

## はじめに

2014年度に文部科学省からの補助金を受けて、奈良女子大学とお茶の水女子大学とに設置された「理系女子教育開発共同機構」は、中等教育及び高等教育の理数教育の改革を目標の1つとしている。この改革のためには、自然現象や現実社会を捉えるのに、数学がいかに「言語」として有用であるかを体験・学習することが、中等教育、高等教育にかかわらず非常に重要であると考えられる。

そこで、奈良女子大学理系女性教育開発共同機構は、数学と科学の一体性を感じ、数学と科学でこの社会・世界を見て解析する方法を学ぶことを目指して、2015年度後期の新しい教養科目「科学の言語としての数学」を、理学部の協力のもとで立ち上げた。この科目の目標は、次の通りである。

自然現象や社会現象を把握し、そこで生じる課題を正確に表現して解決するには、科学の言語としての数学が必須のものとなる。このような数学の側面を、具体的な事例を通じて学び、理解する。その際、作業や数学的な実験、ICT(Information and Communication Technology)の活用などでアクティブに学習し、積極的に議論して理解を深めることを目指す。そのための施設・設備が整ったアクティブラーニング室(Z103)で授業を実施することから、定員を32名と制限し、少人数で学ぶことにより科学の言語としての数学の有用性と、数学そのものの美しさを感じ、理解する。

2015年度は、次の4人がそれぞれのテーマを設定して担当した。

第1回～第5回 : 吉田信也 (全学共通)

■自然の中の数学

- ・自然の不思議さを、数学で表現し、理解する
- ・iPadも活用し、実験・観察等で、身体も使って数学する

第6回～第8回 : 川口慎二 (附属中等教育学校)

■実験する数学

- ・デタラメを実験する
- ・ゲームの必勝法に隠れた数学を見つける

第9回～第12回 : 小林毅 (理学部)

■身の周りの数学

- ・身の周りの現象を数学で解明
- ・折り紙、結び目、流体など

第13回～第15回 : 片桐民陽 (理学部)

■計算しない数学

- ・計算しない数学を体験する
- ・一筆書き、グラフ、地図の塗り分け

本テキストは、この講義で使用したテキストプリントや資料をまとめたものである。ただし、著作権等の関係で抜粋になっている部分もあるのでご了承ください。

2016年3月3日

奈良女子大学 全学共通教授

吉田信也

## 目次

自然の中の数学：吉田信也(全学共通)	1
I シャボン膜は知っている	
1. 最小になるのはどこだ？	1
2. 数学の世界に持ち込むと？	3
3. 拡張を考えると？	5
II シャボン玉は知っている	
1. シャボン玉はなぜ丸い？	8
2. 大昔から知っていた？	10
3. 等周問題は解決？	11
4. 双対性	14
5. 変分法	15
6. 変分問題	17
III 自然は知っているか？	
1. 黄金比は美しい？	23
2. 黄金比とは？	25
3. 螺旋とは？	27
4. フィボナッチ数列とは？	29
5. フィボナッチと螺旋と葉序の関係は？	30
実験する数学：川口慎二(附属中等教育学校)	34
1. はじめに	34
2. 「デタラメ」を実験する	34
3. 酔っぱらいを数学で観察する	37
4. 2次元ランダムウォーク	42
5. ゆらぎとランダムウォークの応用例	44
6. 課題Ⅰ	45
7. ゲームに潜んでいる数学	46
8. 課題Ⅱ	53
身の周りの数学：小林毅(理学部)	54
1. 折り紙の数理(「ミウラ折り」をめぐって)	54
2. 折り紙の数理(「家紋折り」をめぐって)	79
計算しない数学：片桐民陽(理学部)	97
1. 一筆書き	97
2. グラフ	99
3. グラフの平面性	101
4. 地図の塗り分け	102
5. 4色問題の解決	103

# 科学の言語としての数学

## 自然の中の数学

吉田信也

### I シャボン膜は知っている

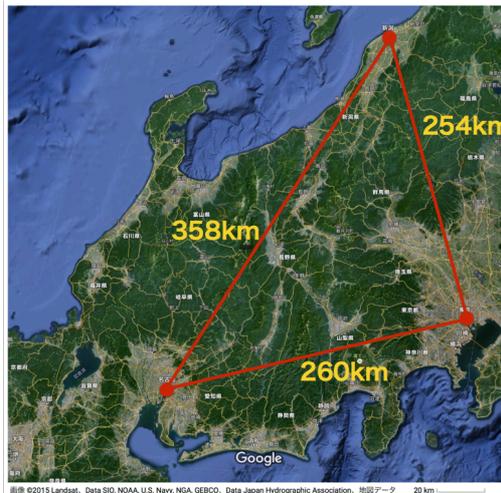
#### 1. 最小になるのはどこだ？

実は、自然は最大・最小(極大・極小)をよく知っている。それを確認する前に、まずは次の課題を考える。

##### [課題 1]

東京、名古屋、新潟の3都市を結ぶ電力ケーブルを、下記の条件で敷設して電力を供給するとき、どのようにケーブルを敷設すれば、敷設コストは最小となるか？

- ・ 2 地点を結ぶケーブルは直線で結べるとする
- ・ ケーブル敷設コストは、1km 当たり 1000 万円
- ・ ケーブルの途中どこでも分岐点を設置でき、分岐点の敷設コストは 0 円



例えば、上図の三角形において、短い方の2地点をケーブルで結んでも、電力は供給できるので、

$$254 + 260 = 514 \text{ km} \cdots (*)$$

と敷設するのが、コスト最小のように思える。

さて、(\*)が本当に最小となる場合であることを考える。

このような、3地点のいずれかだけを結ぶ敷設方法であれば、(\*)が最小となる。しかし、分岐点を作ってもよいという条件があるので、(\*)より短い敷設方法があるとなれば、どこかに分岐点を作って敷設する方法が考えられる。

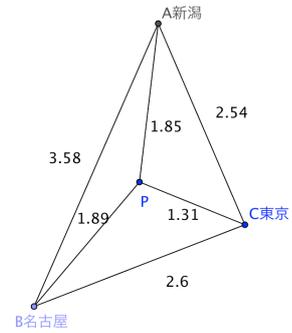
##### [解決法 1] 直観的方法

自分で図をいろいろ描いて、コストが最小となる点を探して、ほぼこの辺りという点を見つけた人もいるだろう。直観も大切な数学の力だ。

### [解決法 2] 実験的方法

直観的に得た結果を確認する、あるいは、最初から実験的に求める点を探すためには、コンピュータが有効だ。数学用フリーウェアソフト“GeoGebra”で作成したファイル“電力送電網の最短距離.ggb”を開いて、実験してみよう。

分岐点をどこかに置く方が最小になるとすれば、その位置はどこだろう？ そして、その点はどんな性質を持っているだろう？



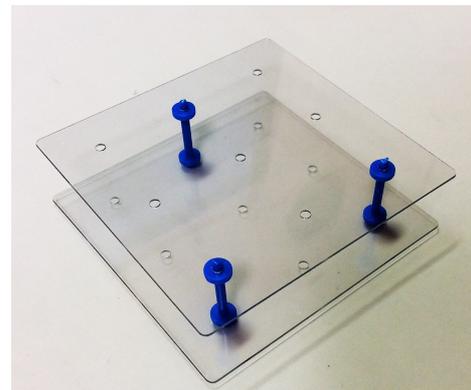
$$PA + PB + PC = 1.85 + 1.89 + 1.31 = 5.05$$

### [解決法 3] 自然が知っている方法

課題 1 の 3 地点の状況を、右図のようなプラスチックの板と棒で作る。それを、シャボン玉の液につけてそーっと引き上げると、シャボン膜はどのように張るだろう？

実験の前に、右図に貴方の予想するシャボン膜を描いてみよう。

さて、実験結果はどうなったか？



シャボン膜は非常に薄い(軽量)ので、膜にかかる力は表面張力だけである。そして、その表面張力が最小になるように、すなわち膜の表面積が最小となるように膜が張られる。したがって、先のプラスチックの板を上から見たときの膜の線の長さの和は最小になっている。自然(シャボン膜)は、最小となる方法を知っている！

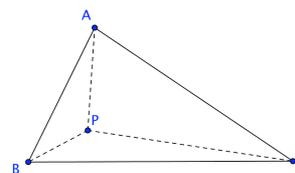
シャボン膜が知っている、この最小となる点はどんな点であるのかを、これから探っていく。

## 2. 数学の世界に持ち込むと？

実は、課題 1 は次のような数学の問題として古くから考えられている。

### [課題 2] フェルマー・シュタイナー問題

三角形 ABC とその内部の点 P を考えるとき、 $PA+PB+PC$  を最小にする点 P はどこにあるか？



この至ってシンプルな問題は、1629 年にフェルマーによって提示された。フェルマーは、フェルマーの最終定理

$n$  を 3 以上の自然数とするとき、

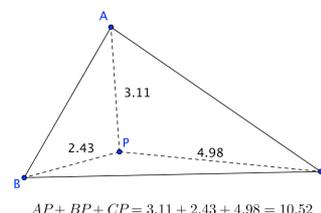
$x^n+y^n=z^n$  を満たす自然数の組  $(x, y, z)$  は存在しない

を予想したことで有名である。この問題は、フェルマーが読んでいた数論の本の余白に、「この問題の驚くべき証明を得たが、この余白は証明を書くには狭すぎる」と書き残したことから、フェルマー予想と呼ばれていた。フェルマー予想は、問題自体は小学生にも理解できるくらい非常に簡潔であるにもかかわらず、幾多の大数学者の挑戦をはねのけ続けたが、360 年後の 1995 年に、イギリスの数学者アンドリュー・ワイルズが、教え子のリチャード・テイラーの助けを得て完全に証明した。

閑話休題。課題 2 はイタリアの数学者トリチェリによって、1640 年よりも前のどこかの時点で証明された。しかし、幾何学を研究していたドイツの数学者ヤコブ・シュタイナー(1796~1863)にちなんで、「フェルマー・シュタイナー問題」と呼ばれる。

### [実験 1] フェルマー・シュタイナー問題

三角形 ABC とその内部の点 P を考えるとき、 $PA+PB+PC$  を最小にする点 P はどこにあるかを、GeoGebra を利用して発見せよ。



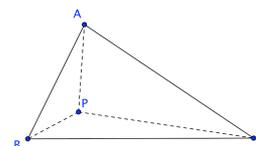
### [結果]

課題 2 については、イタリアの数学者カヴァリエリ(1598~1647)が、点 P について次のような興味深い性質を 1647 年に発表している。

### [定理 1] カヴァリエリ

内角がすべて  $120^\circ$  より小さい三角形 ABC と、その内部の点 P を考える。

$PA+PB+PC$  が最小  $\Rightarrow \angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$



この結果は、現代の施設配置問題(ケーブルの敷設問題、消防署の配置問題等)に応用できる結果である。証明は、微積分を利用してもできるが、ドイツの数学史家ホフマンが 1929 年に発表した鮮やかな幾何学的証明を見てみよう。

(証明) ホフマン

$\triangle APB$  を点  $B$  を中心に  $60^\circ$  回転させた三角形を  $\triangle A'P'B$  とすると、

$$PB = P'B, \quad \angle PBP' = 60^\circ$$

より、 $\triangle BPP'$  は正三角形となる。

よって、

$$PB = P'B = P'P \cdots \textcircled{1}$$

また、回転移動より、

$$PA = P'A' \cdots \textcircled{2}$$

ゆえに、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、

$$PA + PB + PC = A'P' + P'P + PC \cdots \textcircled{3}$$

ここで、折れ線  $A'P'PC$  の長さが最小となるのは、折れ線が直線  $A'C$  になるときである。

ゆえに $\textcircled{3}$ より、 $PA + PB + PC$  が最小となるのは、 $A'$ 、 $P'$ 、 $P$ 、 $C$  が同一直線上にあるときであるから、

$$\angle BPC + \angle BPP' = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \angle BPC + 60^\circ = 180^\circ$$

よって、

$$\angle BPC = 120^\circ$$

同様に、点  $A$ 、 $C$  を中心とした  $60^\circ$  の回転を考えることにより、

$$\angle APB = \angle CPA = 120^\circ$$

よって、

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$$

(Q.E.D.)

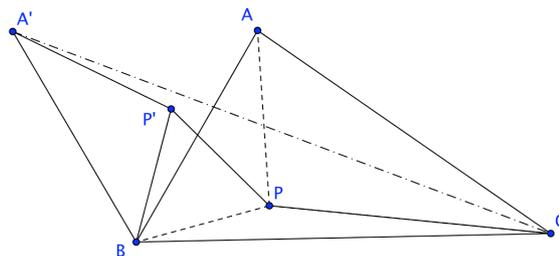
※ Q.E.D.はラテン語“quod erat demonstrandum”の略であり、「証明終わり」を意味する。

フェルマー・シュタイナー問題の求める点  $P$  のことを、「シュタイナー点」と呼ぶことが多い。

この鮮やかな証明は、回転移動や対称移動によって等しい長さを移すという、数学でよく利用される考え方に基づいている。そしてこの証明法は、シュタイナー点  $P$  の位置をどのように作図すればよいかを示している点においても素晴らしい。

[問 1] ホフマンの証明における  $\triangle BAA'$  がどのような三角形であるかを考えることにより、シュタイナー点の作図方法を述べよ。

[問 2] フェルマー・シュタイナー問題において、 $\triangle ABC$  の内角の 1 つが  $120^\circ$  より大きいとき、シュタイナー点はどのようになるかを考察せよ。

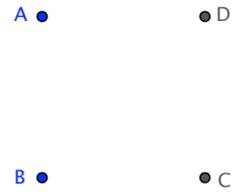


### 3. 拡張を考えると？

課題 1 は、3 地点を結ぶときのネットワークの最短距離を求めるものであった。それでは、次のような問題が現実にあったとすると、どう解決すればよいただろう？

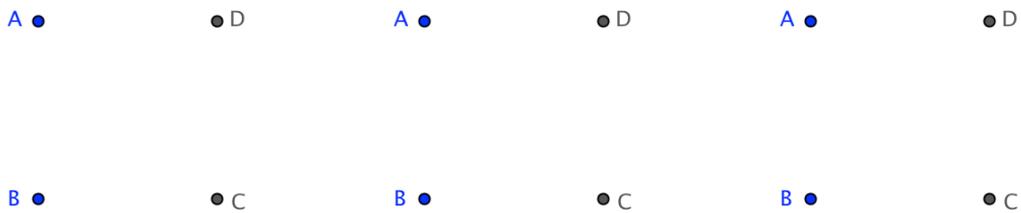
[課題 3]

ある会社の 4 つの施設 A, B, C, D が、四角形 ABCD が正方形をなすように位置している。4 つの施設をネットワークで結びたいとき、ネットワークの距離を最小にするには、どのような結び方をすればよいか？



[解決法 1] 直観的方法

自分で試行錯誤しながら図をいろいろ描いて、ネットワークの最短距離を求めよ。

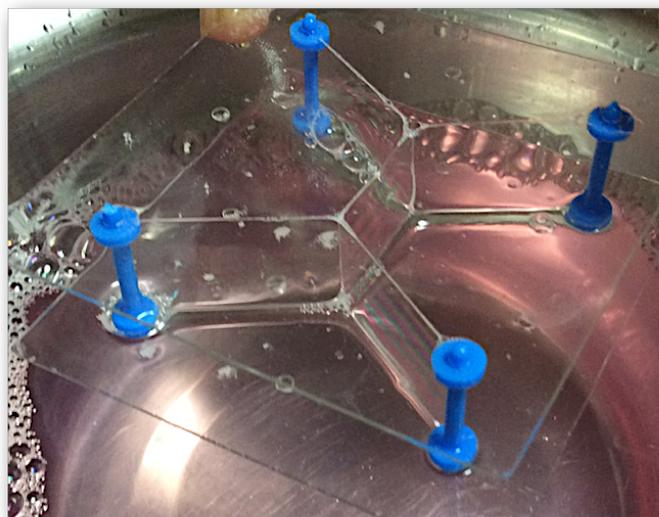
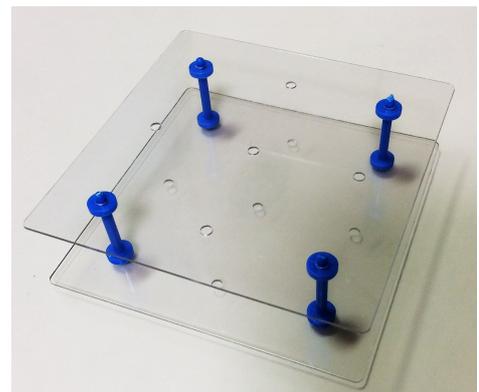


[解決法 2] 自然が知っている方法

課題 2 の 4 地点の状況を、右図のようなプラスチックの板と棒で作る。それを、シャボン玉の液につけてそーっと引き上げると、シャボン膜はどのように張るだろう？

実験の前に、右図に貴方の予想するシャボン膜を描いてみよう。

さて、実験結果はどうなったか？



正方形の1辺の長さを1として考える。

まず、3点を右図のように結ぶと、その長さは、

$$L=AB+BC+CD=3$$

である。

次に、分岐点を1つ作ってPとし、線分AC, BDの交点をOとすると、

$$AP+PC+BP+DP \geq AC+BD$$

となり、等号が成立するのはP=Oのときである。

よって、分岐点が1個のときの最短の長さは、

$$L=AC+BD=2\sqrt{2} \doteq 2.82 < 3$$

となる。

さて、もっと短くできないか？

分岐点が2つの場合を考えよう。このとき、フェルマー・シュタイナー問題を考えたときの方法が利用できる。

[解法1]

右図のように、2つの分岐点をP, Qとする。△APDを点Aを中心に60°回転した三角形を△AP'D'とし、△CQBを点Cを中心に60°回転した三角形を△CQ'Q'B'とする。このとき、△APP'と△CQQ'は正三角形であることに注意すると、

$$\begin{aligned} & AP+DP+PQ+BQ+CQ \\ &= AP'+D'P'+PQ+B'Q'+CQ' \\ &= D'P'+P'P+PQ+QQ'+Q'B' \\ &= \text{折れ線 } D'P'PQQ'B' \text{ の長さ} \end{aligned}$$

ここで、折れ線D'P'PQQ'B'の長さが最小になるのは、この折れ線が直線D'B'と一致するときである。それは、

$$\angle APP' = \angle CQQ' = 60^\circ$$

であることと、対称性から、

点P, Qの周りの角度がすべて120°であるとき

となる。

よって、このときのネットワークの最短の長さは、

$$\begin{aligned} L=D'B' &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin 60^\circ} \times 4 + \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan 60^\circ} \times 2\right) \\ &= 1 + \sqrt{3} \doteq 2.73 < 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

[解法2]

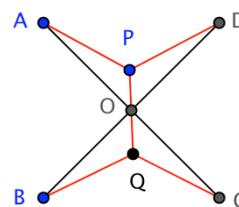
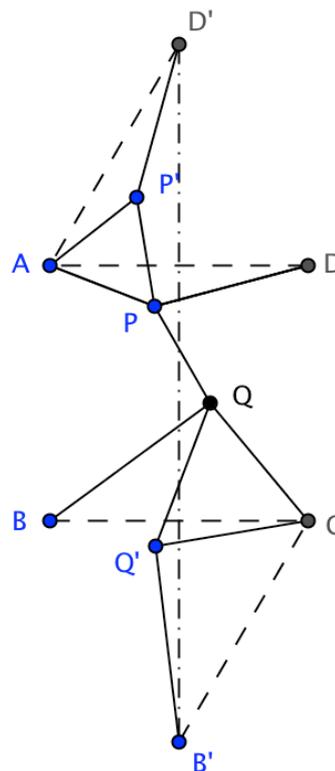
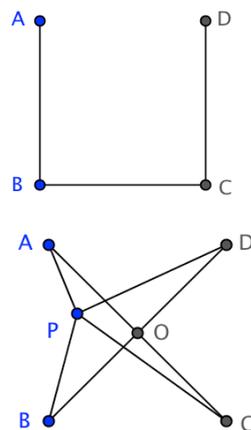
右図において、△AODのシュタイナー点をP, △BOCのシュタイナー点をQとすると、

$$OA+OD+OB+OC > AP+DP+PO+BQ+CQ+QO$$

である。

もし、

$$AP+DP+PO+BQ+CQ+QO$$



が最小だとすると、

点 P は  $\triangle AQD$  のシュタイナー点、かつ点 Q は  $\triangle BPC$  のシュタイナー点である。

したがって、点 P, Q の周りの角度がすべて  $120^\circ$  となる。

よって、このときのネットワークの最短の長さは、

$$\begin{aligned} L = D'B' &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin 60^\circ} \times 4 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{\tan 60^\circ} \times 2 \\ &= 1 + \sqrt{3} \doteq 2.73 < 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

以上の正方形の場合に出てきた、最短ネットワークを構成する分岐点を、三角形の場合と同じく、シュタイナー点と呼ぶ。

では、シュタイナー点が 3 個、4 個、 $\dots$ と存在すれば、さらにネットワークを短くできるのだろうか？ 実は、次の定理が成立する。

[定理 2]

n 個の点の最短ネットワークにおいて、シュタイナー点は最大 n-2 個である。

(証明)

シュタイナー点の個数を k 個とすると、最短ネットワークを構成する線分の数は、

$$n + k - 1 \text{ 本} \dots \textcircled{1}$$

である。

また、1 個のシュタイナー点から出る線分は 3 本であり、n 個の点からは少なくとも n 本の線分が出ているが、線分は 2 つの頂点を結んでいるので重複がある。よって、この場合の線分の個数は、

$$\text{少なくとも } \frac{3k+n}{2} \text{ 本} \dots \textcircled{2}$$

ゆえに、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、

$$n + k - 1 \geq \frac{3k+n}{2} \Leftrightarrow k \leq n - 2$$

(Q.E.D.)

正方形の場合は  $n=4$  であるから、シュタイナー点が 2 個以下の場合を考えればよい。

ゆえに、4 つの点が正方形をなす場合の最短ネットワークの長さは、

$$L = 1 + \sqrt{3}$$

である。

以上のような問題は、

シュタイナー最小木問題

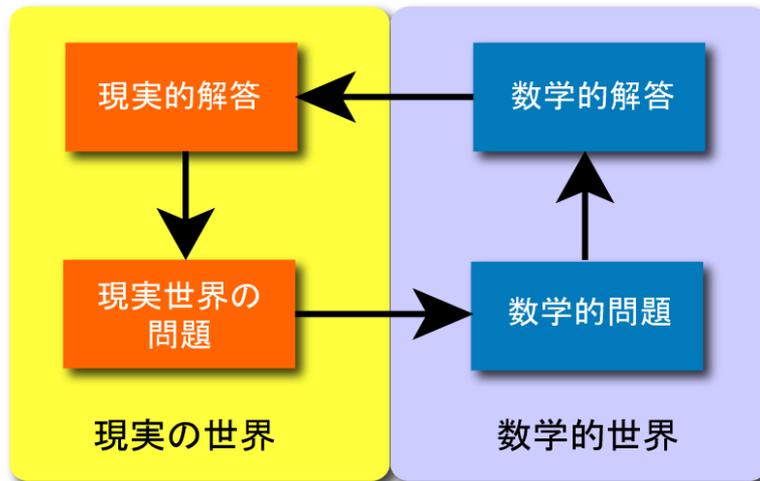
と呼ばれているが、施設設置問題の他にも、VLSI 回路を設計するときの最も基本的な技術等に活用されている。

## II シャボン玉は知っている

### 1. シャボン玉はなぜ丸い？

Iで学習したように、シャボン膜はネットワークの最短距離を知っていることを実験で観察し、それが実際に最短距離であることを数学で解明した。そして、この結果は、施設やネットワークの配置問題、VLSI回路の設計等に生かされる形で、現実に応用されている。

一般的には、下図のようなサイクルの形で、自然界や社会の現象や事柄を数学という言葉で表現し、解明していることになる。



では、前のシャボン膜に引き続いて、自然から学んでいこう。

#### [課題 4]

シャボン玉は、なぜ丸いのか？ その理由を考えよ。

小さい頃(あるいはいまでも)シャボン玉を作って遊んだことだろう。そのとき、シャボン玉はなぜ丸いのか、不思議に思ったことはないだろうか？

世の中には、当たり前だと思っていることでも、よく考えてみると不思議に思えることはたくさんある。シャボン玉がなぜ丸いのかも、その1つだろう。他にも、

- ・なぜ、平面上の2点を最短距離で結ぶ曲線は直線なのか？
- ・なぜ、光は最短時間で進むのか？

など、いろいろと考えられる。このような、直観的には明らかに思えても、改めて「なぜ？」と聞かれると答えに窮することはよくある。そのときが、数学の出番なのだ。

では、課題4について考えよう。シャボン玉の膜は非常に薄いために、重さを無視することになると、シャボン玉に働く力は表面張力のみとなる。そのために、シャボン玉は一定の体積(吹きこまれた空気の量)を保つ条件のもとで、表面張力が最小になるような形をとろうとする。科学的(理学的)にいうと、自然はポテンシャルエネルギーを最小にしようとするのである。ここで、表面張力は表面積に比例すると考えられるので、シャボン玉は表面積が最小になろうとした結果として、球形になると考えられる。



つまり、シャボン玉が丸いのは、

体積が同じ立体の中で、表面積が最小となるのは球である

ということを示している。

さて、これは本当だろうか？ まずは具体的に調べてみる。

[課題 5]

次のような体積  $V=1$  の立体を考えると、それぞれの立体の表面積  $A$  の近似値を求めよ。

- (1) 球(半径  $r$ )
- (2) 正四面体(1 辺  $r$ )
- (3) 立方体(1 辺  $r$ )
- (4) 円柱(底面の半径  $r$ , 高さ  $2r$ )

(解答)

$$(1) \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3 = 1 \text{ より, } r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$$

ゆえに,

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4\pi}\right)^2} = 4\sqrt[3]{\frac{9\pi}{16}} \doteq 4.84 \cdots \textcircled{1}$$

(2) 正四面体の高さを  $h$  とすると、三平方の定理より、

$$h^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}r^2$$

$$\text{よって, } h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$$

$$\text{ゆえに, } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}r \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12}r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r = \frac{\sqrt{2}}{12}r^3 = 1$$

$$\text{よって, } r^3 = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \text{ だから, } r = \sqrt[3]{6\sqrt{2}}$$

ゆえに,

$$A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}r \cdot 4 = \sqrt{3}r^2 = \sqrt{3} \sqrt[3]{36 \cdot 2} = 2\sqrt{3} \sqrt[3]{9} \doteq 7.21 \cdots \textcircled{2}$$

(3)  $V = r^3 = 1$  より,  $r = 1$

$$\text{ゆえに, } A = 6r^2 = 6 \cdots \textcircled{3}$$

$$(4) \quad V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 1 \text{ より, } r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

ゆえに,

$$A = \pi r^2 \times 2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2 = 6\pi \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}} = 6\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \doteq 5.54 \cdots \textcircled{4}$$

課題 5 の①, ②, ③, ④から, 体積が一定のときの表面積の大きさは,

正四面体の  $A >$  立方体(正六面体)の  $A >$  円柱の  $A >$  球の  $A$

となるので, 球の表面積がいちばん小さくなるようだ。

しかし, これは具体的な幾つかの立体について, 具体的に表面積を計算しただけなので, 数学の証明にはなっていない。そこで, 引き続き数学的に考えていく。

## 2. 大昔から知っていた?

実は, 体積が一定のときの表面積が最小となる問題に似ている次のような問題は, キリストが生まれるよりも何世紀も前から, 古代ギリシャやエジプトの数学者によって考えられていた。

### [課題 5] 等周問題

長さが一定の閉曲線の中で, その閉曲線で囲まれる面積を最大にするのは何か?

課題 5 を満たす曲線が円であることは, 古代の人たちは直観的に認めていたし, 現代の私たちもそうだろう。しかし, これは非常に深い問題であり, 円であることを数学的に証明するには, たくさんの天才たちの貢献を経て, 厳密な証明が得られたのはなん 19 世紀 (!) になってからである。ついでに, 平面上の 2 点を結ぶ曲線で長さが最小なのは直線であることの厳密な証明は, これもなんと 18 世紀 (!) である。こんな直観的には明らかなことを厳密に証明しようと努力する数学(者)は素晴らしい! と思うか, 呆れた...と思うかは人によって違うだろうけれど, もう少し数学者の努力を見ていこう。

課題 5 の等周問題の起源は, ローマの詩人ヴェルギリウス(アウグストゥスと同時代の人)の叙事詩『アエネーイス』に書かれている, 次のようなカルタゴ女王ディドーの物語まで遡ることができる。

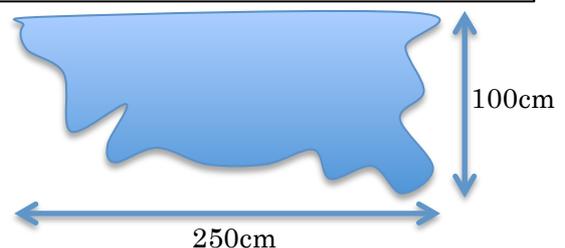
フェニキアの王女であったディドーは, 彼女の夫を殺害した残忍な兄ピグマリオンから逃れるために海を渡り, 北アフリカの現在チュニス湾と呼ばれるところに上陸した。ディドーは家臣とともに新しい国を築くために, その地の支配者ヌミディアのジャーバス王から土地を買おうとした。彼らが結んだ売買契約は, 牛 1 頭分の皮で囲めるだけの土地を買うというものであった。ヌミディアの人たちは冗談だと思い一笑に付したが, 最後に笑ったのはディドーであった。

### [課題 6] ディドーの問題

ディドーは, 牛 1 頭分の皮で囲めるできるだけ広い土地を得ようとして, どのような方策を考えたか? また, その結果として, どれ位の大きさの土地を得ることが出来たか?

