体密度がすごく小さければ増殖率 R はほぼ r であるが、個体密度が大きくなるにつれて R は減少し、 $a(t)=K$ のときに $R=0$ となるモデルである

[問 11] 問 10 で考えた増殖率 R を用いて、個体密度 $a(t)$ と $a(t+1)$ の関係を表せ。

1-6 ロジスティックモデル

■1-5 で考えたモデル

$$a(t+1) = r \left(1 - \frac{a(t)}{K}\right) a(t) \quad \cdots (1.3)$$

は、右辺が**非線型**なので、指数関数モデルのように解くことができないため、別の方法で解析できるように、(1.3)をより扱いやすく変形する

■(*)の両辺を K で割ると、

$$\frac{a(t+1)}{K} = r \left(1 - \frac{a(t)}{K}\right) \frac{a(t)}{K}$$

ここで、 $\frac{a(t)}{K} = x_t$ とおくと、

$$x_{t+1} = r(1 - x_t)x_t \quad \cdots (1.4)$$

■この漸化式(差分方程式)(1.4)を解析し、数列 $\{x_t\}$ の振る舞いがわかれれば、それを K 倍することで個体密度 $a(t)$ の振る舞いがわかる

■(1.4)で表されるモデルを、ロジスティックモデルという

[実験 3]

ロジスティックモデル(1.4)を具体的に計算して、 $\{x_t\}$ の振る舞いを調べよう。

$r=2$, $x_0=0.2$ のとき、

$$x_1 = 2(1 - 0.2) \cdot 0.2 = 0.32$$

$$x_2 = 2(1 - 0.32) \cdot 0.32 = 0.4352$$

$$x_3 = 2(1 - 0.4352) \cdot 0.4352 = 0.491602$$

[問 12] *Mathematica* を電卓として利用して、実験 3 の計算の続きを x_{10} まで行え。

[考察 2] 実験 3 と問 12 の結果から、気づいた点を述べよ。

[実験 4]

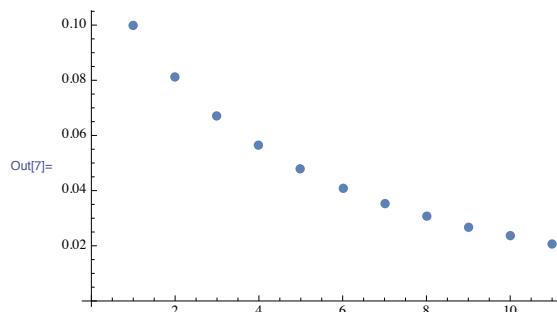
Mathematica で、ロジスティックモデル(1.4)を具体的に計算して視覚化し、考察 2 の正しさを確認しよう。

```
In[13]:= x[t_] := r (1 - x[t - 1]) x[t - 1]
In[14]:= r = 2; x[0] = 0.2;
d3 = Table[x[t], {t, 0, 10}];
ListPlot[d3, PlotRange -> All]
```

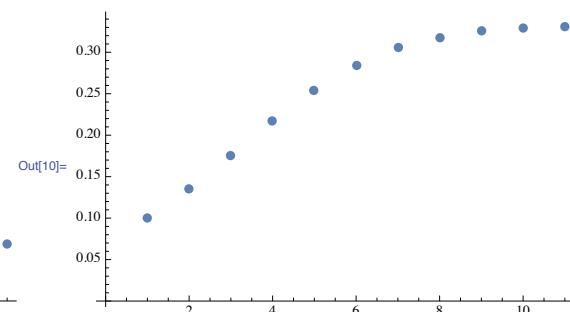
[問 13] $x_0=0.1$, r が(1)~(5)の値のとき, 実験 4 を改良した次の実験を *Mathematica* で行え。そして, **ListPlot** の出力結果の概形を描け。

```
In[17]:= r = 0.9; x[0] = 0.1;
d3 = Table[x[t], {t, 0, 10}];
ListPlot[d3, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

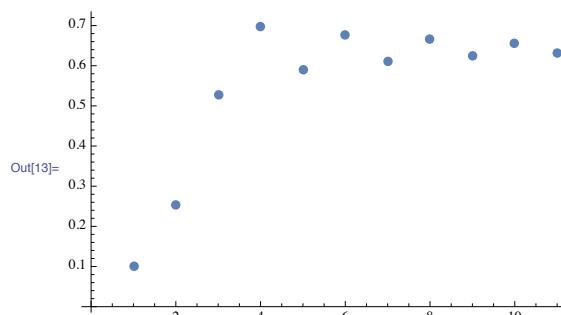
(1) $r=0.9$



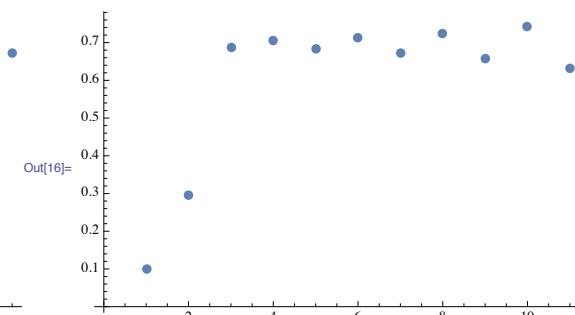
(2) $r=1.5$



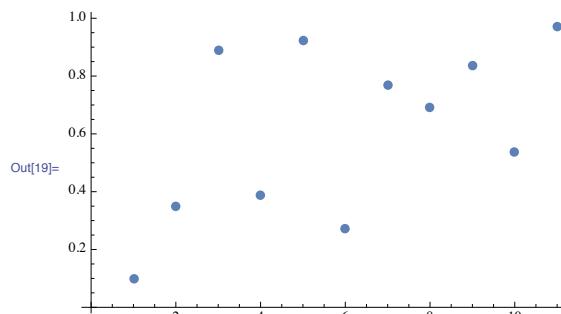
(3) $r=2.8$



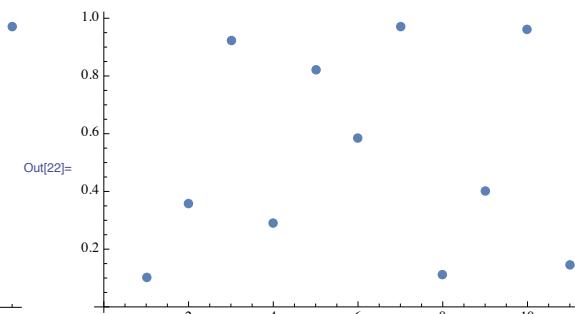
(4) $r=3.3$



(5) $r=3.9$



(6) $r=4.0$



[考察 3] 実験 4 と問 13 の結果から, 気づいた点を述べよ。

1.7 ロジスティックモデルのさらなる解析

- 実験 4 と問 13 の結果は, t を 0 から 10 まで変化させたものであったが, もっと時間を延ばす, すなわち(1.4)をさらに繰り返すとどうなるだろう?
- *Mathematica* の関数 **Table** は, 実験 4 の形で 50 回, 100 回繰り返すと, すごく時間がかかるので, 新たな関数を利用することを考えよう

■さらに、より解析しやすくするために、関数を漸化式を利用して表現する

$$x_{t+1} = r(1-x_t)x_t \cdots \text{(1.4)}$$

を考えるとき、2次関数 $f(x) = r(1-x)x$ $\cdots \text{(1.5)}$

を用いると、(☆)は $x_{t+1} = f(x_t)$ $\cdots \text{(1.6)}$

と表される

[実験 5]

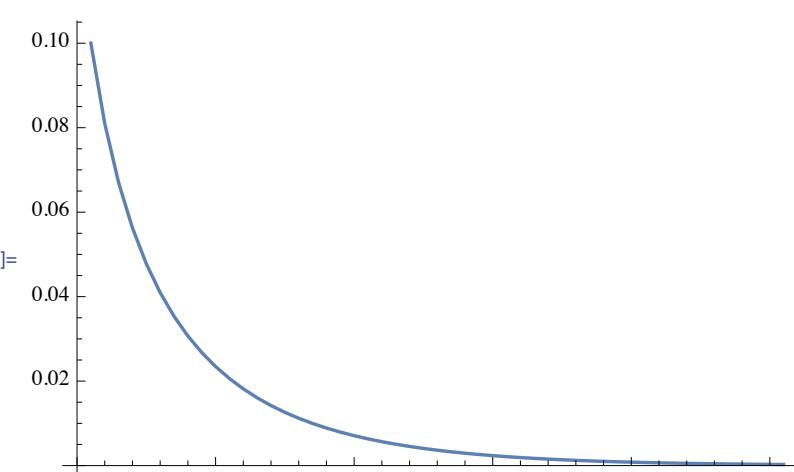
Mathematica で、ロジスティックモデルの表現(1.6)を用いて計算しよう。

```
In[23]:= NestList[f, x0, 5]
Out[23]= {x0, f[x0], f[f[x0]], f[f[f[x0]]], f[f[f[f[x0]]]], f[f[f[f[f[x0]]]]]}

In[24]:= f[x_] := r (1 - x) x

In[34]:= r = 0.9;
d4 = NestList[f, 0.1, 50];
ListLinePlot[d4, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0}]

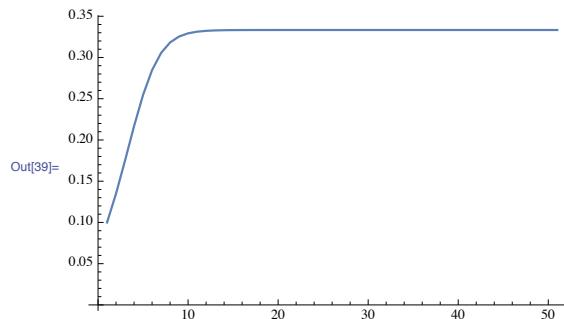
Out[36]=
```



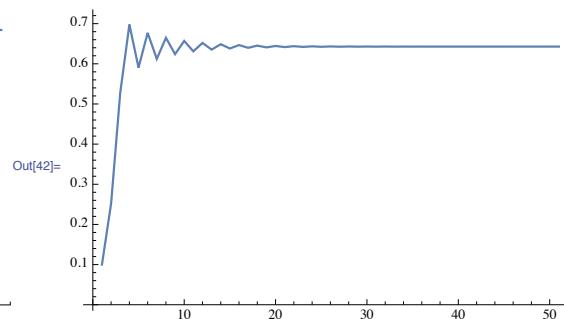
[問 14] 実験 5 の命令を解読せよ。

[問 15] $x_0=0.1$ のとき、 r の値を次の(1)～(4)の値に変えて、*Mathematica* で実験 5 を繰り返し、出力結果の概形を描け。

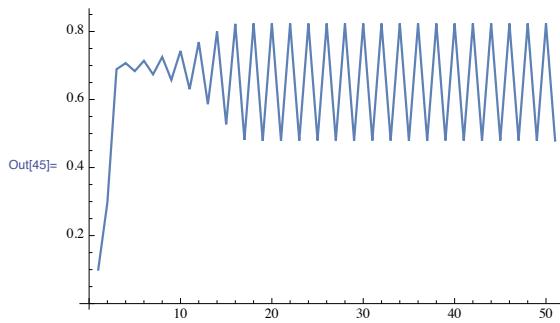
(1) $r=1.5$



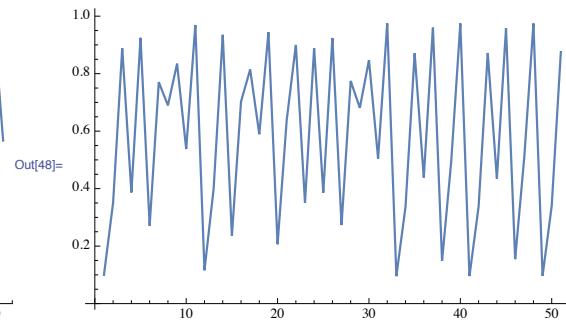
(2) $r=2.8$



(3) $r=3.3$



(4) $r=3.9$



[考察 4] 実験 5 と問 15 の結果から、気づいた点を述べよ。

[問 16] r の値や初期値 x_0 , **NestList** の回数を変えながら *Mathematica* で実験 5 を繰り返し、その結果を考察せよ。ただし、 $0 < r < 4$ とする。その理由も考えよ。

§ 2 モデルの視覚化

2-1 ロジスティックモデルの視覚化

■ロジスティックモデルを、2次関数

$$f(x) = r(1-x)x \cdots (1.5)$$

を用いて、

$$x_{t+1} = f(x_t) \cdots (1.6)$$

と表した

■ロジスティックモデルによる個体密度の増減の様子を、さらにわかりやすく表すことを考える

[実験 6]

$r=2$, $x_0=0.1$ のときを考える。

$$f(x) = 2(1-x)x$$

より、

$$y = f(x), y = x$$

の2つのグラフを描く(右図)。

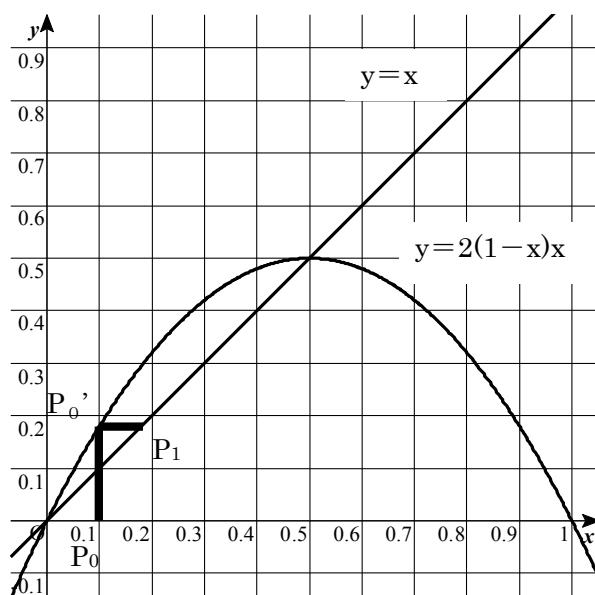
[1] $P_0(x_0, 0)$ から x 軸に垂直な直線を延ばし、 $y=f(x)$ との交点を P_0' とする。

$$P_0'(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$$

[2] P_0' から x 軸に平行な直線を延ばし、 $y=x$ との交点を P_1 とする。

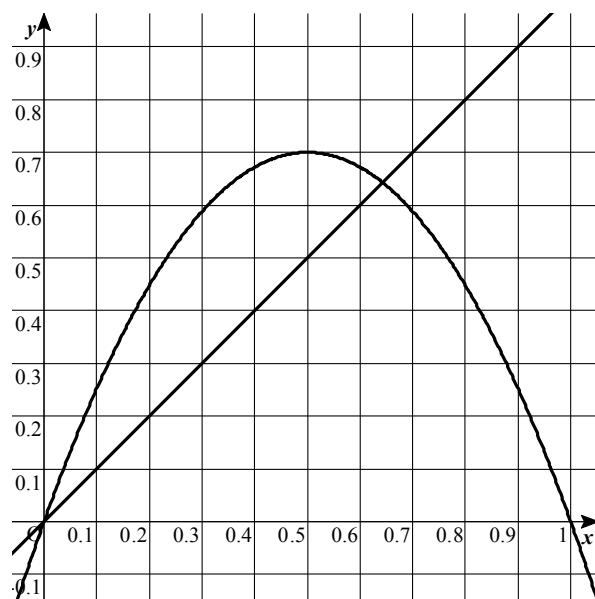
$$P_1(x_1, x_1)$$

[3] P_1 を出発点として、[1], [2]を繰り返す。



[問 17] 実験 6 の意味を解読し、説明せよ。また、実験 6 を続けることでどのようなことがわかるか述べよ。

[問 18] $r=2.8$, $x_0=0.1$ のとき、右図において実験 6 を実行し、その結果について考察せよ。



2-2 ロジスティックモデルの視覚化

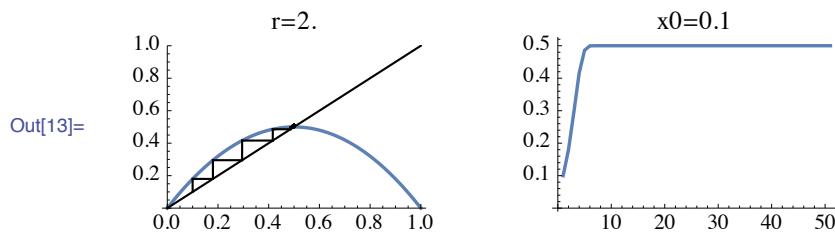
■ロジスティックモデルを視覚化することで、個体密度の増減の様子がよくわかるが、手で行うと精密さに欠ける上に、増殖率 r や初期値 x_0 の値によってどのように様子が変わるかの考察ができない

■そこで、Mathematica で関数をつくって実験しよう

[実験 7]

Mathematica で、ロジスティックモデルの増減の様子を視覚化しよう。

```
In[1]:= f[x_] := r (1 - x) x
In[2]:= makelines[x_] :=
  {Line[{{x, x}, {x, f[x]}]}, Line[{{x, f[x]}, {f[x], f[x]}}]}
In[7]:= orbit[x0_, k_] := Module[{lst, g1, g2},
  lst = NestList[f, x0, k];
  g1 = Plot[f[x], {x, 0, 1}, PlotRange -> {0, 1},
    Epilog -> {Line[{{0, 0}, {1, 1}}], Map[makelines, lst]},
    PlotLabel -> SequenceForm["r=", r],
    DisplayFunction -> Identity];
  g2 = ListLinePlot[lst, PlotLabel -> SequenceForm["x0=", x0],
    DisplayFunction -> Identity];
  GraphicsRow[{g1, g2}]];
In[12]:= r = 2.0;
orbit[0.1, 50]
```



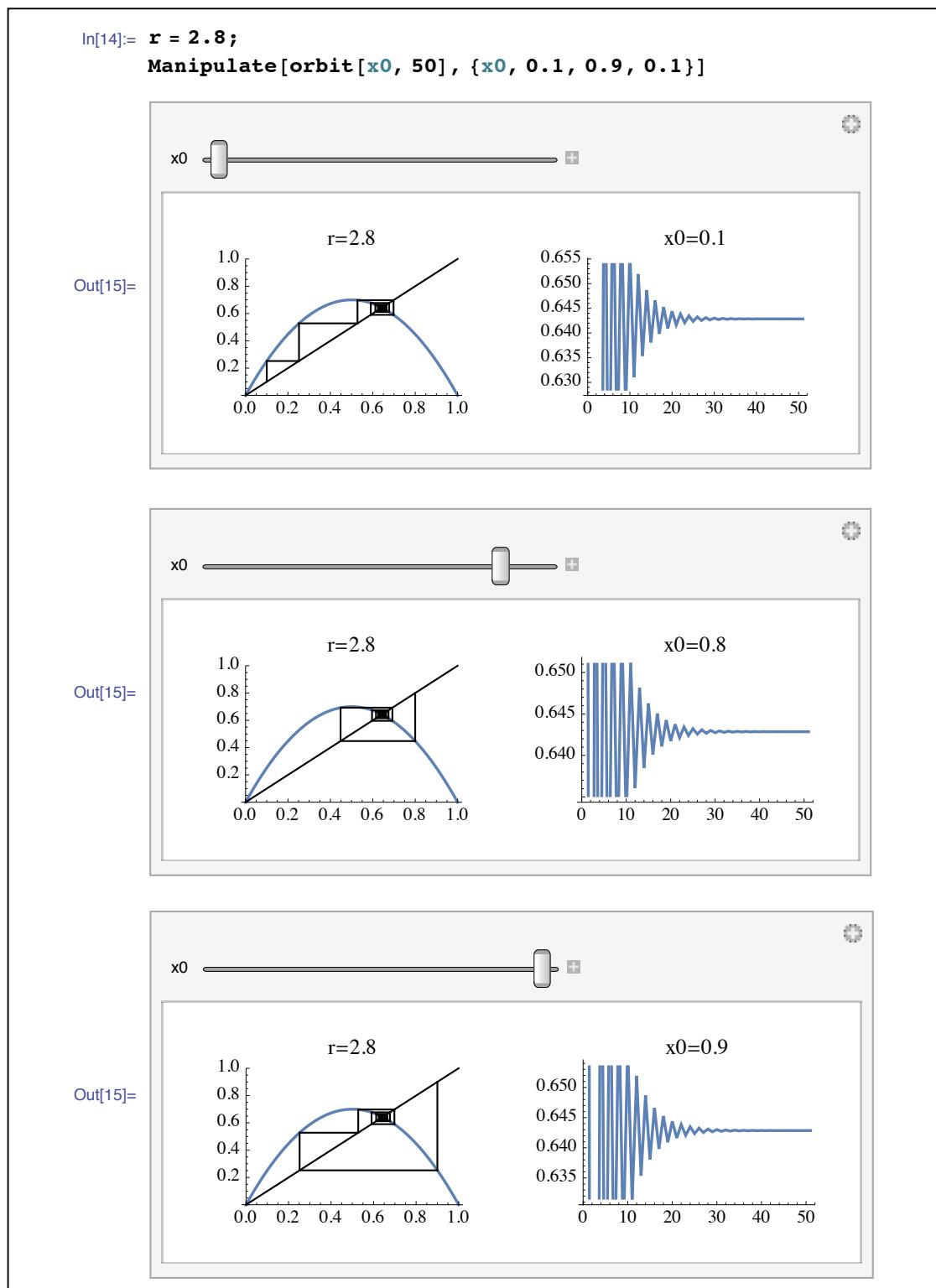
[問 19] $x_0=0.1$ のとき、 r の値を次の(1)~(4)の値に変えて、実験 7 を繰り返せ

- (1) $r=0.9$ (2) $r=1.5$ (3) $r=3.3$ (4) $r=3.9$

[実験 8]

Mathematica で、初期値をスライドバーで変化させて実験しよう。