ディドーは, 右図のような牛半頭分の皮 2 枚から, 幅 2.5mm の何本もの紐を切り取り, それらをつなぎ合わせて 1 本のロープを作った。

[問 3] そのロープの長さを求めよ。



ディドーは、真っ直ぐな海岸線を一方の境界として、出来上がった 2km のロープで半円形に土地を囲い込んだ。彼女は、面積が最大になるのは土地の形が半円形のとときであることを知っていたに違いない。このようにして、古代都市カルタゴは出来上がった（右図は現在の博物館にある想像図）。



[問 4] ディドーが手に入れた半円形の土地の半径とその面積を求めよ

### 3. 等周問題は解決？

さて、ディドーの問題を数学的に書きなおすと、次のようになる。

[定理 3] ディドーの問題

定直線  $L$  上の 2 点を、一定の長さの曲線で結ぶとき、領域の面積が最大になる曲線  $C$  は半円である。

(証明) スイス人数学者シュタイナー(1796~1863)

まず、 $C$  は凸図形でなければならない。

なぜなら、 $C$  が凸図形でないとすると、右図のような図形となる。

(i) 穴が開いているとき

穴を取り除くことにより、周の長さが短くなり面積は大きくなる。

(ii) 凹んでいる部分があるとき

接線に関して対称に折り返すことにより、周の長さは同じで面積は大きくなる。

いずれにしても条件を満たさないので、 $C$  は凸図形でなければならない。

さて、右上図において  $C$  は半円ではないとすると、 $C$  上の点で、

$$\angle APB \neq 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

なる点  $P$  が存在する(注 1)。領域を弦  $AP$ 、 $BP$  で 3 つの部分に分割して、それぞれ  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  とする。

ここで、 $AP$ 、 $BP$  を硬い棒だと思い、

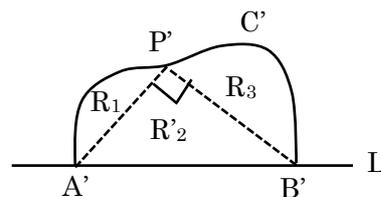
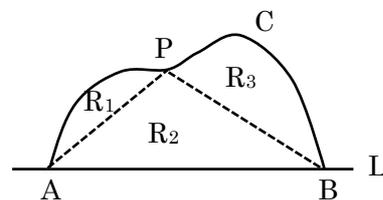
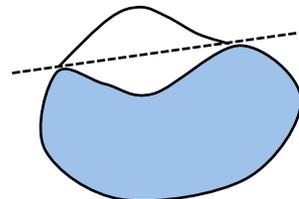
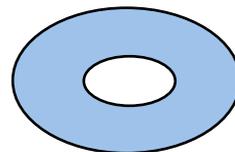
$$\angle A'P'B' = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

となるように、点  $A$  を  $A'$ 、 $B$  を  $B'$  に移動させる。このとき、点  $P$  は  $P'$  に移動し、

$$AP = A'P', \quad BP = B'P' \cdots \textcircled{3}$$

となる。この移動の結果、曲線  $C$  は  $C'$  に移動したとする。

③より、 $R_1$ 、 $R_3$  は変化することなく弦  $A'P'$ 、 $B'P'$  の上に移動し、 $R_2$  は  $R_2'$  に移動している。



ここで、①, ②, ③より,

$$\triangle APB = \frac{1}{2} AP \cdot BP \sin \angle APB < \frac{1}{2} A'P' \cdot B'P' \sin 90^\circ = \triangle A'P'B'$$

であるから、任意の曲線 C を

C の周の長さ = C' の周の長さ, C と L で囲む面積 < C' と L で囲む面積...④  
を満たす曲線 C' に変形することができる(注 2)。

④のような、周の長さが変わらずに面積が増加するような変形を受けない曲線は、半円に限る(∵ C が半円なら①を満たすような点 P は存在しないから)。

よって、領域の面積が最大になるのは、C が半円のときである。

(Q.E.D.)

(注 1) 曲線上の任意の点 P について  $\angle APB = 90^\circ$  となるのは円だけであることを示す必要があるが、その証明は省略する。

(注 2) 移動することで領域  $R_1, R_3$  が重なることはないのであるが、その説明は省略する。

[定理 4]

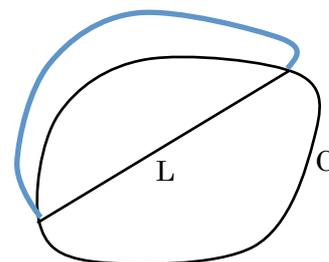
曲線 C を等周問題の解となる図形とすると、C 上の 2 点を結ぶ弦で周を 2 等分するものは、面積も 2 等分する。

(証明)

このような弦 L が、面積を 2 等分しないとすると、面積の大きい方を L に関して対称に折り返してできる図形は、周の長さは同じであるが、面積は大きくなる。

これは、C が等周問題の解であることに矛盾する。

よって、L は面積も 2 等分する。



(Q.E.D.)

(注) C 上の 2 点を結ぶ弦で周を 2 等分するものが存在することは、実は証明が必要であるが、省略する。

以上で、等周問題のシュタイナーの証明の準備が出来上がった。

[定理 5] 等周問題

長さが一定の閉曲線の中で、その閉曲線で囲まれる面積を最大にするのは円である。

(証明) シュタイナー

等周問題の解となる図形 C が与えられたとして、C の周を 2 等分する弦 L を描き、C を 2 つの図形  $C_1, C_2$  に分割する。 $C_1, C_2$  は弦 L を共有しているので周の長さは同じであり、定理 4 より面積も同じである。

ここで、 $C_1, C_2$  の(同じ)面積を最大にすれば、C の面積は最大になる。定理 3 より、 $C_1, C_2$  の(同じ)面積が最大になるのは、 $C_1, C_2$  が半円のときであるから、C は円である。

(Q.E.D.)

以上で、シュタイナーは見事なアイデアで等周問題を解決したように思える。しかし、実はこの証明には欠陥がある。

[問 5] シュタイナーの証明の、数学的欠陥を述べよ。

シュタイナーの証明は、

**等周問題の解となる曲線の存在を、証明なしに仮定している**

ことが数学的にはダメであると、同時代のドイツ人数学者ディリクレ(1805~1859)に指摘されていた。これに対してシュタイナーは、解が存在するのは明らかであると反論した。大多数の人は、シュタイナーと同じように考えるだろう。しかし、幾何学の問題では、解が存在するのは明らかに見えても、実は解が存在しない問題はいくらでもある。

[例]

周の長さが 1 より小さい凸図形の中で、面積が最大のものを見つけよ。

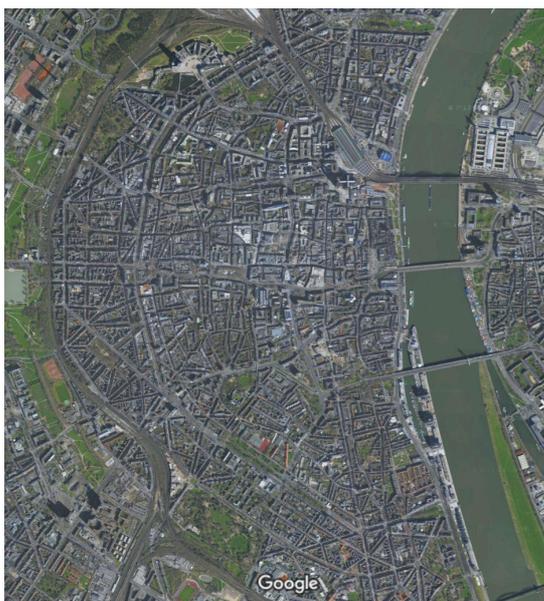
[解]

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、周囲の長さが  $1 - \varepsilon$  の凸図形  $C$  を考える。 $C$  を周の長さが  $1 - \frac{1}{2}\varepsilon$  である相似な図形  $C_1$  に相似拡大すると、 $C_1$  の周の長さは 1 より小さく、面積は  $C$  よりも大きい。この操作を繰り返すと、周の長さが  $1 - \frac{1}{2^n}\varepsilon$  ( $n=1, 2, \dots$ ) と 1 より小さく、面積が増加する凸図形の無限列が得られる。

すなわち、周の長さが 1 より小さい凸図形で面積が最大となるものは存在しない。

このような数学の厳密性に美しさを観るか、めんどくさい学問だと感じるか、これも人によって様々だろう。

閑話休題。古代から等周問題とその解がよく知られていたことは、例えば下図のような中世における都市の城壁の形を見ても分かる。



現在のケルン市街



中世都市ネルトリンゲン

#### 4. 双対性

解決した等周問題に関して、次の定理が成り立つ。

[定理 6] 双対性

平面上の閉曲線の周の長さを  $L$ ，閉曲線が囲む領域の面積を  $A$  とし，2つの命題を

$P$  :  $L$  が一定のとき， $A$  が最大となる閉曲線は円である。

$Q$  :  $A$  が一定のとき， $L$  が最小となる閉曲線は円である。

とすると， $P$  と  $Q$  は同値( $P \Leftrightarrow Q$ )である。

(証明)

(i)  $P \Rightarrow Q$  の証明

$Q$  でないと仮定すると，面積  $A$  の円  $C$  に対して，ある曲線  $D$  が存在して，

$$A_D = A_C = A, L_C > L_D$$

を満たす。

ここで，円  $C$  を周の長さが  $D$  と同じになるまで縮小し，その円を  $C'$  とすると，

$$L_{C'} = L_D, A_{C'} < A_C = A_D$$

となるが，これは仮定の命題  $P$  の主張である

$$A_{C'} > A_D$$

に矛盾する。

よって， $P \Rightarrow Q$  は成立する。

(ii)  $Q \Rightarrow P$  の証明

$P$  でないと仮定すると，周の長さ  $L$  の円  $C$  に対して，ある曲線  $D$  が存在して，

$$L_D = L_C = L, A_C < A_D$$

を満たす。

ここで，円  $C$  を面積が  $D$  と同じになるまで拡大し，その円を  $C'$  とすると，

$$A_{C'} = A_D, L_{C'} > L_C = L_D$$

となるが，これは仮定の命題  $Q$  の主張である

$$L_{C'} < L_D$$

に矛盾する。

よって， $Q \Rightarrow P$  は成立する。

以上より， $P \Leftrightarrow Q$  である。

(Q.E.D.)

命題  $P$  は等周問題の解であり，真であることを証明したので，命題  $Q$  も真である。

そこで，命題  $Q$  の次元を 1 つ上げると，次の定理が成り立つ。

[定理 7] シャボン玉

同じ体積を囲む閉曲面の中で，表面積が最小となるのは球である。

## 5. 変分法

定理 7 が成り立つことを数学的に厳密に証明するには、**変分法**という数学が必要となる。変分法は、イギリスの天才数学者ニュートン(1642~1727)とドイツのこれまた天才数学者ライプニッツ(1646~1716)が発見した**微分法**の兄貴分、とでも言うべき数学である。微分法と変分法の違いを、具体例で見てみよう。

### [課題 7] 微分法

4 辺の長さの和が 4 である長方形のうち、面積が最大のものは何か？

長方形の横の長さを  $x$ 、面積を  $S$  とすると、

$$S = x(2-x) = -x^2 + 2x$$

よって、

$$\frac{dS}{dx} = -2x + 2 = 2(1-x)$$

$$\frac{dS}{dx} = 0 \text{ とすると、 } x = 1$$

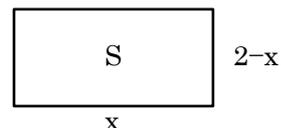
増減表より、 $S$  は  $x=1$  で最大値をとる。

よって、面積が最大となるのは、正方形のときである。

このように、一般的にいうと、

**関数  $f(x)$  が極値をとる  $x$  の値を求める方法が微分法**

である。



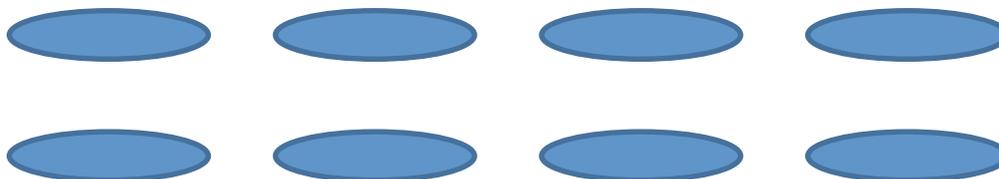
$x$	0	...	1	...	2
$\frac{dS}{dx}$	/	+	0	-	/
$S$	/	↑	極大 1	↓	/

### [課題 8] 変分法

右図のような、底面の半径が 1、高さが 1 の円柱形の容器がある。この容器の表面に塗料を塗りたい。塗料の量が最も少なくなるように容器の側面の形を変えると、その形はどうなるか？



[貴方の予想]



塗料の量を最小にするには、容器の側面の表面積を最小にすればよい。

課題 7 においては、 $S$  が最大となる  $x$  の値は、 $x$  を少し変化させても  $S$  はほとんど変化

しない、つまり変化率が 0 となる ( $\frac{dS}{dx} = 0$ ) ことから求められる。これと同様の考え方で、

課題 8 を満たす側面の曲線  $f(x)$  があるとして、 $f(x)$  をどのように変形しても表面積は増えるが、表面積の変化率は  $f(x)$  で 0 になっているはずである。つまり、表面積が最小になる  $f(x)$  では、曲線を少し変化させても表面積はほとんど変化しないはずである。

このように,

**表面積が極値をとる曲線(関数) $f(x)$ を決定する方法が変分法**

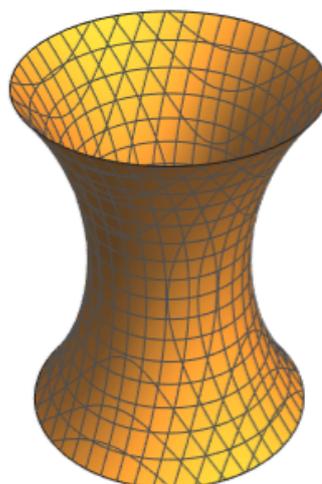
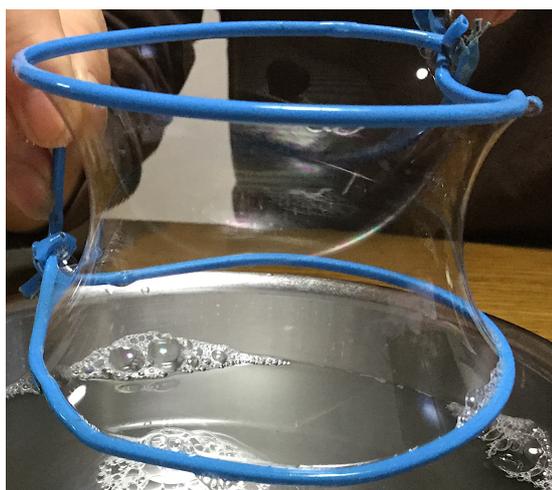
である。

微分法と変分法の違いは、簡単に言うと,

**変分法は、変形の仕方に無限のバリエーションがある**

ことである。課題 8 においては、側面を表す曲線  $f(x)$  としては直線、放物線などありとあらゆる曲線が考えられるのである。その中で、表面積を最小にする曲線(関数)を求める方法が変分法なのである。

ここで、実はシャボン膜(自然)は、またまた答えを知っているのである。



この曲面は、懸垂曲面と呼ばれる曲面であり、カタナリーという曲線を回転させて得られる。この曲面が表面積最小となることを、次の問いに従って数学的に示そう。

[問 6]

- (1) 課題 8 の立体の側面を表す曲線を  $y=f(x)$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ),  $f(-1)=f(1)=2$  とし、この曲線の微小部分の長さを  $ds$  とする。曲線  $y=f(x)$  を  $x$  軸の周りに 1 回転したとき、この微小部分が掃く曲面の微小部分の面積を  $dA$  とすると、

$$dA = 2\pi y \sqrt{1+(y')^2} dx$$

であることを説明せよ。

- (2) この円柱状の立体の側面積は、

$$S = 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1+(y')^2} dx$$

であることを説明せよ。

- (3) 変分法を用いると、側面積  $S$  を最小にする関数  $y$  は、微分方程式

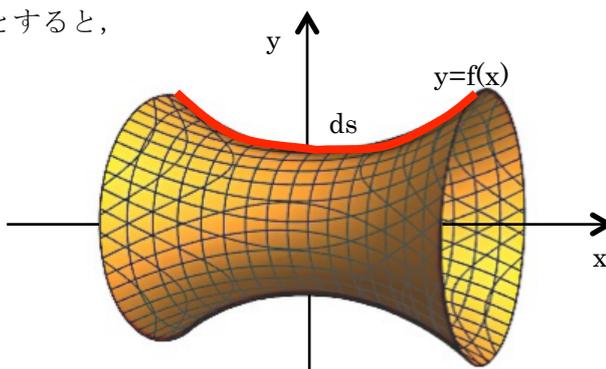
$$yy'' = 1+(y')^2 \cdots (*)$$

を満たすことが分かる。このとき、関数

$$y=f(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} \cdots (\star) \quad (a \text{ は定数})$$

は、(\*)を満たすことを示せ。

※シャボン膜の右横の図は、(\star)において  $a=0.589$  の  $y=f(x)$  を回転したものである。



## 6. 変分問題

変分法の一般的な理論の発展は、スイスの天才数学者オイラー(1707~1783)に始まる。オイラーは、数学の様々な分野(解析学、数論、幾何学、数理物理学等)に偉大な業績を残した数学者であり、晩年は失明したがその旺盛な研究意欲は衰えることがなかった。オイラーは、「息をするように、鷲が空を舞うように計算する」と言われるくらい計算が得意であり、理論的なきちんとした証明は後世に行われた事柄でも、自由に間違いなく正しい計算を行って数学的な結果を残した。彼の残した膨大な業績は、5万ページを超える全集にまとめられて1911年から刊行され続けているが、100年以上たった今日でも未だに完結していない。

オイラーの発見した次の等式(オイラーの等式)は、数学のいちばん美しい等式とも言われる。

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

また、次のような等式(バーゼルの問題)も証明している。

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

フランス人の数理物理学者ラグランジュ(1736~1813)は、19歳のとき(1755年)にオイラーに手紙を出した。そこに書かれていたラグランジュの方法が優れていたため、その方法の習得に熱中したオイラーは**変分法**と名づけた。

変分法の問題、あるいは変分問題は、一般的に最も簡単に述べると次のようになる。

[定義1] 変分法の問題・変分問題

変分問題とは、 $x_1$ ,  $x_2$ と関数  $F$  が与えられたとき、積分(汎関数)

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F\{x, y(x), y'(x)\} dx$$

を最小にする関数  $y(x)$  を求めることである。

つまり、

$F$  は  $x$ ,  $y$ ,  $y'$  のどのような関数かはわかっているが

$y$  は  $x$  のどのような関数かわかっていないとき

$J$  を最小にする関数  $y$  を求めよ

というのである。

問6は、回転体の表面積を表す積分

$$S = 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1+(y')^2} dx$$

を最小にする関数  $y$  を求める問題であり、関数  $F$  の形は

$$F\{x, y, y'\} = y \sqrt{1+(y')^2}$$

で与えられる。そして、問6の解は(☆)となることの変分法でわかるのである。

では、どのようにして積分の値を最小にする関数  $y(x)$  を求めればよいのだろう。実は、次のオイラー=ラグランジュ方程式を利用する。

[定理 8] オイラー＝ラグランジュ方程式

$x_1, x_2$  と関数  $F$  が与えられたとき、積分(汎関数)

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F\{x, y(x), y'(x)\} dx$$

を最小にする関数  $y(x)$  が存在するならば、 $y(x)$  は次の等式を満たす。

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \cdots \text{(EL)}$$

証明は省略する。

具体的に、オイラー＝ラグランジュ方程式(EL)を利用して、古典的ではあるが興味深い問題を眺めてみよう。

[課題 9] 変分問題

平面上の任意の 2 点を結ぶ曲線のうち、長さが最小のものは直線であることを示せ。

これは、小学校以来、誰もが当たり前だと思って利用してきた事柄であるが、ここで初めて数学的に証明できる！

2 点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  を結ぶ曲線を  $y=y(x)$  とすると、微小部分の長さ  $ds$  は、

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

よって、2 点  $A, B$  を結ぶ曲線の長さ  $L$  は、

$$L = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

つまり、(EL)における  $F$  の形は、

$$F = \sqrt{1 + (y')^2} = \{1 + (y')^2\}^{\frac{1}{2}}$$

である。

よって、

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2} \{1 + (y')^2\}^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y' = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

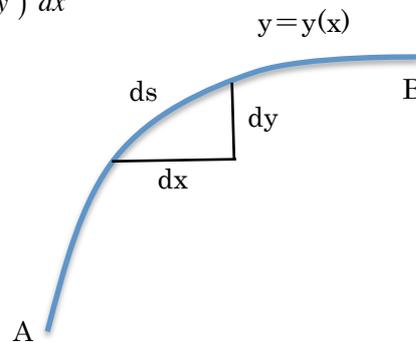
これらを(EL)に代入して、

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right\} = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{定数}$$

よって、

$$y'(x) = \text{定数} \Leftrightarrow y(x) = px + q \quad (p, q \text{ は定数})$$

すなわち、直線であることが証明された！



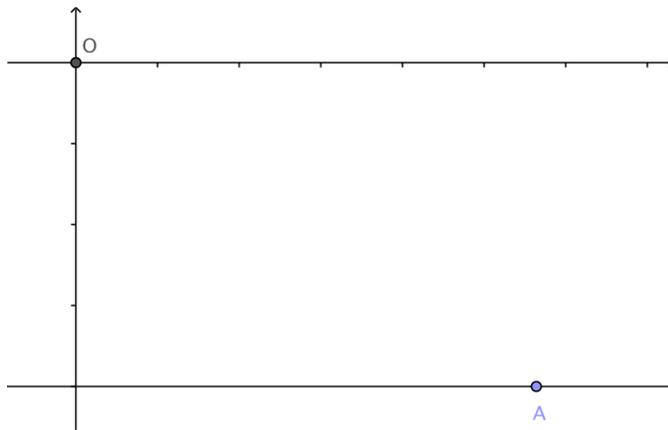
[課題 10] 変分問題

平面上の曲線  $y=y(x)$  に沿って、ガラス玉が原点  $O(0, 0)$  から点  $A$  まで重力によって滑り落ちるとする。このとき、摩擦は考えないものとする。ガラス玉が  $O$  から  $A$  まで最短時間で降下するとき、その曲線はどんな曲線か？

[貴方の予想]

■ 曲線  $y=y(x)$  の概形

■ 曲線  $y=y(x)$  の名前



曲線  $y=y(x)$  上の点  $(x, y)$  におけるガラス玉の速度を  $v$  とすると、エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad (g \text{ は重力定数})$$

よって、

$$v = \sqrt{2gy} \cdots \textcircled{1}$$

また、微小曲線の長さを  $ds$  とすると、

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

よって、

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dt} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{dt} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{dt}$$

ゆえに、

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{\sqrt{2gy}} \quad (\because \textcircled{1} \text{ より})$$

点  $A$  の  $x$  座標を  $L$  とすると、 $O$  から  $A$  までの降下時間  $T$  は、

$$T = \int_0^L \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^L \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}} dx \cdots \textcircled{2}$$

つまり、変分法における関数  $F$  は、

$$F = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}} \cdots \textcircled{3}$$

ここで、次の公式を利用する。

[定理 9] ベルトラミの公式

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{定数} \cdots \text{④}$$

※この公式は、定理 8 のオイラー＝ラグランジュ方程式(EL)の特別な場合である。定理 8 を利用してもよいが、この公式を利用するほうがあとの計算が楽になる。

③については、 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  より、④を利用して計算すると、

$$y\{1+(y')^2\}=C \quad (C \text{ は定数}) \cdots \text{⑤}$$

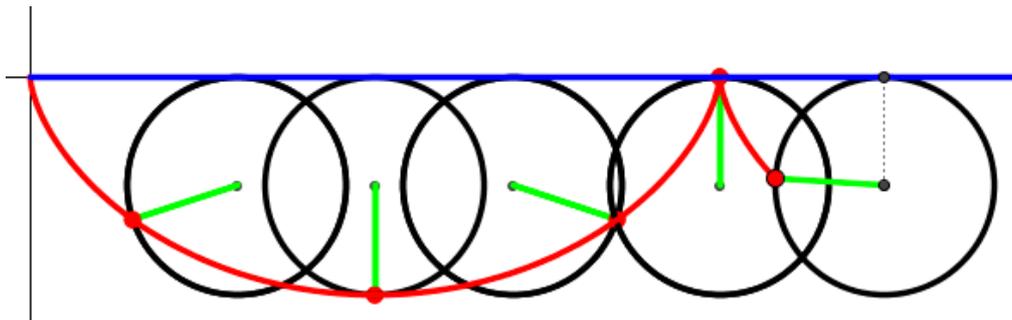
を得る。

この微分方程式⑤を解くと(巧妙な方法を利用する)、

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

を得る。

これは、**サイクロイド**と呼ばれる曲線であり、半径  $a$  の円を直線にそって滑ることなく転がしたときに円周上の点が描く曲線であり、下図のようになる(ただし、 $y$  軸は下向きを正としている)。最速降下曲線は、サイクロイドであった。



[問 7]

大阪～東京間にサイクロイド曲線

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \cdots (*)$$

のトンネルを掘り、重力のみで動く夢の超特急を走らせることを考える。ただし、地下のどの地点においても重力加速度は  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  とし、摩擦は考えないものとする。大阪、東京間は水平であると考え、それぞれの座標を  $(0, 0)$ ,  $(400, 0)$  とするとき(単位は  $\text{km}$ )、次の問いに答えよ(課題 10 を考えた際の①, ②も利用せよ)。

- (1) サイクロイド(\*)における  $a$  の値を求めよ。
- (2) トンネルのいちばん深い所における列車の速度を求めよ。
- (3) 大阪から東京までの所要時間を求めよ。

[問 8]

サイクロイドは、最速降下曲線という性質の他に、「等時性」と言われる性質も持っている。等時性とはどのような性質か述べよ。

[課題 11] 変分問題

右図のようなネックレスを、両手で端を持ってだらんとぶら下げると、ネックレスはどのような形の曲線を描くか？ ただし、ネックレスの質量はどこでも一様(密度は一定)であるとする。



[貴方の予想]

■ 曲線  $y=y(x)$  の概形

A ○

■ 曲線  $y=y(x)$  の名前

○ B

ネックレスの描く曲線を  $y=y(x)$  とし、曲線上の点を  $(x, y)$  とする。ネックレスの一定の密度を  $\rho$ 、微小部分の長さを  $ds$ 、微小部分の質量を  $dm$  とすると、

$$dm = \rho ds$$

より、この微小部分の持つ位置エネルギーは、

$$\rho ds \cdot gy \quad (g \text{ は重力加速度})$$

ゆえに、ネックレス全体の位置エネルギーは、

$$\begin{aligned} E &= \int_{x_1}^{x_2} \rho gy ds = \int_{x_1}^{x_2} \rho gy \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \rho gy \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \rho gy \sqrt{1 + (y')^2} dx \end{aligned}$$

ここで、ネックレスの長さは一定なので、

$$L = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \text{一定}$$

という条件のもとで、 $E$  の値を最小にする  $y=y(x)$  を求めることになる。

上手い考え方(省略)で、定理 8 の(EL)に代入する  $F$  を、

$$F = \rho gy \sqrt{1 + (y')^2} + \lambda \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{\lambda L}{x_2 - x_1}$$

として計算すると、微分方程式

$$y'' = C \sqrt{1 + (y')^2}$$

を得る。

この微分方程式を解くと、

$$y(x) = k \cosh\left(\frac{x-a}{k}\right) + b$$

となり、この曲線をカテナリーという。ここで、 $k$ ,  $a$ ,  $b$  は両端の位置とネックレスの長さで決まる。

ただし、

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

であり、この関数をハイパボリックコサイン(双曲線余弦関数)という。

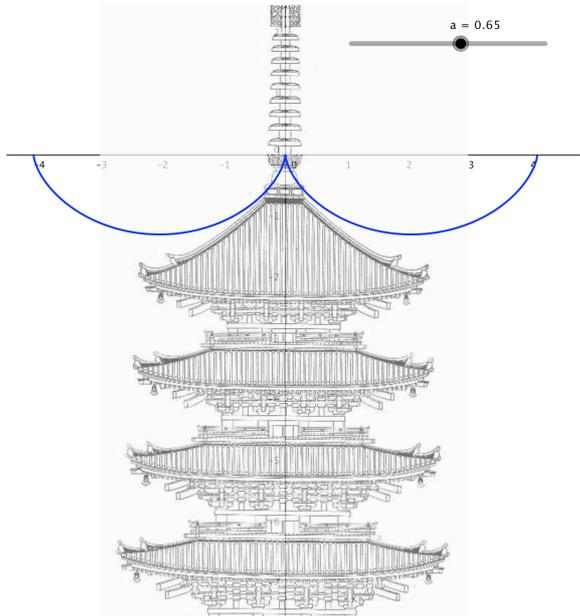
[課題 12]

サイクロイドは最速降下曲線であるから、法隆寺などの五重塔の屋根は、サイクロイドの形をしていると言われる。なぜなら、雨水を最速で屋根から落とすためには、サイクロイドの形がよいからだとのこと。

また、カテナリーも美しい曲線であり、神社の屋根の形はカテナリーの形をしているとも言われる。カテナリーは、紐で簡単に形を作ることができるからだとのこと。

これらは、はたして本当だろうか？ 下の例のように、写真を GeoGebra に取り込んで、その上に曲線を描くことで検証してみよ。

また、古代の宮大工たちがはたしてサイクロイドやカテナリーを知っていて、そのような形の屋根にしたのだろうか？ 各自で考察してみよ。



### Ⅲ 自然は知っているか？

#### 1. 黄金比は美しい？

自然の中に数学が潜んでいて、自然は数学を「知っている」、なぜか自然は数学に「支配されている」というようなことを読んだり、見たり、習ったりしてことはないだろうか？

ここでは、そのようなことについて考察していく。

[課題 13]

次の Web ページは、日本テレビ(NTV)の「世界一受けたい授業」で行われた授業の、復習コーナーである。この内容について、グループで議論して疑問や意見をまとめよ。

 今回のホニャララ授業復習コーナー

■問題の答え (1/1ページ)

 自然の中にはある数字が多く潜んでいます。

---

フィボナッチ数列の法則に従ったひまわりの種の右回りの渦の数と左回りの渦の数の比率は、だいたい1:1.618になり、この比率は「黄金比」とも呼ばれ、様々なところに登場します。  
自然の中は「1:1.618」の黄金比が潜んでいます。

例えばオウム貝。  
この貝は、半分に切ると中身は画像のようになっています。この画像のように向かい合った次の辺と長さを比べると、黄金比になっています。



さらにみなさんが目にする美しいと思われるものには、黄金比が潜んでいる事があります。

例えば、モナリザ。モナリザの顔は、顔の輪郭に沿って接線を引く、そしてそのたてと横の直線の長さ。  
ミロのビーナスは、頭からおへそ・おへそからつま先までの長さ。

ほかに日常にも黄金比が多く見られます。名刺、タバコの箱、新書、クレジットカードなどもその一例です。

とじる

[http://www.ntv.co.jp/sekaju/student/20050528/02\\_0301.html](http://www.ntv.co.jp/sekaju/student/20050528/02_0301.html)

[貴方・グループの疑問・意見]

テレビで 2005 年 5 月 28 日に放映された「世界一受けたい授業」の中には、次のような間違いがある。

[1] オウム貝

出演した著名な数学者の秋山仁が持っているのは「オウムガイ」であり、これは貝ではなく、頭足類(イカやタコの仲間)である。流石に画面のテロップは正しく表記されているが、Web 上では間違っている。この間違いは非常に多い。

[2] オウムガイに黄金比が潜んでいる

オウムガイを 2 つに割ると、綺麗な螺旋を見ることができる。この螺旋は、**対数螺旋**と呼ばれるものであり、極方程式で、

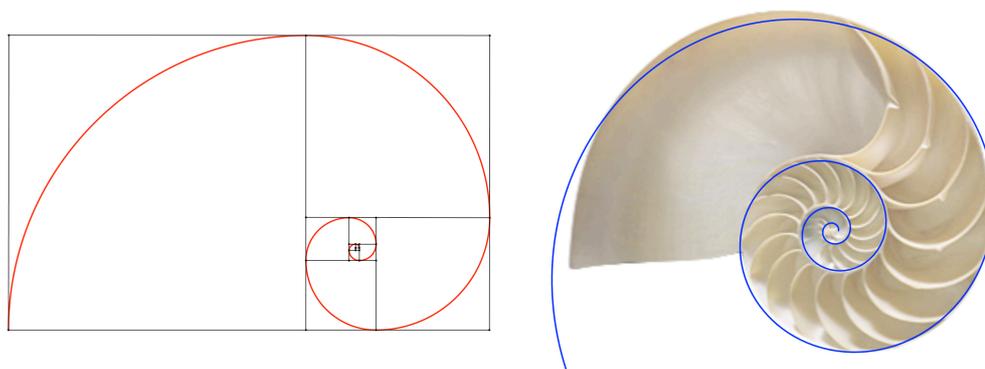
$$r = ae^{\theta \cot b} \dots (*)$$

と表される。

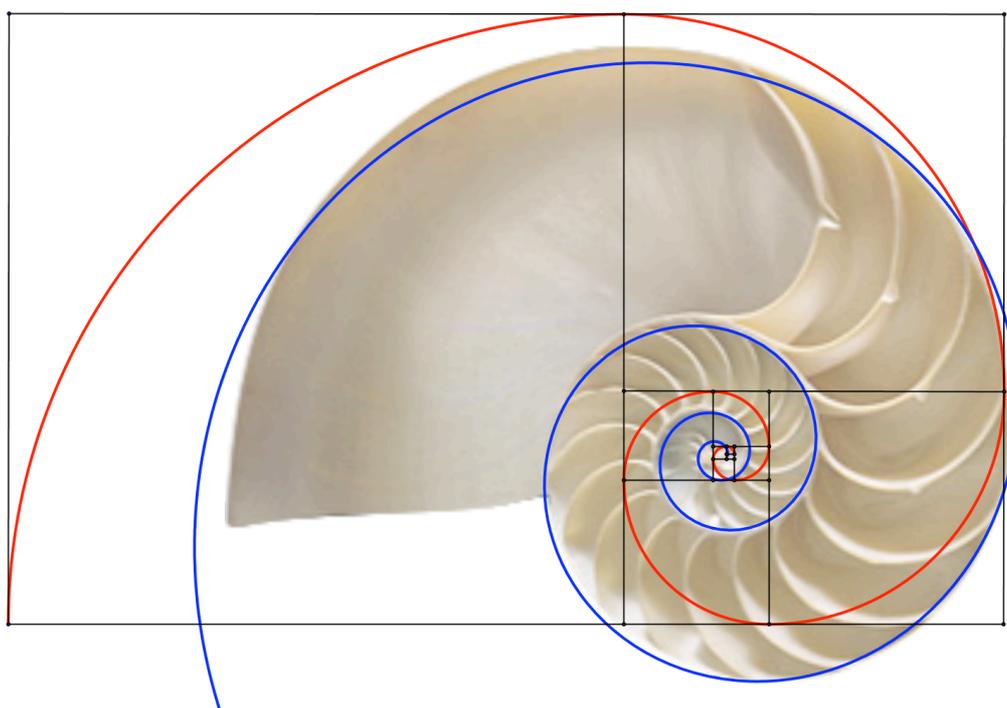
このオウムガイの螺旋に**黄金比**が現れるという意味は、

$$\text{縦} : \text{横} = 1 : 1.618$$

となる長方形(**黄金矩形**)によってできる螺旋(これも対数螺旋である)が、オウムガイの螺旋になっているということである。本当かどうか調べてみると・・・



確かに似ているが、重ねて見ると・・・



違っている！

実際に、対数螺旋(\*)における  $b$  の値は、

黄金矩形の螺旋： $72.8^\circ$ ，オウムガイの螺旋： $79^\circ \sim 80^\circ$

となって、黄金矩形による螺旋ではない、すなわち、オウムガイには黄金比は潜んでいないのである。このオウムガイと黄金比の関係は、都市伝説のように流布されているが、数学できちんと判断すれば間違っていることがわかる。

[3] 名刺のサイズは黄金比

日本の名刺のサイズは、

$55\text{mm} \times 91\text{mm}$ ， $55 : 91 = 1 : 1.65454545$

であり、黄金比とはちょっと違うのではないか。小数点第 1 位までは同じだけど・・・これも都市伝説かな。

他にも、パルテノン神殿には黄金比があるので美しい、という説が多く語られている。そこで確認してみると、黄金矩形は右図のようになるので、ちょっとこれも無理があると思われる。



世の中で言われていること、ネットで流れている情報を鵜呑みにせず、数学的に論理的に自分の頭で考えることのできる人間になりましょう！

## 2. 黄金比とは？

さて、黄金比に現れる数 1.618 は、黄金数と呼ばれて、正確な値は、

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

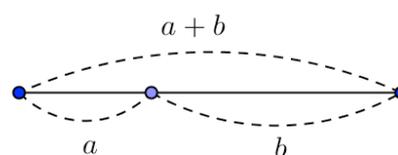
である。この黄金比，黄金数を定義する。

[定義 2] 黄金比

線分を  $a$ ， $b$  の長さで 2 つに分割するとき、

$$a : b = b : (a + b)$$

が成り立つように分割したときの比  $a : b$  を黄金比という。



実際に求めてみる。

$$a : b = b : (a + b) \Leftrightarrow b^2 = a(a + b) \Leftrightarrow b^2 - ab - a^2 = 0$$

両辺を  $a^2 > 0$  で割ると、 $\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0$

よって、 $\frac{b}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\frac{b}{a} > 0 \text{ より, } \frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって, } a : b = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 : \phi$$

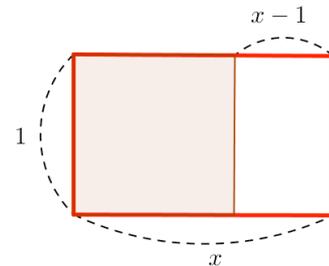
次に、黄金矩形と呼ばれる長方形で定義すると、次のようになる。

[定義 3] 黄金比(黄金矩形)

$x > 1$  のとき、

$$(\text{縦の長さ}) : (\text{横の長さ}) = 1 : x$$

の長方形から、右図のように正方形を取り去った残りの長方形が元の長方形と相似になるとき、 $x$  を黄金比(黄金数)という。また、このような長方形を黄金矩形という。



実際に求めてみる。

$$1 : x = (x-1) : 1 \Leftrightarrow x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{よって, } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x > 0 \text{ より, } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

黄金矩形から取り去る正方形の1辺の長さを半径とする四分の一円を描いてつなげると、先に見た対数螺旋が得られる。

黄金矩形の定義より、残った長方形から正方形を取り去る操作は無限に続けることができる。そして、黄金数  $\phi$  は無理数である。

[問 9]

- (1)  $\sqrt{5}$  が無理数であることを証明せよ。
- (2) 黄金数  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  が無理数であることを証明せよ。

パルテノン神殿は、B.C.447年に建設が始まり、B.C.438年に完工したとされる。この時代の数学者としては、ピタゴラス(B.C.582~B.C.496)がいる。ピタゴラスの定理(三平方の定理)で有名であるが、彼は新興宗教とも言える「ピタゴラス教団」の教祖であった。ピタゴラス教団の教義は、「万物は数である」という教えであったが、当時における数とは有理数のことであった。有理数は分数で表せる数、言い換えるとある単位で計り切ることができる数である。そのような時代に、操作が無限に続く、無理数である  $\phi$  を利用してパルテノン神殿を建てたとは、とても思えない。つまり、世の中のいろいろな所に黄金比が潜んでいるという話は、都市伝説であることが多いのである。

[問 10]

黄金矩形と他の長方形を幾つか並べて見てもらったとき、どの長方形を美しく感じる人が多いか調査して考察してみよ。

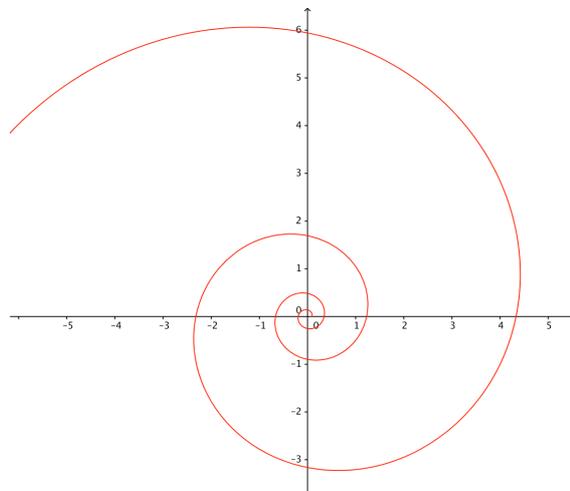
### 3. 螺旋とは？

黄金比のところで登場した**対数螺旋**は、次の極方程式で表される曲線である。

$$r = ae^{b\theta} \dots (**)$$

(a, b は定数で, e は自然対数の底=ネピア数)

例えば, a=0.1, b=0.2 のとき, 対数螺旋 (\*\* ) は, 右図のような螺旋になる。a, b を変化させれば, また違う形になるように思えるが, 自己相似形の曲線である。すなわち, 任意の倍率で拡大した対数螺旋は, 適当な回転によって元の螺旋と一致するという美しい性質を持っている。



また, 対数螺旋は, 極方程式の形を見ればこのような名前と呼ばれるのは当然であるが, 一方で**等角螺旋**とも呼ばれる。

[課題 14]

等角螺旋の名称は, 中心から伸ばした半直線と対数螺旋のなす角が一定であることからきている。このことを証明せよ。

(証明)

極方程式(\*\*)を, 直角座標におけるパラメータ表示に書き換えると,

$$x = r \cos \theta = ae^{b\theta} \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta = ae^{b\theta} \sin \theta$$

よって,

$$\frac{dx}{d\theta} = ae^{b\theta} (b \cos \theta - \sin \theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = ae^{b\theta} (b \sin \theta + \cos \theta)$$

ゆえに, 対数螺旋の点(x, y)における接線方向のベクトルを $\vec{u}$ とおくと,

$$\vec{u} = (b \cos \theta - \sin \theta, b \sin \theta + \cos \theta)$$

また, 半直線方向ベクトルを $\vec{v}$ とおくと,

$$\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

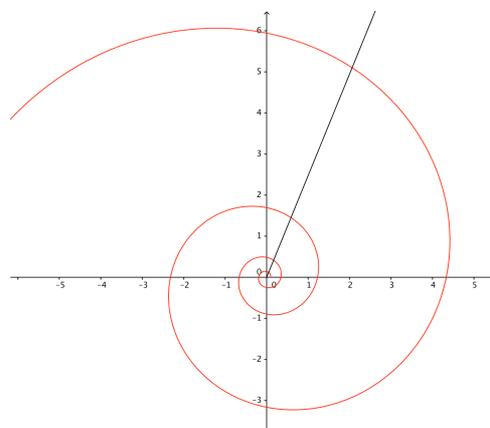
よって,

$$|\vec{u}| = \sqrt{b^2 + 1}, \quad |\vec{v}| = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (b \cos \theta - \sin \theta) \cos \theta + (b \sin \theta + \cos \theta) \sin \theta = b$$

ゆえに, 半直線と対数螺旋のなす角を $\alpha$ とすると,

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} = \text{一定}$$



(Q.E.D.)

対数螺旋には、このような美しい性質が他にもある。

[問 11]

対数螺旋(\*\*)と中心を通る半直線との交点のうち、隣り合う交点については、原点からの距離の比は一定であることを証明し、その一定の値を求めよ。

[問 12]

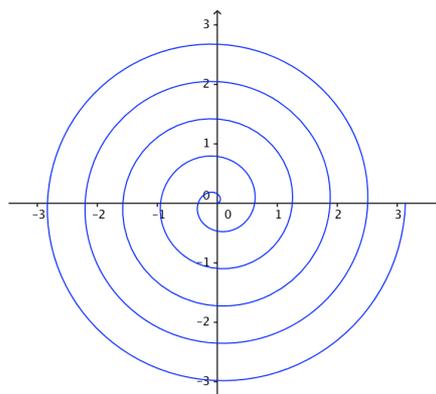
時速 320km もの猛烈な速さで飛ぶハヤブサが、獲物を狙って飛ぶときの飛行曲線は対数螺旋になると言われている。これは、ハヤブサの目は頭の横についているために、正面はよく見えないので、斜めから見て獲物を常に視野に収めて飛ぶからだそうだ。この説が正しいとすれば、ハヤブサの飛行曲線が対数螺旋になる理由を説明せよ。

螺旋には、極方程式

$$r = a \theta \cdots (\star) \quad (a \text{ は定数})$$

で表される螺旋もあり、これをアルキメデスの螺旋という。

例えば、 $a=0.1$  のときのアルキメデスの螺旋は、右図のようになる。



[問 13]

アルキメデスの螺旋(☆)と中心を通る半直線との交点のうち、隣り合う交点については、原点からの距離の差は一定であることを証明し、その一定の値を求めよ。

スイスの数学者・科学者ヤコブ・ベルヌーイ(1654~1705)は、対数螺旋について研究し、その美しい性質に魅了されたので、墓石に対数螺旋を彫ってもらうことを望んだ。しかし、実際には誤ってアルキメデスの螺旋が彫られてしまった・・・



[課題 15]

等角螺旋は、オウムガイのような軟体動物の殻の断面や、動物の角の形によく現れる。その理由について考察せよ。

大きなオウムガイは、小さなオウムガイを相似拡大したものであり、形が変わらない。オウムガイは、大きくなるにつれて大きな部屋を次々に作って住み替えていく。そのときの部屋の条件は、大きさを増しながら一定の形を保つことである。

この条件には円錐形の殻が当てはまり、そのような殻を作る軟体動物もいる。外周全体の成長速度が同じであれば、円錐形になるのである。ところが、オウムガイは片側ともう片側の成長速度が違うために、円錐がねじれて螺旋形になるのである。つまり、オウムガイに幾何学的な見通しがあるとか、遺伝子に対数螺旋が暗号化されている必要はない。

#### 4. フィボナッチ数列とは？

数学は、科学の言語として自然現象等を解明・説明するのに、大いに役立つ。しかし、前節で少し見たように、何でもかんでも数学のせいにする、数学って凄いだろう、的な理解は間違っている。

黄金比の他にもそのような例として、**フィボナッチ数列(フィボナッチ数)**がある。

[定義 4] フィボナッチ数列

次の漸化式で定義される数列をフィボナッチ数列といい、各項の数をフィボナッチ数という。

$$F_1=1, F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

具体的にフィボナッチ数を求めてみると、次のようになる。

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

フィボナッチ(1170 頃～1250 頃)は、本名をレオナルド・ダ・ピサ(ピサのレオナルド)といい、フィボナッチは「ボナッチの息子」という意味である。フィボナッチは、1202 年に『算盤の書』を発行し、その中でウサギのつがいが増えていく問題を作ったが、そこにフィボナッチ数列が現れたのである。

[課題 16]

フィボナッチ数列の一般項を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$  を求めよ。

$$F_1=1, F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \dots \textcircled{1}$$

において、

$$x^2=x+1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

の 2 つの解を  $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$  とすると、

$$\alpha + \beta = 1, \alpha \beta = -1 \quad \left( \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より、

$$F_{n+2} - \alpha F_{n+1} = \beta (F_{n+1} - \alpha F_n)$$

よって、

$$F_{n+1} - \alpha F_n = (F_2 - \alpha F_1) \beta^{n-1} = \beta^{n-1} \dots \textcircled{2}$$

同様にして、

$$F_{n+1} - \beta F_n = (F_2 - \beta F_1) \alpha^{n-1} = \alpha^{n-1} \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3} - \textcircled{2}$ より、

$$(\alpha - \beta) F_n = \alpha^n - \beta^n$$

ゆえに、

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \dots \textcircled{4}$$

また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - \beta \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1)$$

さて、フィボナッチ数列の一般項④は、無理数の  $n$  乗の数で表されているが、計算の結果出てくる各項は整数である。ちょっと不思議な感じがする。

また、フィボナッチ数列の隣り合った項の比は、黄金数  $\phi$  に収束する！この結果もあって、次節で見るようにフィボナッチ数を特別な数とみなす「風潮」がある。

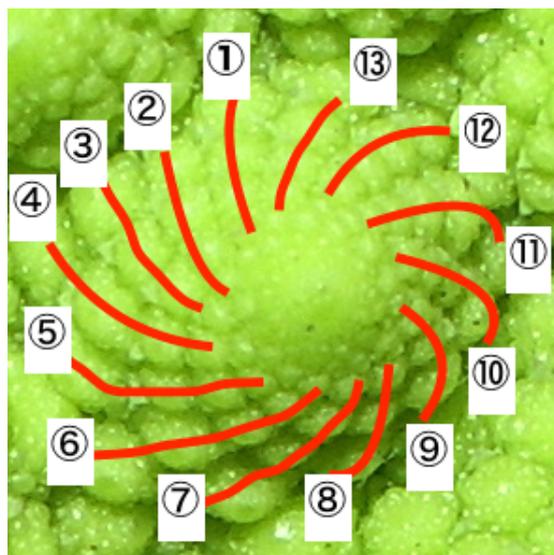
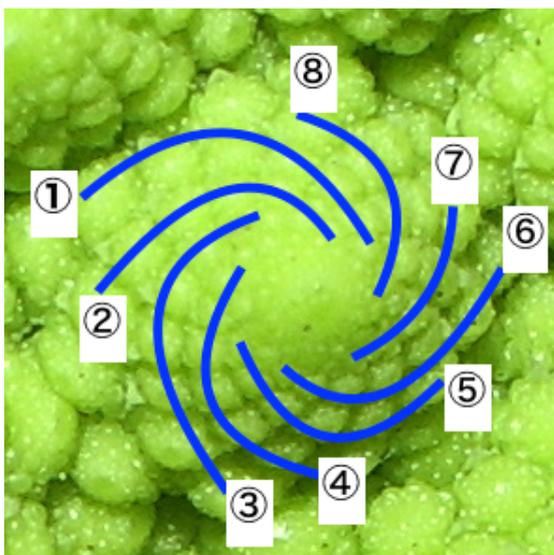
## 5. フィボナッチと螺旋と葉序の関係は？

右の野菜は、カリフラワーの仲間のロマネスコである。このロマネスコは、見ての通りフラクタル構造(自己相似構造)がはっきりと見える、美しい(?)野菜である。



これだけでも、数学的に素晴らしい野菜であるが、その一部を拡大すると、今度は右回りと左回りの螺旋がくっきりと見えてくる。またまた数学的な構造を持っているというわけだ。

その本数を数えると、8本と13本となる。なんと、これは、隣り合ったフィボナッチ数ではないか！



一般に、花の花弁の数は 3, 5, 8 が多いと言われ、これらもすべてフィボナッチ数である。また、パイナップルや松ぼっくりなどは螺旋を数えられる実を持つが、これらの螺旋の数もほとんど 5, 8, 13 だと言われる。自然は、フィボナッチ数に支配されているのか？

[課題 17]

植物の 80%では、茎についた葉の列は螺旋を描く。葉はそれぞれすぐ下の葉と一定の角度だけずれた所についている。このずれる角度は、多くの種において概ね  $137.5^\circ$  であることが多い。この角度は一体、どこから現れたのだろうか？

定義 2 で、黄金比を線分の比で定義した。そのアナロジーで、円を分割する。すなわち、右図のように、

$$(\text{短い円弧}) : (\text{長い円弧}) = (\text{長い円弧}) : (\text{円周})$$

を満たすように分割したときの、短い円弧に対する中心角を  $\theta$  とすると、

$$a : b = b : (a + b)$$

これはどこかで見たような・・・， そう， 黄金分割である。ゆえに、

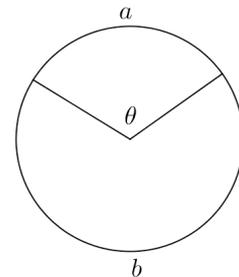
$$a : b = 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

より、

$$\theta = 360^\circ \times \frac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = 360^\circ \times \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = 137.5077 \dots^\circ$$

と、  $137.5^\circ$  が現れる。この中心角  $\theta = 137.5^\circ$  を、 **黄金角** という。

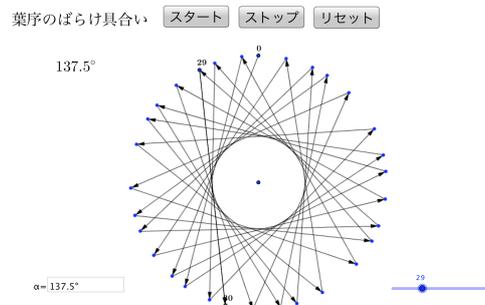
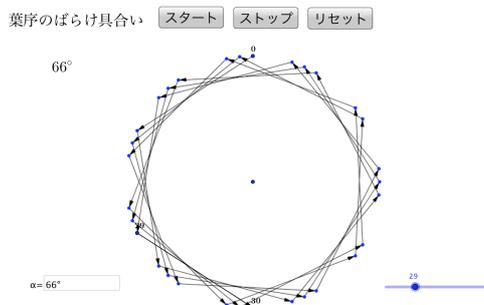
またまた現れた黄金比， そして黄金比に分割された黄金角， これは本当に特別な角度なのだろうか？



[課題 18]

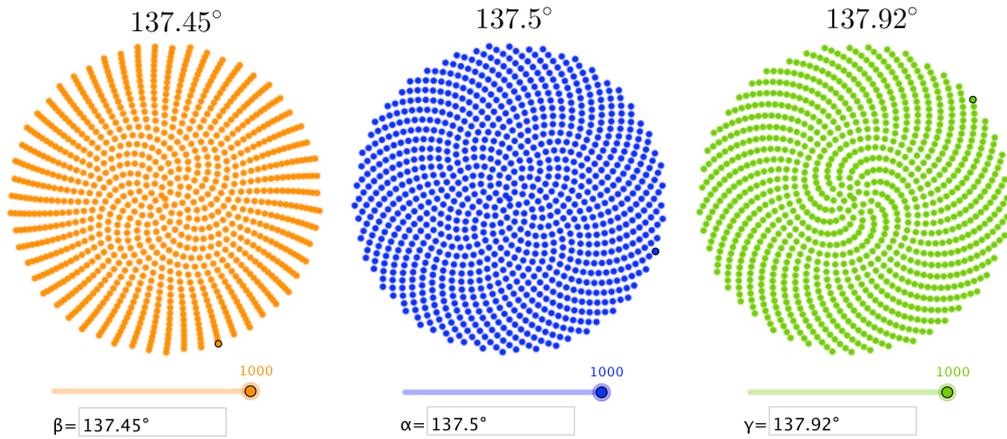
GeoGebra のファイルを利用して、葉序や小花の詰め込みのシミュレーションを行い、黄金角について考察せよ。

シミュレーションの結果は、次のようになり、黄金角の「神秘性」「偉大さ」が確認できたように思えるが・・・



葉序の螺旋

スタート    ストップ    リセット



多くの本やネット上では「以上のようなことから、フィボナッチ数・黄金角の葉序は植物に有利であり、進化の過程でそれを選択した植物が生き残ったのである。なんと素晴らしい！」と解説してある。そして、それを読んで「凄い！ 自然は素晴らしい！」と感激、納得するのである・・・

しかし、これで本当に理解できたのだろうか？

確かに黄金角であれば、葉序は植物に有利そうだ

しかし、その中途半端な  $137.5077\dots^\circ$  を決める原理は何なのだ？

隣り合った葉の原基(葉になる細胞)が、なぜ黄金角だけずれるのか？

それは少しも説明できていないではないか！

ということで、もっと科学的な説明・解明が必要なのである。数学的な操作はしているが、自分の思い込みや思い入れで、自然の中に現れる黄金比、フィボナッチ数を賞賛するのは、数学を科学の言語として理解しているとは言えない。

葉序については、大阪大学の近藤滋先生が、次のような概略の仮説を唱えられている。

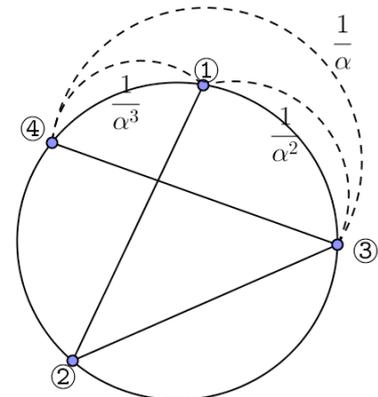
まず、葉の原基の形成には、一定濃度以上のオーキシンという植物ホルモンが必要である。古い原基はオーキシンを吸収する(阻害的に働く)ので、新しい原基は古い原基からできるだけ遠くにできる。そこで、次の2つの仮定を立てる。

[1] 1つ前の原基の阻害効果は、一定の比率で減衰する

(ただし、4個以上古いものは無視する)

[2] 原基からの阻害効果は、距離に反比例する  
以上を図示すると、右図のようになる。

ここで、 $\alpha$  は減衰率である。



[問 14]

近藤先生の仮説に従えば、 $\alpha = \phi$  となることを示せ。

【参考文献】

- P.J.ナーイン(訳：細川尋史)(2010) 『最大値と最小値の数学(上)(下)』 シュプリンガー・ジャパン
- 近藤滋(2013) 『波紋と螺旋とフィボナッチ』 秀潤社
- フィリップ・ボール(訳：林大)(2011) 『かたち』 早川書房
- Stefan Hildebrandt, Anthony Tromba(訳：小川泰 他) (1994) 『形の法則』 東京化学同人





GeoGebra の表計算機能を利用して、①人工乱数、②サイコロ乱数、③コンピュータの生成した乱数について、ゆらぎの平均値を求めてみよう。

	数字	1	2	3	4	5	6
①	回数						
	ゆらぎ						
	ゆらぎの平均値は						
②	回数						
	ゆらぎ						
	ゆらぎの平均値は						
③	回数						
	ゆらぎ						
	ゆらぎの平均値は						

### 実験3

①GeoGebra の表計算機能を用いて、1 から 6 までの数字からなる 300 個の乱数を生成し、それぞれの数字が何回現れたかを数えて記録し、ゆらぎとゆらぎの平均値を計算してみよう。

数字	1	2	3	4	5	6
回数						
ゆらぎ						
ゆらぎの平均値は						

②さらに 300 個の乱数を生成し、合計 600 回のうち、それぞれの数字が何回現れたかを数えて記録し、ゆらぎとゆらぎの平均値を計算してみよう。

数字	1	2	3	4	5	6
回数						
ゆらぎ						
ゆらぎの平均値は						

※GeoGebra の表計算機能の他に、Excel を用いてもよい。

## ■ 数学的考察

一般に、いくつかの数字を、そのすべてが同じ確率で現れるように乱雑に並べた数字の列のことを**乱数**といいます。

**実験1**では、人工乱数が実は乱数になりにくいことを実感するとともに、ゼロ目や3回のゼロ目がそれぞれ10回、3~4回程度起こり得ることを再確認してほしいという意図で行いました。たと

えば、ゼロ目ができる確率は $\frac{1}{6}$ 、3個のゼロ目ができる確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$ であることから直ち

にわかります。

**実験2**では、ゆらぎという考え方を紹介しました。サイコロの1つの目が出る確率は $\frac{1}{6}$ ですから、60個の乱数の中には1から6の数字がそれぞれ10回ずつ現れることが期待できます。その期待される回数(この場合10回)と実際の回数の差の絶対値がゆらぎです。

また、「ゆらぎの平均値」とは、期待される回数を平均値とみたとき、それぞれの数字が表れる回数の平均値は $\sqrt{N}$ 程度になることが知られています。

つまり、期待される回数(つまり平均値)  $N$  に対するゆらぎの割合は、 $\frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$  となるため、期待される回数が大きくなるにつれて、ゆらぎの割合は0に近づいていきます。

このように、が大きくなるにつれてゆらぎが小さくなることから、サイコロを振る回数をどんどん増やしていけば、次第にそれぞれの目が出る確率は $\frac{1}{6}$ に近づいていくことになります。

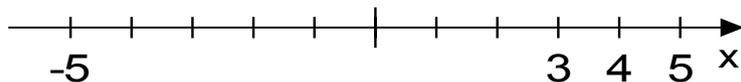
つまり、この**実験2**は「 $\frac{1}{6}$ 」を確認するための実験だったといえるのです。

## 3. 酔っぱらいを数学で観察する

さて、街で見かける「デタラメ」な様子といえば、酔っぱらいのお父さんが千鳥足でふらふらと歩いている場面もその1つといえます。お酒を飲んですっかり上機嫌のお父さんは、鞆を抱えて右にフラフラ、左にフラフラまっすぐ歩くことができません。そんな酔っぱらいの歩くさまも、乱数を用いて「デタラメ」を捉えることにより、数学的な法則性が見えてきます。

### **実験4**

①はじめに数直線上の原点  $O$  にいる酔っぱらいが数直線上を移動します。サイコロを振って、1, 2, 3の目が出たら右に1歩(+1)、4, 5, 6の目が出たら左に1歩(-1)動きます。この酔っぱらいが100歩歩くとどこにたどり着くか考えてみましょう。



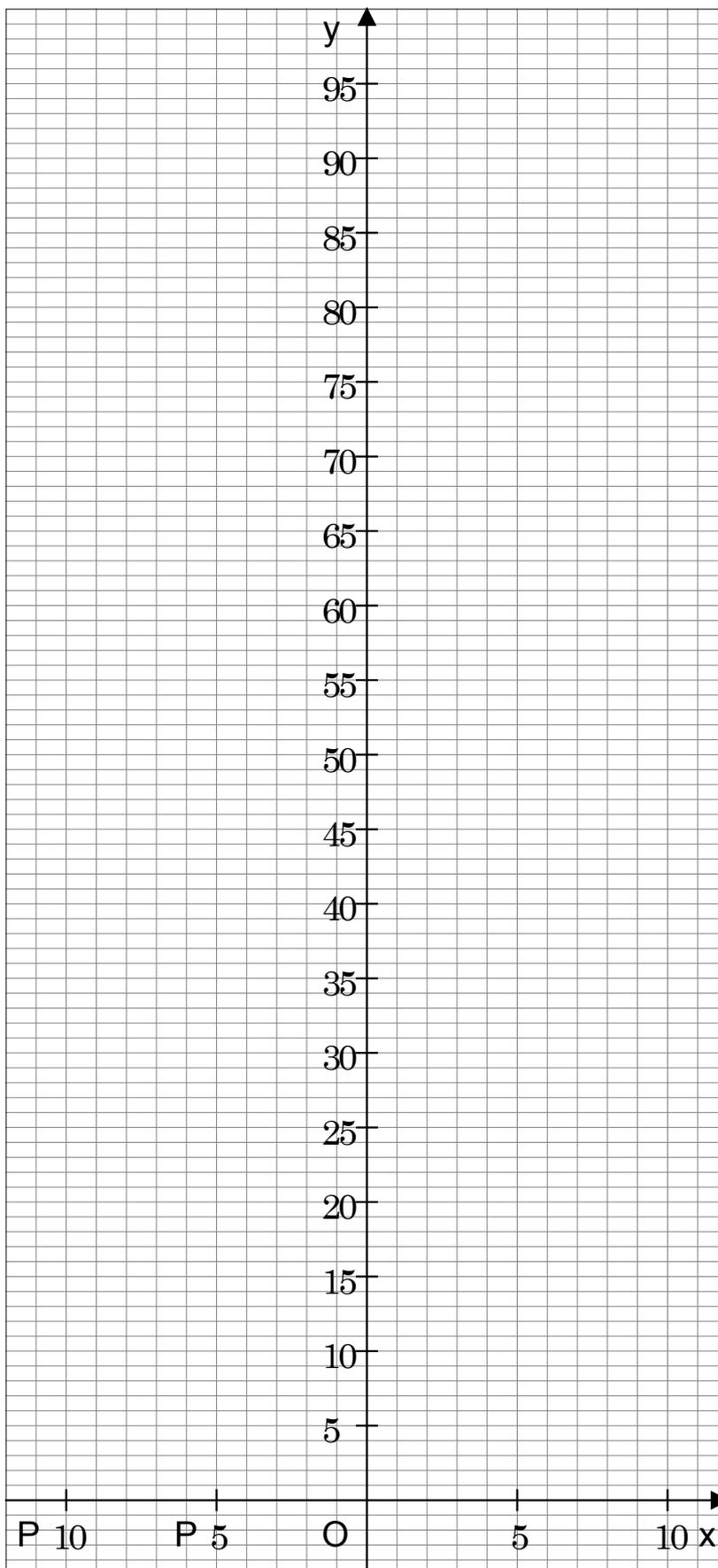
②サイコロの代わりに、Geogebra の表計算機能を用いて、1 から 6 までの数字からなる 100 個の乱数を生成して、1 歩ずつ酔っばらいの動く様子を表してみましょう。