```
In[14]:= r = 2.8;
Manipulate[orbit[x0, 50], {x0, 0.1, 0.9, 0.1}]
```



[問 20] r の値や初期値 x_0 , k の値を変えながら実験 8 を繰り返せ。ただし $0 < r < 4$ とする。

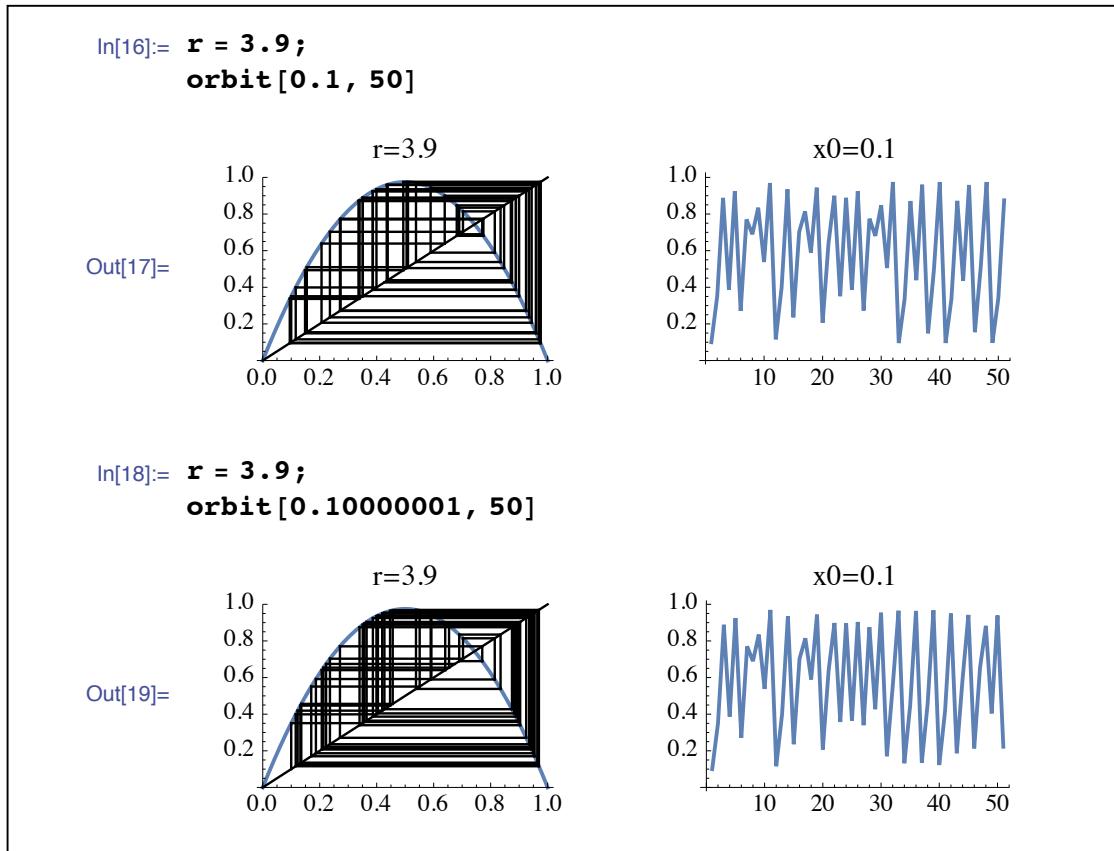
[考察 5] 実験 8 と問 20 の結果から、気づいた点を述べよ。

2-3 初期値の小さな差

- ロジスティックモデルにおいて、増殖率 r が同じであるとき、初期値が少し違っても、同じような振る舞いをしていた
- では、初期値をほんの少しだけ違えたとき、個体密度の増減はどのようになるだろう？

[実験 9]

Mathematica で、初期値 x_0 の値を非常に小さな値だけ変化させて実験しよう。



[考察 6] 実験 9 結果から気づいた点を述べよ。

[問 21] いろいろな r の値に対して、初期値 x_0 の値を非常に小さな値だけ変化させ、実験 9 を繰り返せ。ただし、 $0 < r < 4$ とする。

§ 3 カオス

3-1 ロジスティックモデルの r の依存性

- これまでの実験や考察によって、ロジスティックモデルの増殖率 r の値によって、個体密度の変化の様子が非常に違ってくることがわかった
- 実は、数理生態学者 R.May の研究によって、次のことがわかっている

[定理 3]

ロジスティックモデル

$$x_{t+1} = r(1 - x_t)x_t \quad \cdots (1.4)$$

において、 $t \rightarrow \infty$ のときの $\{x_t\}$ の振る舞いは、 r の値によって次のようになる。

(1) $0 < r \leq 1$ のとき

区間 $[0, 1]$ のどの初期値から出発しても、 $\{x_t\}$ は単調に 0 に収束する。

(2) $1 < r \leq 3$ のとき

区間 $(0, 1)$ のどの初期値から出発しても、 $\{x_t\}$ は不動点 $1 - \frac{1}{r}$ に収束する。

(3) $3 < r \leq 1 + \sqrt{6}$ (≈ 3.44949) のとき

区間 $(0, 1)$ のどの初期値から出発しても、ある t から先は周期 2 の軌道になる。

(4) $1 + \sqrt{6} < r < r_\infty$ のとき ($r_\infty = 3.569945672 \dots$ ファイゲンバウム数)

初期値の取り方に関係なく、 r の増加につれてある t から先は周期 4, 8, 16, ..., 2^n , ... の周期軌道が現れる。

(5) $r_\infty < r < 4$ のとき

初期値の取り方に依存して、あらゆる周期の軌道が現れる。初期値のほんの少しの変動で、軌道が大幅に変化する。

- (1.4)において、

$$x_{t+1} = x_t$$

となる x_t を**不動点**という。

-

$$x_{t+p} = x_t$$

となる最小の p のことを**周期**といふ。

[問 22] ロジスティックモデル(1.4)の不動点を求めよ。

[問 23] 定理 3 が成り立つことを、Mathematica で実験することで確かめよ。

3-2 カオス

- 初期値 x_0 を決めて、ロジスティックモデル

$$x_{t+1} = r(1 - x_t)x_t \cdots \quad (1.4)$$

を次々と適用していくば、確率のように偶然ではなく、決定論的に次々と値は決まる

- ニュートン以来の世界観では、初期値が与えられて物事が決定論的に決まるのであれば、将来は完璧に予想できるとされてきた

- しかし、今まで見てきたように、(1.4)によって決定論的に決まるにもかかわらず、rの値によっては将来の予想がまったくつかない場合がある

- このような現象を**カオス**という

- 非常に簡単な規則から、予測のつかない複雑な運動が現われる所以である

- もう少し数学的にいふと、

決定論的な非線型法則から生じる、有界で非周期的な不安定運動がカオス

となる

- 1960年代から70年代にかけて、世界各地で数学者、物理学者、生物学者がお互いの関係を知らずに

$$x_{t+1} = f(x_t) \cdots \quad (1.6)$$

の形の方程式を研究していた

- メイが方程式(1.6)に初めてコンピュータを用いて以来、それぞれの研究に共通したイメージを持つことができたのである

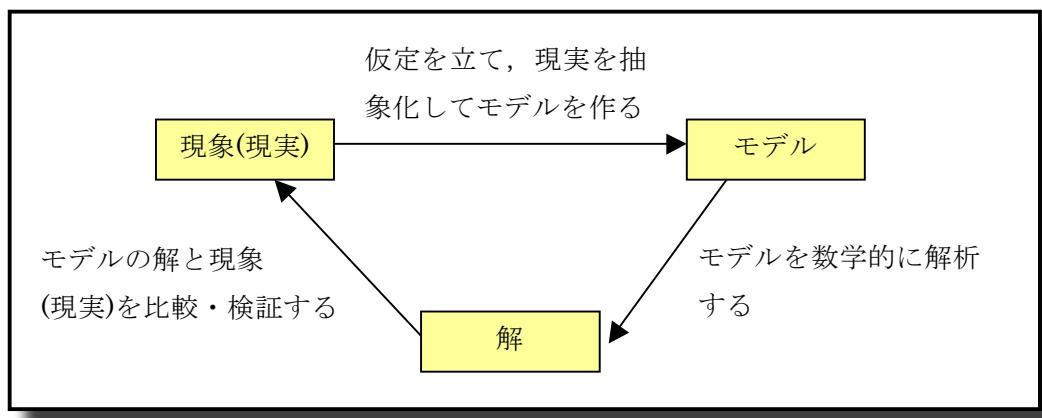
- そして、*Mathematica*を利用すれば、高校生でもカオスを体験できるようになったのである

[Report1] カオスの他の例を探し、レポートを作成せよ。

3-3 他のモデル

- ロジスティックモデルで生態系の個体密度の増減を考察する中で、カオスという興味ある寄り道をしてきた

- ロジスティックモデルにも現実と食い違う点があるので、下図に基づいてモデルの再構築を行うべきであるが、それは興味のある人のレポートに任せよう



§ 4 カオスとフラクタル

この節は、May の発見した定理 3 を、*Mathematica* で視覚化して鑑賞する。カオスにより興味を持った人は以下を見て、実験して、楽しみなさい。

4-1 カオスの視覚化

■定理 3 によれば、関数

$$f(x) = r(1-x)x \quad \cdots (1.5)$$

をネストさせると、 r の値によって吸い込み不動点や湧き出し不動点、様々な周期の軌道が現れる

■その周期軌道が、 r の値によってどのように変化するかをグラフ化してみよう(これは有名なグラフである)

■アイデアは、ある r の値のときに、初期値 0.5 から f を 150 回ネストさせ、各回で近づいていく値を求める(初期値が他の値でも、本質的には同じである)

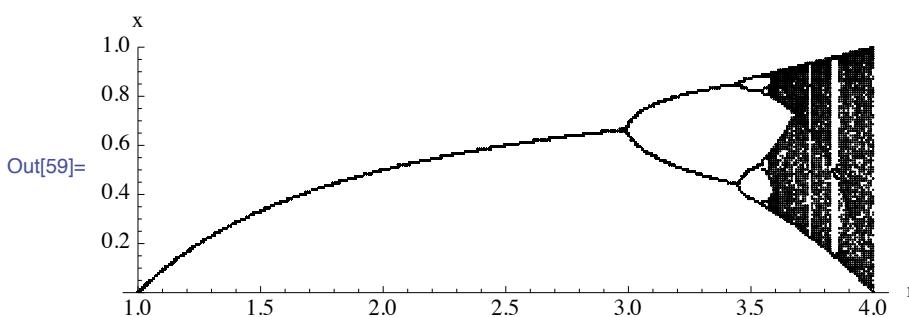
■ただし、最後の方の値だけが必要なので、120 回から 150 回までの値だけを求め、それらすべての値を横軸 r の上にプロットし、この操作を、 r の値が r_0 から r_1 までの間で繰り返す

[実験 10]

以上の考えを *Mathematica* の関数で実現し、実験しよう。

```
In[56]:= Clear[f]
f = r # (1 - #) &;
period[r0_, r1_] :=
Show[
  Graphics[{PointSize[.001],
    Table[Map[Point[{r, #}] &,
      NestList[f, Nest[f, 0.5, 120], 150]],
    {r, r1, r0, (r0 - r1) / 600}]}], PlotRange -> {0, 1},
  AxesOrigin -> {r0, 0}, AxesLabel -> {"r", "x"}, Axes -> True]

In[59]:= period[1., 4.]
```



[問 24] 実験 10 の出力図を解読せよ。

■実験 10 の関数 **period** の簡単な解説は次のとおり

◆ **f=r # (1-#) &;**

通常の関数の定義では

$$f[x_]:=r x (1-x)$$

となる。ところがこの普通の定義は、まず関数を登録し、後で必要なときに呼び出すという 2 ステップを必要とする。今回の計算では何千回もの f の計算が必要なので、すぐその場で計算される純関数を用いる。純関数は引数を#で表し、式の最後に&をつける。

◆ **Nest[f,0.5,120]**

初期値 0.5 から f を 120 回ネストさせた値

$$f^{120}(0.5)$$

を得る。120 回目だけが必要なので、**Nest** であることに注意せよ。

◆ **NestList[f,Nest[f,0.5,120],150]]**

初期値 $f^{120}(0.5)$ から f を 150 回までネストさせた値のリスト

$$\{ f^{120}(0.5), f^{121}(0.5), \dots, f^{150}(0.5) \}$$

を得る。

◆ **Map[f,{a,b,c}] → {f(a),f(b),f(c)}**

関数 f をリスト $\{a,b,c\}$ に作用させてるので、リスト $\{f(a),f(b),f(c)\}$ を得る。

[問 25] r の範囲が次のとき実験 10 を行い、出力される図を鑑賞せよ。

- (1) $2.9 \leq r \leq 4$ (2) $3.5 \leq r \leq 3.9$ (3) $3.83 \leq r \leq 3.86$

[問 26] 問 25 の結果からわかること、予想されることを述べよ。

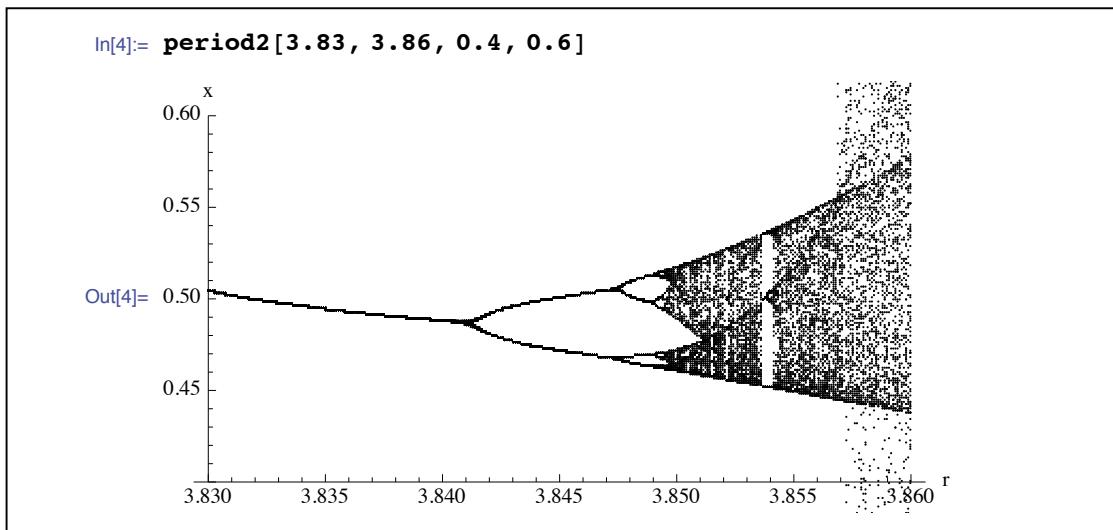
4-2 フラクタル

■問 26 の考察を、*Mathematica* で確認してみよう

[実験 11]

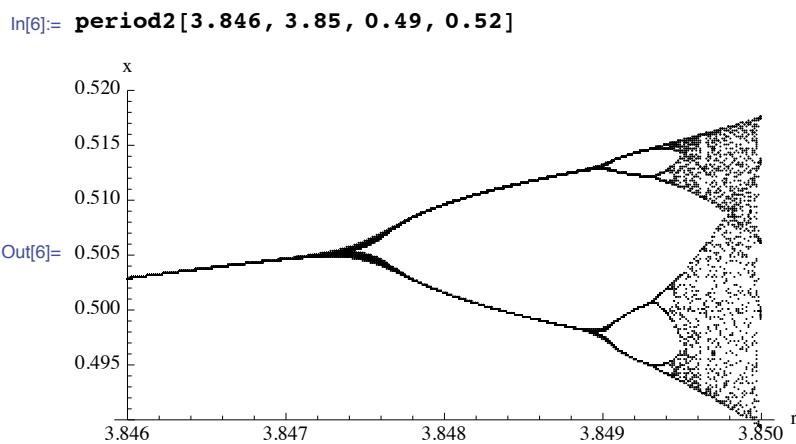
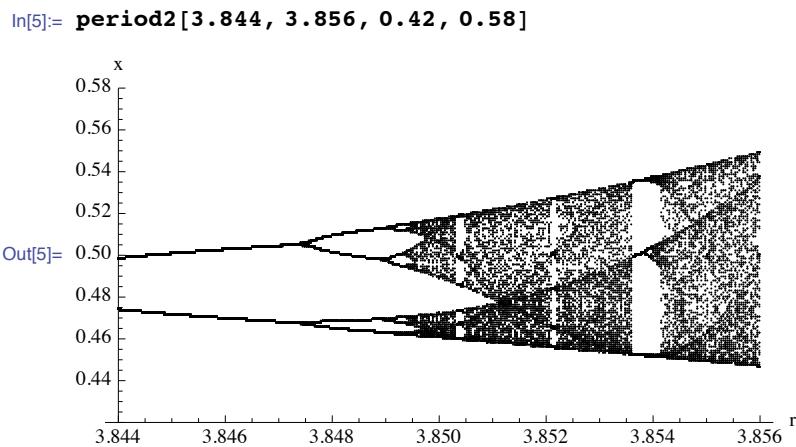
実験 10 の関数 **period** は、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で描画するので、拡大していくと縦に寸詰まりになる。そこで、関数 **period** を改良しよう。

```
In[1]:= Clear[f]
f = r # (1 - #) &;
period2[r0_, r1_, x0_, x1_] :=
Show[
  Graphics[{PointSize[.001],
    Table[Map[Point[{r, #}] &,
      NestList[f, Nest[f, 0.5, 120], 150]],
    {r, r1, r0, (r0 - r1) / 600}]], AspectRatio -> 1/2],
  PlotRange -> {x0, x1}, AxesOrigin -> {r0, x0},
  AxesLabel -> {"r", "x"}, Axes -> True]
```



[問 27] 関数 **period2** の使い方を理解し、自分の興味ある部分を拡大して鑑賞せよ。

- 問 25 の(1)の図と、その図の一部を拡大して見た実験 11 の図とは、そっくりである
- このような、図自身の中にその図と相似な図が含まれているもの、すなわち自己相似性を持っている図形を**フラクタル**という
- コンピュータの発展で研究が進んだカオスとフラクタルだが、カオスの図を拡大するとフラクタルが現れるという不思議な関係を、*Mathematica* を利用して見ることができた



◇◆Topics◆◇

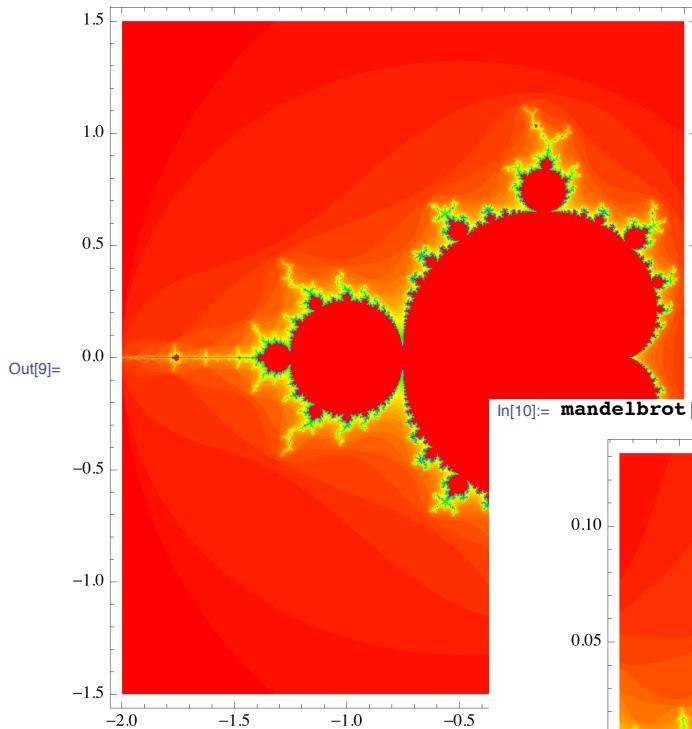
下図は、マンデルブロー集合という有名なフラクタルである。

Mathematica でも簡単に描くことができるので、興味のある人は挑戦してみよう。

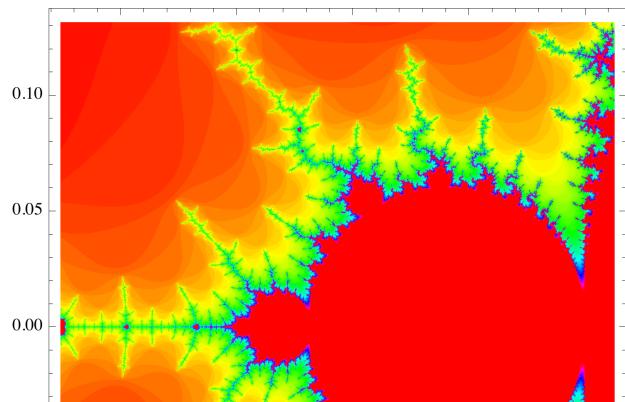
```
In[7]:= speed[c_] := (z = k = 0.; While[Abs[z] < 2 && k < 100, (z = z^2 + c; k++)]; Return[k];)
```

```
In[8]:= mandelbrot[crdnt_List] := (cf = Flatten[crdnt]; DensityPlot[speed[x + y I], {x, cf[[1]], cf[[3]]}, {y, cf[[2]], cf[[4]]}, PlotPoints -> 500, ColorFunction -> Hue, Mesh -> False, AspectRatio -> Automatic])
```

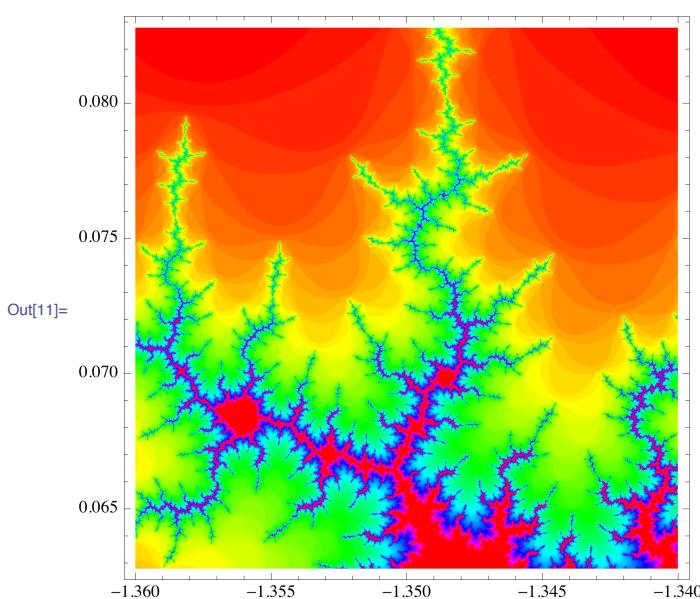
```
In[9]:= mandelbrot[{{{-2.0, -1.5}, {0.5, 1.5}}]
```



```
In[10]:= mandelbrot[{{{-1.47586, -0.154706}, {-1.23729, 0.131579}}]
```



```
In[11]:= mandelbrot[{{{-1.36, 0.0628}, {-1.34, 0.0828}}]
```



第3章 過去と未来を見通そう

§ 1 微分方程式

1-1 マルサスの人口増加のモデル化

第2章で、生物の個体数の増減を考えた。その際、生物は一定時間間隔に同期して分裂して増えると仮定した。つまり、時間を離散的に考えて、漸化式(差分方程式)で増減の様子を記述してモデル化し、解析したのである。

しかし、世の中では時間に関して連続的に考えなければならないものがある。例えば、個体数が増減する場合に、世代が重なって滑らかに変化するとみなせる場合などである。ここでは、そのような連続的な変化を考えていこう。

■イギリスの経済学者マルサス(1766～1834)は、著書『人口論』において、人口増加を次のようにモデル化した

■時刻 t における人口を $y=y(t)$ とすると、微小時間 Δt における出生数と死亡数は、ともに人口の大きさと微小時間に比例するだろう、すなわち、 α , β を定数として、

$$\text{出生数} = \alpha y \Delta t$$

$$\text{死亡数} = \beta y \Delta t$$

と表せる

■よって、微小時間 Δt における人口増加 Δy は、

$$\Delta y = \alpha y \Delta t - \beta y \Delta t = (\alpha - \beta)y \Delta t$$

ここで、

$$\alpha - \beta = \gamma$$

とおくと、

$$\Delta y = \gamma y \Delta t \quad (\gamma \text{ は定数})$$

すなわち、

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \gamma y$$

ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、微分の定義より、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$$

であるから、

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y \quad \cdots (1.1)$$

を得る

■(1.1)はマルサスの人口増加のモデル化を表した方程式であり、連続的な時間で考えている

■一般に、方程式(1.1)のように未知の関数 y とその導関数 $\frac{dy}{dt}$ を含む方程式を、微分方程式という

1-2 微分方程式の意味

■微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y \quad \cdots (1.1)$$

の左辺 $\frac{dy}{dt}$ は、人口 y の変化率であり、ある瞬間の人口の変化の様子を表している

■第2章でも学習したように、変化率 $\frac{dy}{dt}$ は図形的には、曲線 $y=y(t)$ の接線の傾きを表している

■(1.1)において、 $\gamma=0.5$ とすると、

$$\frac{dy}{dt} = 0.5y \quad \cdots (1.2)$$

$$y=1 \text{ のとき}, \frac{dy}{dt} = 0.5$$

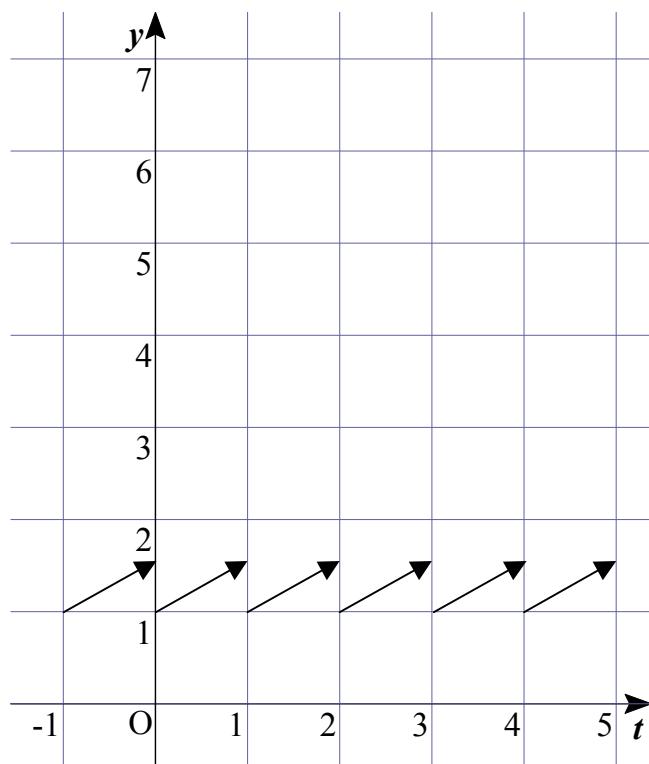
$$y=2 \text{ のとき}, \frac{dy}{dt} = 1$$

$$y=3 \text{ のとき}, \frac{dy}{dt} =$$

$$y=4 \text{ のとき}, \frac{dy}{dt} =$$

$$y=5 \text{ のとき}, \frac{dy}{dt} =$$

[問 1] 上記の $\frac{dy}{dt}$ の値をもとに、 $y=1$ のときの例にならってベクトル $\left(1, \frac{dy}{dt}\right)$ を右のグラフ用紙に書き込め。



[問 2] 右図のベクトル $\left(1, \frac{dy}{dt}\right)$ をじっと眺めると、どのような曲線が見えてくるか。

■ $\frac{dy}{dt}$ は瞬間の変化の様子を表していて、図形的には接線の傾きを表すので、ベクトル

$\left(1, \frac{dy}{dt}\right)$ を短い矢印で図示したものは、その瞬間、瞬間の変化の向きを表している

■ このように、 $\frac{dy}{dt}$ の変化のようすを短い線分で表したもの、微分方程式(1.1)の方向場といふ

■ 方向場のベクトルを流れとして捉えてずっとつなないでいくと、ベクトルを接線として持つ曲線群が浮かび上がってくるが、この曲線を微分方程式(1.1)の解曲線といふ

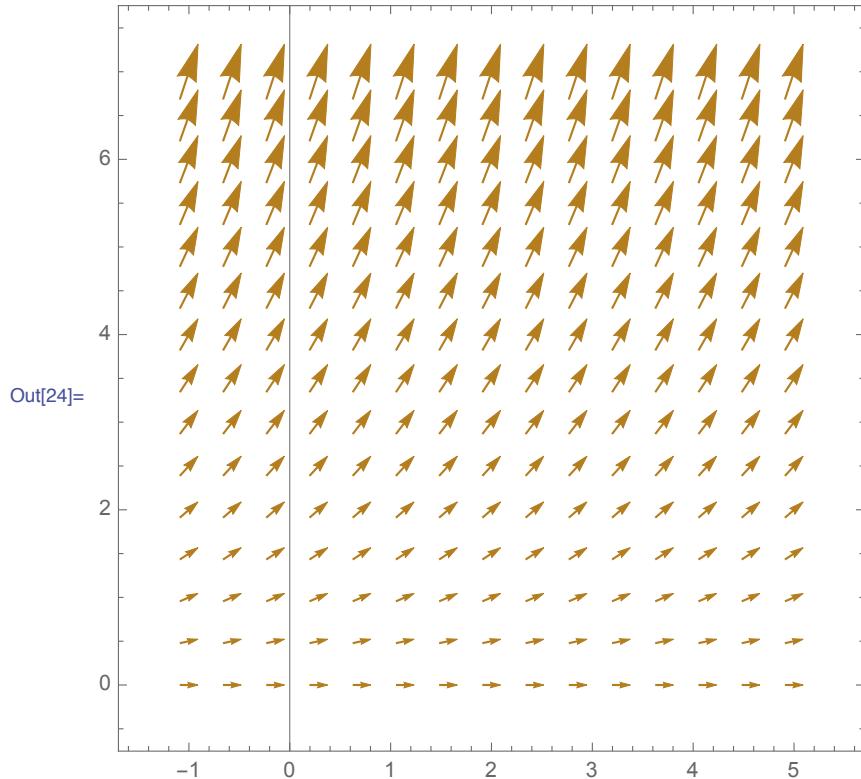
[実験 1]

微分方程式(1.2)の方向場を、Mathematica で描いてみよう。