※右図の  $x$  軸が数直線を表していて、 $y$  軸が回数(歩数)を示しています。

③酔っばらいの動きには規則性があるのでしょうか。考えてみましょう。

④次の歩数の場合の酔っばらいの位置( $x$  の値)を記録しておきましょう。

歩数	位置

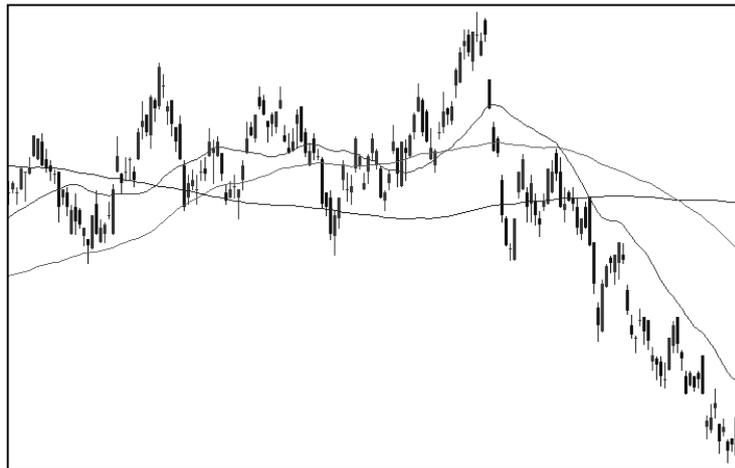
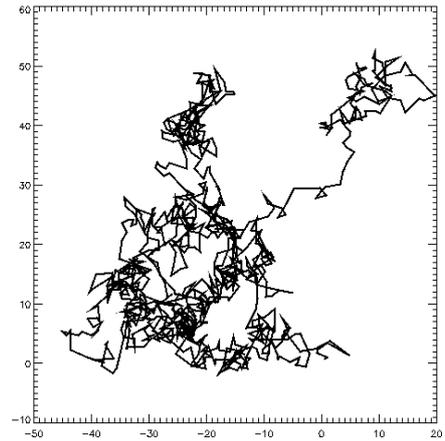


## ■ 数学的考察

**実験 4** の酔っばらいのように、物体(人や粒子など)が時間とともに移動する事象において、移動する方向(および距離)が確率とともに与えられており、時間とともにその動きを変えるような運動を「**ランダムウォーク**」といいます。特に**実験 4** では、直線上を移動するので、**1次元ランダムウォーク**、または**直線上のランダムウォーク**といいます。また、酔っばらいの移動に例えられるため、1次元ランダムウォークの問題を「**酔歩問題**」とよぶこともあります。

ランダムウォークは、もともと「**ブラウン運動**」(水に浮かぶ花粉の不規則な運動)をモデル化したものであり、情報の伝達や物質の流れの解析にも応用されています。

ランダムウォークが現れる現象は自然や社会にも非常に多く、気体分子の運動や株価、為替相場の変動などが挙げられます(詳しくは後述します)。



1次元ランダムウォークの例として、「**ギャンブラーの破産問題**」とよばれるものがあります。

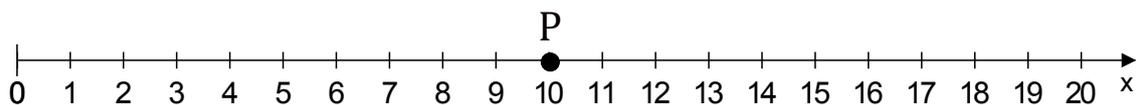
## **実験 5**

① 2人のギャンブラーAとBが10枚ずつコインをもっています。1枚のコインを投げ、表が出たらAはBにコインを1枚渡します。裏が出たらBがAにコインを1枚渡します。これを繰り返して、どちらかのコインがなくなったら終了です。

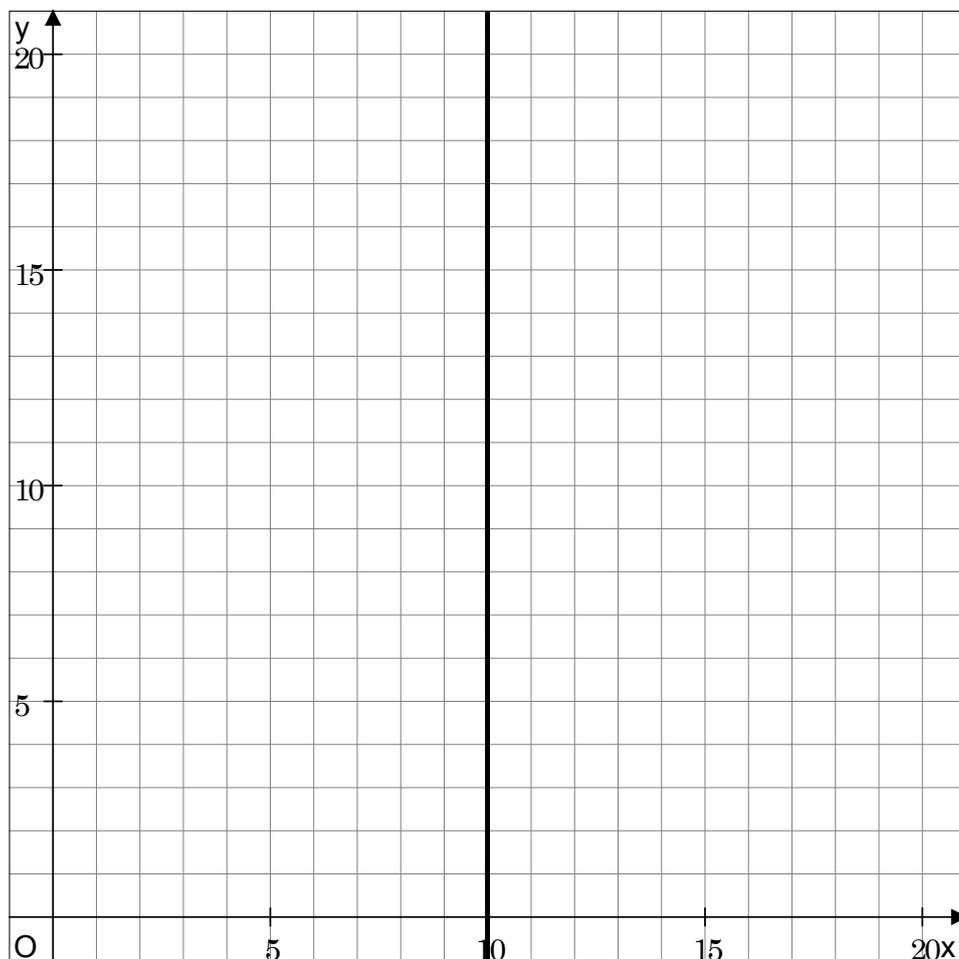
② ①の設定をランダムウォークで考えてみよう。いま、Aの持っているコインの枚数を数直線上の動点Pとして表すことにすると、点Pははじめに \_\_\_\_\_ の位置にあり、

- コインが表のとき、動点Pは \_\_\_\_\_
- コインが裏のとき、動点Pは \_\_\_\_\_
- 動点Pが0の位置にくると、 \_\_\_\_\_
- 動点Pが20の位置にくると、 \_\_\_\_\_





③20回まで繰り返してみましょう。途中でどちらかが破産すれば終了です。20回までにどちらとも破産しない場合は、20回終了時のAの持ち金を記録しましょう。



■数学的考察

**実験4**と**実験5**では、ともに1次元ランダムウォークの問題です。これらの実験から、1次元ランダムウォークでは、移動(試行)回数を $n$ とすると、移動距離は $\sqrt{n}$ に近いことに気がきます。この理由も「ゆらぎ」の考え方で説明することができます。

いま、+1進む確率と-1進む確率が等しいので、 $n$ 回のうち、 $\frac{n}{2}$ 回が右へ進み、 $\frac{n}{2}$ 回が左へ進むことが期待できます。ところが、「デタラメ」に移動しているので、左右の進む回数にゆらぎが

生じます。先程も述べたように、そのゆらぎの平均値は $\sqrt{\frac{n}{2}}$ です。ここで、左に進む回数が多い

と、右へ進む回数が少なくなるため、このゆらぎは2倍となり、動点が進む距離は $\sqrt{\frac{n}{2}} \times 2 = \sqrt{2n}$ と

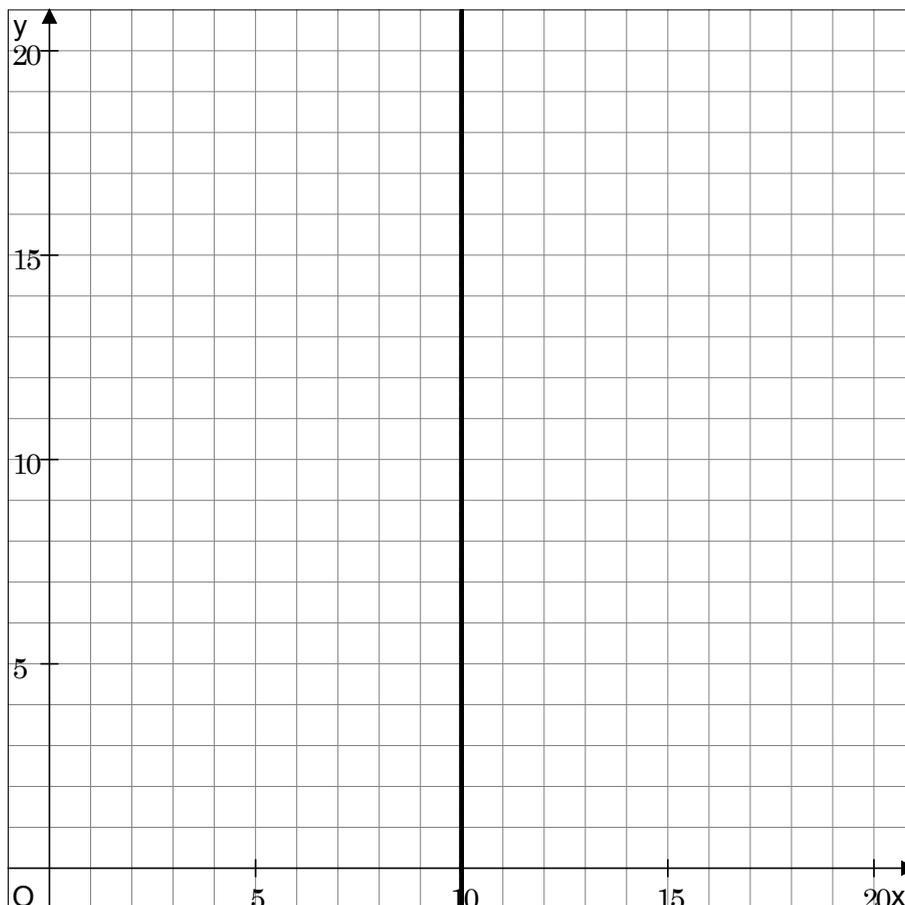
なります。 $\sqrt{2} \div 1.414$ より、ほぼ $\sqrt{n}$ に近くなるというわけです。

### 実験6

**実験5**において、AとBのはじめの所持金と1回のコインの移動する確率(賭けの勝率)を変えてみましょう。

①2人のギャンブラーAが5枚、Bが10枚のコインをそれぞれもっています。サイコロを1個投げ、5以上の目が出たらAはBにコインを1枚渡します。4以下の目が出たらBがAにコインを1枚渡します。これを繰り返し、どちらかのコインがなくなったら終了です。

②①の状況を、ランダムウォークを用いて20回まで繰り返してみましょう。途中でどちらかが破産すれば終了です。20回までにどちらも破産しない場合は、20回終了時のAの持ち金を記録しましょう。



■ 数学的考察

**実験6**では、**実験5**のときと比べて、はじめの所持金額とコインの移動確率を変えてみました。一般に、ギャンブラーの破産問題について、次の事実が知られています。

- ・ギャンブラーAのはじめの所持金が  $a$  で、1回の賭けにおける勝率が  $p$  ,
  - ・ギャンブラーBのはじめの所持金が  $b$  で、1回の賭けにおける勝率が  $1-p (=q)$
- とすると、AがBを破産させる確率は、どちらかが破産するまで繰り返した場合、

$$\frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}} \quad \left(p \neq \frac{1}{2} \text{のとき}\right), \quad \frac{a}{a+b} \quad \left(p = \frac{1}{2} \text{のとき}\right)$$

で与えられます。

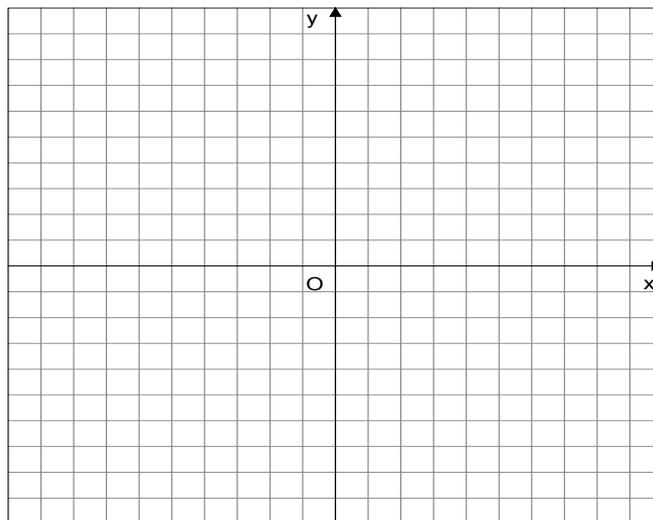
ランダムウォークにおいて、ギャンブラーの破産問題ではどちらかが破産すると終了となります。これを「**吸着**」といいます。また、酔歩問題で一方を壁にしてそれ以上進めないようにすると、壁に当たって戻ってきます。これを「**反射**」といいます。また、ある位置に達すると留まるという状態の「**滞留**」も起こり得ます。これらはランダムウォークの「**境界条件**」といわれる重要な条件なのです。

#### 4.2 次元ランダムウォーク

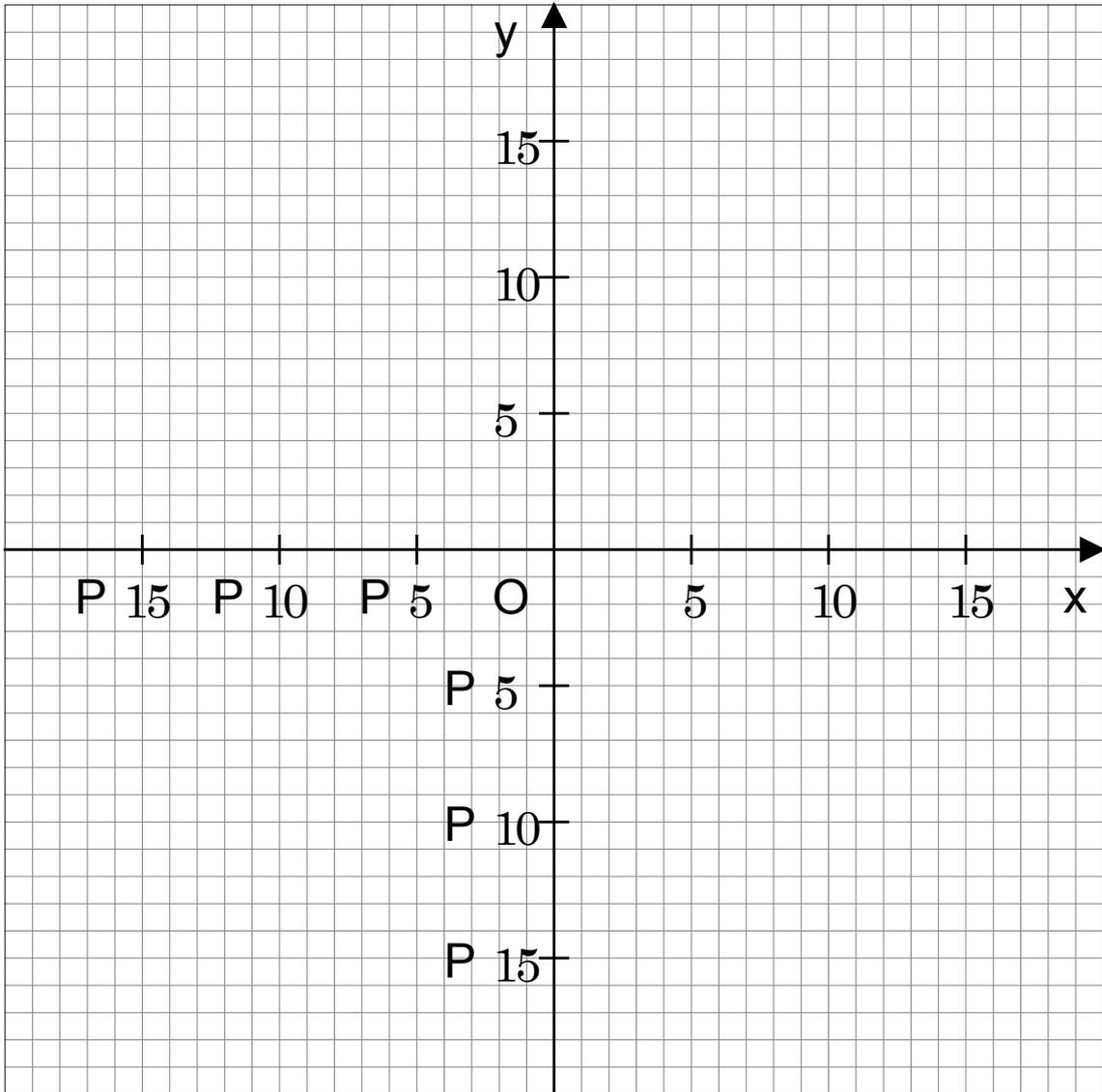
京都の街はまるで碁盤の目のように町が分けられています。京都の街を歩く酔っぱらいはまるで座標平面上をウロウロ回っているかのようです。

**実験7**

- ①はじめに座標平面上の原点  $O$  にいる酔っぱらいが座標平面上を移動します。1から4までの乱数をつくり、1が出たら右に1歩、2が出たら左に1歩、3が出たら上に1歩、4が出たら下に1歩動きます。この酔っぱらいは40歩歩くとどこにたどり着くか考えてみましょう。



②サイコロの代わりに、Geogebra の表計算機能を用いて、1 から 4 までの数字からなる 40 個の乱数を生成して、1 歩ずつ酔っばらいの動く様子を表してみましょう。



③酔っばらいの動きには規則性があるのでしょうか。考えてみましょう。

④次の歩数の場合の酔っばらいの位置(座標)を記録しておきましょう。また、原点からその点までの距離を求めましょう。

歩数						
位置						
距離						

## ■数学的考察

**実験7**では、2次元ランダムウォークの問題です。これらの実験から、2次元ランダムウォークでは、移動(試行)回数を $n$ とすると、原点から動点Pまでの距離は $\sqrt{2n}$ に近いことに気がきます。この理由も「ゆらぎ」の考え方で説明することができます。

いま、 $n$ 回の移動のうち、 $\frac{n}{2}$ 回が左右へ進み、 $\frac{n}{2}$ 回が上下へ進むことが期待できます。「デタラメ」に移動しているので、左右の進む回数にゆらぎが生じます。1次元のランダムウォークで説明したように、左右の移動のゆらぎの平均値は $\sqrt{2 \times \frac{n}{2}} = \sqrt{n}$ です。つまり、左右の移動分はほぼ $\sqrt{n}$ に近くなります。また、上下の移動についても、左右の移動とまったく同じことがいえて、上下の移動分も $\sqrt{n}$ に近くなります。このとき三平方の定理から、原点から動点までの距離は $\sqrt{2n}$ に近くなります。

## 5. ゆらぎとランダムウォークの応用例

ゆらぎの応用としては誤差評価などが、ランダムウォークの応用例としては、ブラウン運動のシミュレーション、粒子の運動のシミュレーション、うわさ話の伝播、感染症の伝播、株価の変動などが挙げられます。それぞれ1つずつ紹介しておきましょう。

### ①ゆらぎの応用「誤差評価」

実験において、測定は重要な要素です。より正確に測定することにより、現象を正しく捉えることができます。しかし、測定には人間がコントロールすることが難しい誤差が生じてしまいます。室内温度、測定器具のガタツキ、人の動きによる空気の流れ、車の通る振動などさまざまな要因が考えられます。これらの要因による誤差を排除するためには、何度も繰り返し測定することが必要になります。

例えば、重さが $W$ である物体の重さを測定するとき、測定値の誤差 $\Delta W$ が生じるとします。つまり、測定の度に測定結果は $W + \Delta W$ あるいは $W - \Delta W$ となります。測定を $n$ 回行った場合、 $+\Delta W$ の誤差と $-\Delta W$ の誤差の生じる回数は半分ずつではなく、一方がゆらぎのため $\sqrt{n}$ 程度多くなります。 $+\Delta W$ の誤差の方が $\sqrt{n}$ 回多く生じたとすると、 $n$ 回の測定結果の平均は

$$\frac{nW + \sqrt{n}\Delta W}{n} = W + \frac{\Delta W}{\sqrt{n}}$$

となります。したがって、 $n$ 回の測定結果の平均値は、 $\frac{\Delta W}{\sqrt{n}}$ だけ大きくなります。同様に、 $-\Delta W$

の誤差の方が $\sqrt{n}$ 回多く生じたとすると、 $n$ 回の測定結果の平均は $\frac{\Delta W}{\sqrt{n}}$ だけ小さくなります。

どちらにせよ、測定回数 $n$ が多いほどずれが小さくなり、正確な測定値に近づきます。

## ② ランダムウォークの応用「粒子の運動のシミュレーション」

空気中に分散する PM2.5 のような微小なちりや車の排気ガスから排出される窒素化合物などの分子は、空気中の分子と衝突を繰り返しながら、絶えず乱雑に運動しています。つまり、空気中でランダムウォークをしていると考えられます。

ランダムウォークをする回数 $n$ は時間 $t$ に比例するため、 $n = pt$  ( $p$ は温度が高いと大きくなります)とかけます。このとき、微小物質がもとの位置から移動した距離は、

$$\sqrt{2n} = \sqrt{2at}$$

となります。したがって、微小物質がもとの位置から移動した距離は $\sqrt{t}$ に比例します。つまり、時間の経過とともに長くなります。微小物質が移動する方向は空間内の全方向であるから、微小物質のランダムウォークは、球形領域に広がり、球の半径が $\sqrt{t}$ に比例して大きくなるのがわかります。このようにして、微小物質や分子の分布が広がっていく様子を「拡散」といいます。

### ■ 参考文献、参考 HP

- [1] 「楽しい数理実験」、高木隆司、講談社
- [2] 「ランダムウォークの話」、深川久

## 6. 課題 I

- [1] 座標平面上の原点  $O$  に動点  $P$  があります。0 から 9 までのカードから 1 枚選び、1, 2 なら左に、3, 4 なら下に、5, 6 なら右に、7, 8 なら上にそれぞれ 1 だけ移動します。9, 0 のときは立ち止まります。この操作を 50 回繰り返すときの動点  $P$  の位置をシミュレーションしましょう。
- [2] 2 人のギャンブラー  $A, B$  がいます。はじめの所持金は  $A$  が \$8,  $B$  が \$12 であり、1 回あたりの賭けの勝率は  $A$  が 70%,  $B$  が 30% です。
  - (1) 5 回賭けを行うとき、 $A$  の所持金がいくらになっている確率が高いでしょうか。計算してみましょう。
  - (2) (1) の 5 回勝負を 5 回繰り返します。乱数を用いたシミュレーションを行い、(1) の結果と比較してみましょう。

## 科学の言語としての数学 「実験する数学」(第8回)

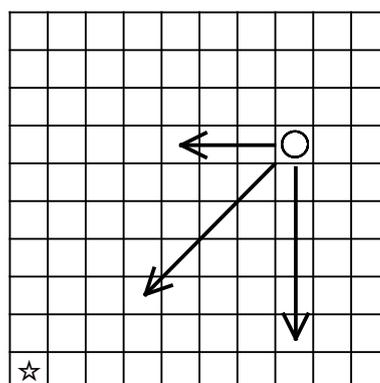
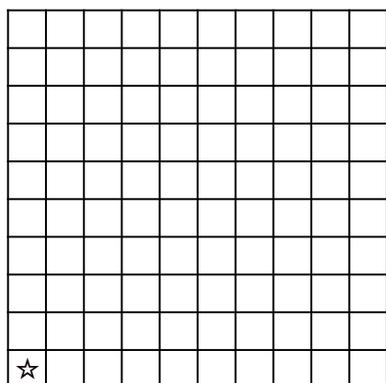
担当 川口 慎二(附属中等教育学校)

### 7. ゲームに潜んでいる数学

今回は、ゲームの必勝法に関する考察をしてみましょう。数学とどんな関係があるのでしょうか。

#### 実験8

- ①10×10の盤と駒1個を用意します。
- ②先攻と後攻を決め、先攻は盤の網掛けの部分のどこかに、駒を置きます。
- ③後攻は先攻の置いた位置から、左、左斜め下、下のいずれかの方向に好きなだけ駒を動かすことができます。
- ④これを先攻と後攻が繰り返し、先に☆のついたマスに駒を置くことができた方の勝ちとします。