```
In[23]:= eqn = y'[t] == 0.5 y[t]
```

```
Out[23]= y'[t] == 0.5 y[t]
```

```
In[24]:= VectorPlot[{1, Last[eqn]}, {t, -1, 5}, {y[t], 0, 7},  
Axes → True]
```



[問 3] 実験 1 の方向場に、微分方程式 $\frac{dy}{dt} = 0.5y \cdots (1.2)$ の解曲線を書き込め。

■方向場を見ればわかるように、微分方程式(1.2)の解曲線は何本もある

■しかし、例えば、

$$t=0 \text{ のとき, } y=1.5 \cdots (1.3)$$

という条件を満たす解曲線は、ただ1本に決まる

■この条件(1.3)のことを、**初期条件**という

[問 4] 微分方程式 $\frac{dy}{dt} = \gamma y \cdots (1.1)$ について、

(1) γ の値をいろいろと変えて、実験1と同様にして *Mathematica* で方向場を描け。

(2) (1)の方向場を見て、微分方程式(1.1)の解曲線を表す関数を予想せよ。

■微分方程式の解曲線を表す関数を、**微分方程式の解**という

■微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y \cdots (1.1)$$

の意味するところをまとめる

■(1.1)の左辺は変化率なので、微分方程式(1.1)は

局所的な(瞬間の)情報を与える

ものである

■その局所的な情報を図示したものが、**方向場**である

■次に、方向場のベクトルをつないでいくと、解曲線という曲線群が見えてくる

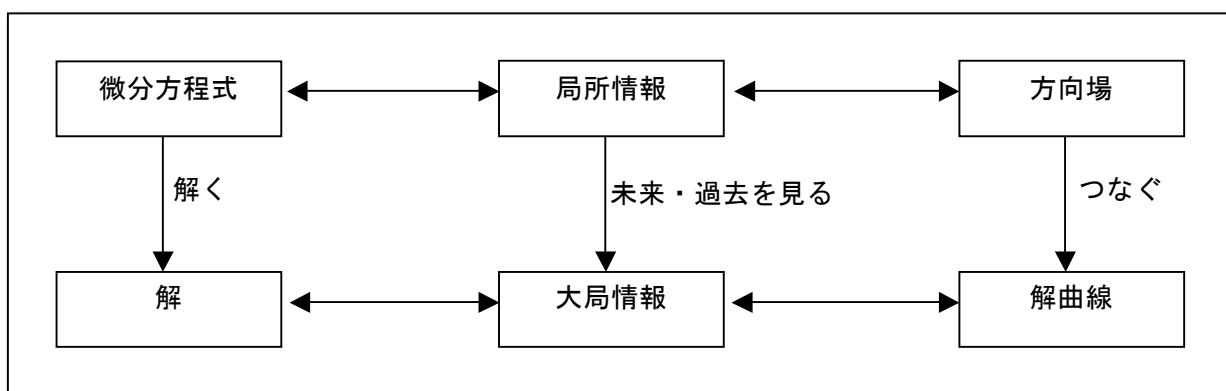
■つまり、

局所的な情報である方向場を足し合わせると

大局的な情報である曲線群が得られる

ことがわかる

■この解曲線をたどると、過去や未来が見えてくるのである



§ 2 ランチェスターの 2 次法則

2-1 戦闘のモデル化

- 微分方程式の別の例として、X 軍と Y 軍の近代的戦闘のモデル化を考えよう(戦闘を考えるのはわかりやすいからであり、戦争が好きだからではない、念のために)
 - 昔の戦闘は局地戦であり、剣と剣、弓矢と盾などの武器を使っての一騎打ちで行われた
 - 一騎打ちでは、武器の性能や兵士の資質が同じである場合には、兵士の数を敵より一人でも多くするほうが勝利を得ることはほとんど明らかだろう
 - しかし、近代戦では武器の主力が火器(小銃、マシンガン、大砲など)になったので、戦闘は集団的・確率的になった
 - すなわち、近代戦では特定の兵士が狙われるのではなく、まったくランダムに各兵士が狙われると考える
 - 次の具体例で、モデル化を行おう
- [1] 最初の兵士の数は X 軍 30 万人、Y 軍 10 万人
[2] 銃の性能は、Y 軍のほうが X 軍のものより 3 倍良い
[3] 集団的・確率的な近代戦が行われる

[問 5] X 軍、Y 軍のどちらが勝利するかを予想し、その根拠を述べよ。

- 時刻 t における X 軍、Y 軍の生存者数をそれぞれ x 人、y 人、微小時間 Δt における X 軍、Y 軍の戦死者数をそれぞれ Δx 人、 Δy 人とすると、仮定の[3]より、Y 軍の戦死者数は X 軍の生存者数と微小時間に比例すると考えられるので、k を定数として、

$$\Delta y = -kx \Delta t \quad \cdots (2.1)$$

となる。

[問 6] (1) 仮定の[2]に注意して、X 軍の戦死者数 Δx を(2.1)と同様の式で表せ。

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を x, y の式で表せ。

(3) $\Delta t \rightarrow 0$ のとき、 $\Delta x \rightarrow 0$ であることから、このモデルの微分方程式を求めよ。

2-2 ランチェスターの 2 次法則

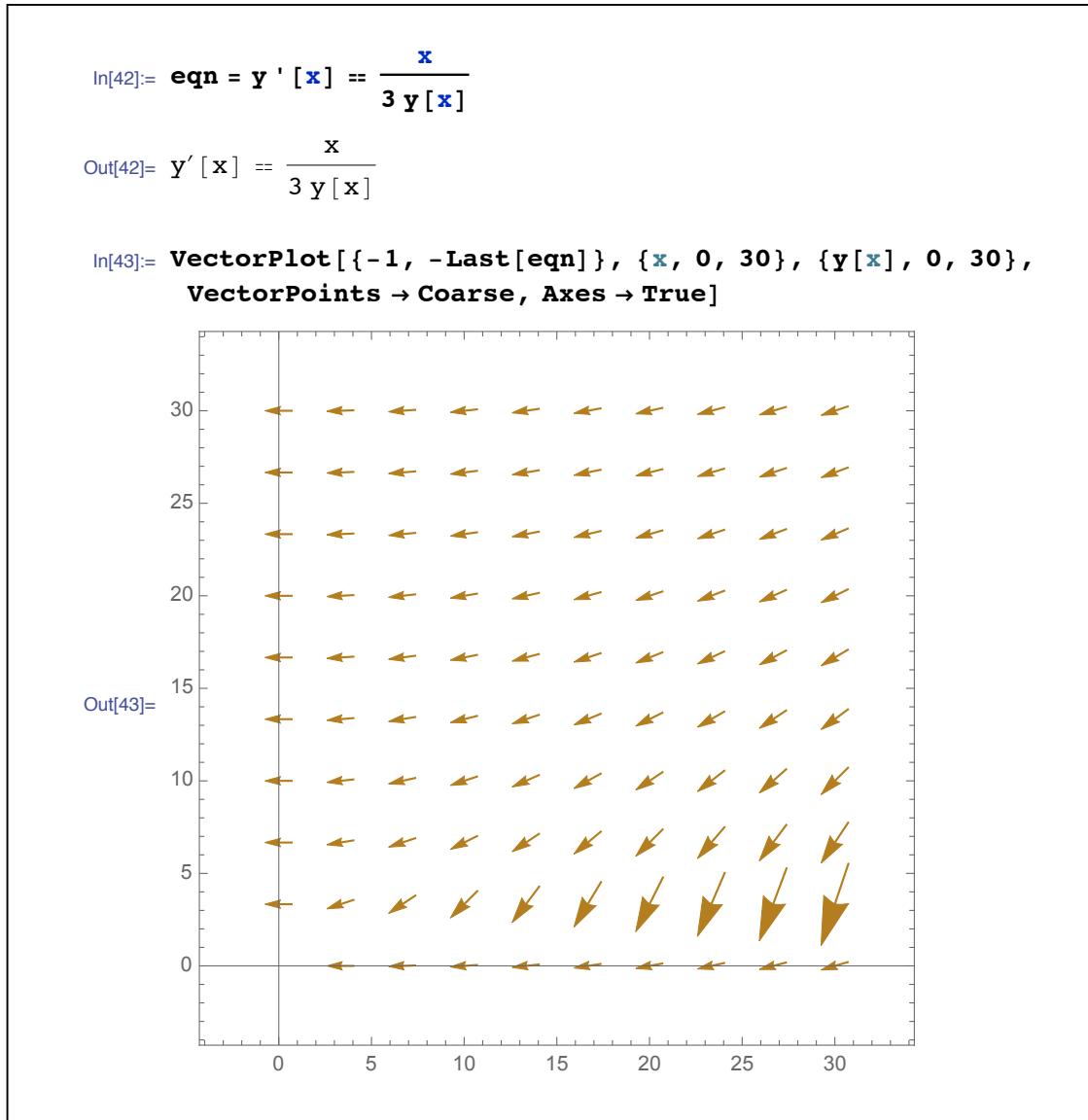
- 2-1 で考えたモデル化の微分方程式は、次のようになつた

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3y} \quad \cdots (2.2)$$

- X 軍と Y 軍の戦いの結果がどのようになるかは、1-2 における実験 1 と同様に、微分方程式(2.2)の方向場を考えればわかるだろう

[実験 2]

微分方程式(2.2)の方向場を, *Mathematica* で描いてみよう。



[問 7] 実験 2 を解読せよ。

[問 8] (1) 実験 2 の方向場の中で, 初期条件 $t=0$ のとき $x=30, y=10$ を満たす方向場を見つけよ。

- (2) (1)の方向場をたどることにより, どちらが勝利をおさめたかを述べ, そのときに生存している兵士の人数を求めよ。
- (3) (2)の結果から, 自分の予想とどのような違いがあったかを考察せよ。

[問 9] 微分方程式(2.2)で表されるモデルにおいて, 初期条件によって勝敗の結果がどのように変わるかを, 実験 2 の方向場を利用して考察せよ。

[問 10] (1) 微分方程式(2.2)を得たときのモデル化の仮定

[2] 銃の性能は、Y軍のほうがX軍のものより3倍良い
を変更することで新たなモデル化を行い、微分方程式を求めよ。

(2) (1)で得られた微分方程式の方向場を考えて、勝敗の結果について考察せよ。

■以上のようなモデルを考えたのは、イギリスの航空工学のエンジニアであったランチェスター(1868~1946)である

■これまでの例から、近似的に

$$\text{戦闘力} = \text{武器の性能} \times (\text{兵士の人数})^2$$

と考えられ、これはランチェスターの2次法則とよばれる

■ランチェスターの2次法則は、現代のオペレーションズ・リサーチ(OR)のはじまりとして高く評価されていて、競合する2つの企業のマーケティング戦略にも利用されている

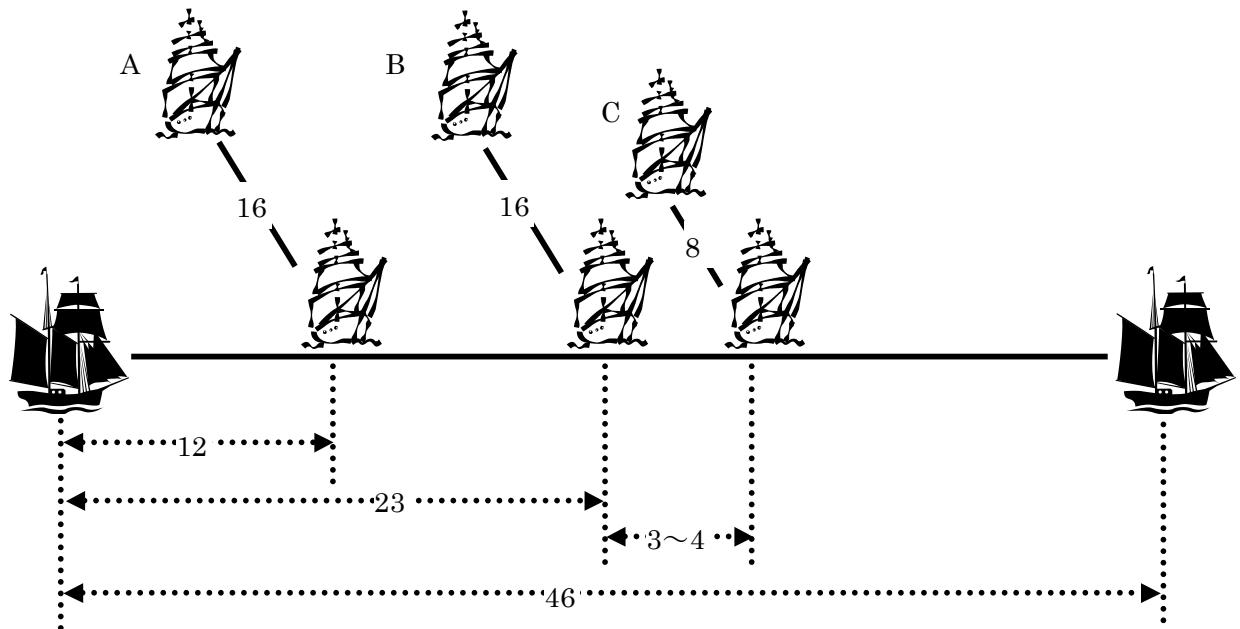
■ランチェスターの2次法則の教えるところは、兵士の数の優位が何にもまして勝敗に決定的な影響力を持つということである

■では、いつも人数が多い方、強い方が必ず勝つということかというと、そうではない

■ランチェスターの2次法則結果を逆に使えば、弱い方や人数の少ない方にも勝つ見込みがある、つまり、局地戦に持ち込むことや一点集中が、戦略として有効となる

[例] イギリスのネルソン提督の、トラファルガー海戦(1805年)における作戦メモ

イギリス軍：40隻 フランススペイン連合軍：46隻



- ・イギリス軍は、16隻の主要戦列A, Bの2列と、8隻の補助戦列Cに別れる
- ・Bは連合軍の中央を攻撃し、連合軍を23隻ずつの部分列に分断する
- ・Aは連合軍の12隻を側面から攻撃し、Cは連合軍の中心から前の3~4隻を攻撃する
- ・つまり、連合軍の23隻は、イギリス軍の32隻の集中砲火に曝される

仮に、両軍の海戦技術が等しいとする。戦闘力は戦艦数の2乗に比例するから、両軍の戦闘力の比は、 $32^2 : 23^2 = 1024 : 529 \approx 2 : 1$ となり、イギリス海軍は連合軍の実質的には約2倍の戦力で戦えると考えてよい。

実際には、イギリス軍27隻と連合軍33隻とが戦って、ネルソン提督の考へた上記の戦略どおりに戦い、イギリス軍が勝利をおさめたのである。

■ランチェスターの2次法則の一般的な形は、次のようになる

$$\Delta y = -\alpha x \Delta t, \quad \Delta x = -\beta y \Delta t$$

$$\text{より}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\alpha x, \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\beta y$$

$\Delta t \rightarrow 0$ として、

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha x, \quad \frac{dx}{dt} = -\beta y \cdots (2.3)$$

この(2.3)を微分方程式系という

§ 3 微分方程式を解く

3-1 積分で解く

■微分方程式 $\frac{dy}{dt} = 0.5y \cdots (1.2)$ の解を数学的にきちんと求めるために、まずは置換積分の

公式を確認しよう

[定理 1]

$$y = \int f(x)dx \text{において}, \quad x = g(t) \text{のとき},$$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

$$\text{左辺と右辺を入れ替えて書き直すと}, \quad \int f(x)\frac{dx}{dt} dt = \int f(x)dx$$

(証明)

合成関数の微分法より、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x)g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

$$\text{よって}, \quad y = \int f(g(t))g'(t)dt$$

$$\text{すなわち}, \quad \int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

(証明終わり)

■微分方程式(1.2)において、 $y \neq 0$ のとき、両辺を y で割って、

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\text{両辺を } t \text{ で積分すると}, \quad \int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} dt = \frac{1}{2} \int dt$$

$$\text{すなわち, } \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \int dt$$

よって,

$$\log|y| = \frac{1}{2}t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2}t+C} = e^C e^{\frac{1}{2}t}$$

$$\text{よって, } y = \pm e^C e^{\frac{1}{2}t}$$

$\pm e^C = A$ とおくと,

$$y = A e^{\frac{1}{2}t} \quad (A \text{ は任意定数で, } A \neq 0)$$

ここで, $y=0$ は明らかに微分方程式(1.2)を満たすが, これは $A=0$ として得られる。

よって, 微分方程式(1.2)を満たす関数は,

$$y = A e^{\frac{1}{2}t} \quad (A \text{ は任意定数}) \quad \cdots (3.1)$$

■このように, 微分方程式は両辺を積分することで解けることがある

■(3.1)のような, 任意定数を含んだ微分方程式を満たす関数を, 一般解という

■一般解は, 先の図形的視点では解曲線群である

■例えば,

$$t=0 \text{ のとき, } y=2$$

という初期条件が与えられたときは, (3.1)に条件を代入して,

$$2 = A \cdot e^0$$

$$\text{よって, } A=2$$

$$\text{ゆえに, } y = 2 e^{\frac{1}{2}t} \quad \cdots (3.2)$$

■(3.2)のような, 初期条件で任意定数がある値に決定された解を, 特殊解という

■特殊解を求ることは, 図形的視点では解曲線が 1 つ定まることがある

[問 11] 微分方程式 $\frac{dy}{dt} = \gamma y$ $\cdots (1.1)$ について,

(1) 微分方程式(1.1)の一般解を求めよ。

(2) $t=0$ のとき, $y=1$ を満たす(1.1)の特殊解を求めよ。

■今まで考えてきた微分方程式は,

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad \cdots (3.3)$$

という形をしていて, これを 変数分離形の微分方程式という

■変数分離形の微分方程式は積分で解くことができ、一般的にまとめると次のようになる

[変数分離形微分方程式の解法]

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \cdots (3.3)$$

より、 $h(y) \neq 0$ のとき、両辺を $h(y)$ で割って、

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x) \cdots (3.4)$$

両辺を x で積分すると、

$$\int \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int g(x) dx$$

置換積分法より、

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

(3.4)以降は、次のように書いてもよい。

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

両辺を積分して、

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

あとは両辺の積分計算を行えばよい。

(が、積分計算の結果をよく知っている関数で表せないこのほうが多い)

■2.2 で考えた、ランチェスターの2次法則の微分方程式などを解いてみよう

[問 12] 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3y}$ $\cdots (2.2)$ について、

- (1) 微分方程式(2.2)の一般解を求めよ。
- (2) $x=30$ のとき、 $y=10$ を満たす(2.2)の特殊解を求めよ。
- (3) (2)の特殊解が表す解曲線を、Mathematica で描け。
- (4) 初期条件(一般解の任意定数)をいろいろ変えながら、Mathematica で(2.2)の解曲線を描き、戦闘の様子を考察せよ。

[Report2] イギリスの天才数学者・物理学者のニュートン(1642~1747)は、自然落下する物

体の t 秒後の落下距離 y m は、空気抵抗を無視したとき、微分方程式 $\frac{d^2 y}{dt^2} = -g \cdots (3.4)$

(g は重力加速度 : 9.8m/s^2)で表されることを発見した。

- (1) 微分方程式(3.4)を解いて、 y を t で表せ。
- (2) 野球のピッチャーとバッターの間の距離は、約 18m である。いま時速 144km で水平方向に投げられた松坂のボールは、ホームベース上では何 m 落下しているか。

3-2 Mathematica で解く

■Mathematica は、微分方程式を解くこともできる

[実験 3]

微分方程式(2.2)を、Mathematica で解いてみよう。

```
In[1]:= DSolve[y'[x] == x/(3 y[x]), y[x], x]
Out[1]= {{y[x] \rightarrow -\frac{\sqrt{x^2 + 6 C[1]}}{\sqrt{3}}}, {y[x] \rightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 6 C[1]}}{\sqrt{3}}}}
In[3]:= sol = DSolve[{y'[x] == x/(3 y[x]), y[30] == 10}, y[x], x]
DSolve::bvnul :
一般解の分枝切断線において、与えられた境界条件からは空の解が得られます. >>
Out[3]= {{y[x] \rightarrow \frac{\sqrt{-600 + x^2}}{\sqrt{3}}}}
In[5]:= Plot[y[x] /. sol, {x, 0, 30}]

Out[5]=
```

[問 13] 実験 3 を解読せよ。

[問 14] 今まで現れた微分方程式を Mathematica で解き、自分で解いて得た解と比較検証せよ。

(注意) Mathematica で数学的に厳密に解けないときは、数値解を求める関数 **NDSolve** を利用する。

§ 4 モデルの検証

4-1 マルサス・モデルの検証

■微分方程式 $\frac{dy}{dt} = \gamma y$ ……(1.1)の解は,

$$y(t) = Ae^{\gamma t} \quad (A \text{ は任意定数}) \quad \cdots (4.1)$$

であった

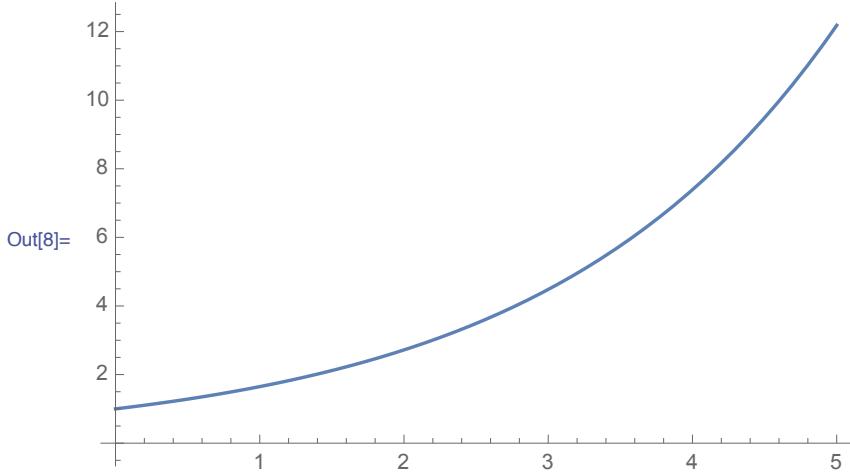
■解(4.1)は指数関数であり, 人口増加を考える場合は $A > 0$ である

[問 15] 上記の理由を述べよ。

[実験 4]

解(4.1)の A , γ の値を具体的に与え, Mathematica でグラフを描いてみよ。

```
In[6]:= y[t_] := A e^γ t  
In[7]:= A = 1; γ = 0.5;  
In[8]:= Plot[y[t], {t, 0, 5}]
```



[問 16] 解(4.1)の A , γ の値を変化させ, 実験 4 を続けよ。

[問 17] 実験 4, 問 16 の実験結果を, 以下にまとめよ。

マルサスの人口増加論をモデル化した微分方程式 $\frac{dy}{dt} = \gamma y$ ……(1.1)の解は,

$$y(t) =$$

である。そして, モデルでの γ の値による人口の増え方は, 次のようになる。

- (i) $\gamma >$ のとき, $y(t)$ は
- (ii) $\gamma =$ のとき, $y(t)$ は
- (iii) $\gamma <$ のとき, $y(t)$ は

■マルサスの人口モデル

$$y(t) = Ae^{\gamma t} \quad \cdots (4.1)$$

が、現実にあつているかどうかをチェックしよう

[問 18] 右の表は、アメリカの 1790 年から 10 年ごとの人口統計である。

- (1) 時刻 $t=0$ を 1790 年だとして、モデル(4.1)の A の値を決定せよ。
- (2) 10 年間を単位として計算するので、 $t=1$ を 1800 年として γ を決定せよ。
- (3) (1), (2)で求めた A , γ の値で定められたモデル式を(4.2)とすると、この(4.2)を用いた 1810 年の予測値を求めよ。
- (4) (3)で求めた予測値と実際の人口と比較して考察せよ。

年	アメリカの人口
1790	3.9×10^6
1800	5.3×10^6
1810	7.2×10^6

■問 18 より、マルサスのモデルは、

$$y(t) = 3.9 \times 10^6 e^{0.307t} \quad \cdots (4.2)$$

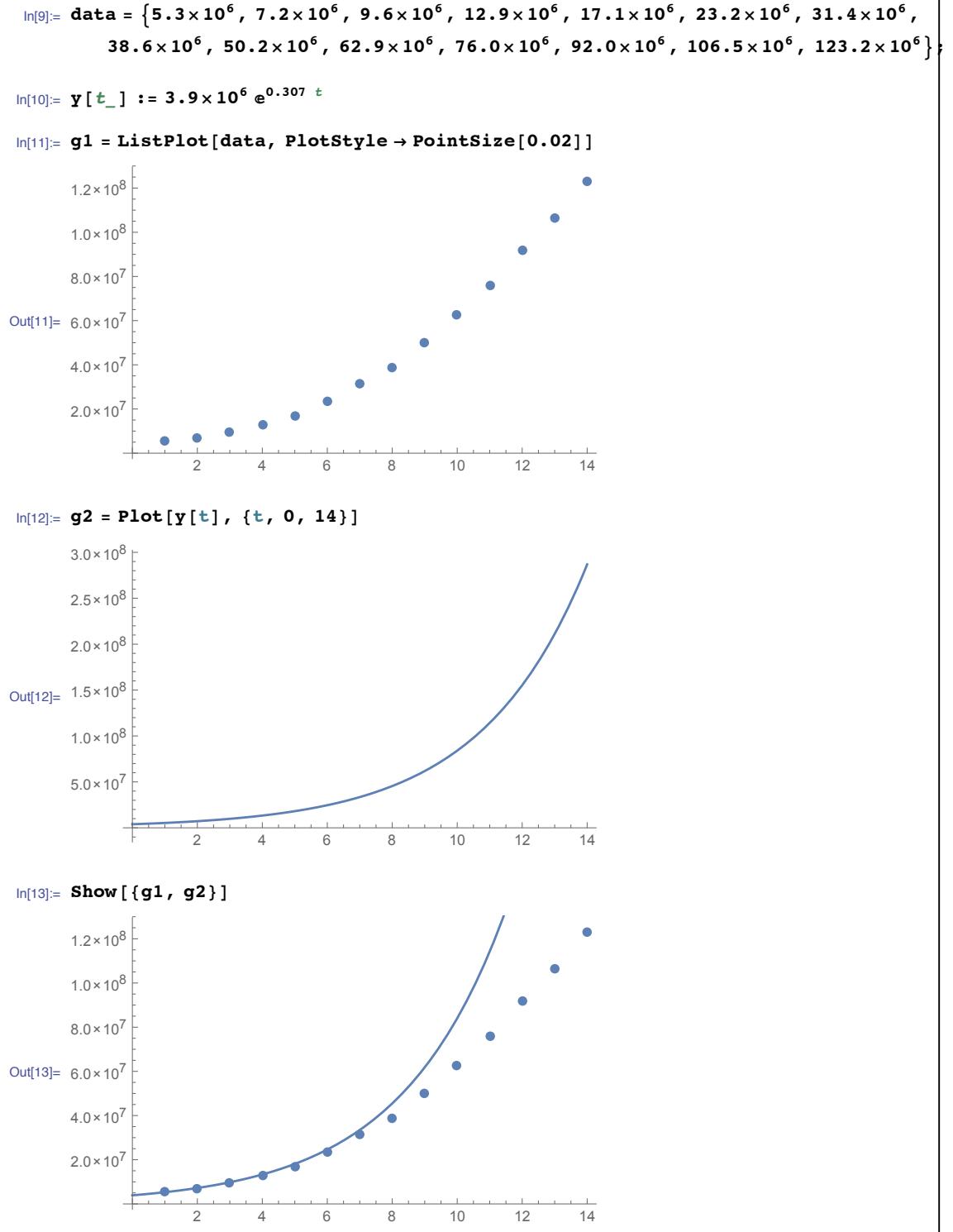
となった

[問 19] モデル(4.2)を用いて *Mathematica* で 1820 年～1930 年のアメリカの人口をの予測値を求め、下の表に記入せよ。そして、実際の人口と比較して考察せよ。

年	アメリカの人口	予測値
1790	3.9×10^6	3.9×10^6
1800	5.3×10^6	5.3×10^6
1810	7.2×10^6	7.2×10^6
1820	9.6×10^6	$\times 10^6$
1830	12.9×10^6	$\times 10^6$
1840	17.1×10^6	$\times 10^6$
1850	23.2×10^6	$\times 10^6$
1860	31.4×10^6	$\times 10^6$
1870	38.6×10^6	$\times 10^6$
1880	50.2×10^6	$\times 10^6$
1890	62.9×10^6	$\times 10^6$
1900	76.0×10^6	$\times 10^6$
1910	92.0×10^6	$\times 10^6$
1920	106.5×10^6	$\times 10^6$
1930	123.2×10^6	$\times 10^6$

[実験 5]

現実とモデル(4.2)による予測を, *Mathematica* で視覚化しよう。



[問 20] 実験 5 の命令を解読せよ。そして、その実験結果を考察せよ。

■以上より、マルサスの人口増加モデル

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y \quad \cdots (1.1)$$

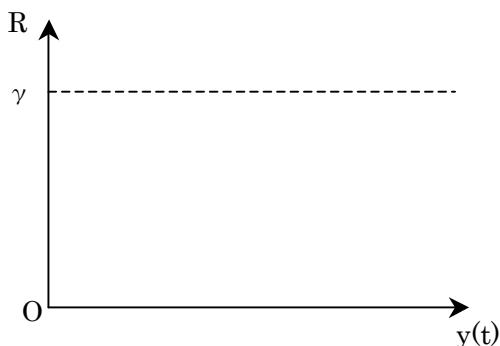
には、次のような問題点があることがわかった

- $\gamma > 0$ のとき、人口が発散してしまう、すなわち、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $y(t) \rightarrow \infty$ となるが、現実的ではない
- これは、人口の増加率が一定の γ であるとしたことによる
- 現実は、食料の不足や人口の増加に伴う環境の悪化、エネルギーの供給不足等で、増加率の γ は一定ではないと思われる

■そこで、増加率が人口によって変化するモデルを考える必要があるが、モデル化ではできるだけ単純な変化から考えるのが普通である

[問 21] 増加率 R が人口 $y(t)$ によって変化する場合、 R と $y(t)$ の簡単な関係としてはどのようなものが考えられるか。

[問 22] 増加率 R と人口 $y(t)$ との関係を下の図に書き込み、 R を $y(t)$ の式で表せ。



■問 22 で考えたモデルは、人口が小さければ増加率 R はほぼ γ であるが、人口が大きくなるにつれて R は減少し、 $y(t)=K$ のときに $R=0$ となるモデルである

[問 23] 問 22 で考えた増加率 R を用いて、人口の変化のモデルを微分方程式で表せ。

4-2 ヴェルハーストのモデル

■4-1 で考えた、マルサス・モデルの改良形であるモデル

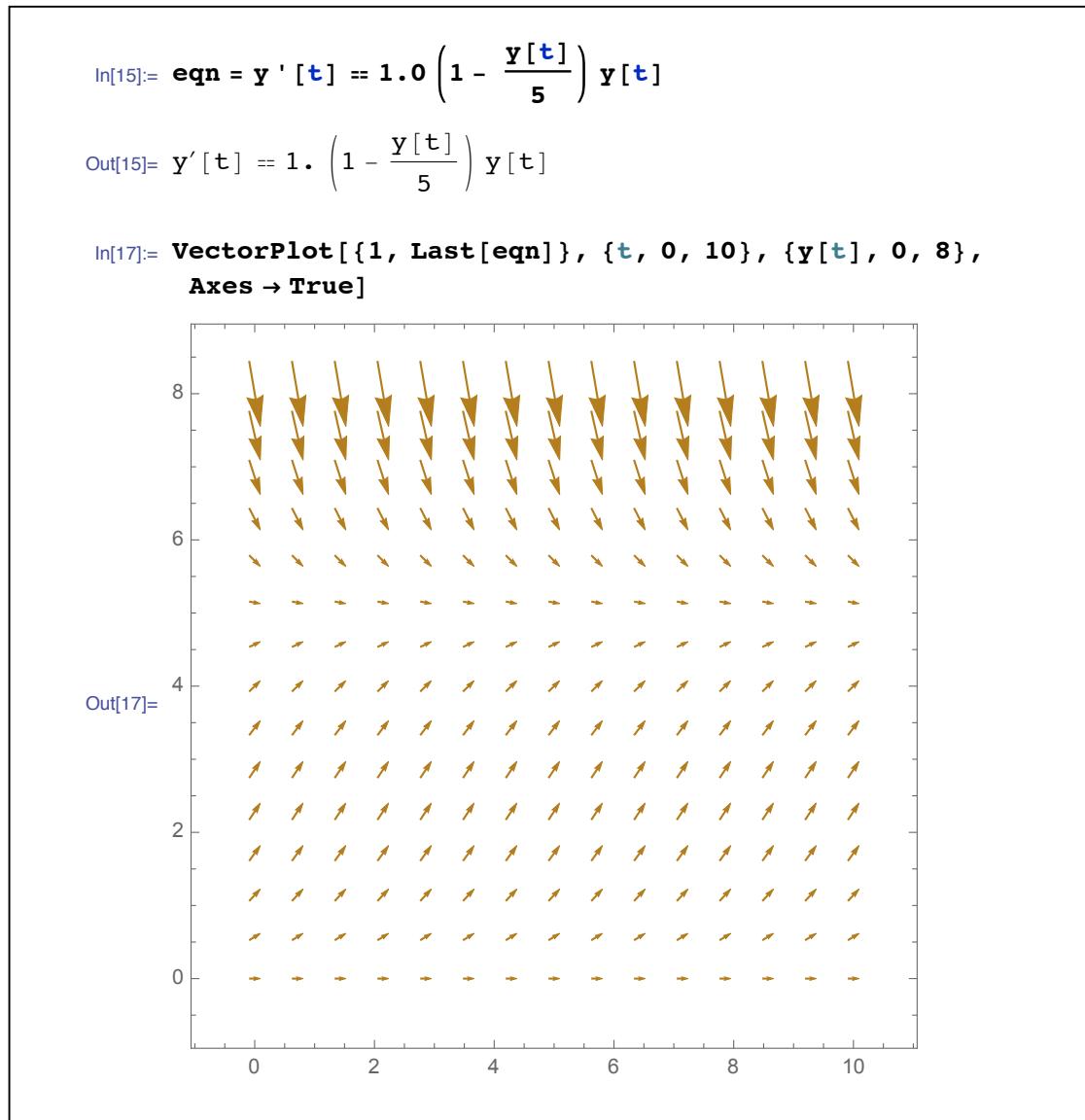
$$\frac{dy}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{y}{K}\right) y \quad \cdots (4.3)$$

は、1837年にオランダの数理生物学者ヴェルハーストが考えたものである

■ヴェルハーストのモデル(4.3)の微分方程式による増え方をつかむために、(4.3)の方向場を調べよう

[実験 6]

$\gamma=1$, $K=5$ のとき、モデル(4.3)の方向場を *Mathematica* で描こう。



[問 24] γ , K の値をいろいろ変えながら実験 5 を行い、その結果を考察せよ。

■簡単のために、モデル(4.3)で $\gamma=1$, $K=1$ とした微分方程式を解こう

$$\frac{dy}{dt} = (1-y)y \quad \cdots (4.4)$$

$y=0, 1$ は明らかに(4.4)を満たすので、 $y \neq 0, 1$ とする。

$$(4.4) の両辺を $(1-y)y$ で割って、 \frac{1}{(1-y)y} \cdot \frac{dy}{dt} = 1$$

$$\text{両辺を } t \text{ で積分して、 } \int \frac{1}{(1-y)y} \cdot \frac{dy}{dt} dt = \int dt$$

$$\text{よって、 } \int \frac{1}{(1-y)y} dy = \int dt$$

ここで、

$$\int \frac{1}{(1-y)y} dy = \int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} \right) dy = -\log|1-y| + \log y = \log \left| \frac{y}{1-y} \right|$$

$$\text{よって、 } \log \left| \frac{y}{1-y} \right| = t + C \quad (C \text{ は積分定数}) \Leftrightarrow \left| \frac{y}{1-y} \right| = e^{t+C}$$

$\pm e^C = A$ とおくと、

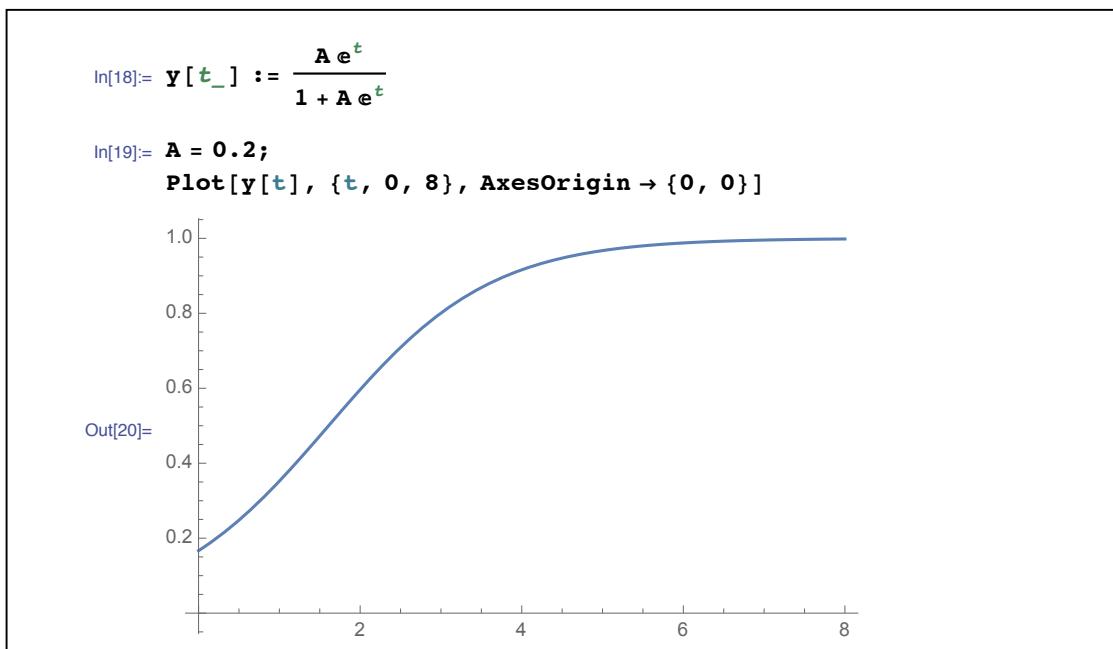
$$y = A(1-y)e^t \quad (A \text{ は } 0 \text{ でない任意定数})$$

$$(1+Ae^t)y = Ae^t$$

$$\text{よって、 } y = \frac{Ae^t}{1+ Ae^t} \quad \cdots (4.5) \quad (A \text{ は } 0 \text{ でない任意定数})$$

[実験 7]

$A=0.2$ のとき、解曲線(4.5)を Mathematica で描こう。



[問 25] A の値をいろいろ変えながら実験 7 を行い、解曲線(4.5)の性質を述べよ。

■微分方程式(4.3)を

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\gamma}{K}(K-y)y \quad \cdots(4.6)$$

と変形する

[問 26] 微分方程式(4.6)を、初期条件 $y(0)=P$ のもとで解け。

[問 27] 微分方程式(4.6)の解曲線を、 P , K , γ の値を変えて Mathematica で描き、その性質を考察せよ。

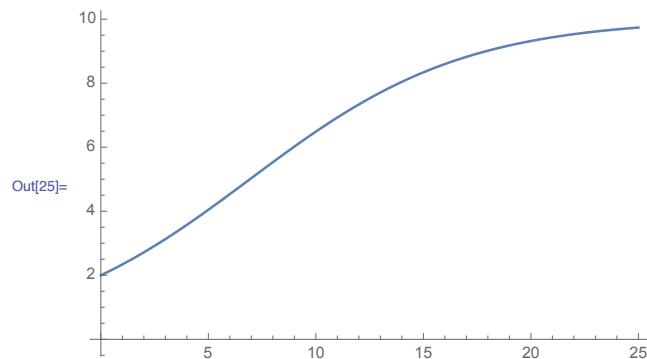
4-3 ロジスティックカーブ

■ヴェルハースト・モデル(4.6)の解は、初期条件が $y(0)=P$ のとき、次のようになる。

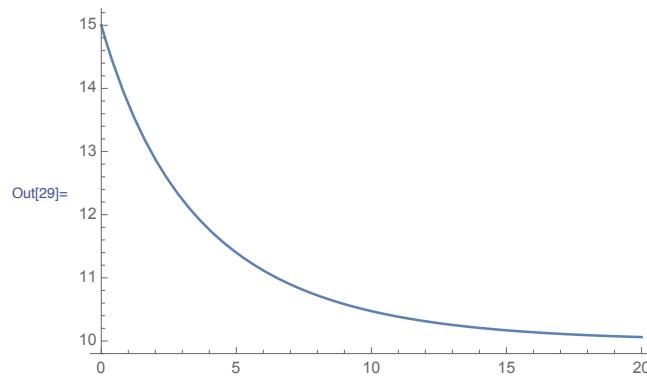
$$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1\right)e^{-\gamma t}} \quad \cdots(4.7)$$

■ヴェルハーストとは別に、アメリカの生物学者であるパールも、微分方程式(4.6)で表される法則を発見し、1920 年には解曲線(4.7)をロジスティックカーブと名づけている

■ $P=2$, $K=10$, $\gamma=0.2$ のとき、ロジスティックカーブ(4.7)は次のようになる



■ $P=15$, $K=10$, $\gamma=0.2$ のとき、ロジスティックカーブ(4.7)は次のようになる



[問 28] ロジスティックカーブ(4.7)について、次の性質を証明せよ。

(1) $t \rightarrow \infty$ のとき、 $y(t) \rightarrow K$

(2) $P < K$ のとき、 $\frac{dy}{dt} > 0$; $P > K$ のとき、 $\frac{dy}{dt} < 0$

(3) $y(t) \rightarrow K$ のとき、 $\frac{dy}{dt} \rightarrow 0$

4-4 ヴェルハースト・モデルの検証

- ヴェルハースト・モデルが、アメリカの人口増加をどれくらいうまくモデル化しているのかを、マルサス・モデルのときと同じ問12のデータをもとに検証しよう
- まず、初期条件とパラメータを決定しなければならないが、(4.6)の解

$$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1\right)e^{-\gamma t}} \quad \cdots (4.7)$$

が複雑な式なので、*Mathematica*を利用しよう

[実験 8]

$P=3.9 \times 10^6$, $K=197 \times 10^6$ としたとき、 γ の値と $y(t)$ の式を決定しよう。

※この P , K の値は、ヴェルハーストが用いたものである。

```
In[30]:= Clear[y, K, P, γ]
In[31]:= y[t_] := K / (1 + (K/P - 1) e^-γ t)
In[32]:= P = 3.9 × 10^6; K = 197. × 10^6;
In[33]:= y[t]
Out[33]= 1.97 × 10^8
          1 + 49.5128 e^-t γ
In[34]:= Solve[y[1] == 5.3 × 10^6, γ]
Solve::ifun : 逆関数がSolveで使われているため、求められない解がある可能性があります。
解の詳細情報にはReduceをお使いください. >>
Out[34]= { {γ → 0.314007} }
In[35]:= γ = 0.314;
y[t]
In[36]:= 1.97 ^ * ^ 8
          1 + 49.51282051282051 ^ e^-0.314 ^ t
Out[36]= 1.97 × 10^8
          1 + 49.5128 e^-0.314 t
```

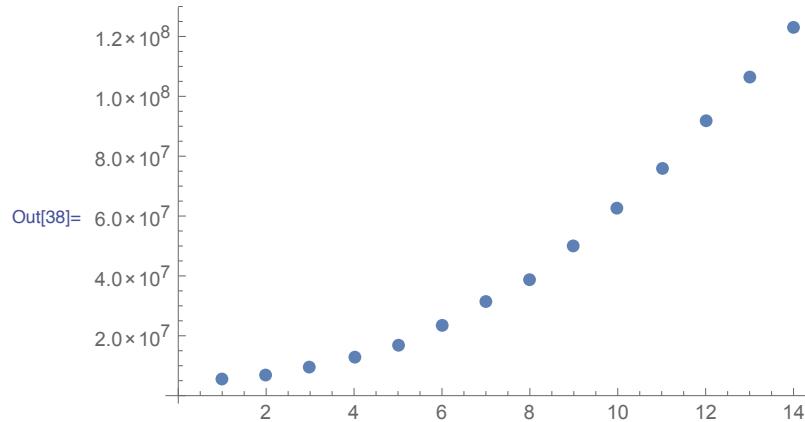
[問 29] 実験 8 を解読せよ。

[実験 9]

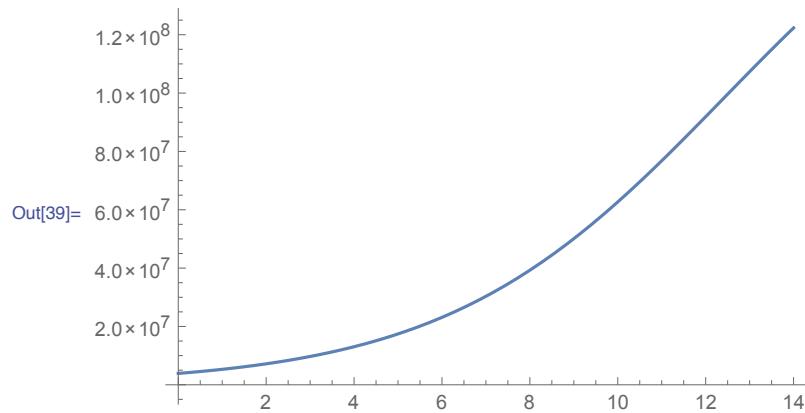
実験 8 で決定した式を利用して、ヴェルハースト・モデルの人口予測の精度を検証せよ。