- ⑤まずは、何回か実際に対戦してみましょう。先攻と後攻を交代したり、相手を変えたりしてみましょう。このとき、先攻と後攻のどちらが勝ちやすいのでしょうか。

【予想】 のほうが勝ちやすい。

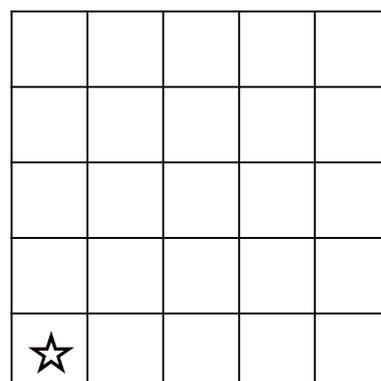
#### ■数学的考察

ここでは、**実験8**で行ったゲームの必勝法を考察してみることにしましょう。

そこで、はじめに、盤のマス目を少なくして考えてみることにします。5×5の盤で考えてみます。

最短で 手、最長で 手でゲームは終わります。

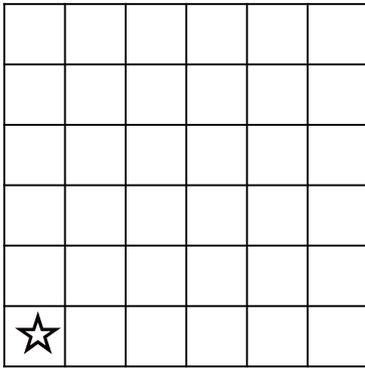
あなたが先攻であるとして、まず、×の位置には駒を置いてはいけません。



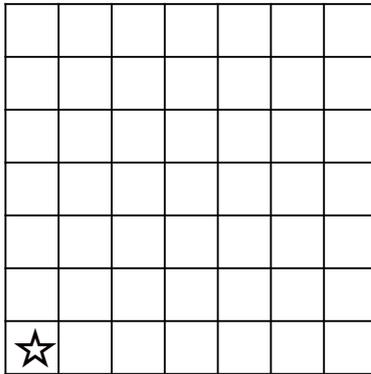
実験9

①マス目の数を1つずつ増やして、先攻の必勝法の有無を調べてみましょう。

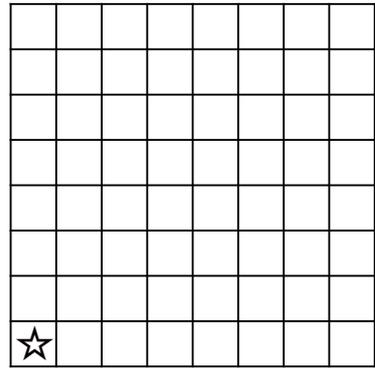
6×6



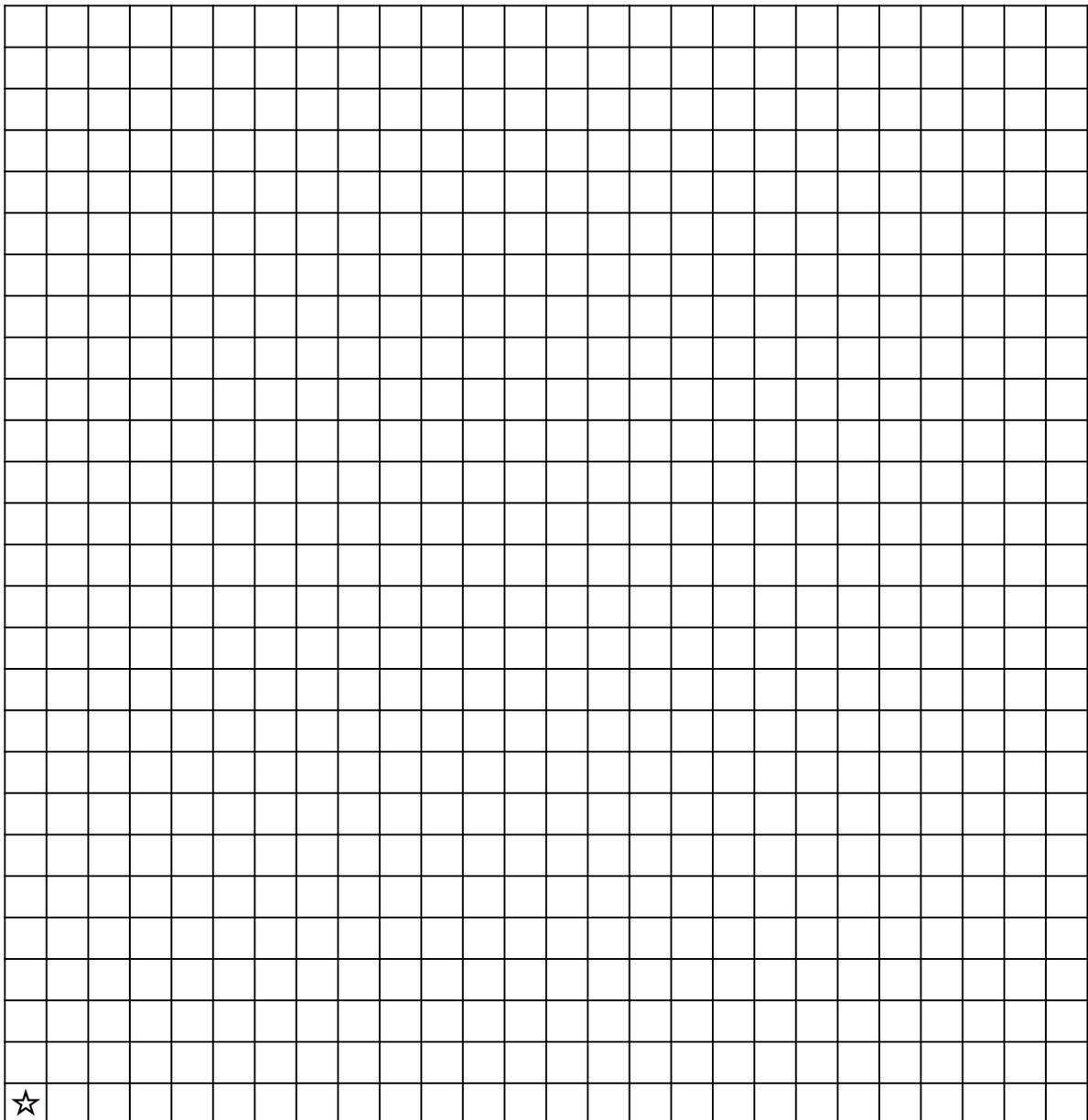
7×7



8×8



②①を調べてみると、より効率的な方法に気がきます。下の盤は27×27です。



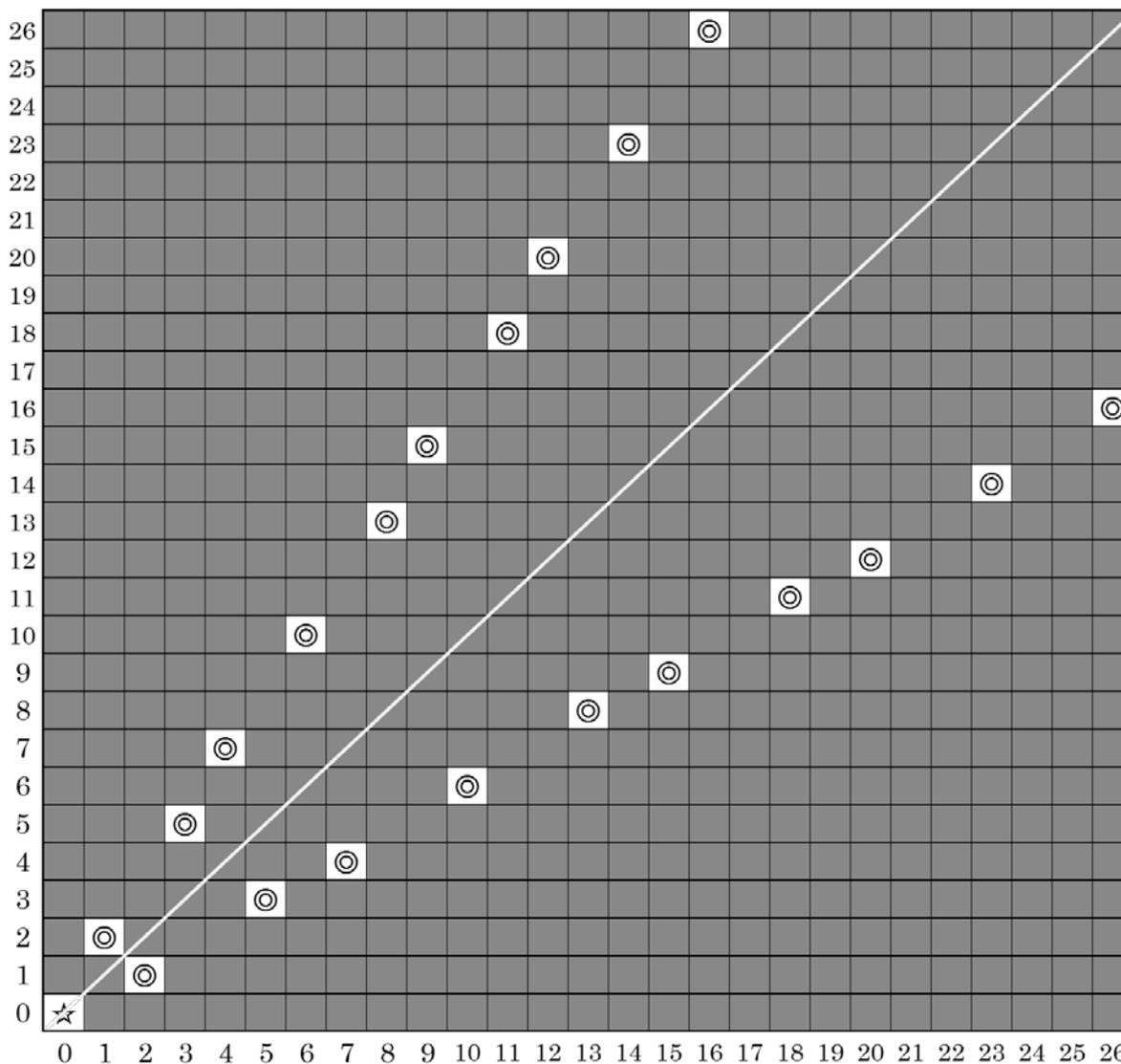
③先攻に必勝法がある盤の一边のマス目の数  $n$  は

$$n =$$

であることがわかります。

■数学的考察

【実験9】から、盤の一边のマス目に応じて、先攻に必勝法がある場合と、必ず後攻が勝つ場合に分かれることがわかりました。さらに、図の◎の位置に先攻が駒を置くことができれば、後攻に☆へ駒を進められる心配がなく安全です。そこで、◎の入っているマスを**安全位置**と呼ぶことにします。



実際に、先攻が安全位置◎を押さえながら駒を進めると、後攻は☆にたどり着くことができず、先攻の勝ちとなることが確認できます。

つまり、◎が盤の上辺と右辺に現れない場合に先攻は必ず負けます。逆に、盤の上辺または右辺に安全位置◎が現れる場合、先攻に必勝法があることになります。

数学的な議論のために、マス目の左下の角のマスを基準として、盤の下辺と左辺に 0 から番号を振ります。すると、盤上のマス目は座標のように  $(m, n)$  と 0 以上の整数の組で表すことができます。囲碁や将棋と同じ感じですね。このとき、安全位置についてわかることがいくつかあります。

**①各列に安全位置は**

【理由】

**②各列に安全位置は**

【理由】

**③安全位置は盤の対角線上にはなく、盤の対角線について**

【理由】

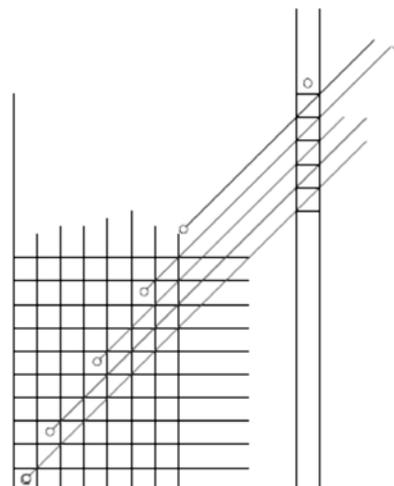
そこで、盤の対角線の上側のみを考えて、組の前の数字が小さい方から  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$  とすると、下表のようになります。

[表 1]

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_j$										
$y_j$										

**④各  $j = 1, 2, 3, \dots$  について、  $y_j =$**

【理由】



[表 1]はこれらの規則①～④により、埋まります。しかも、

[表 1]には

ことに気付いたでしょうか。

### ■数学的背景

上の事実には、次の定理があります。

#### 定理

$\alpha, \beta$ は無理数であり、 $\alpha, \beta > 1$  かつ  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ が成り立つとする。

このとき、数列

$$[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \dots, [n\alpha], \dots, \quad [\beta], [2\beta], [3\beta], \dots, [n\beta], \dots,$$

の中には、すべてに自然数が1回ずつ現れる。

では、今回のゲームの場合、上述の定理の $\alpha, \beta$ に相当する無理数とは何でしょうか。実は

が関係しているのです。

いま、 $\alpha = \phi, \beta = \phi^2$  とすると、定理の条件を満たしています。[表 1]では、

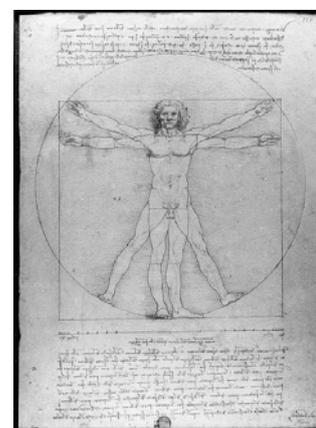
$$x_j = \quad , \quad y_j =$$

という数列ができていることになります。

#### 【参考】黄金比

あなたが「美しい」と思うのは、一体何を見たときでしょうか。美術館の絵画を見たとき、山の頂から登る朝日を見たとき、紺碧の空の下で鮮やかなコバルトブルーの海をみたときなど、人それぞれ「美しい」と感じるものは異なります。人々が感じる「美しさ」の中には共通性を数学的に捉えようとして考えられてきたのが「黄金比」ともいえます。

右図は、イタリアのルネサンス期を代表する科学者、芸術家そして発明家として有名なレオナルド・ダ・ヴィンチ(Leonardo da Vinci, 1452–1519)による「ウィトルウィウスの人体図」と呼ばれる作品です。1490年頃のダ・ヴィンチのノート「プロポーションの法則」のなかに現れます。古代ローマ時代の建築家ウィトルウィウスは、紀元前1世紀に人体の比率をもとに独自の建築理論を作り上げました。その著



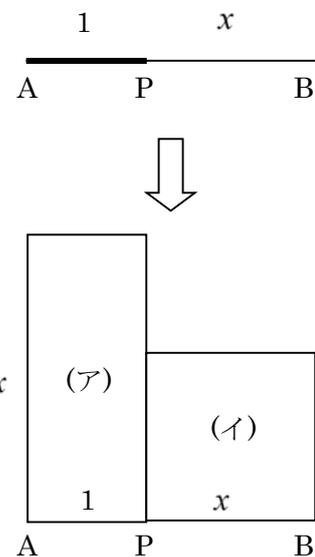
者「建築十書」にある「人体は円と正方形に内接する」という記述を表したものであり、映画「ダ・ヴィンチコード」の中にも登場し、イタリアの1ユーロ硬貨のデザインにも用いられている図として有名です。

ダ・ヴィンチは、絵画、彫刻、建築、土木、機械、解剖学など幅広い分野で業績を残し、「万能人(uomo universale)」と呼ばれる人物です。絵画では、「最後の晩餐」や「モナ・リザ」などの作品で、建築では橋の設計、発明では機関銃や潜水艦、自動車や飛行機などの機構で有名です。数学の分野では、ダ・ヴィンチは「黄金比」を発見したことで有名であり、実際に、「ウィトルウィウスの人体図」にも黄金比は隠されています。

ユークリッドの著書「原論」の中には、次のような命題があります。

線分を2つに分けなさい。小さい部分と全体でできる長方形と大きい部分でできる正方形の面積が等しいとき、小さい部分と大きい部分の比を求めよ。

いま、長さが1である線分 AB があります。上の命題にあるように、この線分を大小2つの部分 AP と PB に分け、 $AP=1$ ,  $BP=x$  としましょう。命題の条件から、横が1、縦が全体(=1+x)の長方形(ア)と一辺がxである正方形(イ)の面積が等しいので、 $1+x=x^2$  という関係式が成立し、この2次方程式を解くと、 $1 < x$  であるから、 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  を得ます。したがって、小さい部分と大きい部分の比は  $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  であり、この比を**黄金比**(golden ratio)といいます。 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803\dots$  ですが、およそその値として、黄金比は5:8と計算される場合もあります。

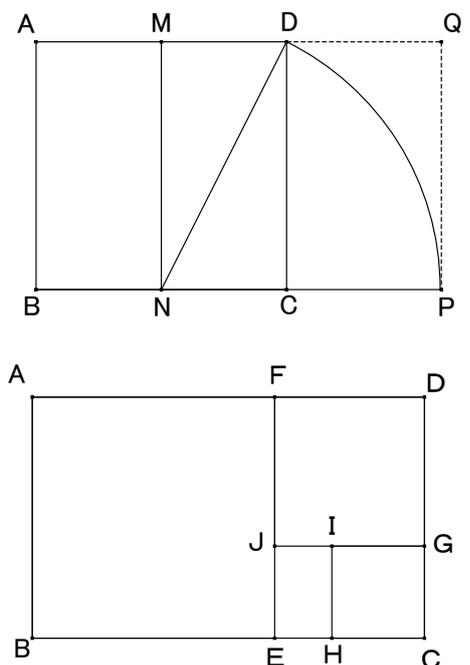


黄金比は次のような作図により得られます。

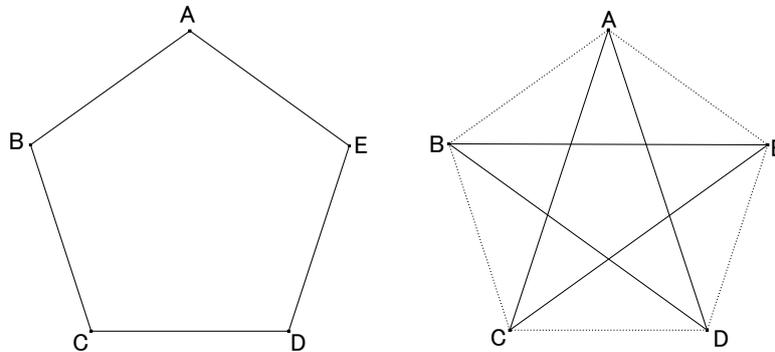
- ①正方形 ABCD をかき、辺 AD, BC の中点を M, N とします。
- ②右側の長方形 MNCD の対角線 ND を引きます。
- ③N を中心、ND を半径とする円弧と BC の延長の交点を P とします。
- ④このとき、AB:BP が黄金比になります。

AB=1 として、AB:BP が黄金比になることを確かめてみてください。

長方形 ABPQ は縦:横が黄金比になっています。このような長方形のことを「黄金長方形」といいます。また、与えられた線分 AB を AP:PB が黄金比になるような点 P で分けることができます。このような操作を「黄金分割」といいます。面白い性質のひとつとして、「黄金長方形から正方形を切り取



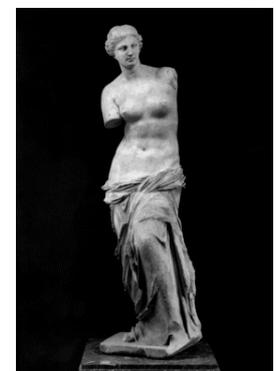
っても黄金長方形が残る」ことが知られています。黄金比は長方形の中だけではなく、五芒星(ペ  
ンタクル)にも隠されています。五芒星は4000年以上前に登場した最古の象徴記号といわれ、ピタ  
ゴラス教団の象徴でもありました。五芒星は霊的作用があるとして、西洋の呪術師や日本の陰陽師  
らが用いていました。この正五角形や五芒星にも黄金比が隠れています。いま、正五角形の一辺の  
長さを1とすると、五芒星において  $AC=BD=CE=DA=EB=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  となります。



黄金比は、建築や絵画において様々な場面で現れていると  
いわれています。有名なのがギリシャにあるパルテノン神殿  
です。古代ギリシャ時代にアテナイのアクロポリスの丘に建  
造された神殿であり、現在は世界遺産になっています。パル  
テノン神殿はその縦横比(この比を「アスペクト比」といいま  
す)がほぼ黄金比に等しくなっているといわれています。



美術についても、黄金比が現れてくるものが多くある  
といわれます。左は、ダ・ヴィンチの代表作「モナ・リ  
ザ」です。右は、フランスのルーブル美術館に所蔵され  
ている「ミロのビーナス」と呼ばれる彫像です。紀元前  
130年ごろに製作され、ミロス島から発見されたもので  
す。このプロポーションにも黄金比が隠されているといわれ  
ています。



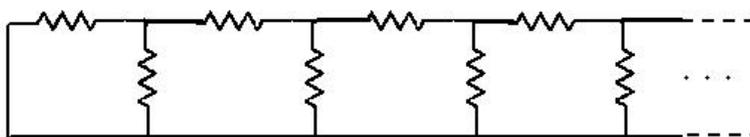
さらに、次のように無限に続く分数のことを**連分数**と  
いいます。この連分数  $g$  は黄金比を表しています。さら

に、連分数と同じように、根号(ルート)を無限に続けるという考え方を  
用いて、黄金比は表現することができます。

$$g = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$g = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

なぜ、こういった分数や根号を「無限に続けた」ものが黄金比を表すのでしょうか。そこには無限の秘密が隠されています。このような話題はさらに広がりを見せます。下図のように、それぞれが  $1\Omega$  である抵抗を規則的に並べたときの全体の抵抗値(合成抵抗値)を考えてみると、



オームの法則から回路全体の抵抗値  $R$  は、

$$R = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

となり、黄金比と一致することが知られています。

\* \* \*

#### ■参考文献、参考 HP

- [1] 「落し戸暗号の謎解き」、マーチン・ガードナー、丸善

### 8. 課題Ⅱ

- [1] 今回のゲームのルールを変えて、先攻の必勝法について考察してみましょう。(数学的背景が見出せなくても構いません)
- [2] 書籍や web から、ゲームの必勝法と数学の関連する事例を調べて紹介してください。
- [3] 3回の講義についての感想を記述してください。

※[1]と[2]から1つのテーマを選択してください。[3]は必須とします。

# 折り紙の数理

「ミウラ折り」をめぐって

平成27年12月8日

奈良女子大学数学教室教授 小林毅

(生徒・学生)

## 「数学の研究って、なんですか？」

岡 潔(おか きよし、1901年4月19日 - 1978年3月1日): 奈良女子大学名誉教授。多変数解析函数論において大きな業績を残した。そこでは幾何、代数、解析が三位一体となった美しい理論が展開される。

<http://ja.wikipedia.org/wiki/>

よく人から数学をやって何になるのかと聞かれるが、私は春の野に咲くスミレはただスミレらしく咲いているだけでいいと思っている。咲くことがどんなによいことであろうとなかろうとそれはスミレのあずかり知らないことだ。(エッセイ「春宵十話」より)



でも、生活に役立つこともたくさんあります

ロナルド・リベスト、  
アディ・シャミア、  
レオナルド・エーデルマン

1977年当時、デフィーとヘルマンによって発表されたばかりの公開鍵暗号という新しい概念に対し、それを実現できる具体的なアルゴリズムを与えました。

その他の例については例えば：

<http://www.koho2.mext.go.jp/157/#page=33>（数学イノベーションについて）

を参照してください。

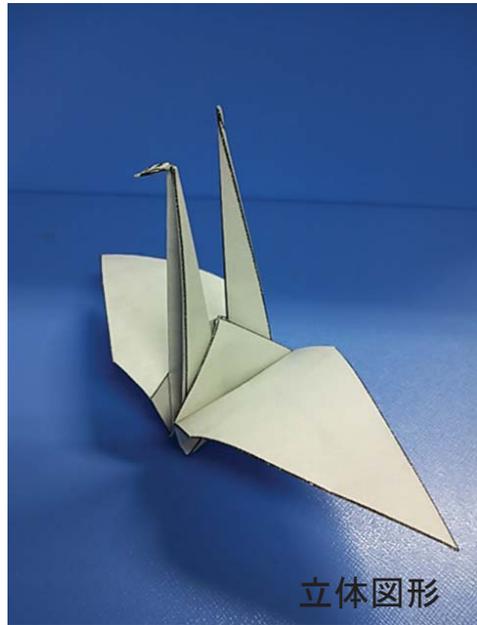
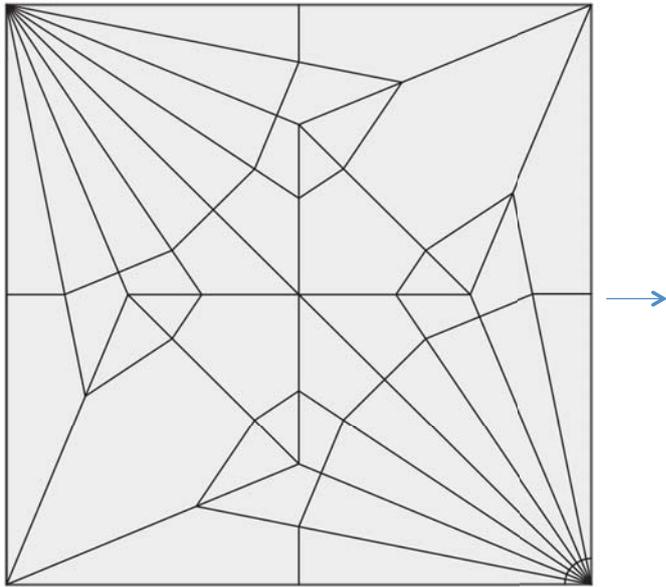
## 但し

このような説明は数学者が数学をする動機を十分に説明しているとは思えないのですが・・・  
(個人的な印象です)

## 今日のお話

最近「折り紙」という話題を通して、このような問いかけへの答えの一例となる、仕事のできた気がするので、ご紹介したいと思います。

# 折り紙



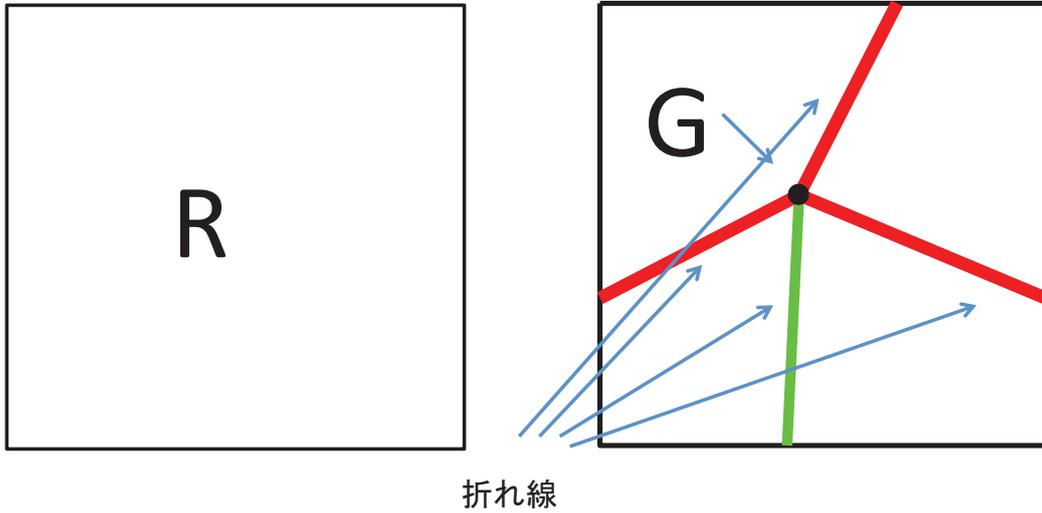
立体図形

## 数学者の態度1: 定式化

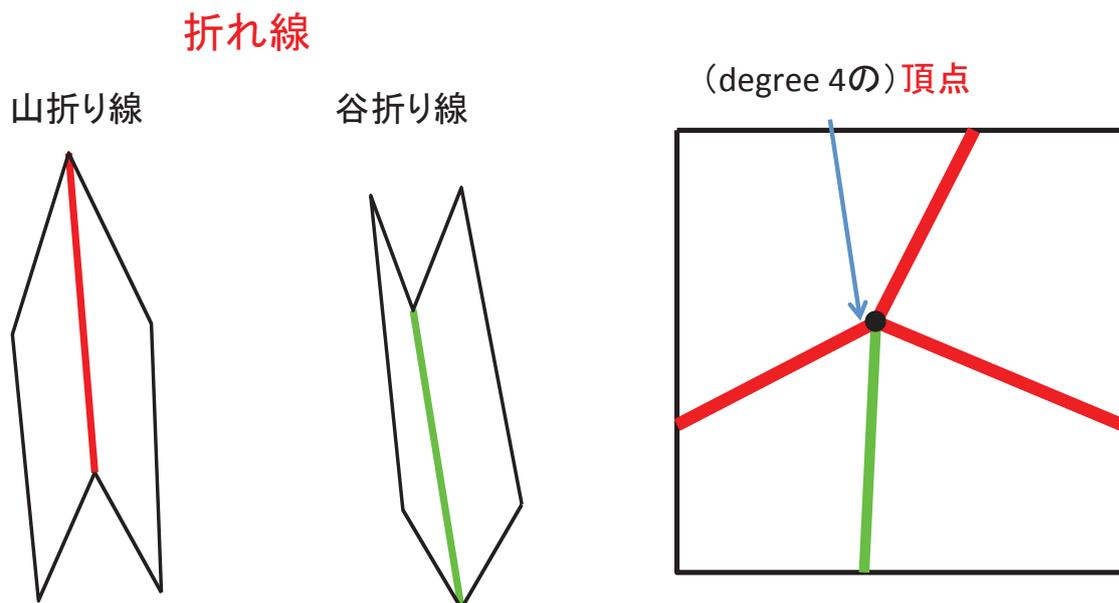
物事を考えるにあたって、とりあえず何を考えるのか、はっきりさせる

# 折り紙の(数学的)定式化

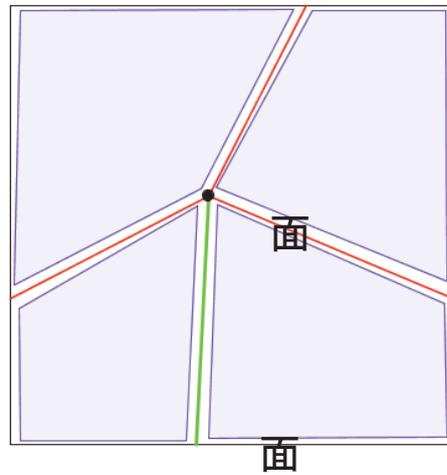
- $(R, G)$



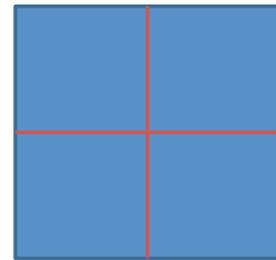
## 折れ線, 頂点



# 面



面  $R \setminus G$



折れない展開図

この講演では出来上がった立体図形において各面はflatであると仮定する

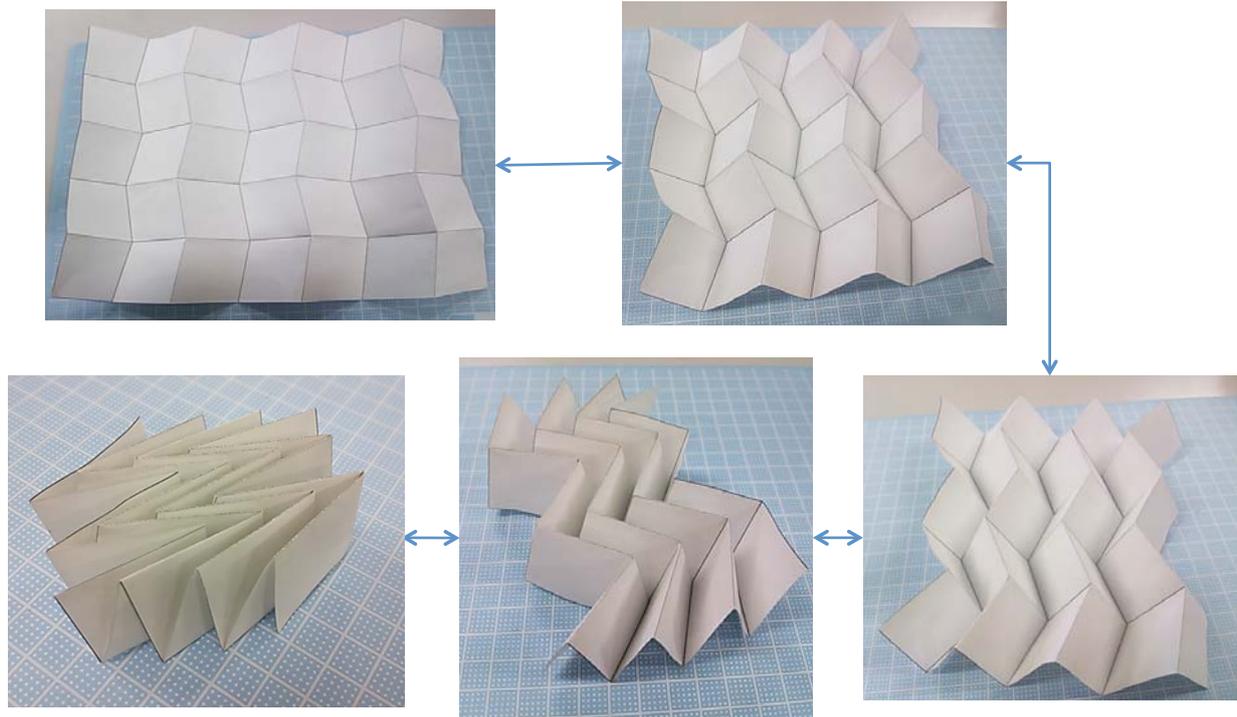
## flat な折り紙

- 完成形が平面に押し付けられるような折り紙を flat な折り紙 という。



<http://www.origami-club.com/valentine/heart-crane/index.html>

## flat な折り紙の例



## ミウラ折り

三浦公亮(みうらこうりょう)

1930年東京生まれ。  
東京大学工学部卒業。

東京大学宇宙航空研究所、文部科学省宇宙科学研究所

人工衛星・惑星の開発設計に関り、新しい宇宙構造物の発明と宇宙での構築を実現し「宇宙の建築家」と呼ばれる。

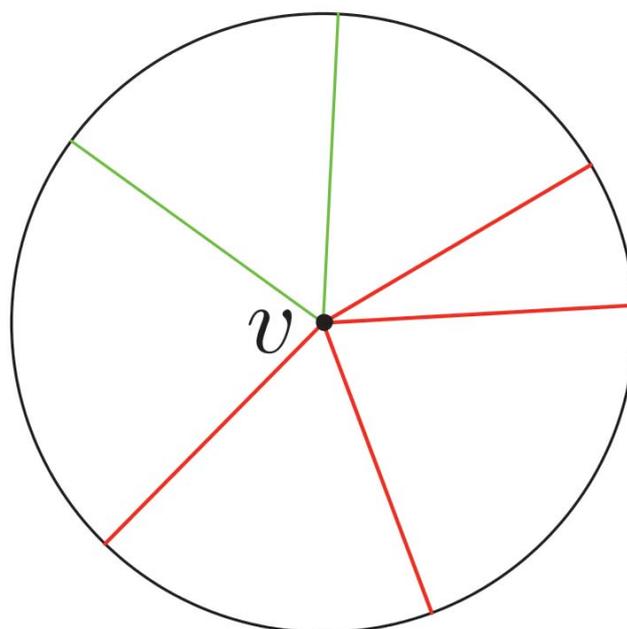
<http://www.miuraori.biz/hpgen/HPB/entries/9.html>

## 数学者の態度2: 定式化

- 数学者のよく取る態度・・・  
物事を思い切り単純化

### 1 頂点折り

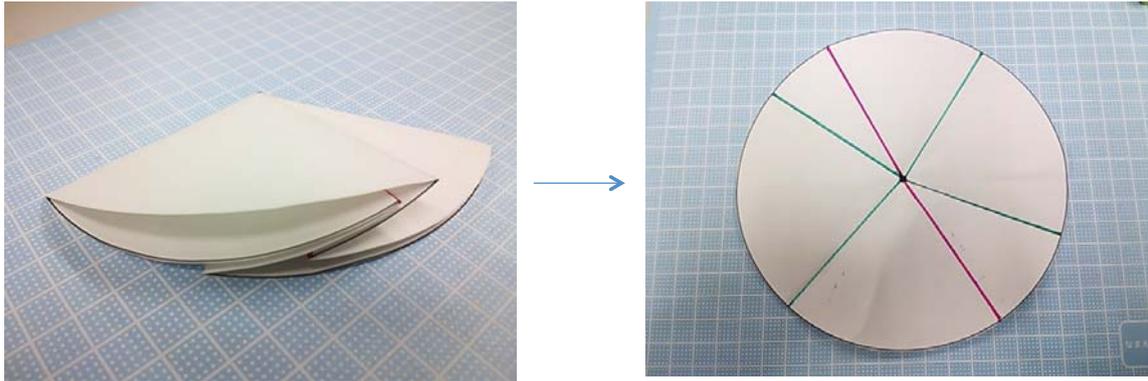
- 次のような単純な展開図 を考える.