```
In[37]:= data = {5.3×106, 7.2×106, 9.6×106, 12.9×106, 17.1×106,  
23.2×106, 31.4×106, 38.6×106, 50.2×106, 62.9×106,  
76.0×106, 92.0×106, 106.5×106, 123.2×106};
```

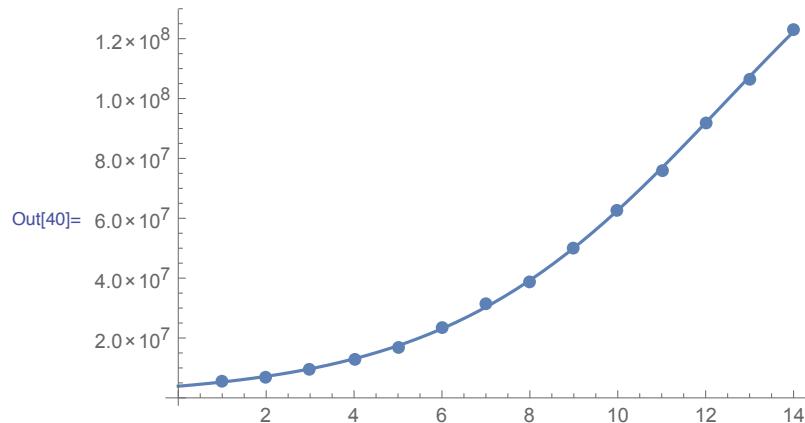
```
In[38]:= g1 = ListPlot[data, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```



```
In[39]:= g2 = Plot[y[t], {t, 0, 14}]
```



```
In[40]:= Show[{g1, g2}]
```



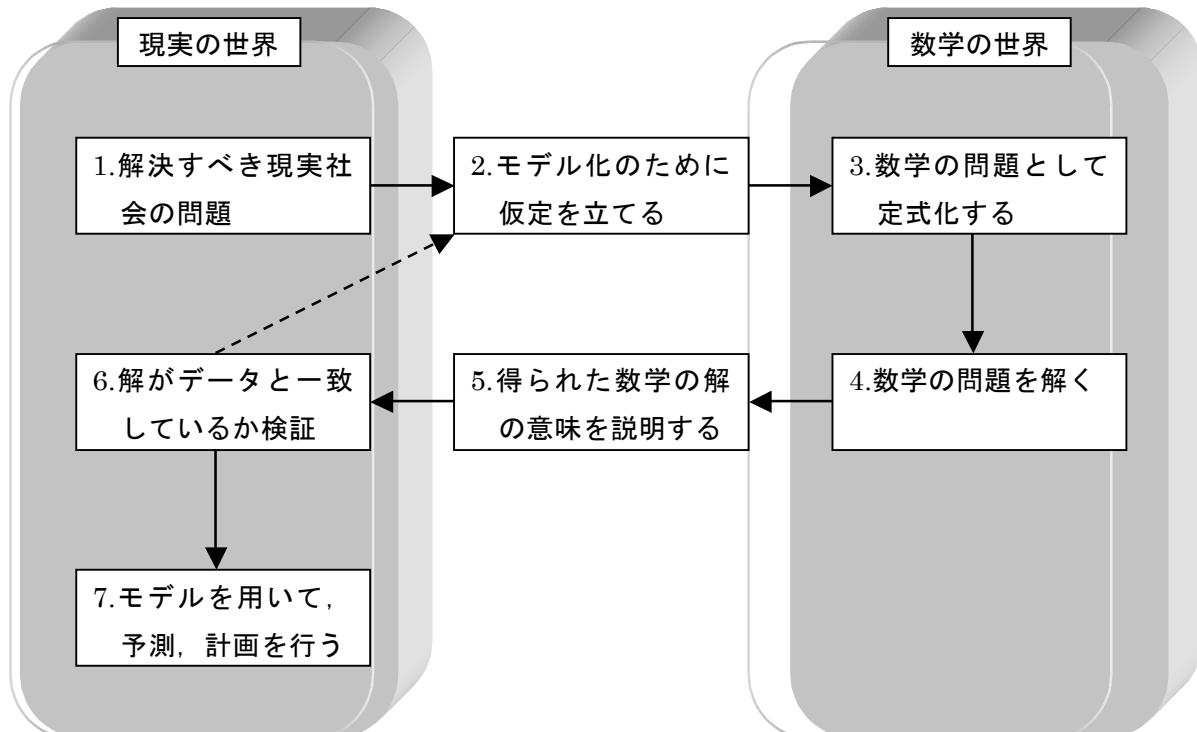
4-5 数学モデルの作成

■4-4で見たように、ヴェルハースト・モデルはアメリカの人口増加を100年以上にわたって正確に予測している

■このヴェルハースト・モデルにいきつくまでの経緯を振り返ってみよう

1. 人口の増加を予測する必要が出てきた
2. マルサスは、人口の増加率は人口 $y(t)$ に比例すると仮定
3. 微分方程式 $\frac{dy}{dt} = \gamma y \cdots (1.1)$ と定式化
4. (1.1)を解いて、解 $y(t) = Ae^{\gamma t}$ を得る
5. $\gamma > 0$ なら、人口 $y(t)$ は指数関数的に増加する
6. アメリカの人口データと比較すると、年を経るごとに急激に現実と合わなくなる
- 2'. ヴェルハーストは、食料や環境等の影響で、人口の増加率は一定ではないと仮定
- 3'. 微分方程式 $\frac{dy}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{y}{K}\right)y \cdots (4.3)$ と定式化
- 4'. (4.3)を解いて、解 $y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1\right)e^{-\gamma t}}$ を得る
- 5'. 人口は無限に発散しない
- 6'. 100年以上のデータをほぼ正確に予測できた

■このような数学モデルの作成過程を一般的にまとめると、次のようになる



[Report3] アメリカの1930年以降の人口データを探し、ヴェルハースト・モデルの妥当性を検証せよ。

§ 5 インフルエンザの流行

5-1 インフルエンザ感染の実験

毎年インフルエンザが流行するが、その患者数はどのように増えていくのだろうか？

ここでは、シミュレーション、モデル化と段階を踏んで、インフルエンザの流行について考えていこう。

■まず、インフルエンザのうつり方をモデル化するために、次のように仮定する

- [1] ランダムに1人がインフルエンザに罹る(このときを0日目とする)
- [2] インフルエンザに罹った人は、その次の日から毎日1人に、ランダムにインフルエンザをうつす
- [3] 一度インフルエンザに罹ると、二度とインフルエンザには罹らない

【実験 10】

上記の仮定の下で、20人でインフルエンザ感染のシミュレーションを行おう。

1. 擬似乱数発生アルゴリズムを再設定する。

```
In[41]:= SeedRandom[100]
```

2. $1 \leq n \leq 18$ の整数の乱数を発生させる。

```
In[42]:= Random[Integer, {1, 20}]
```

```
Out[42]= 17
```

3. 17番の人がインフルエンザに罹った！(0日目) 17番の人がうつす相手を選ぶ。

```
In[43]:= SeedRandom[17]
```

```
In[44]:= Random[Integer, {1, 20}]
```

```
Out[44]= 9
```

4. 9番の人がインフルエンザに罹った！(1日目) 17番の人と9番の人が、乱数でうつす相手を選ぶ。

```
In[46]:= Random[Integer, {1, 20}]
```

```
Out[46]= 11
```

```
In[47]:= SeedRandom[9]
```

```
In[48]:= Random[Integer, {1, 20}]
```

```
Out[48]= 19
```

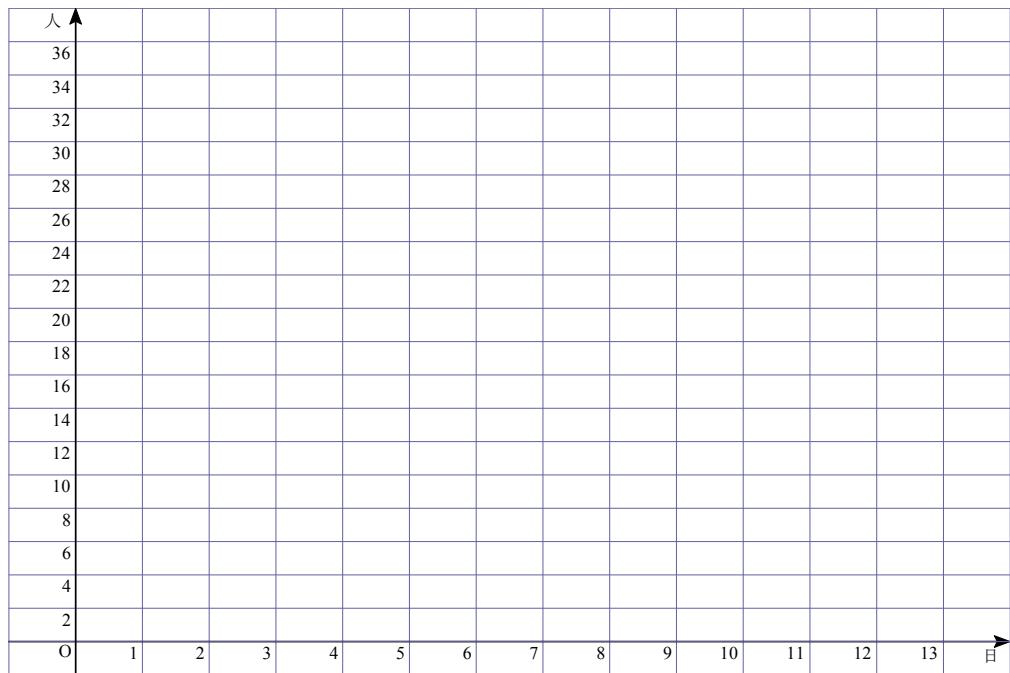
5. 次は、17番、9番、11番、19番の人がうつす相手を乱数で選ぶ。

6. 感染者は、以上を繰り返す。

■インフルエンザに罹った人の欄に○をつける。

№	名前	日数													
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
新たな患者数															
感染者計															

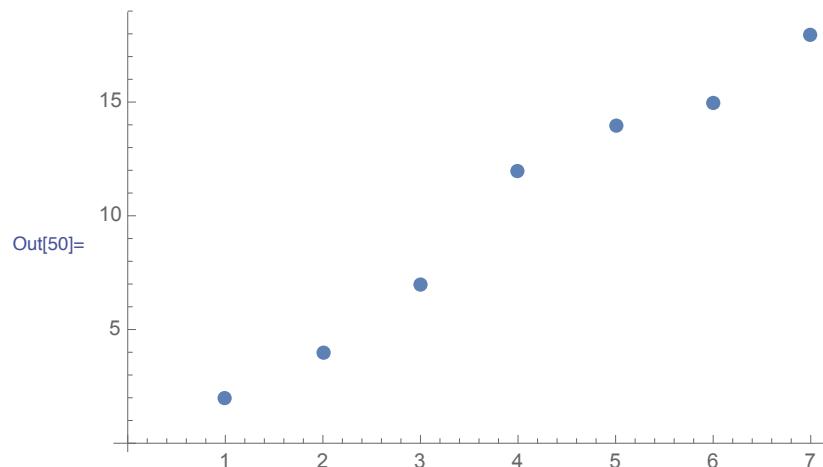
[問 30] 上の表をもとに、下のグラフに患者数の合計数をプロットせよ。



[問 31] 上のグラフを見て、インフルエンザの患者数の増え方について考察せよ。

5-2 インフルエンザ感染のモデル化

■実験 10 のインフルエンザ感染者のシミュレーションの結果の例は、下図のようであった



■これを見て、何かを思い出した人はいるだろうか？ そう、ロジスティックカーブに似ていると感じた人は鋭い

■果たして、この曲線はロジスティックカーブなのかどうか、インフルエンザ感染の状況をモデル化して、数学的に解いて考えてみよう

$y(t)$: 時間 t のときのインフルエンザ患者数

K : (教室内などの)人数

とおく。

本来は y は正の整数であるが、解析しやすいように y は時間 t に関して連続かつ微分可能

であると仮定すると、 $\frac{dy}{dt}$ はインフルエンザ感染者の増加速度を表す。

インフルエンザ流行の最初のころは、患者数の増加速度はほとんど y に比例すると考えてよいだろう。

[問 32] 上記のことを説明せよ。

■しかし、感染者の数がかなり増えてきた段階では、患者数の増加速度は感染していない人の数 $K-y$ にも影響される

[問 33] 上記のことを説明せよ。

■以上より、1人の患者が出てから任意の時点で、患者数の増加速度は y にも $K-y$ にも依存するので、患者数の増加速度は $y(K-y)$ に比例すると考えられる

[問 34] 上記のことから、 y の微分方程式をつくれ。

■インフルエンザの患者数の増加の様子は、微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y(K-y) \quad \cdots (5.1) \quad (\lambda \text{ は正の比例定数})$$

でモデル化できた

[問 35] 微分方程式(5.1)と、ヴェルハースト・モデル(4.6)が本質的に同じであることを確認せよ。

■ここでは、微分方程式(5.1)の別の解法を説明しよう

$y=y(t)$ に関する

$$\frac{dy}{dt} + yp(t) = q(t) \quad \cdots (5.2)$$

の形をした微分方程式を、**線型 1 階微分方程式**という

■線型 1 階微分方程式は、以下のようにして解くことができる

まず、 $e^{\int p(t)dt}$ を(5.2)の**積分因数**という。

この積分因数を、(*)の両辺にかけると、

$$\frac{dy}{dt} e^{\int p(t)dt} + yp(t)e^{\int p(t)dt} = q(t)e^{\int p(t)dt}$$

ここで、 $\left(\int p(t)dt\right)' = p(t)$ であることに注意すると、上の式を書き換えて、

$$y'e^{\int p(t)dt} + y\left(e^{\int p(t)dt}\right)' = q(t)e^{\int p(t)dt}$$

$$\text{よって, } \left(ye^{\int p(t)dt}\right)' = q(t)e^{\int p(t)dt}$$

ゆえに、両辺を t で積分して、

$$ye^{\int p(t)dt} = \int q(t)e^{\int p(t)dt} dt + C$$

$$\text{よって, } y = e^{-\int p(t)dt} \int q(t)e^{\int p(t)dt} dt + Ce^{-\int p(t)dt} \quad \cdots (5.3)$$

この(5.3)が、線型 1 階微分方程式(5.2)の解である。

■次に、インフルエンザ流行のモデル化の微分方程式(5.1)を線型 1 階微分方程式の形に変形できないか考えると、(5.1)の両辺を y^2 で割って、

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} - \frac{\lambda K}{y} = -\lambda \quad \cdots (5.4)$$

ここで、 $\frac{1}{y} = x$ とおき、両辺を t で微分すると、

$$-\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad \cdots (5.5)$$

であるから、(5.5)を(5.4)に代入して、

$$\frac{dx}{dt} + \lambda Kx = \lambda \cdots (5.6)$$

■(5.6)は、 $x=x(t)$ に関する線型1階微分方程式であるから、積分因数を利用して解こう

(5.2)における $p(t)$ は、(5.6)では λK より、積分因数は、

$$e^{\int p(t)dt} = e^{\int \lambda K dt} = e^{\lambda K t}$$

よって、(5.6)の両辺に $e^{\lambda K t}$ をかけて、

$$\frac{dx}{dt} e^{\lambda K t} + x \lambda K e^{\lambda K t} = \lambda e^{\lambda K t} \Leftrightarrow (xe^{\lambda K t})' = \lambda e^{\lambda K t}$$

ゆえに、両辺を t で積分して、

$$xe^{\lambda K t} = \int \lambda e^{\lambda K t} dt = \frac{e^{\lambda K t}}{K} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\text{よって, } x = \frac{1}{K} + Ce^{-\lambda K t} = \frac{1 + KCe^{-\lambda K t}}{K}$$

$$\text{ゆえに, } y = \frac{K}{1 + KCe^{-\lambda K t}} \cdots (5.7)$$

(5.7)がインフルエンザのモデル化(5.1)の一般解である。

初期条件を $t=0$ のとき、 $y(0)=P$ とすると、(5.7)より、

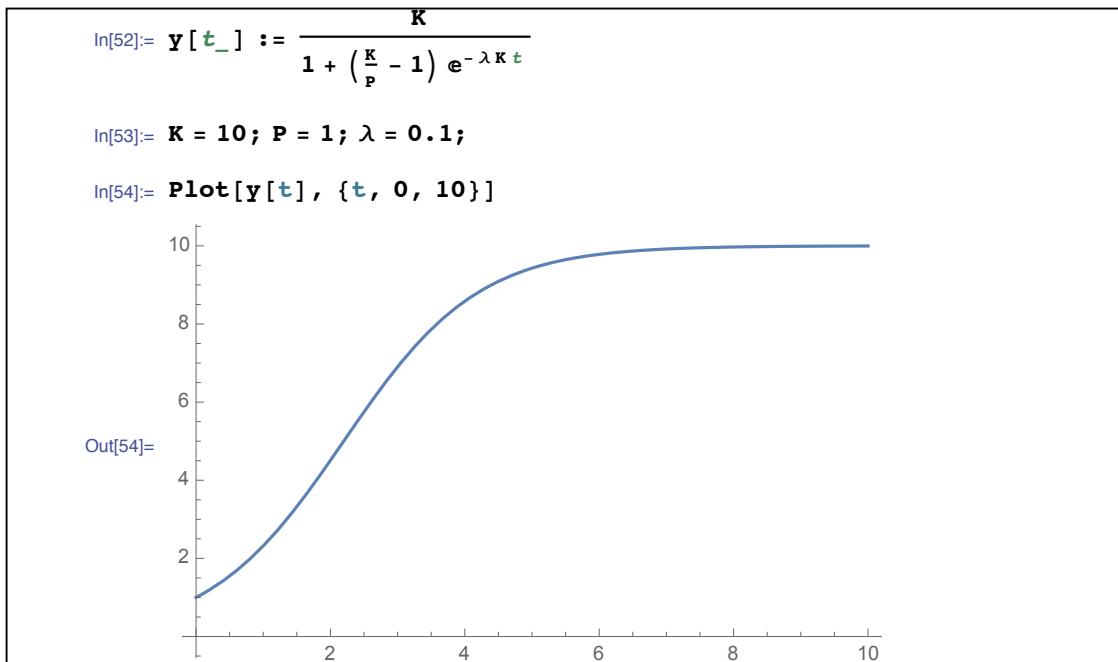
$$P = \frac{K}{1 + KC} \Leftrightarrow C = \frac{K - P}{KP}$$

(5.7)に代入して、

$$y(t) = \frac{KP}{P + (K - P)e^{-\lambda K t}} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1\right)e^{-\lambda K t}} \cdots (5.8)$$

[実験 11]

適当にパラメータの値を決めて、解(5.8)のグラフ(解曲線)を描こう。



■人口増加問題とインフルエンザの患者数の問題には共通のモデル化の原理があるようだ

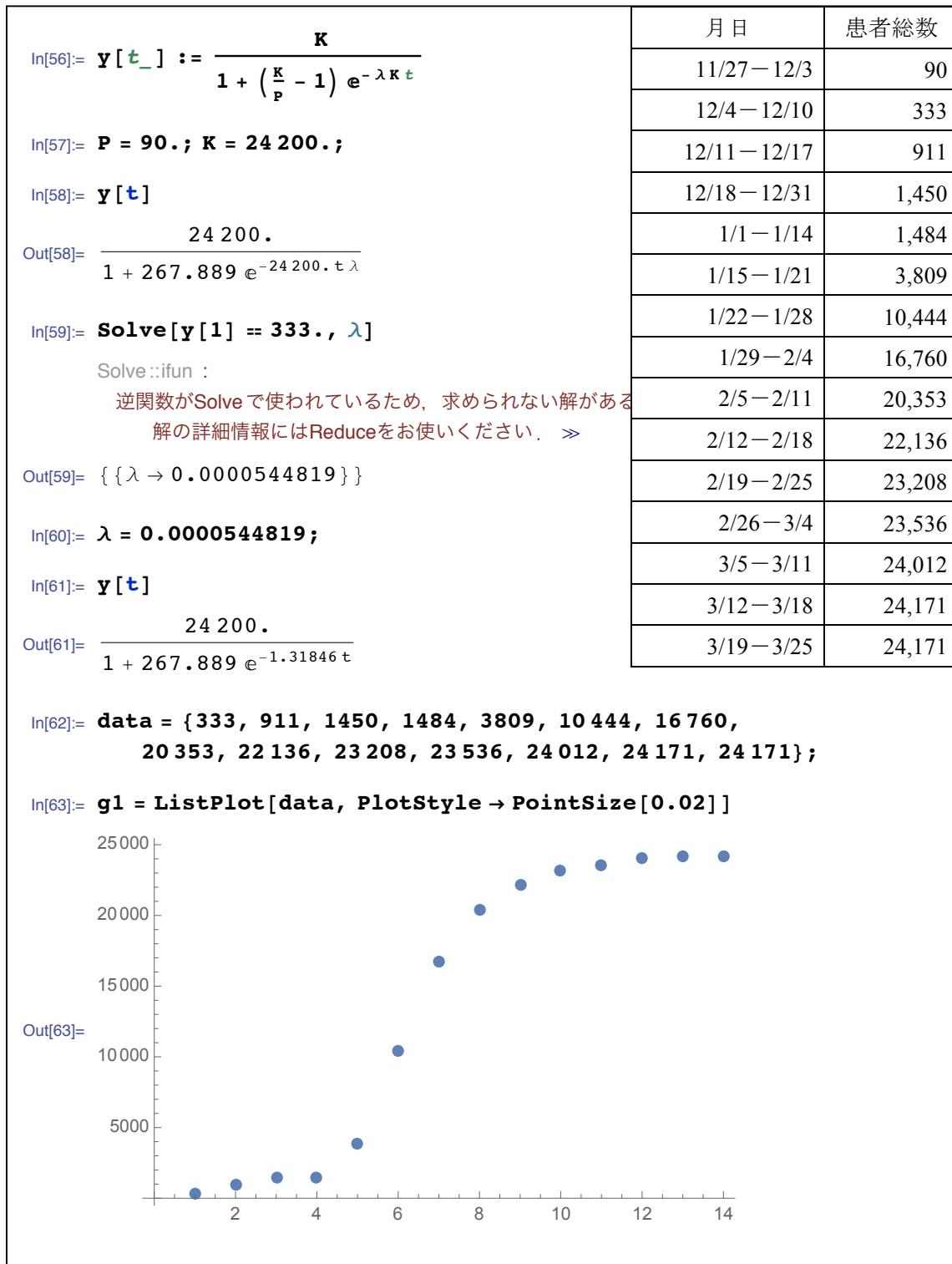
5-3 インフルエンザ感染のモデル化の検証

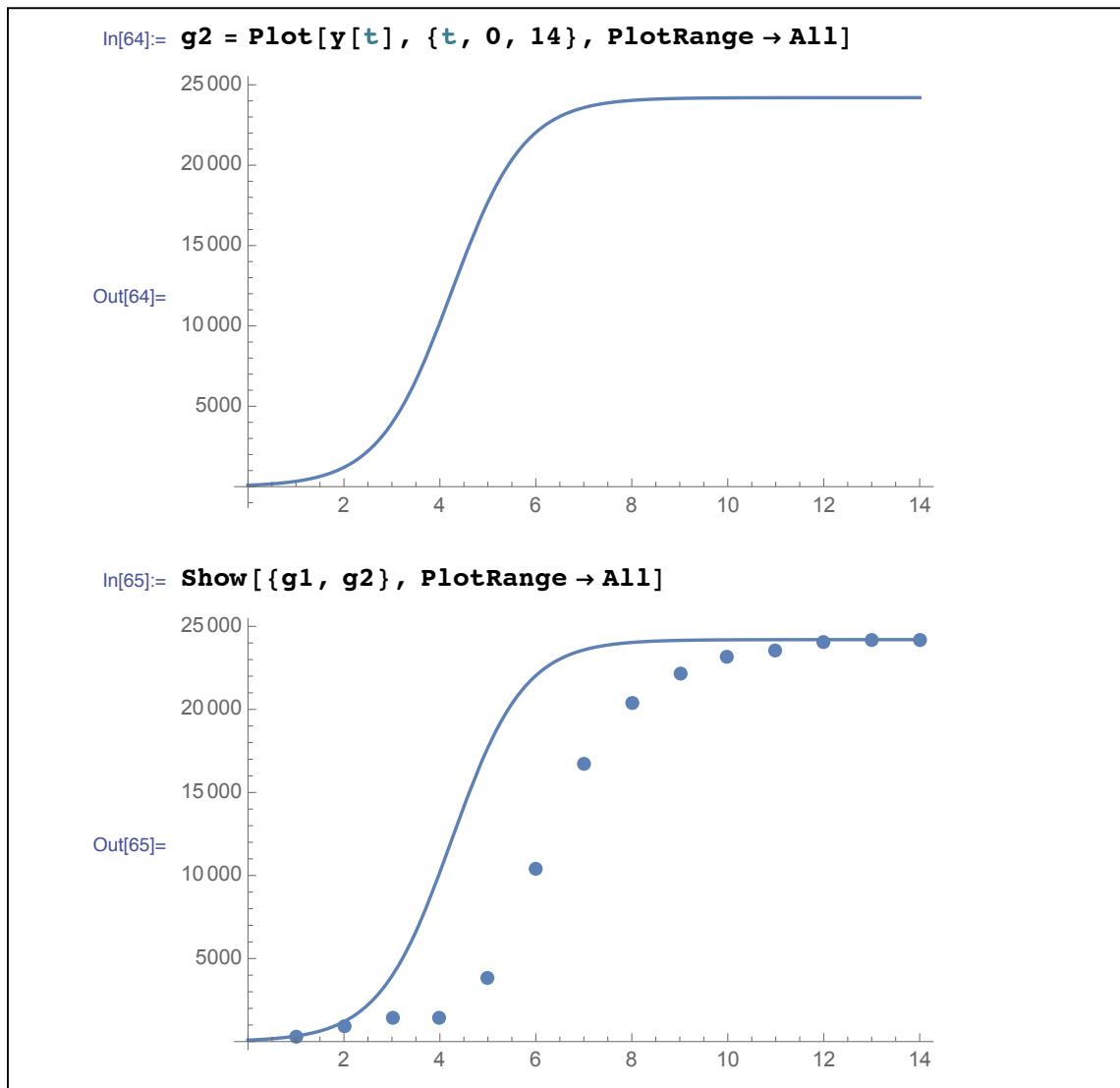
■5-2 で行ったモデル化は、果たして現実をうまく表現しているのだろうか？

■2005年～2006年の大阪府のインフルエンザ患者数データ(右下表)で、検証してみよう

[実験 12]

実験 8、実験 9 と同様に、右下の表のデータを利用して解(5.8)のパラメータを決定して、モデル化を検証する。





[問 36] 実験 12 の結果について考察せよ。

- モデル化した微分方程式を解いて得られた解曲線を現実のデータと照らし合わせるとき、パラメータを決定しなければならない
- 実験 12 では、 γ の値を決定するのに $t=1$ のときのデータを利用したが、このことにより現実のデータのプロットである $g1$ と、解曲線 $g2$ の大きなずれが生じたと思われる

■ ヴェルハーストのモデルの解

$$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1 \right) e^{-\gamma t}} \quad \cdots (5.9)$$

において、ヴェルハーストはパラメータを

$$P = 3.9 \times 10^6, \quad K = 197 \times 10^6$$

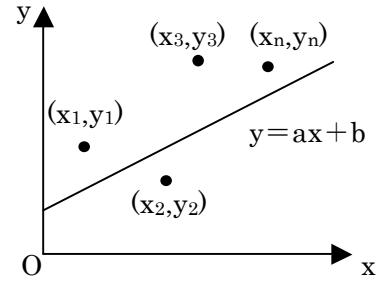
とした

■このような、ロジスティックカーブ(には限らない)のパラメータを決定する方法の1つとして、以下に述べるような**最小二乗法**がある

■例えば、右図のようなn個のデータがあるとき、これらが本来は直線上にのっているものとして、その直線の方程式を

$$y = ax + b \cdots (2)$$

とする

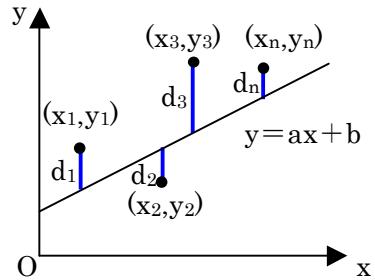


■最小二乗法では、最もふさわしい直線は、

各点と直線との差を d_k ($k=1, 2, \dots, n$)

としたとき、

$$\begin{aligned} s &= d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \cdots + d_n^2 \\ &= \sum_{k=1}^n d_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (y_k - ax_k - b)^2 \cdots (3) \end{aligned}$$



が最小となる直線であると考える

■ x_k, y_k の値は分かっているので、(3)は a, b に関する関数となるから、(3)を a, b について偏微分する

$$\frac{\partial s}{\partial a} = -2 \sum_{k=1}^n x_k (y_k - ax_k - b)$$

$$\frac{\partial s}{\partial b} = -2 \sum_{k=1}^n (y_k - ax_k - b)$$

※ a について偏微分するとは、変数 b を定数とみなして

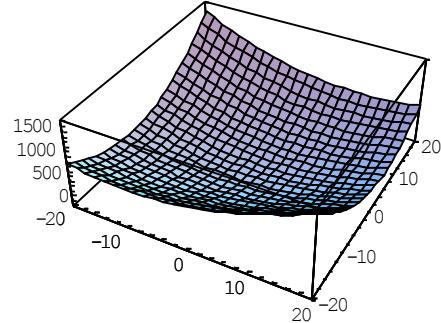
変数 a で微分することであり、 b についての偏微分も同様である

※ ∂ は、「ラウンド」「ディー」「デル」などと読む

■(3)の値が最小となる a, b は、連立方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

を解くと得られる



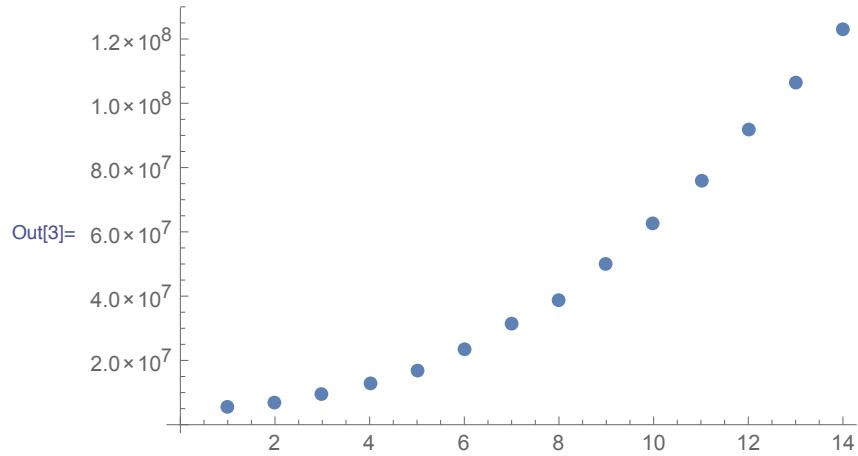
■直線の例で説明した最小二乗法を、Mathematicaを利用してロジスティックカーブ(1)に適用して、パラメータ P, K, γ を決定しよう

[実験]

```
In[1]:= y[t_] := 
$$\frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1\right) e^{-\gamma t}}$$


In[2]:= data = {5.3 \times 10^6, 7.2 \times 10^6, 9.6 \times 10^6, 12.9 \times 10^6,
               17.1 \times 10^6, 23.2 \times 10^6, 31.4 \times 10^6, 38.6 \times 10^6,
               50.2 \times 10^6, 62.9 \times 10^6, 76.0 \times 10^6, 92.0 \times 10^6,
               106.5 \times 10^6, 123.2 \times 10^6};
```

```
In[3]:= g1 = ListPlot[data, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```



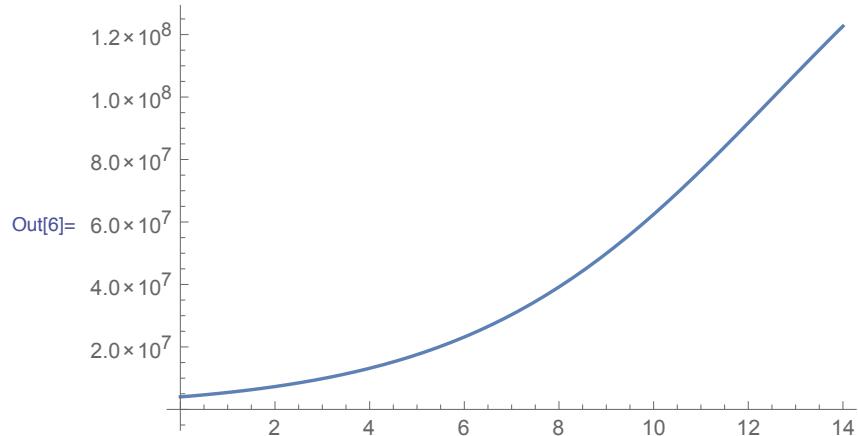
```
In[4]:= para = FindFit[data, y[t], {K, P, \gamma}, t]
```

```
Out[4]= {K \rightarrow 2.02437 \times 10^8, P \rightarrow 4.00274 \times 10^6, \gamma \rightarrow 0.309581}
```

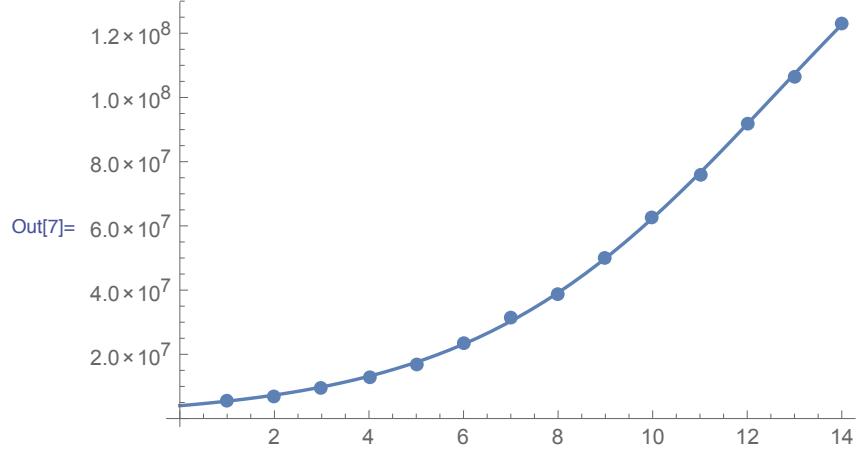
```
In[5]:= y[t] /. para
```

$$\text{Out[5]}= \frac{2.02437 \times 10^8}{1 + 49.5746 e^{-0.309581 t}}$$

```
In[6]:= g2 = Plot[y[t] /. para, {t, 0, 14}]
```

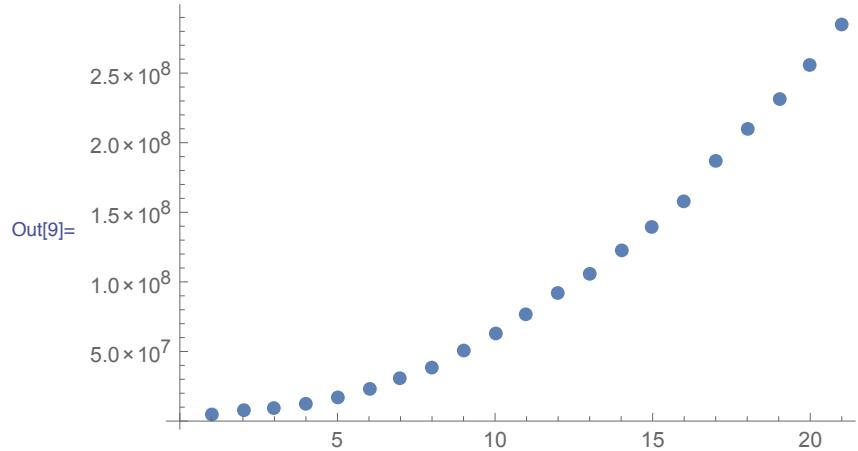


```
In[7]:= Show[{g1, g2}]
```



```
In[8]:= data2 = {5.3*106, 7.2*106, 9.6*106, 12.9*106,  
17.1*106, 23.2*106, 31.4*106, 38.6*106,  
50.2*106, 62.9*106, 76.0*106, 92.0*106,  
106.5*106, 123.2*106, 140.*106, 157.8*106,  
186.2*106, 210.1*106, 230.9*106, 255.5*106,  
284.2*106};
```

```
In[9]:= g3 = ListPlot[data2, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```



```
In[10]:= para2 = FindFit[data2, y[t], {K, P, Y}, t]
```

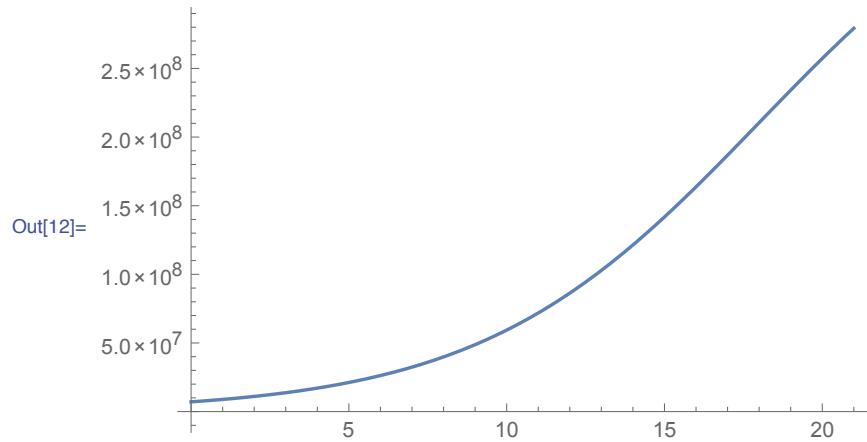
```
Out[10]= {K -> 4.21117*108, P -> 7.0974*106, Y -> 0.225856}
```

```
In[11]:= y[t] /. para2
```