# 1 頂点折り

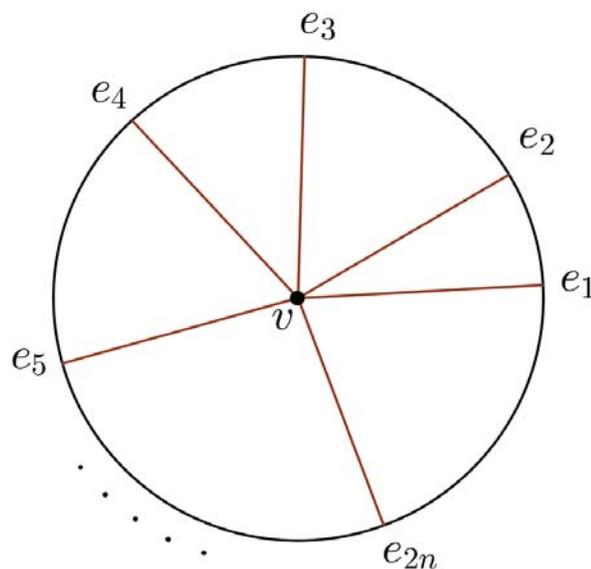
## ■定理 (Theorem 2.1)

展開図  $(R, G)$  を1頂点折りとする. いま,  $(R, G)$  は flat な折り紙とする. このとき, 頂点  $v$  の degree は偶数である.



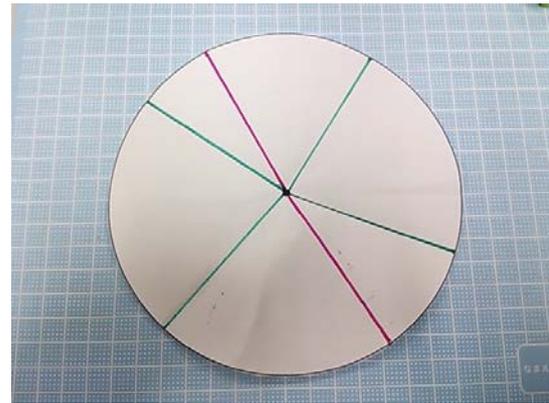
# 1 頂点平坦折り

- 次のような 一頂点折り  $(R, G)$  を考える.



# 1 頂点平坦折り

**Theorem 2.3 (前川-Justin)** ([O, Theorem 4.2], [前川], [J]) 展開図  $(R, G)$  を 1 頂点折りとする. いま,  $(R, G)$  は flat な折り紙とする. このとき, 折れ線  $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$  の中の山折り線の数を  $M$ , 谷折り線の数を  $V$  とすると  $M - V = 2$  又は  $-2$  が成り立つ.



## 更に単純化

更に単純化して、

頂点のdegreeは4としてみよう

## ■定理 (Degree 4 flat folding)

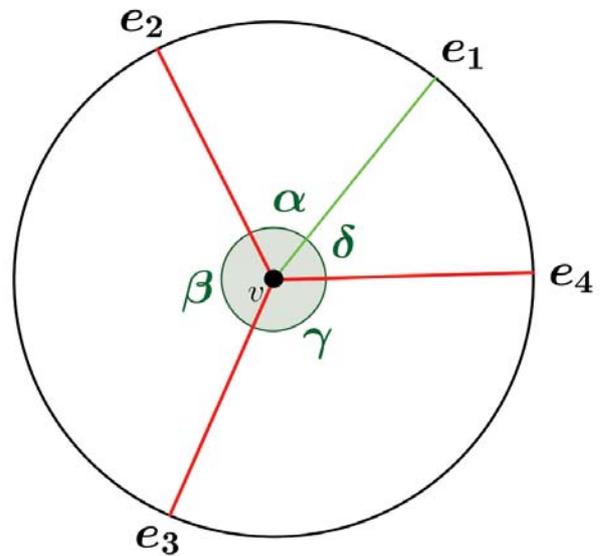
頂点のDegreeが4である一点折り  $(R, G)$  がflat な折り紙となる必要十分条件は、次の3条件が成り立つことである。

1. (前川-Justin)  $e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}$  の中の山折り線の数と谷折り線の数を見ると、一方の数は **1**、他方の数は **3** である。

2.  $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$

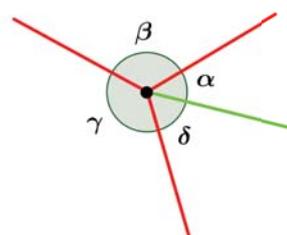
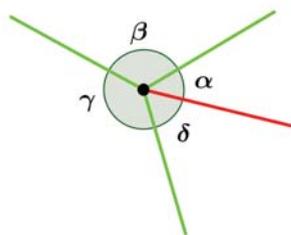
3. 一般性を失うことなく「 $e_{11}$  は山折り線,  $e_{12}, e_{13}, e_{14}$  はともに谷折り線」  
 又は、「 $e_{11}$  は谷折り線,  $e_{12}, e_{13}, e_{14}$  はともに山折り線」と仮定してよいが、このとき

$$\alpha \leq \beta$$



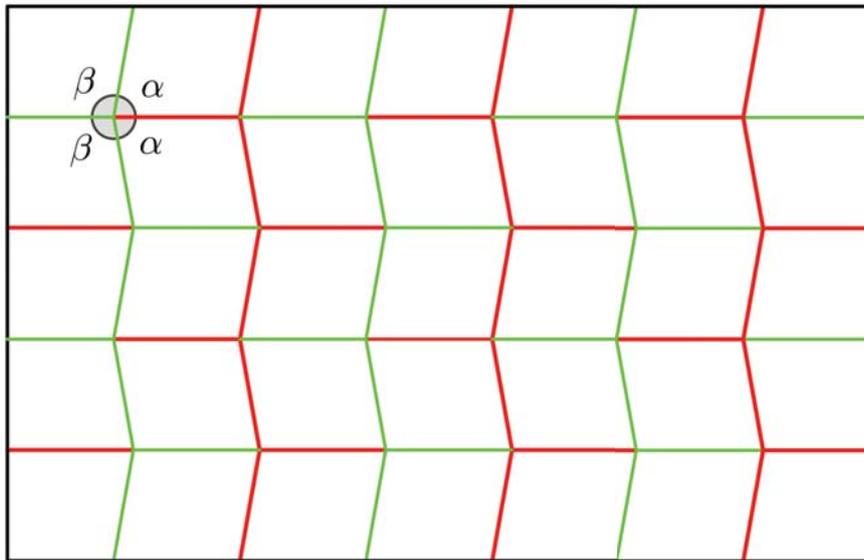
## 一般化されたミウラ折り

一般に、展開図  $(R, G)$  に対して、その各頂点の degree が 4 であり、かつ、定理( degree 4 flat folding )の条件を満たすとき、この折り紙は一般化されたミウラ折りであると呼ぶことにする。



$$\alpha + \gamma (= \beta + \delta) = \pi, \alpha < \beta (\delta < \gamma)$$

# ミウラ折り

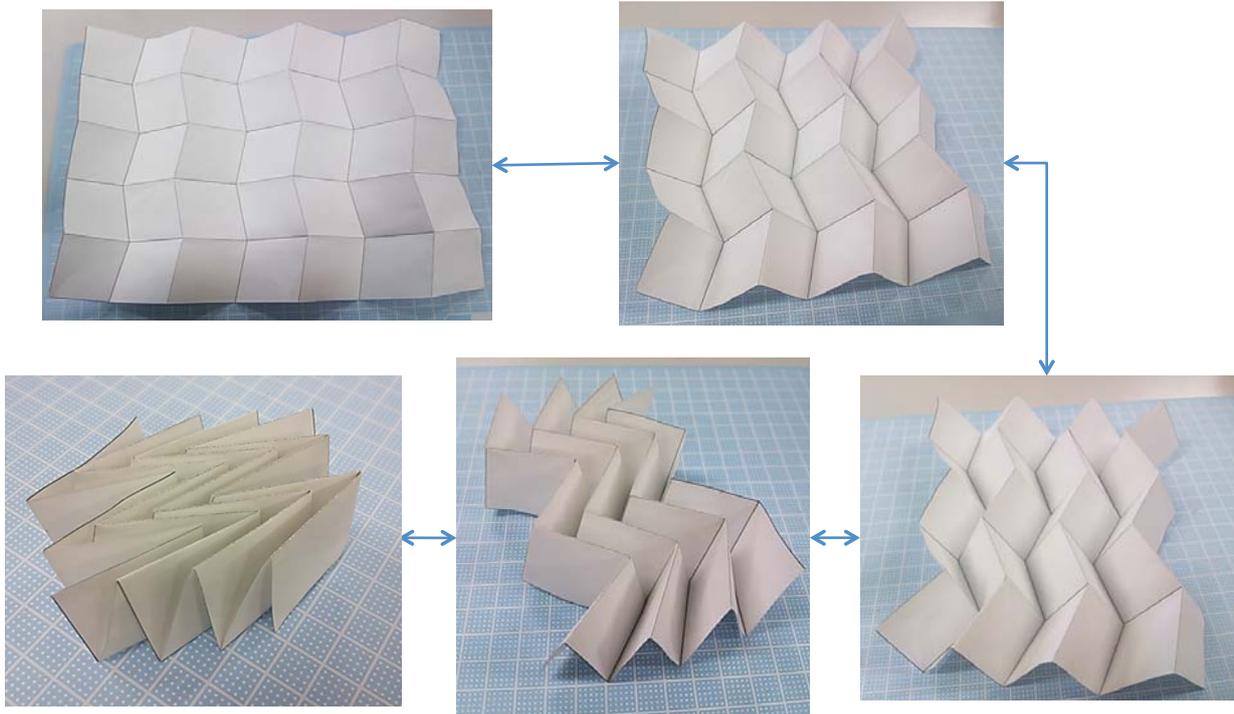


$$\alpha = \alpha, \beta = \beta,$$

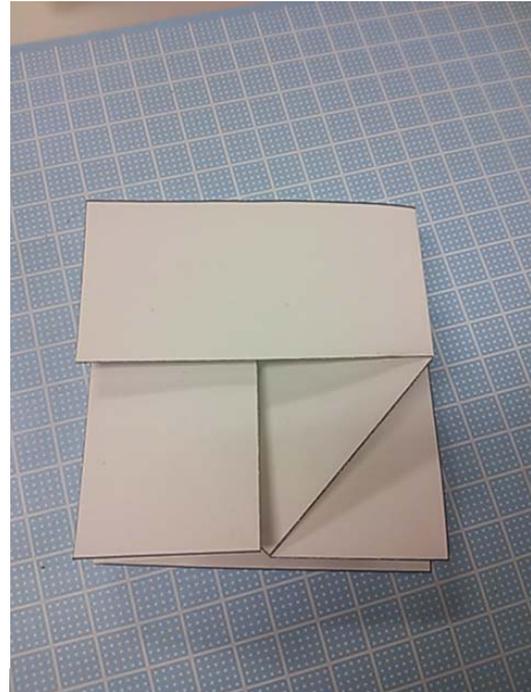
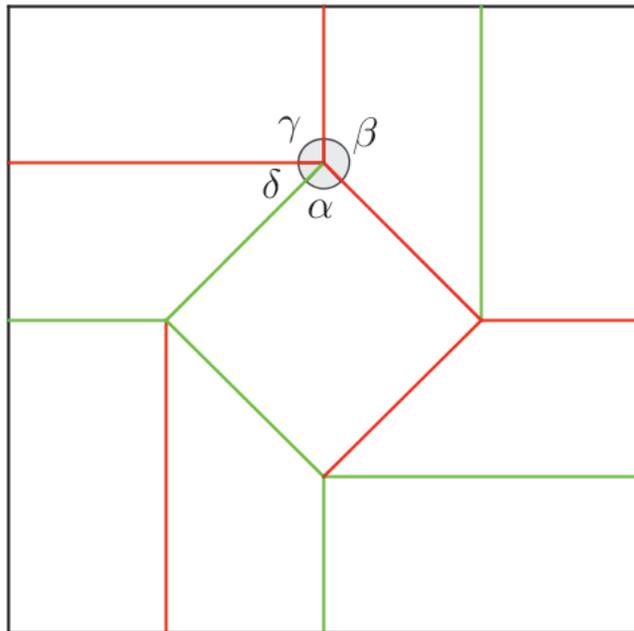
$$\gamma = \beta, \delta = \alpha$$

1. Degreeは 4 で, 山折り線と谷折り線の数の差は 2 である.
2.  $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\pi$   
 $2(\alpha + \beta) = 2\pi$   
 $\alpha + \beta = \pi$
3.  $\alpha < \beta$

# ミウラ折り



# Square Twist



$$\alpha = \pi/2, \beta = 3/4\pi, \gamma = \pi/2, \delta = \pi/4$$

# 花紋折り

## 花紋折りの世界

(1) 大小2つの正多角形が描き出す花紋の数々

花紋折りは、下のように形と色彩の組合せで驚くほど印象が変わります。

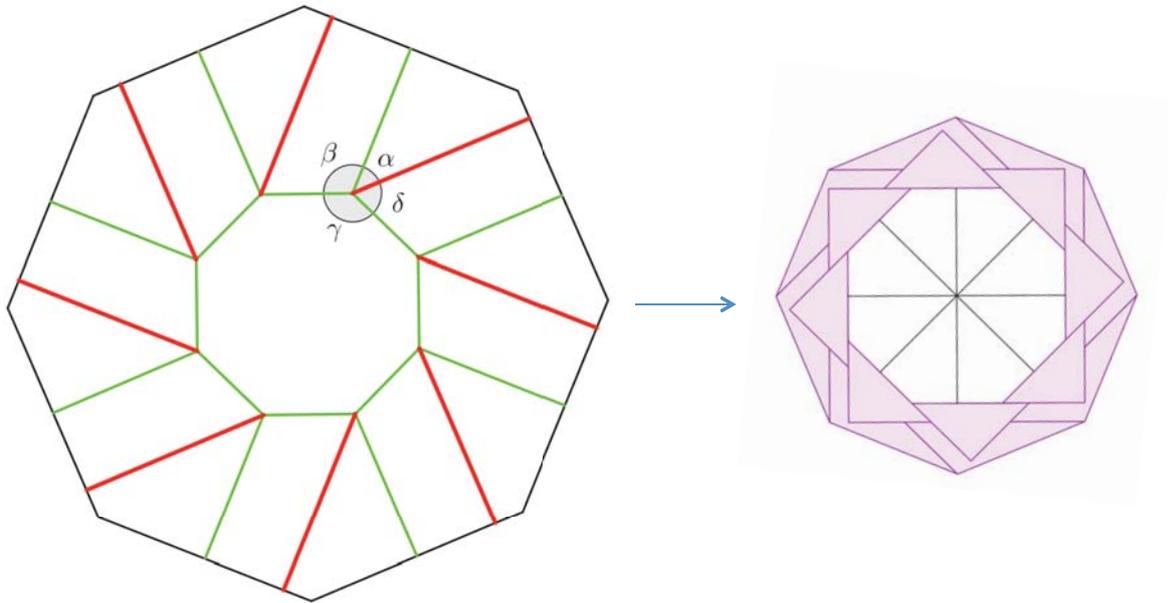


アクセサリーやブローチ、それによく回る独楽としても楽しめます。

内山光弘氏が考案された「花紋折り」は折り紙の範疇に入る作品です。しかし、通常の折り紙よりも、ずっと精密な折り図を描く必要があります。大小2つの正多角形(通常4~12角形)の中心をそろえて、一方を少し回転させた図を、予め折り紙に描いてから折っていきます。図さえ描けば、折る作業は比較的容易です。

<http://homepage3.nifty.com/youyoutei/kamon.htm>

# 花紋折り



$$\alpha = \pi/4, \beta = 5/8 \pi, \gamma = 3/4 \pi, \delta = 3/8 \pi$$

# Robert J. Lang

ROBERT J. LANG  
ORIGAMI

art

science

publications

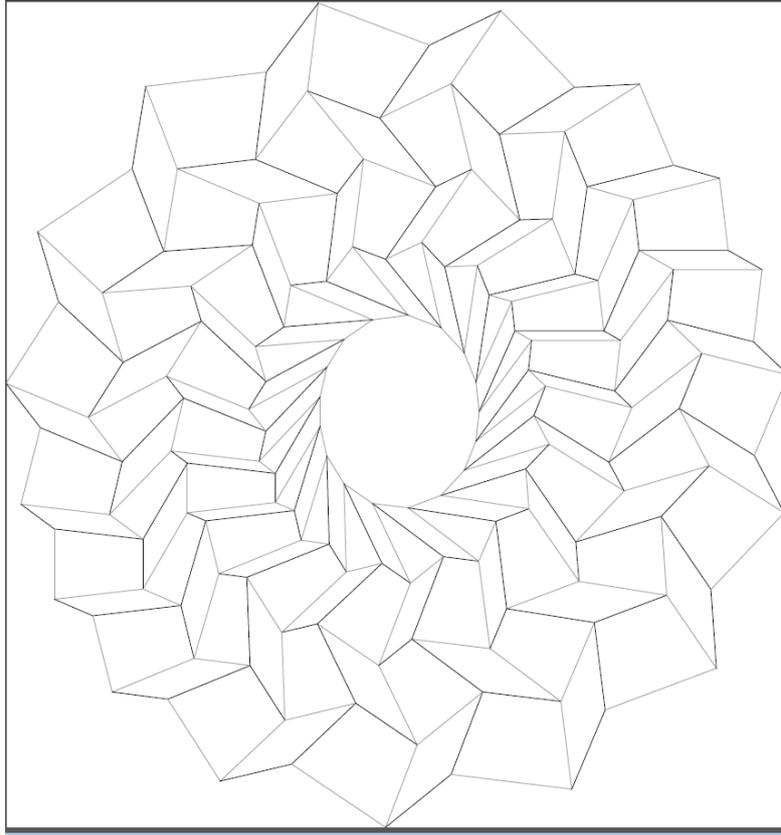
information

artist

copyright © 2004–2012 robert j. lang origami • contact robert j. lang • site credits

<http://www.langorigami.com/>

# Oval Tessellation



# Oval Tessellation



## 数学者の態度3: 構造化

いろいろな現象が見つかったら、  
そこになにか(数学的)構造が  
見いだす

### ところで

- 私の専門は、位相幾何学、  
特に低次元トポロジーと  
呼ばれる分野です  
(「宇宙の形の研究」などと  
説明されることもあります。)



**William Paul Thurston** (October 30, 1946 – August 21, 2012) was an [American mathematician](#). He was a pioneer in the field of [low-dimensional topology](#). In 1982, he was awarded the [Fields Medal](#) for his contributions to the study of 3-manifolds. From 2003 until his death he was a professor of mathematics and [computer science](#) at [Cornell University](#).

BULLETIN (New Series) OF THE  
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY  
Volume 6, Number 3, May 1982

## THREE DIMENSIONAL MANIFOLDS, KLEINIAN GROUPS AND HYPERBOLIC GEOMETRY

BY WILLIAM P. THURSTON

**1. A conjectural picture of 3-manifolds.** A major thrust of mathematics in the late 19th century, in which Poincaré had a large role, was the uniformization theory for Riemann surfaces: that every conformal structure on a closed oriented surface is represented by a Riemannian metric of constant curvature. For the typical case of negative Euler characteristic (genus greater than 1) such a metric gives a hyperbolic structure: any small neighborhood in the surface is isometric to a neighborhood in the hyperbolic plane, and the surface itself is the quotient of the hyperbolic plane by a discrete group of motions. The exceptional cases, the sphere and the torus, have spherical and Euclidean structures.

この論文で”三次元多様体の“幾何構造”が導入されている

## THREE DIMENSIONAL MANIFOLDS

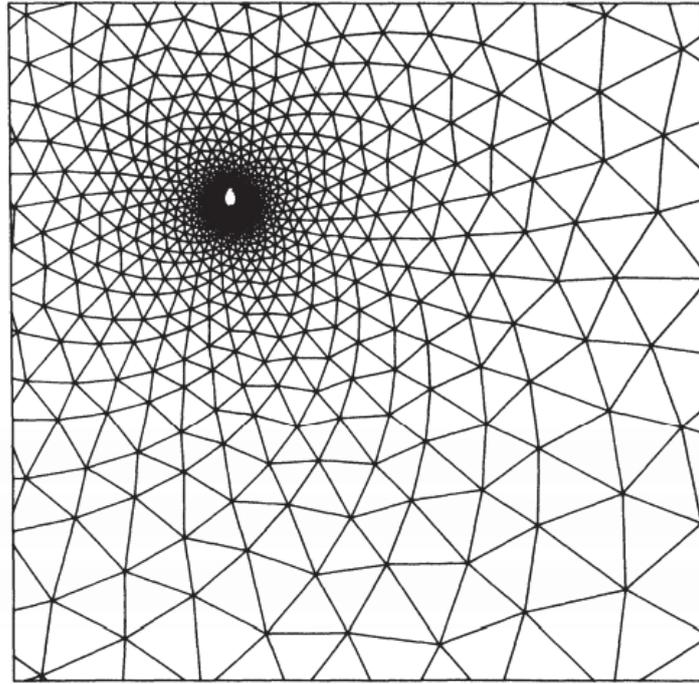
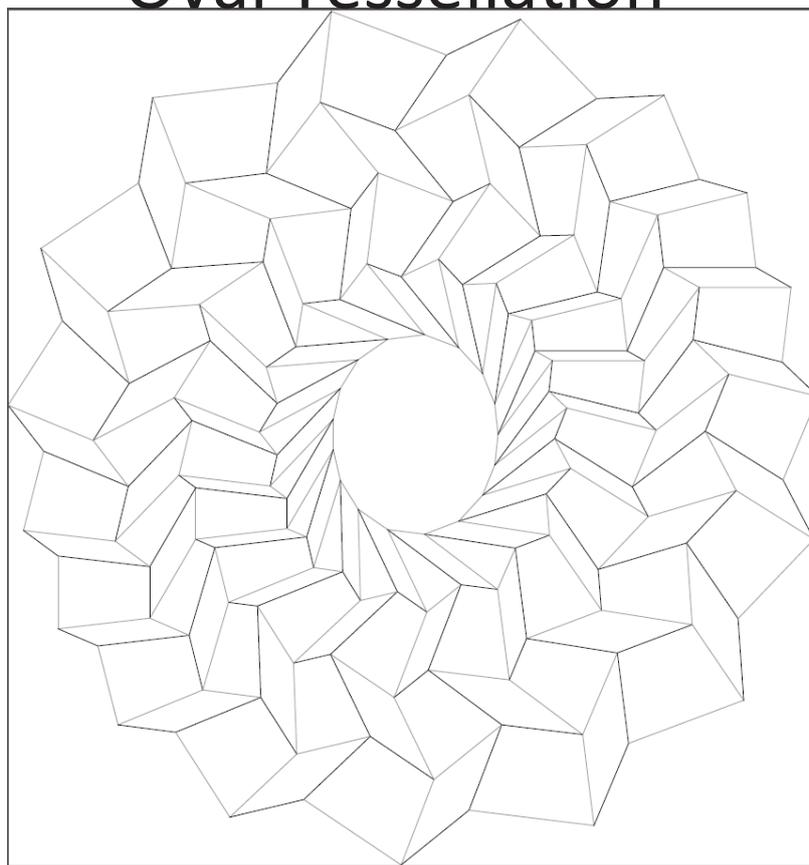


FIGURE 4. Three o'clock sky.

2次元トーラスの相似構造の展開写像の像

## Oval Tessellation



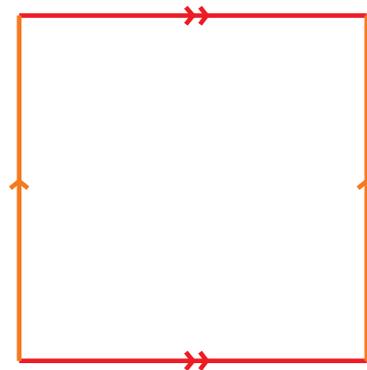
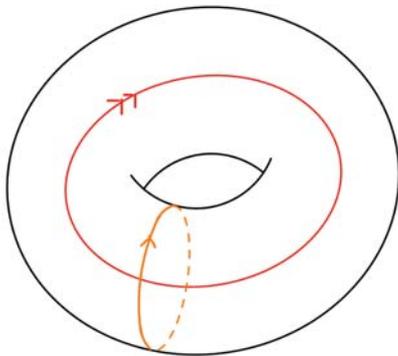
## 修士論文

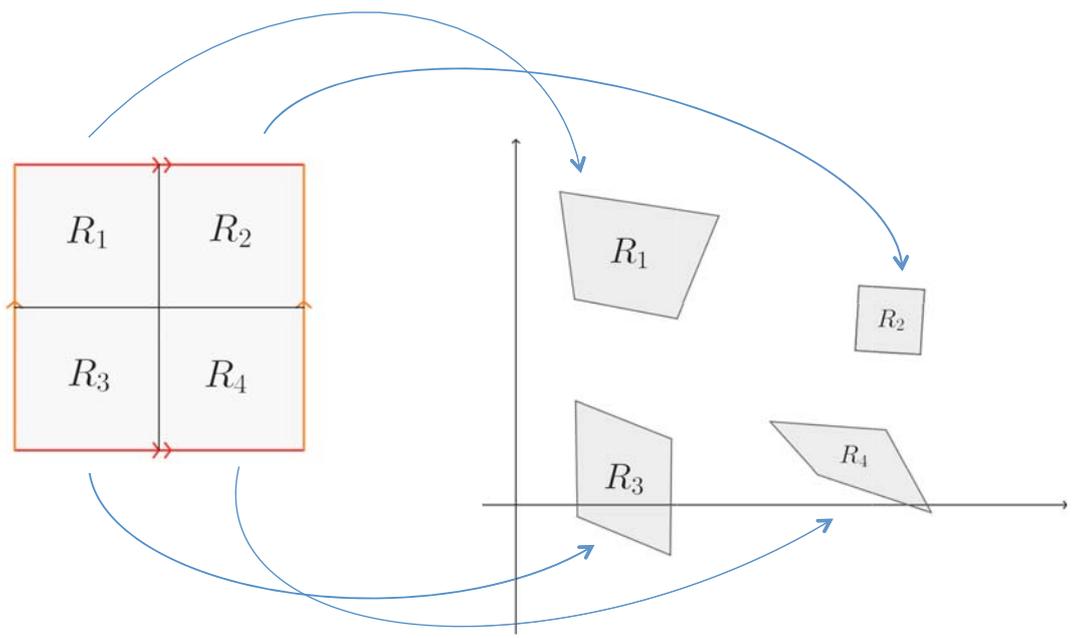
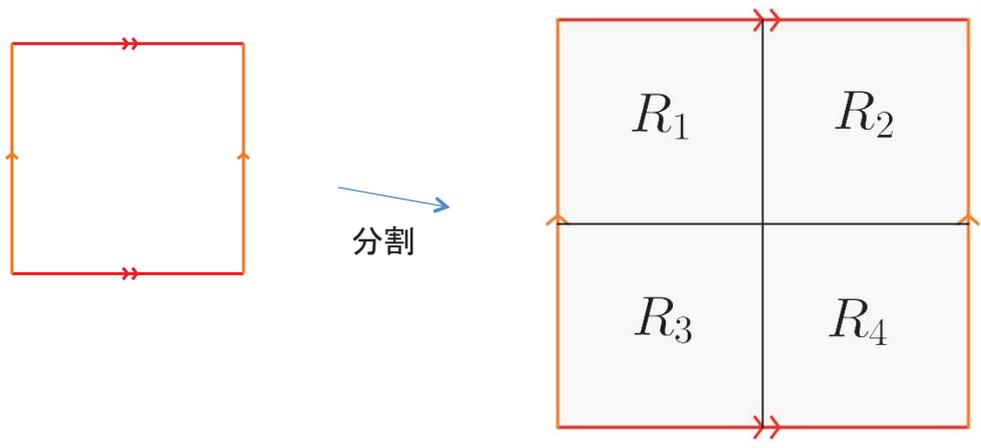
2次元トーラスの相似構造による、  
一般化されたミウラ折りの構成

入井 美紀

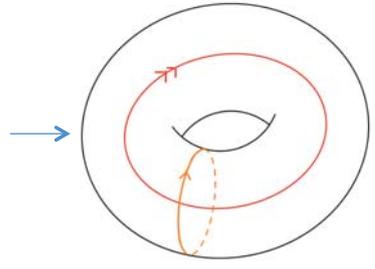
奈良女子大学大学院 人間文化研究科博士前期課程 数学専攻

# 2次元トーラスの相似構造

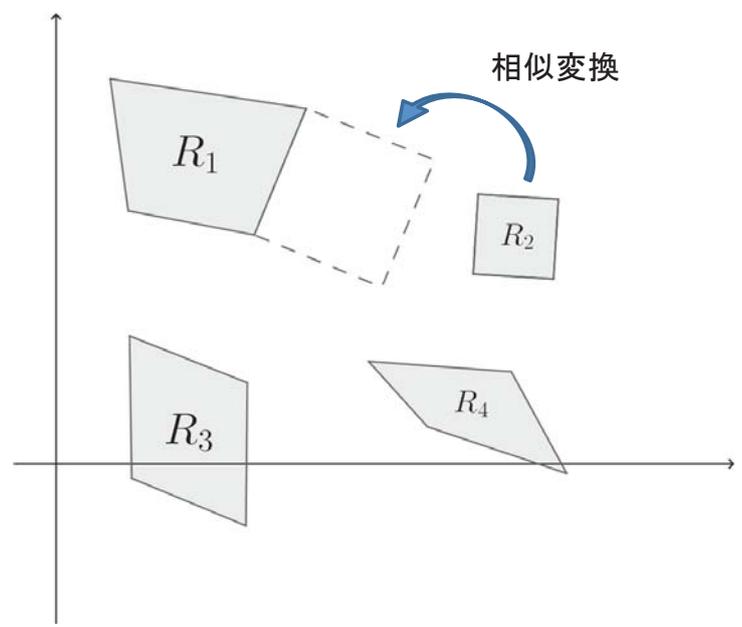


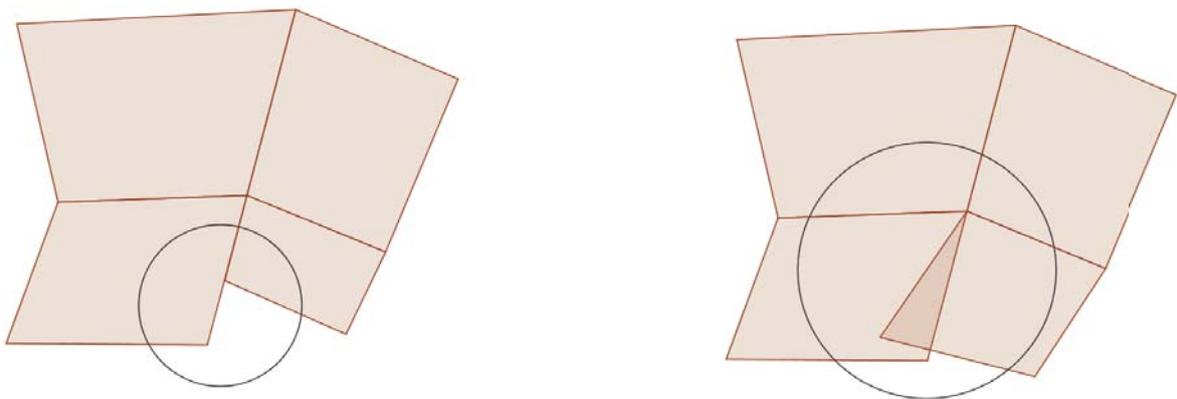
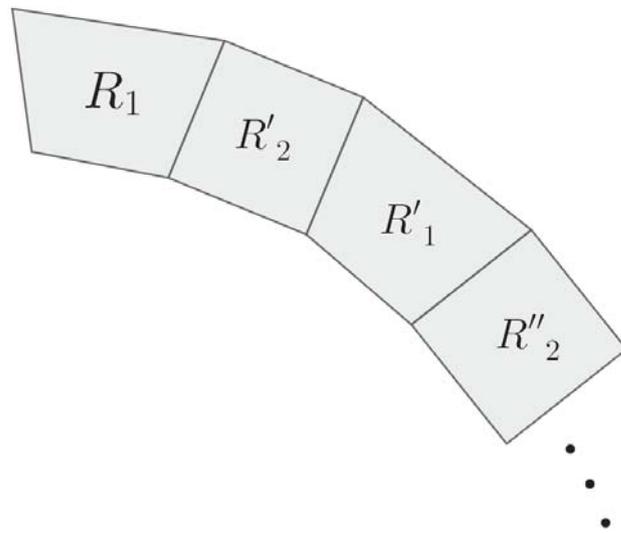


$\mathfrak{z}_4$	$R_3$	$R_4$	$R_3$	$R_4$	$R_3$	$R_4$	$R_3$	$R_4$	$R_3$
$\mathfrak{z}_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$
$\mathfrak{z}_4$	$R_3$	$R_4$	$R_3$	$R_4$	$R_3$	$R_4$	$R_3$	$R_4$	$R_3$
$\mathfrak{z}_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$
$\mathfrak{z}_4$	$R_3$	$R_4$	$R_3$	$R_4$	$R_3$	$R_4$	$R_3$	$R_4$	$R_3$
$\mathfrak{z}_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$

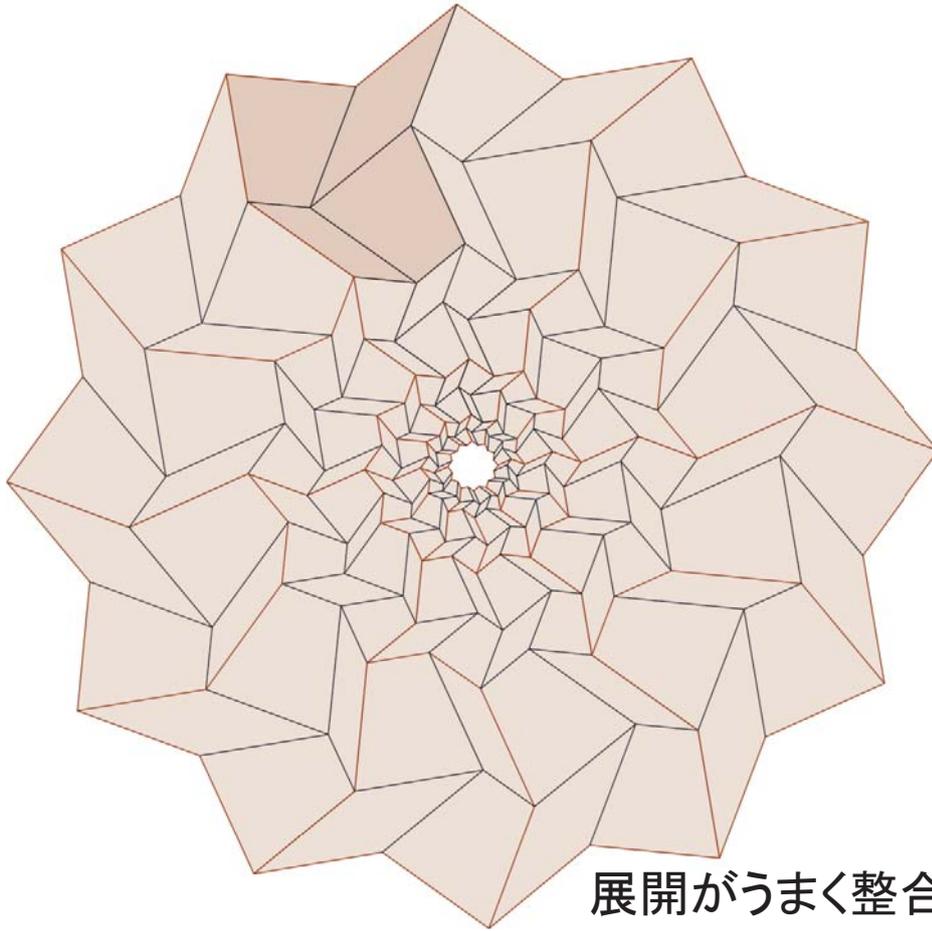


図①



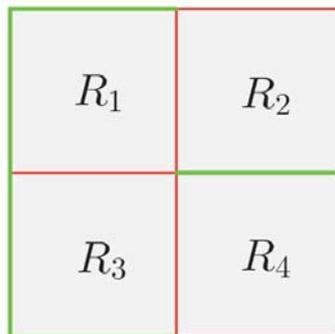


展開が局所的に整合しない状況の例



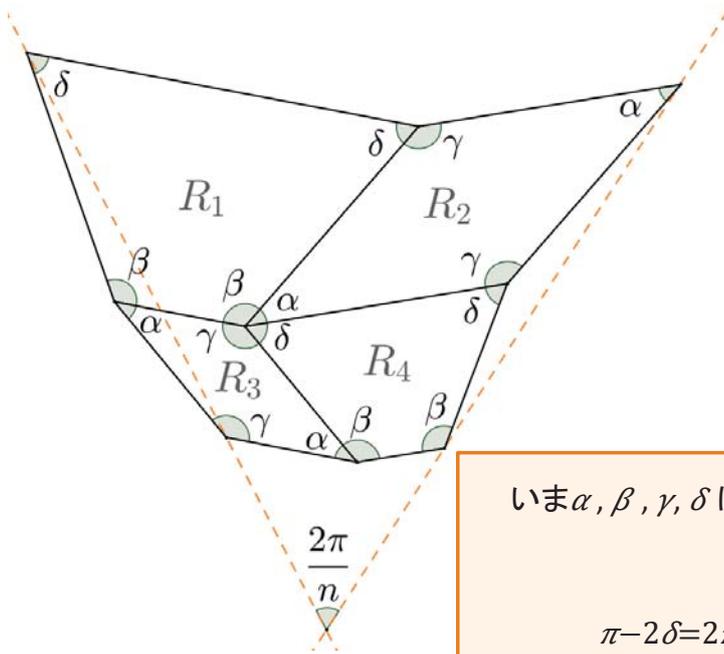
展開がうまく整合した場合

- 問. トーラス上の4個の四角形  $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$  からなる相似構造で次のようなものを見つけよ.



1. 上図のように2次元トーラスの分割  $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$  を表す1次元複体に, 山折り谷折り構造を指定する. この構造を含めて developing map を考えたとき, その像はユークリッド平面の折り紙としての展開図を与える.
2. この展開図において各頂点の周りでは 定理( degree 4 flat folding )の条件が満たされる.

# 今回得られた結果



次のような  $R1, R2, R3, R4$  と四角形の対応を考える。  
 $R1, R2, R3, R4, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  を左図の通りとする。

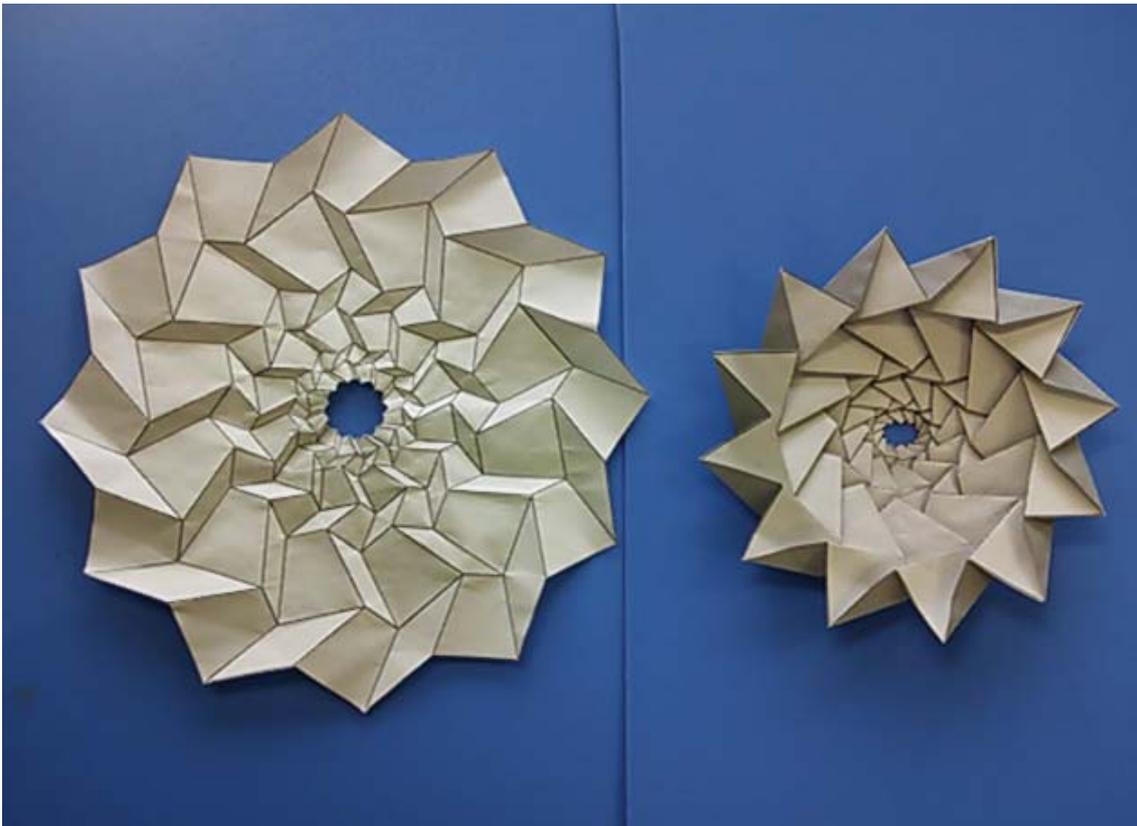
$$\begin{cases} R1, R4 : \text{相似な台形} \\ R2, R3 : \text{平行四辺形} \end{cases}$$

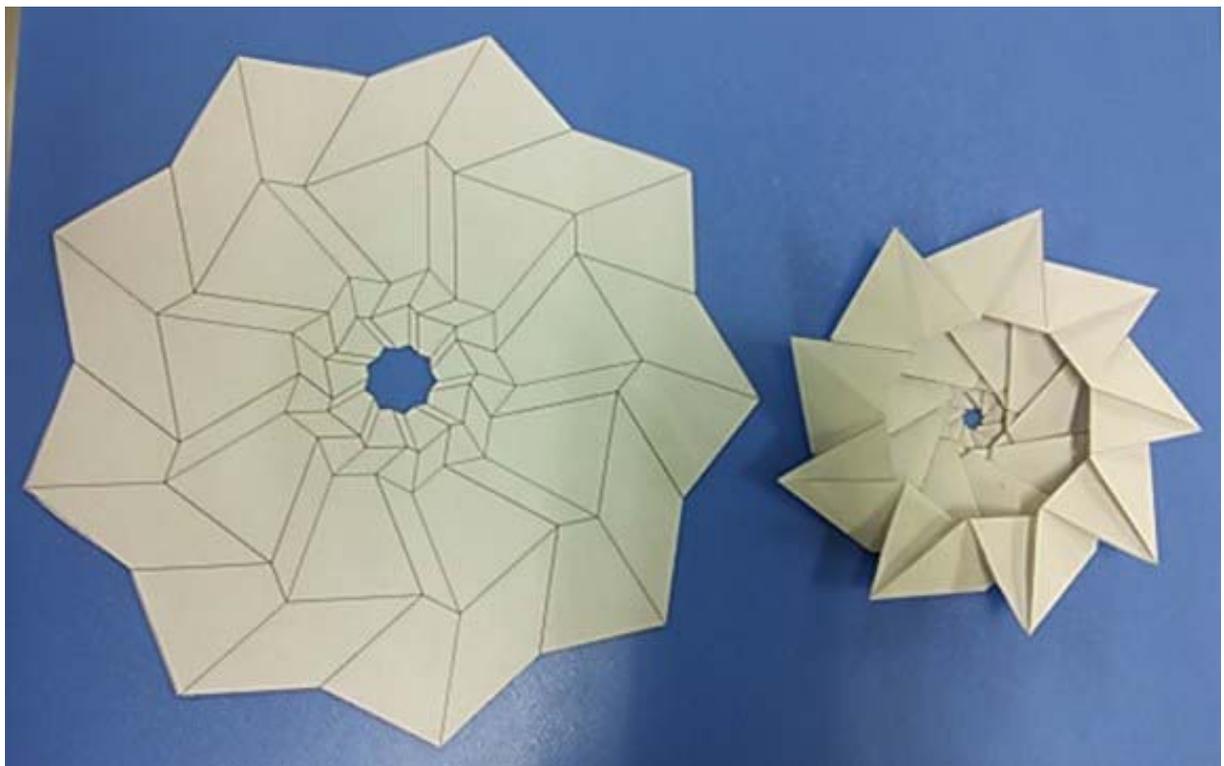
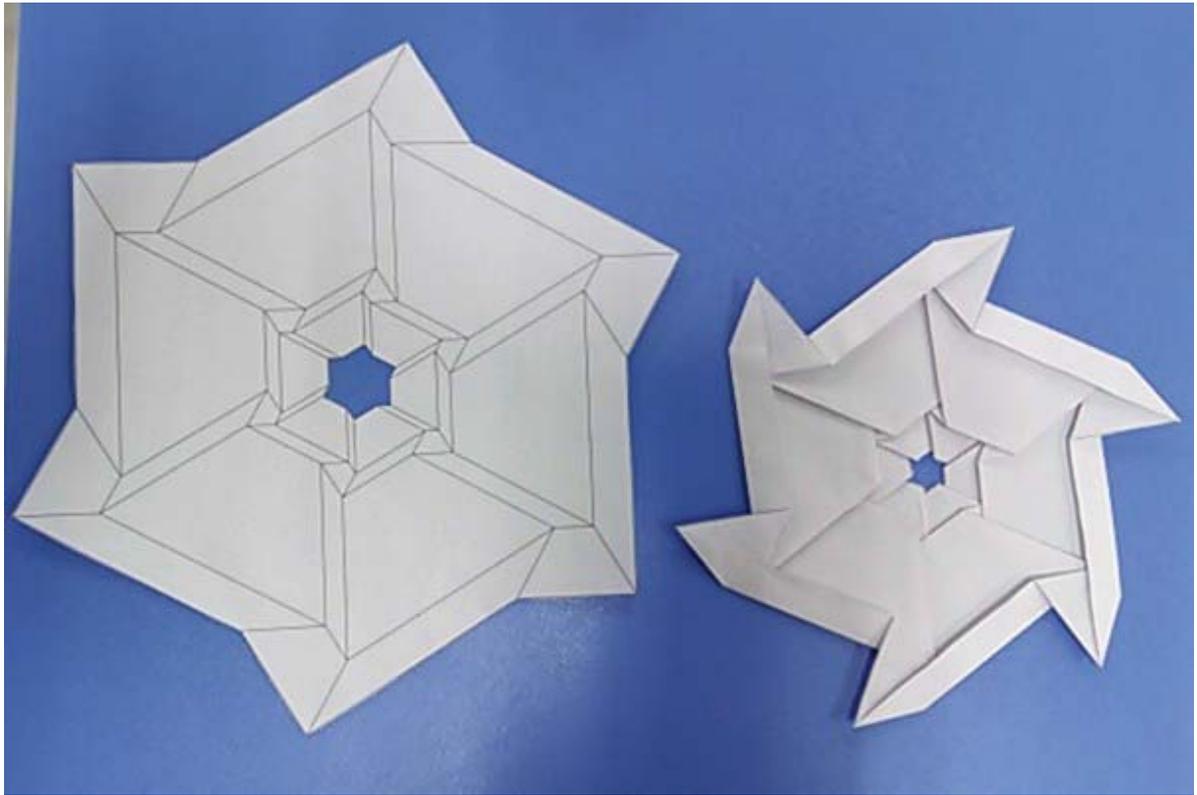
いま  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  は次の条件を満たすとする

$$\alpha < \beta < \gamma,$$

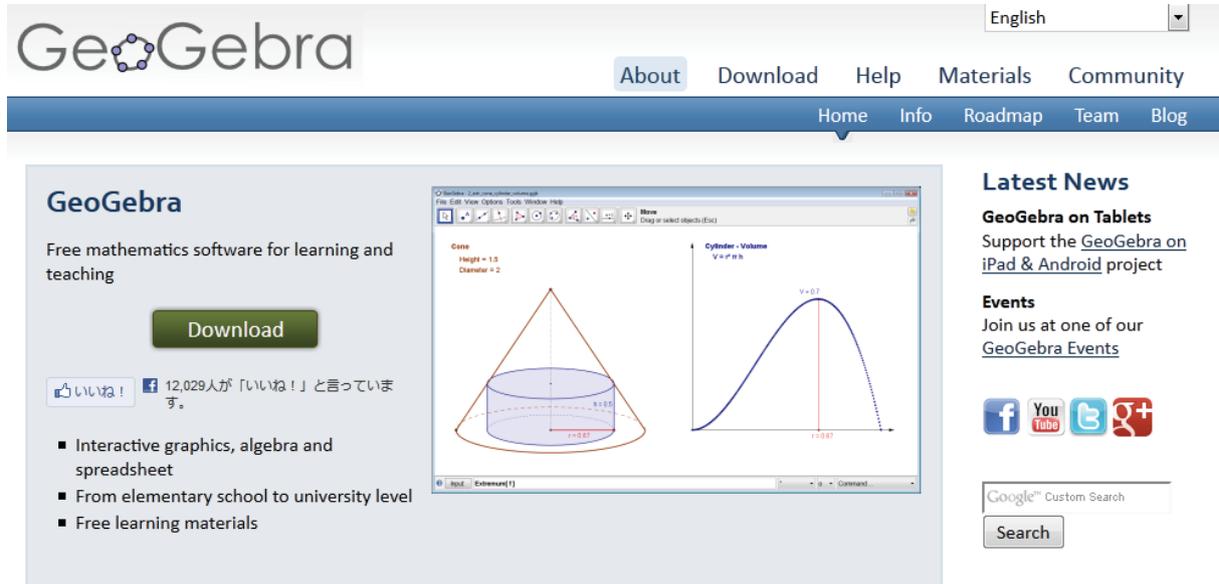
$$\pi - 2\delta = 2\pi/n \quad (n \in \{3, 4, \dots\})$$

このときこの対応は問の条件を満たす相似構造を与える。





# GeoGebra



今回の発表中で用いた展開写像の図はこのソフトを用いて描きました

# 折り紙の数理 「花紋折りをめぐって」

平成27年12月15日

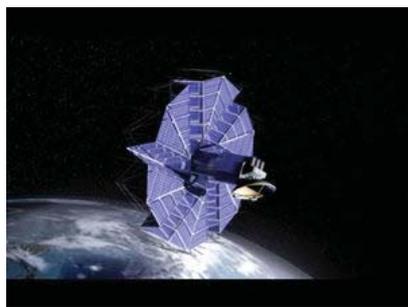
奈良女子大学数学教室教授 小林毅

## 背景 | 折り紙といえば・・・



## 背景 | 最近の折り紙は・・・

### ★宇宙工学



<http://news.byu.edu/archive13-nov-origami.aspx>

### ★ロボット工学



<http://spectrum.ieee.org/automaton/robotics/robotics-hardware/self-folding-printable-origami-robot>

### ★医学



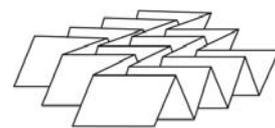
<http://stentgraft.jp/general/topic05/>

## 背景 | 最近の折り紙は・・・



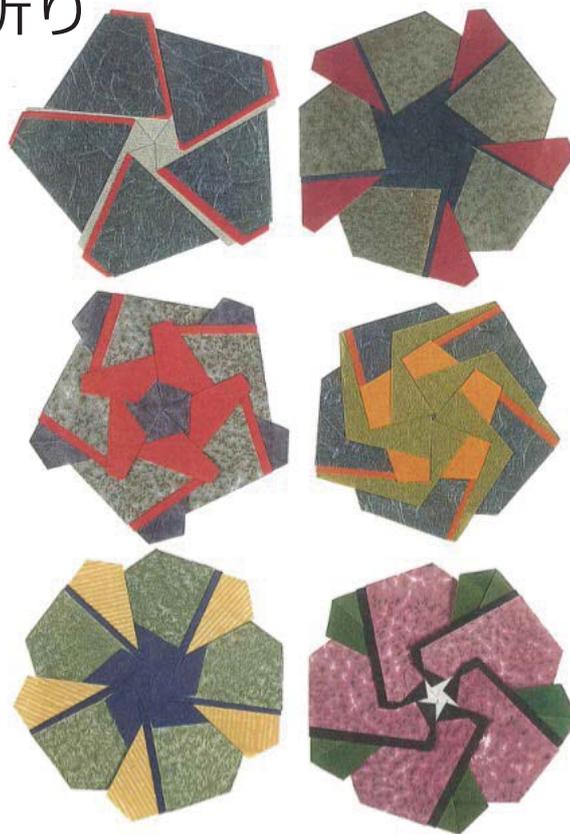
<http://www9.nhk.or.jp/kabun-blog/700/202446.html>

## ハネカクシ

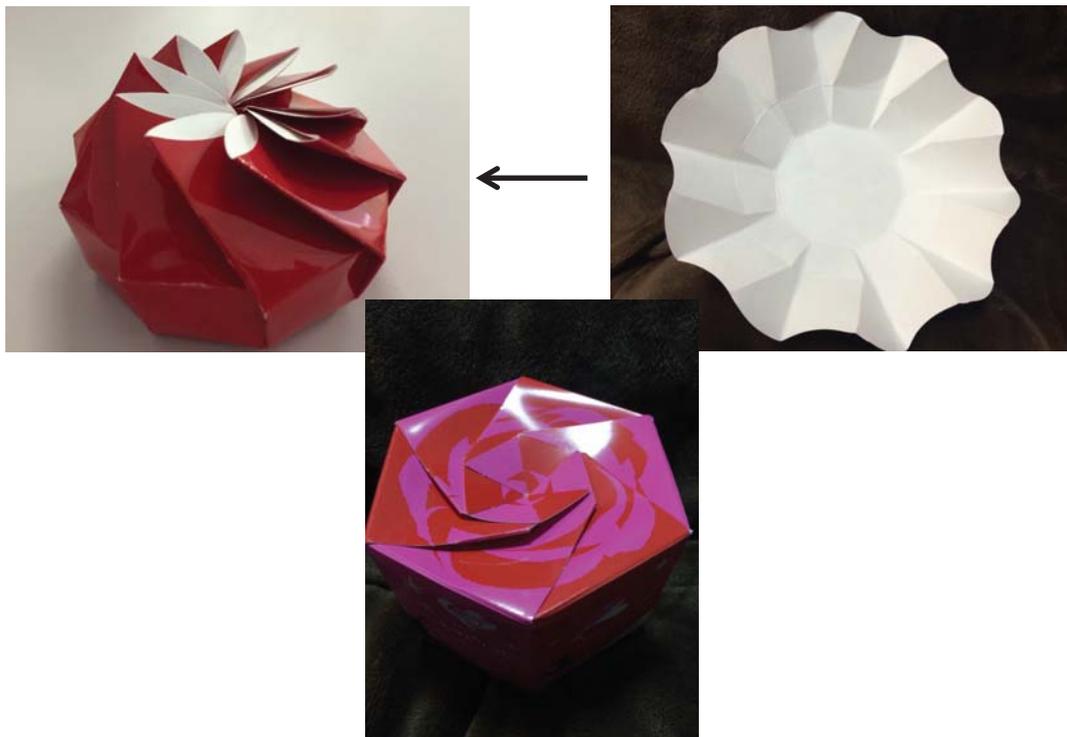


ミウラ折り

## 背景 | 花紋折り

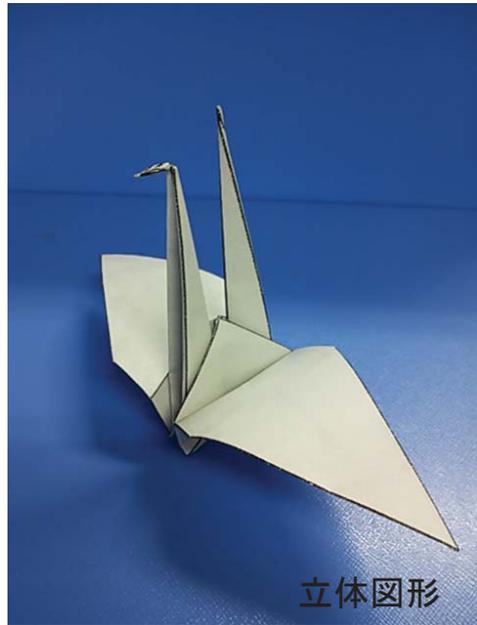
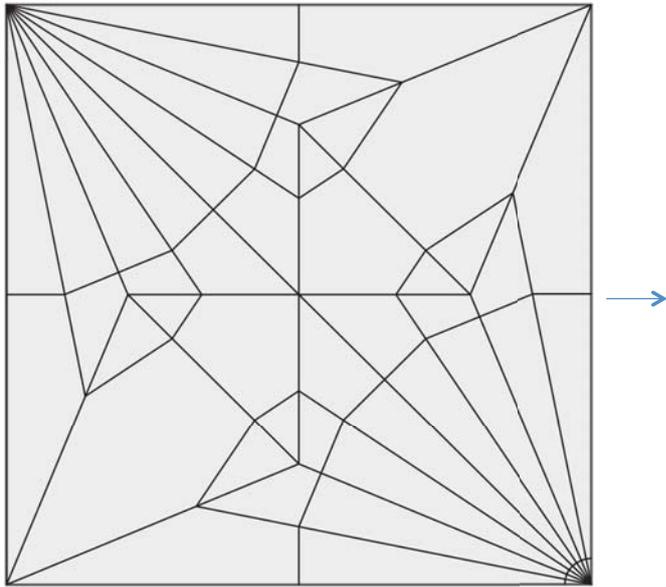


## 花紋折りの応用



# 復 習

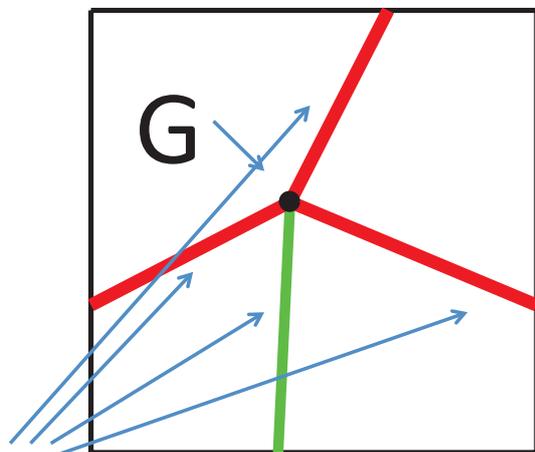
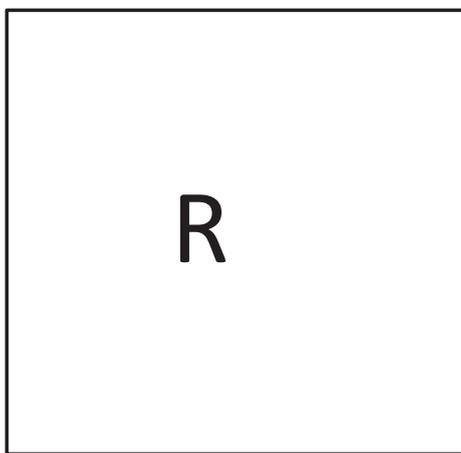
# 折り紙



立体図形

## 折り紙の(数学的)定式化

- $(R, G)$

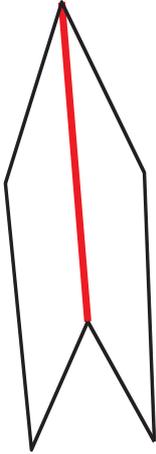


折れ線

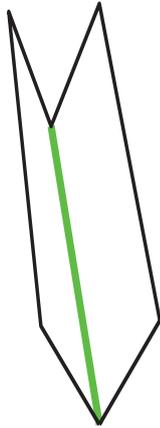
# 折れ線, 頂点

## 折れ線

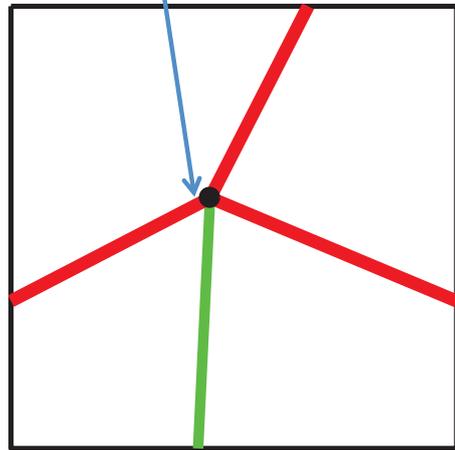
山折り線



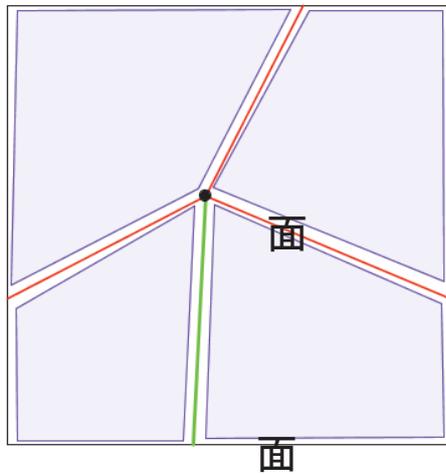
谷折り線



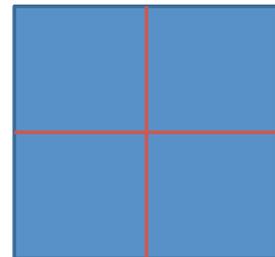
(degree 4の)頂点



## 面



面  $R \setminus G$



この講演では出来上がった立体図形において各面はflatであると仮定する

折れない展開図

# flat な折り紙

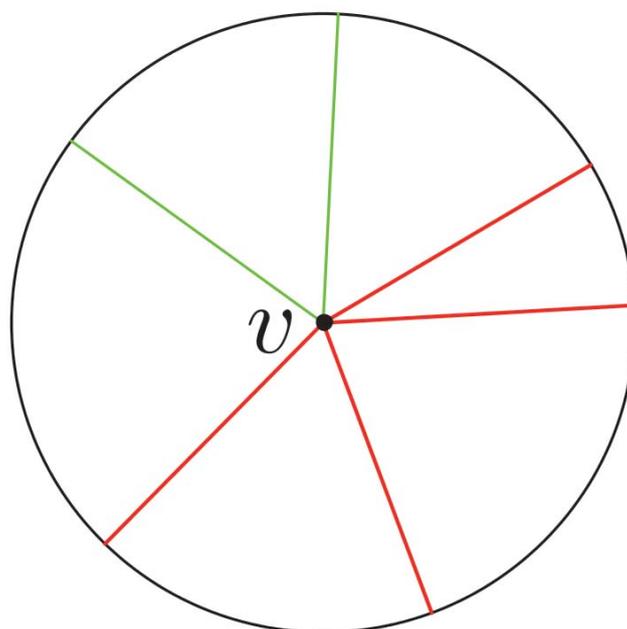
- 完成形が平面に押し付けられるような折り紙を flat な折り紙 という.