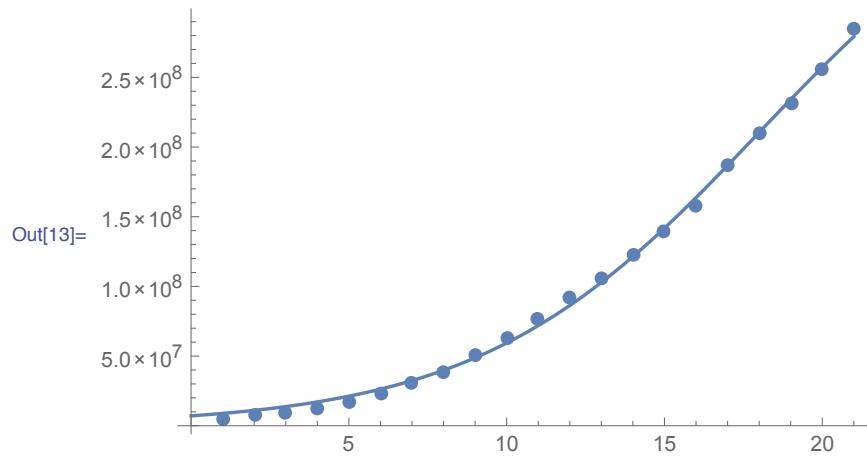
```
Out[11]= 
$$\frac{4.21117 \times 10^8}{1 + 58.334 e^{-0.225856 t}}$$

```

```
In[12]:= g4 = Plot[y[t] /. para2, {t, 0, 21}]
```



```
In[13]:= Show[{g3, g4}]
```

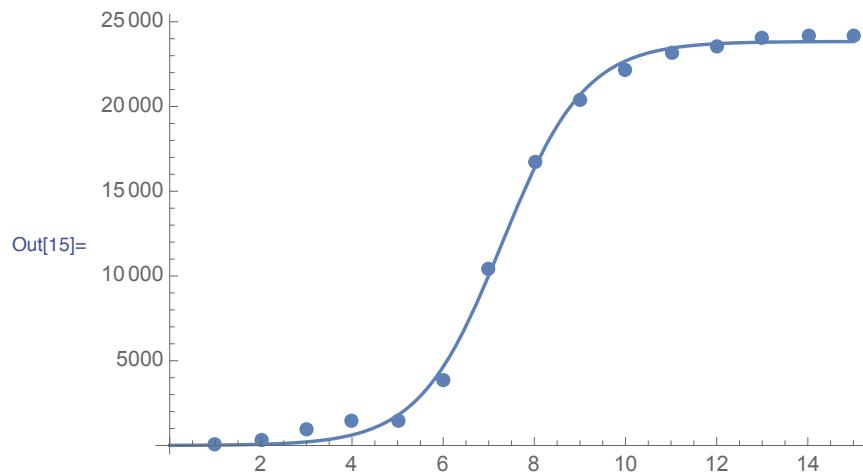


- 最小二乗法は、ドイツの天才数学者であるガウス(1777～1855)によって考えられたが、ガウスは数学者であると同時に天文学者、物理学者でもあった
- ガウスの研究は非常に広範囲に及び、近代数学のほとんどの分野に影響を与えており、歴史上で最高の数学者の一人である
- 人類の歴史上における偉大な数学者を 3 人選ぶとすると、誰が選んでもガウスはほぼ確実にはいってくる
- ガウスの有名な言葉として、
「数学は科学の女王であり、数論は数学の女王である」
というものがある



5-4 モデルの共通点

- 微分方程式(5.1)の解曲線(5.8)のパラメータを適当に決めると、下図のように結構うまく大阪府のデータを表すことができる



- もう一度、微分方程式の意味するところを確認しておこう

名称	式	意味するところ
初期条件	$y(0)=P$	最初はこうであった
微分方程式	$\frac{dy}{dt} = \lambda y(K-y)$	現在(の瞬間)はこうである
解(解曲線)	$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P} - 1\right)e^{-\lambda K t}}$	このままいけば将来はこうなるだろう

- 人口増加に関するヴェルハースト・モデル(4.3)と、インフルエンザ患者数の増加のモデル(5.1)は本質的に同じであり、モデルの微分方程式の解曲線としてロジスティックカーブが現れた

- どちらの場合も、微分方程式の形

$$\frac{dy}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{y}{K}\right)y \quad \cdots (4.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y(K-y) \quad \cdots (5.1)$$

からわかるように、

- (☆) 増加率が「増えるもの」とそれに関して「相対的に減るもの」の積に比例する
という形をしている

[Report4] (☆)のように仮定してモデル化できる現象を考え、その現象のデータを集めて解析・検証せよ。

§ 6 ものの冷え方

6-1 実験

■お湯やコーヒーは、放っておくと冷えていくが、その冷え方を探ってみよう

[実験 13]

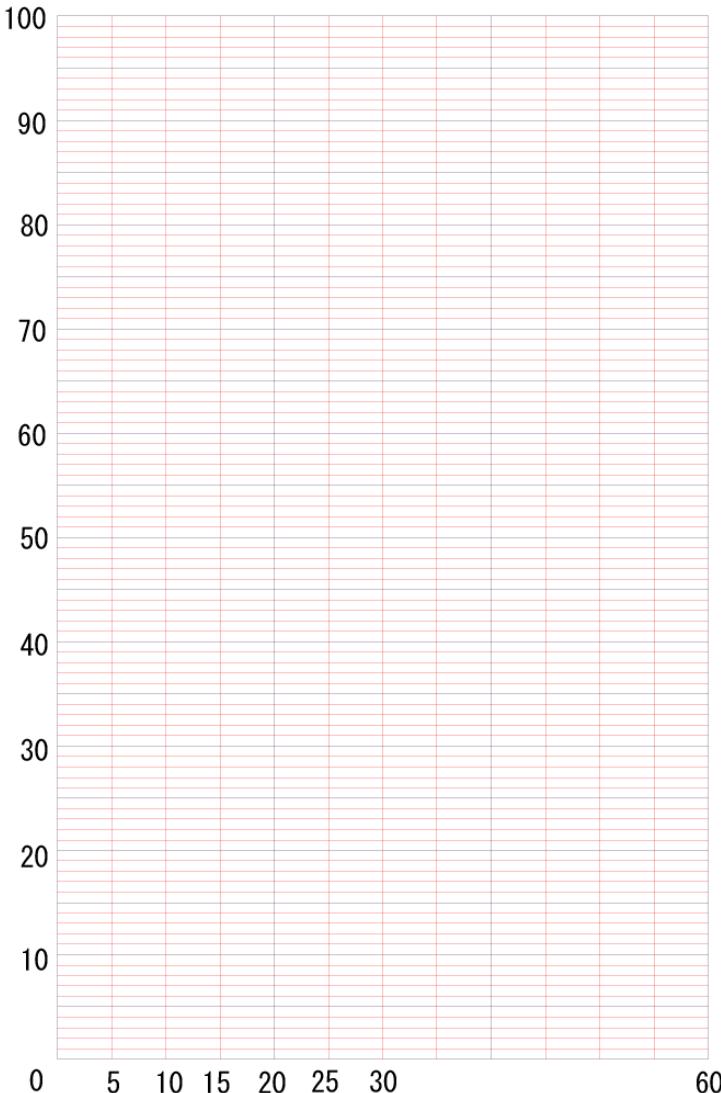
ビーカーに熱湯を用意し、その中に温度計を入れる。始めに温度を記録し、その後 20 分間、5 分おきに温度を測って下の表に記録する。

時間(分)	0	5	10	15	20	25	30	…	60
温度(℃)									

[問 37] 実験 13において、60 分後の温度を予想せよ。

■60 分経つまでに、この熱湯の冷め方をモデル化し、そのモデル化の結果を利用して 60 分後の温度を予想することで、モデル化の検証も行おう

[問 38] (1) 実験 13 のデータを下左のグラフにプロットし、それらの点を滑らかに結べ。



(2) 各点における曲線の傾きを測定し、下の表を完成せよ。

時間(分) : t	0	5	10	15	20	25	30
温度(°C) : T							
曲線の傾き : $\frac{dT}{dt}$							

(3) (2)の表のデータを右の

グラフ用紙にプロットすることにより、温度の変化率

$\frac{dT}{dt}$ と T の関係を調べよ。

(4) 実験 13 をモデル化した微分方程式を求めよ。



6-2 ニュートンの冷却法則

■実験 13 より、お湯が冷えていくときのモデル化について、次の微分方程式が成り立つことが予想される

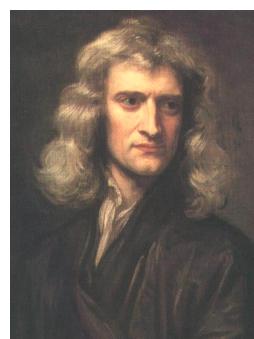
時刻 t におけるお湯の温度を T、室温を T_0 とすると、

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0) \cdots (6.1)$$

[Report5]

- (1) 微分方程式(6.1)を解いて、一般解(6.2)を求めよ。
- (2) 室温は一定で $T_0 =$ _____, $t=0$ のとき $T =$ _____, $t=5$ のとき $T =$ _____ であることを用いて、微分方程式(6.1)の実験 13 における特殊解(6.3)を求めよ。
- (3) (2)の特殊解(6.3)を用いて、60 分後のお湯の温度を求めよ。
- (4) 実際のデータと(3)の結果とを比較し、このモデルの検証を行え。
- (5) *Mathematica* を利用して、このモデルの検証を行え。

■微分方程式(6.1)で表される法則は、イギリスの偉大な数学者・物理学者であるニュートン(1642~1747)が発見し、ニュートンの冷却法則と呼ばれる。



§ 7 過去を見る

7-1 考古学と¹⁴C 年代測定法

■2003年5月20日付の朝日新聞の朝刊に、次の内容の記事があった

稻作伝来、500年早まる 国立歴史民俗博物館が発表



調査に使われた土器群



土器に付着した炭化物の試料

(福岡市埋蔵文化財課城南整理室)

- ◆国立歴史民俗博物館は、水田稲作が日本に伝わり弥生時代が幕を開けたのは定説より約500年早い紀元前1000年ころ、と特定する研究を発表した
- ◆北部九州から出土した土器などから採取した試料を、同博物館の春成秀爾教授（考古学）と今村峯雄教授（歴史資料科学）を中心とする研究グループが、最新の放射性炭素（¹⁴C）年代測定法で分析し、結論づけた

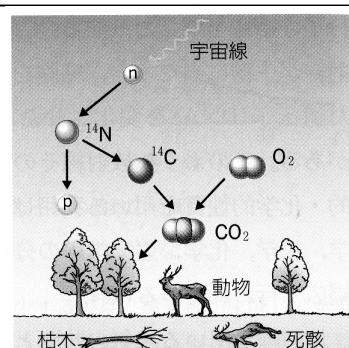
■新聞記事にある¹⁴C 年代測定法とは、古代の遺跡から出土した木造建築物や木造の容器などがいつ頃作られたものであるか、土器などに付着した炭化物がいつ頃の物であるか、等を調べる方法である

■この測定方法は、以下の原理によっている

- (1) 放射性炭素¹⁴Cは、宇宙線中性子と¹⁴Nとの核反応で生成する
- (2) ¹⁴Cは、地域的にも経年的にもほぼ一定の濃度で大気中の炭酸ガスに含まれている
- (3) ¹⁴Cは、生物体の有機物中にも大気中とほとんど同じ濃度で含まれている
- (4) 生物が死ぬと、生物体への新たな¹⁴Cの供給がなくなるので、¹⁴Cの量は時間と共に、その半減期(5730年)にしたがって減少する
- (5) この減少量から年代を求める

■半減期とは、素粒子・原子・分子・イオンなどの量が時間とともに減少するとき、その量がはじめの半分になるのに要する時間のことであり、特に放射性核種の崩壊の速さや、素粒子の寿命を表すのに用いられる

- (例) アクチニウム217(²¹⁷Ac)の半減期は0.018秒
ウラン238(²³⁸U)の半減期は45億年(地球の年齢！)



7-2 ラザフォードの崩壊モデル

- ^{14}C 年代測定法を、モデル化して数学的に考えてみよう
- 時刻 t における ^{14}C の個数を $x=x(t)$ とすると、微小時間 Δt の間に Δx だけ ^{14}C が崩壊したとすると、 Δx は ^{14}C の個数 x と微小時間 Δt に比例すると考えるのが自然だろう

[問 39] (1) 上記のアンダーラインの部分を、等式で表せ。

(2) (1)より、 ^{14}C の崩壊率の微分方程式を求めよ。

■ ^{14}C のような放射性物質の崩壊のしかたを記述するモデルを

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x \quad (\lambda \text{ は崩壊定数}) \cdots (7.1)$$

と定式化したのが、イギリスの物理学者でありノーベル化学賞を受賞したラザフォード (1871~1937) である

- ラザフォードは、 α 線と β 線の発見、ラザフォード散乱による原子核の発見、原子核の人工変換などの業績により「原子物理学（核物理学）の父」と呼ばれている

7-3 微分方程式で過去を見る

- ^{14}C 年代測定法を、実際に使ってみよう

[課題]

放射性炭素 ^{14}C の半減期は、5730 年である。現在の空気中の ^{14}C の濃度が 1% であり、昔も変わらないものと仮定する。ある遺跡から出土した古い建築物の柱を調べたところ、 ^{14}C の濃度が 0.77% であったという。この木造建築物の柱の木材が、今から何年前に山から切り出されたかを推定せよ。

[解答]

時刻 t における ^{14}C の濃度(個数)を $x=x(t)$ とおくと、

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x$$

よって、 $\frac{dx}{x} = -\lambda dt$

両辺を積分して、 $\int \frac{dx}{x} = -\int \lambda dt$

よって、 $\log|x| = -\lambda t + C$ (C は任意定数)

ゆえに、 $A = \pm e^{-C}$ とおくと、

$$x = Ae^{-\lambda t} \cdots (7.2)$$

- [問 40] (1) $t=0$ のとき, $x=0.01$ であることから, 定数 A の値を求めよ。
 (2) $t=5730$ のとき, x が半減していることから, 崩壊定数 λ の値を求めよ。
 (3) 木材が切り出された年代を推定せよ。

■微分方程式(7.1)の解を, 初期条件 $x(0)=x_0$ のもとで解くと,

(7.2)において $t=0$ として, $A=x_0$

よって, $x=x_0e^{-\lambda t} \cdots (7.3)$

- [問 41] (1) ある放射性核種の半減期を τ とするとき, 解(7.3)を利用して崩壊定数 λ を半減期 τ を用いて表せ。
 (2) 解(7.3)より, t を半減期 τ を用いて表せ。

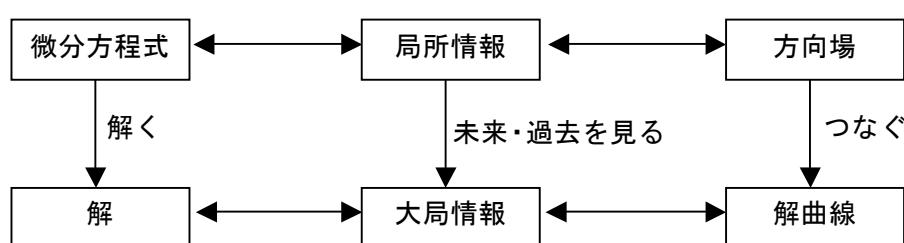
■問 41 の結果を利用して, 以下の問題を考えよう

- [問 42] フランスの有名なラスコー洞窟から検出された木炭の, 1950 年における崩壊率は 0.97 であり, 生きている木の崩壊率は 6.68 であった。木炭が形成された年代を計算して, 洞窟の中に描かれた有名な絵の年代を求めよ。

- [問 43] イングランド南部にあるウィンチェスター城のホールの壁面には, 右の写真のような直径約 5.5m, 25 個の扇形に区切られた円卓が取り付けられている。何人かの専門家が, これを本物のアーサー王の円卓だと考えていたが, 近年その信憑性について ^{14}C 年代測定法を利用した考察がなされた。1977 年に行われた測定から, 円卓から検出された木の崩壊率は 6.08 であり, 生きている木の崩壊率は 6.68 であった。この円卓が本当にアーサー王のものであるかどうかを考察せよ。ただし, アーサー王は, 5 世紀半ばにイギリス南西端のコーンウォール地方を中心に, アングロサクソンと戦ったブリテン人の伝説的な王である。



■以上のように, 微分方程式を解くことで過去も見ることができるるのである



◇◆Topics◆◇

アメリカの気象学者ローレンツ(1917～)は、流体の対流現象の研究のため、次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -p(x - y) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \quad (p, r, b \text{ は定数}) \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

の解の振る舞いを研究した。そのとき、初期値を少し変えるだけで、その後の解の様子が大きく変わることを発見し、これがカオス研究の始まりとなった。

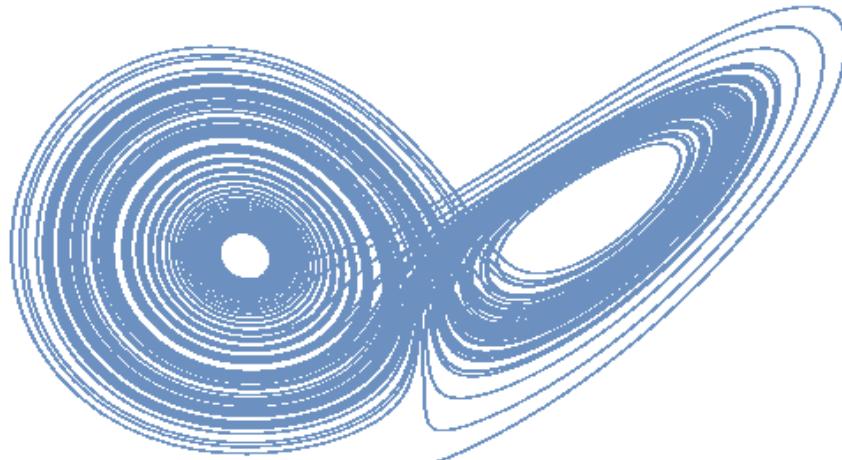
Mathematica でローレンツ方程式を数値解として求め、それを空間上にプロットすると下のようになる。

```

sol=NDSolve[
{x'[t] == -10 (x[t] - y[t]),
y'[t] == -x[t] z[t] + 28. x[t] - y[t],
z'[t] == x[t] y[t] - 2.7 z[t],
x[0] == z[0] == 0, y[0] == 1},
{x, y, z}, {t, 0, 100}, MaxSteps->Infinity]

ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. sol], {t, 0, 100},
PlotPoints -> 10000,Axes->False,Boxed->False]

```



- 上の図は、ローレンツモデルにおいて3変数 x, y, z のとる値を、3次元空間上で時間とともに変化する様子を軌道として表示したもので、ローレンツ・アトラクタと呼ばれる
- ローレンツ・アトラクタは、美しい蝶の羽のような形をしていて、このアトラクタの軌道は常に羽の範囲内に収まっているが、二度と同じところを通過しない

◇◆参考文献◆◇

第 1 章

- [1] 飯高 茂, 『いいたかないと数学者なのだ』, NHK 出版(2006)

第 2 章

- [1] 高須 夫悟, 『大域情報学テキスト』, 奈良女子大学理学部情報科学科(2006)
- [2] S.ワゴン, 『*Mathematica* で見える現代数学』, ブレーン出版(1992)

第 3 章

- [1] デヴィッド・バージェス他, 『微分方程式で数学モデルをつくろう』, 日本評論社(1990)
- [2] 佐藤 総夫, 『自然の数理と社会の数理 微分方程式で解析する I』, 日本評論社(1984)

LADy SCIENCE BOOKLET 4 数理科学入門

2015年3月27日発行

奈良女子大学 理系女性教育開発共同機構

CORE of STEM

Collaborative Organization for Research in women's Education of

Science, Technology, Engineering, and Mathematics

〒630-8506 奈良市北魚屋東町

コラボレーションセンター Z207

TEL.&FAX 0742-20-3266

ladyscience@cc.nara-wu.ac.jp