<http://www.origami-club.com/valentine/heart-crane/index.html>

# 1 頂点折り

- 次のような単純な展開図を考える.



## ■定理 (Degree 4 flat folding)

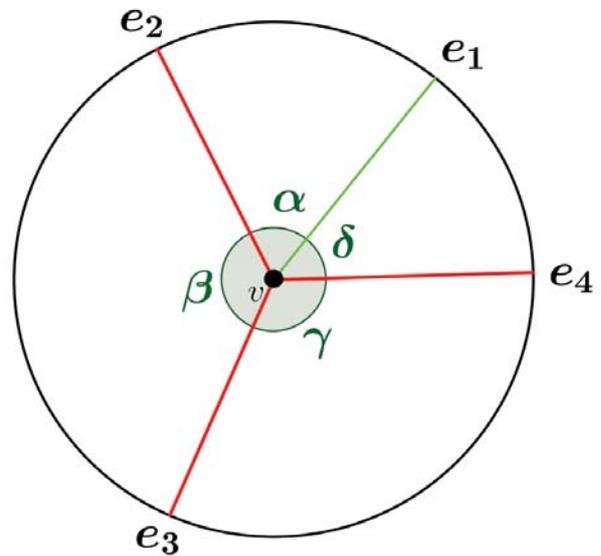
頂点のDegreeが4である一点折り  $(R, G)$  がflat な折り紙となる必要十分条件は、次の3条件が成り立つことである。

1. (前川-Justin)  $e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}$  の中の山折り線の数と谷折り線  
の数を考えると、一方の数は **1**,  
他方の数は **3** である。

2.  $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$

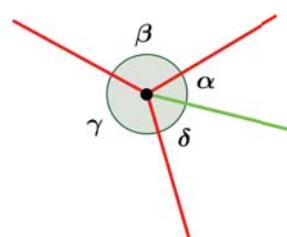
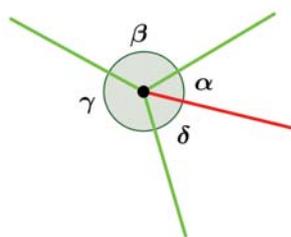
3. 一般性を失うことなく「 $e_{11}$  は山折  
り線,  $e_{12}, e_{13}, e_{14}$  はともに谷折り線」  
又は、「 $e_{11}$  は谷折り線,  $e_{12}, e_{13}, e_{14}$   
はともに山折り線」と仮定してよいが、  
このとき

$$\alpha \leq \beta$$



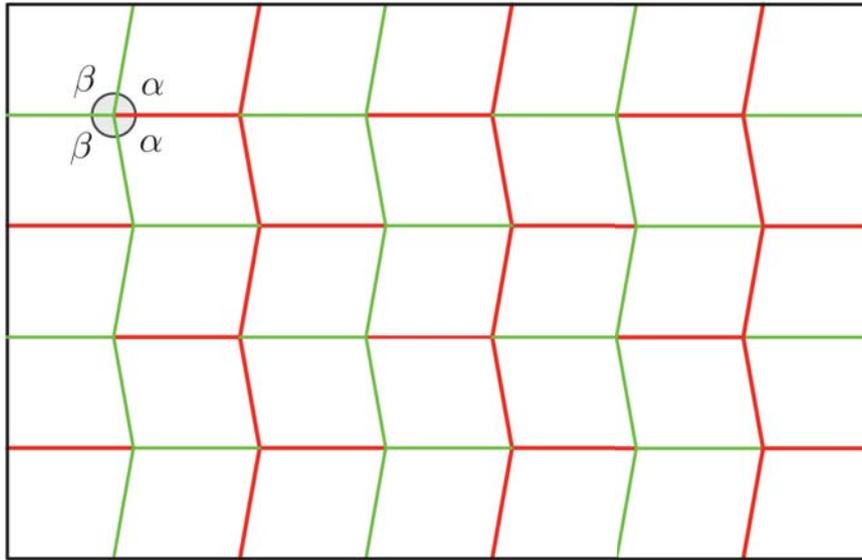
## 一般化されたミウラ折り

一般に、展開図  $(R, G)$  に対して、その各頂点の degree  
が 4 であり、かつ、定理( degree 4 flat folding )の条件を  
満たすとき、この折り紙は一般化されたミウラ折りである  
と呼ぶことにする。



$$\alpha + \gamma (= \beta + \delta) = \pi, \alpha < \beta (\delta < \gamma)$$

# ミウラ折り



$$\alpha = \alpha, \beta = \beta, \\ \gamma = \beta, \delta = \alpha$$

1. Degreeは 4 で, 山折り線と谷折り線の数の差は 2 である.
2.  $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\pi$   
 $2(\alpha + \beta) = 2\pi$   
 $\alpha + \beta = \pi$
3.  $\alpha < \beta$

# 花紋折り

# 花紋折り

## 花紋折りの世界

(1) 大小2つの正多角形が描き出す花紋の数々

花紋折りは、下のように形と色彩の組合せで驚くほど印象が変わります。



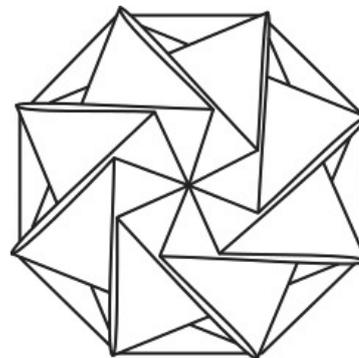
アクセサリーやブローチ、それによく回る独楽としても楽しめます。

内山光弘氏が考案された「花紋折り」は折り紙の範疇に入る作品です。しかし、通常の折り紙よりも、ずっと精密な折り図を描く必要があります。大小2つの正多角形(通常4~12角形)の中心をそろえて、一方を少し回転させた図を、予め折り紙に描いてから折っていきます。図さえ描けば、折る作業は比較的容易です。

<http://homepage3.nifty.com/youyoutei/kamon.htm>

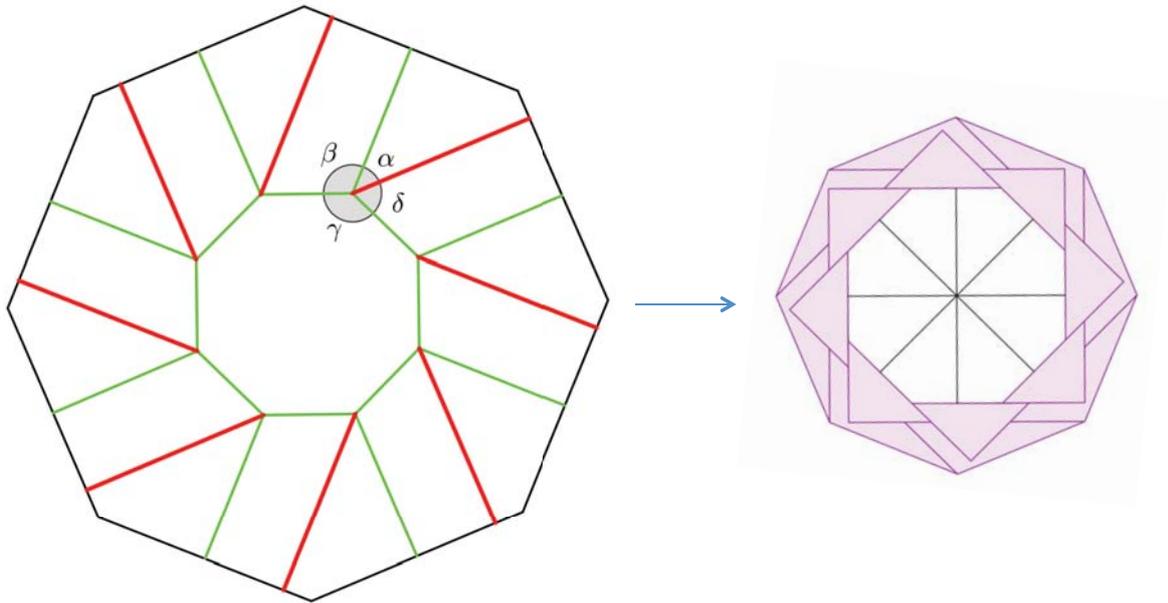
## 花紋折りの紹介

内山光弘氏  
(1878 - 1967)



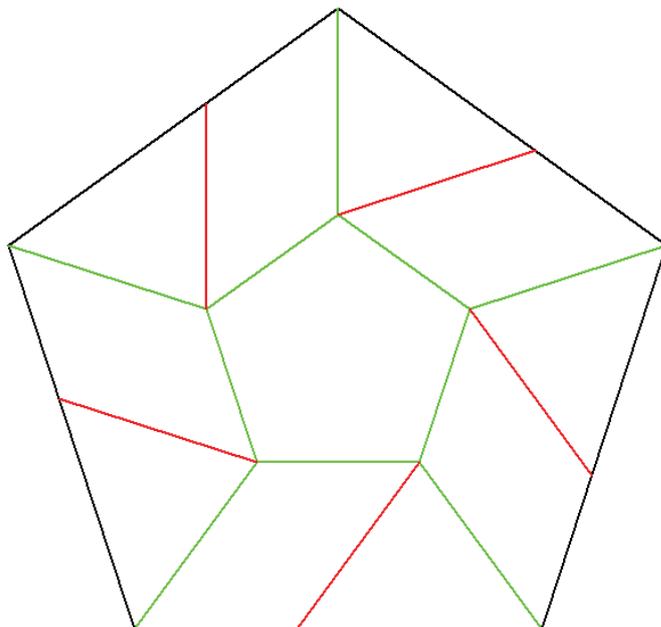
「花紋折り」 柳宗理 監修・編集, 芸艸堂刊

## 花紋折り(八角形)

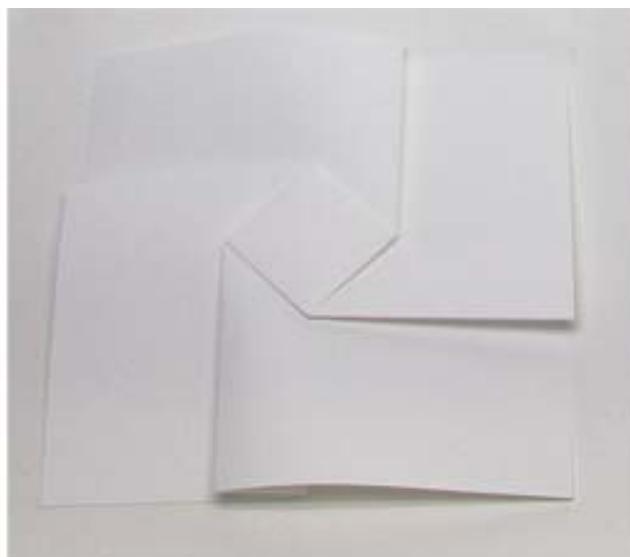
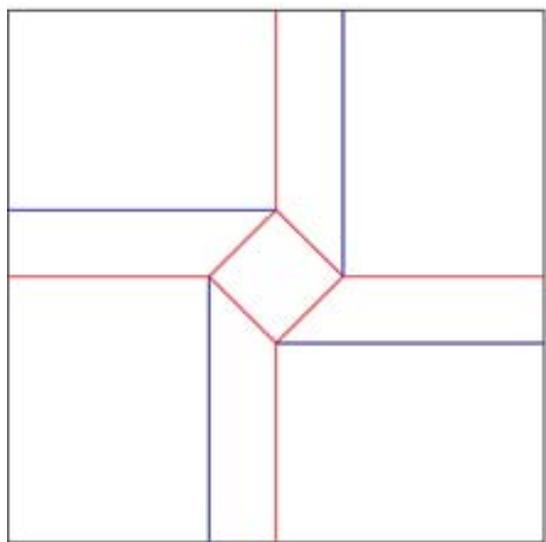


$$\alpha = \pi/4, \beta = 5/8 \pi, \gamma = 3/4 \pi, \delta = 3/8 \pi$$

## 花紋折り(五角形)

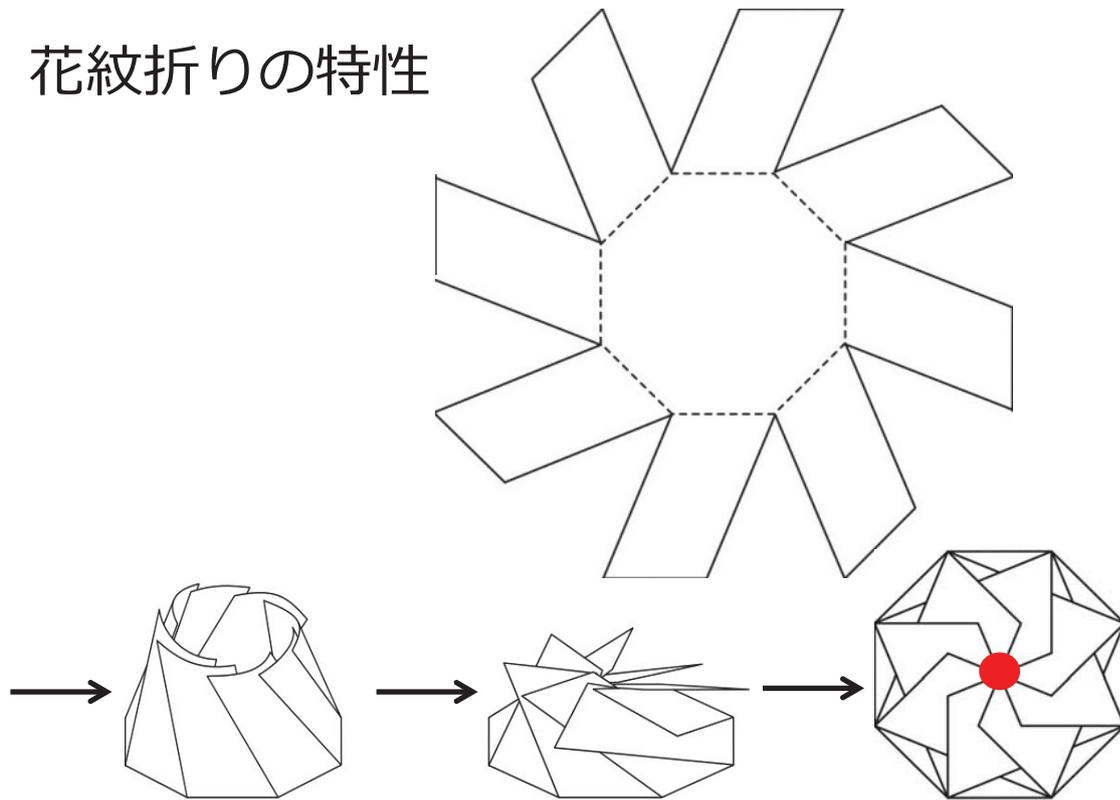


## 花紋折り(4角形)



「花紋折り」  
の理論的(?)展開

## 花紋折りの特性



## 問題設定

正<sub>n</sub>角形でないと  
花紋折りは  
できないのか



トップ > ようこそサイエンス・インカレへ

学生による自主研究の祭典  
第5回 サイエンス・インカレ

ようこそサイエンス・インカレへ

- ▶ 第5回サイエンス・インカレ開催概要
- ▶ 第4回サイエンス・インカレ研究発表会のご報告
- ▶ 第4回サイエンス・インカレダイジェストムービー
- ▶ わが校発！サイエンス・インカレニュース
- ▶ サイエンス・インカレへの道
- ▶ リクジョ・インタビュー
- ▶ プレゼンテーションデータボックス
- ▶ サイエンス・インカレへの期待

# ようこそサイエンス・インカレへ

日本が将来にわたり、科学技術イノベーションを推進し、持続的に発展していくためには、課題設定能力、課題探求能力、プレゼンテーション能力を備えた次世代の科学技術を担う若者を育成していくことが必要であり、そのためには日頃の研究の成果について学生が切磋琢磨するとともに将来の研究活動へのインセンティブを沸き立たせる場を作ることが重要です。

しかし、現在のところ、大学学部の学生に対しては、このような機会が不足している状況にあると考えています。

これらの状況を踏まえ、学生の能力・研究意欲を高め、創造性豊かな科学技術人材を育成することを目的に、自然科学分野を学ぶ全国の学生が自主研究の成果を発表し競い合う場として、「サイエンス・インカレ」を平成23年度から開催することとしました。



## 第4回 サイエンス・インカレ

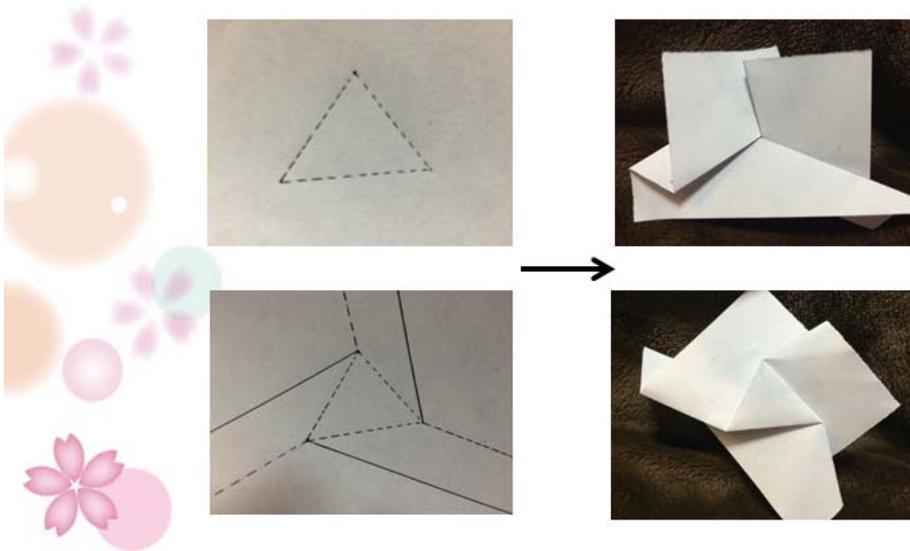
# エキゾチックな花紋折りの存在と分類について

奈良女子大学理学部数学科3回

佐藤 郁

## 結果 | 三角形の場合

任意の三角形に対して、それを中心とするエキゾチックな花紋折りが存在する。



27/37

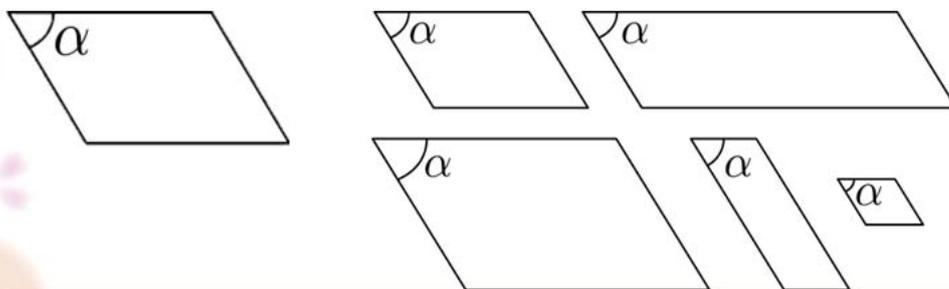
## 結果 | 四角形の場合 1

いま四角形は正方形ではない長方形とする。

この四角形からは、  
エキゾチックな花紋折りを  
つくることができない。

28/37

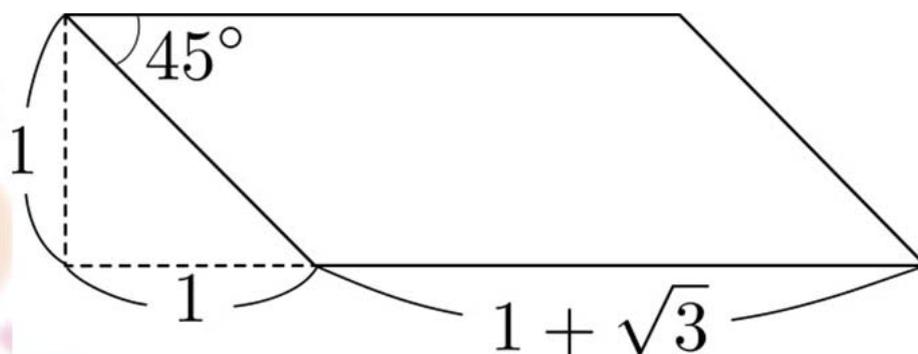
## 結果 | 四角形の場合 2



- 全ての $\alpha$  ( $0 < \alpha < 90$ ) に対して,  
1つの角が $\alpha$ の平行四辺形で  
エキゾチックな花紋折りをつくるものが存在する.
- そのような平行四辺形は全て相似になる.

29/37

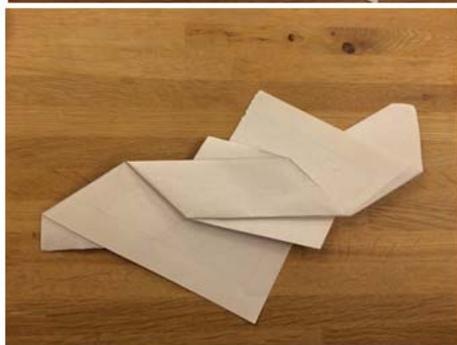
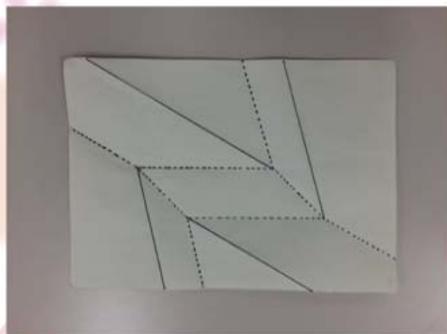
## 結果 | 四角形の場合 2



30/37

## 結果 | 四角形の場合 2

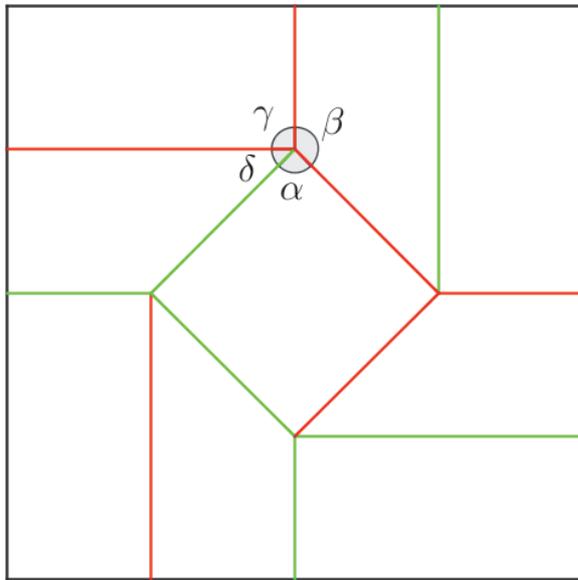
★  $\alpha = 45^\circ$  の場合



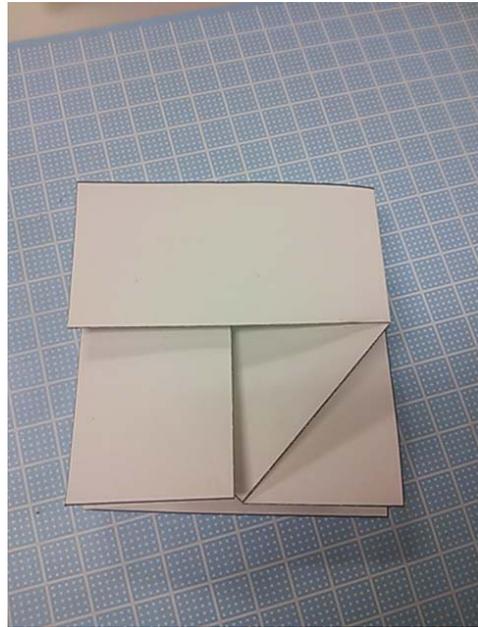
31/37

# 「花紋折り」 の他の理論的展開

## Square Twist (折り線のパターンは 4角形の花紋折りと同じ)



$$\alpha = \pi/2, \beta = 3/4\pi, \gamma = \pi/2, \delta = \pi/4$$



## レポート問題

1. 「折り線のパターンが、4角形の花紋折りと同じ平坦折り」について調べよ.

例えば

・「花紋折り」「Square Twist」以外のそのような平坦折りを見つけよ(この問題は必ずやってください.)

・そのような平坦折りをすべてを見つけよ

2. 上に述べた2つ以外の「花紋折りの理論的展開」を考えよ

# 点と線の数学

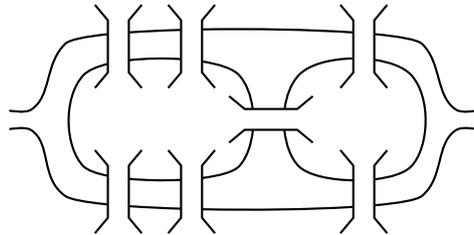
(奈良女子大学大学院自然科学系 片桐民陽)

## 一筆書き

### ケーニヒスベルクの橋渡りの問題

ケーニヒスベルク (Königsberg)

- ・東プロシア (現在のロシア) の町
- ・ドイツ語で「王の町」の意味
- ・哲学者カント (1724 - 1804) が生まれて暮らした町



7つの橋を丁度1回ずつ渡る散歩道を探せ.

### 1つの方法

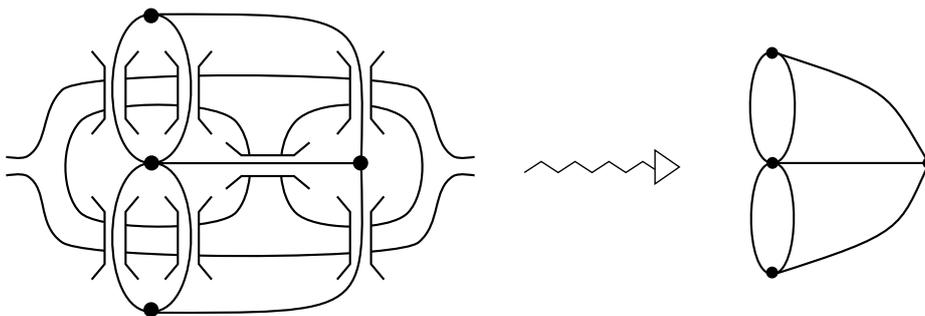
7つの橋を順に渡る通り道の数

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

5040通りの道筋をしらみつぶしに調べればよい.

### オイラー (Euler, 1707 - 1783, スイス) の方法

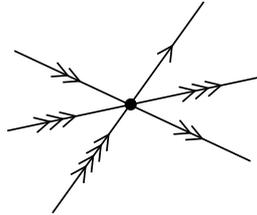
問 以下の図形を一筆書きせよ.



点（頂点）から出ている線（辺）の数をその点の**次数** (degree) と呼ぶ。

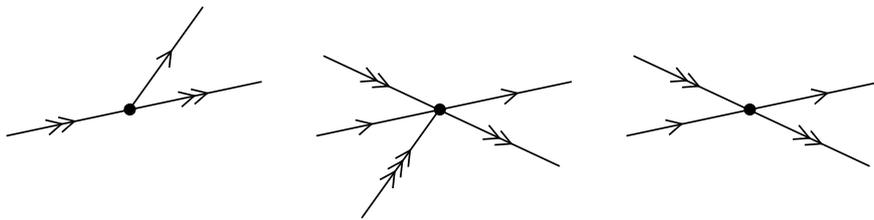
一筆書き可能な図形の性質

(1) 書き始めの点と書き終わりの点と同じとき



すべての点の次数は偶数（次数が奇数の点の数は0）。

(2) 書き始めの点と書き終わりの点の異なるとき

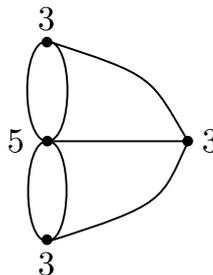


書き始めの点と書き終わりの点の次数は奇数。  
通過点の次数は偶数。

### 定理

図形が一筆書き可能ならば、次数が奇数の点の数は、0または2。

ケーニヒスベルクの橋から出来る図形の次数

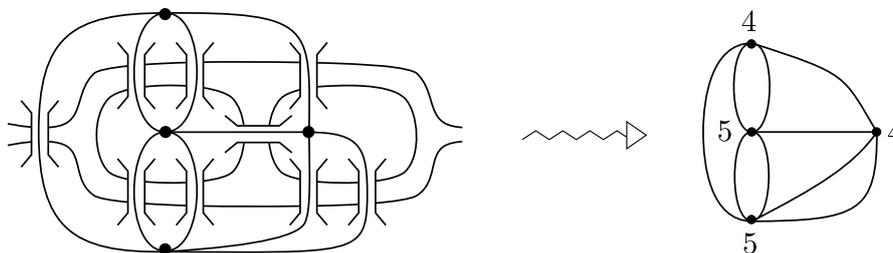


従って、一筆書き出来ない。

### 注意

上の定理の逆、つまり「次数が奇数の点の数が0または2ならば、一筆書き可能。」が成り立つ。

現在のケーニヒスベルクの橋

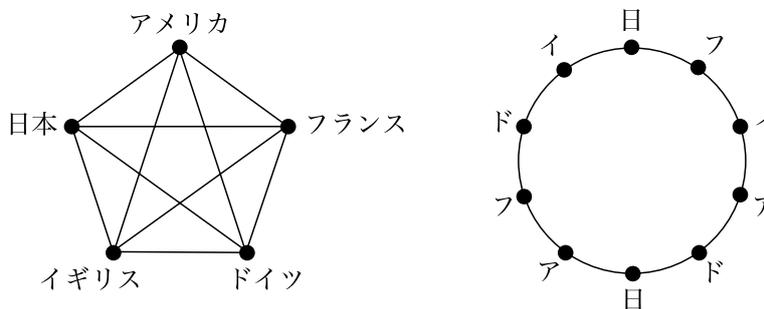


従って、橋渡り出来る。

### 応用

5つの国際的代表団が、ある晩円卓を囲んで会議を開く。2人のアメリカ人、2人のフランス人、2人のドイツ人、2人のイギリス人、2人の日本人がいる。着席したときに、異なる国籍の組合せの可能なすべてが、隣合わせで実現しなければならない。つまり、アメリカ人とフランス人、ドイツ人と日本人等のすべての対が、隣席としてなければならない。どのように席順を決めればよいだろうか。

それぞれの国を点にする。異なる国籍の組合せをすべて線で結ぶ。この図形の一筆書きを考えれば、異なる国籍の組合せの可能なすべてが、隣合わせで実現出来る。

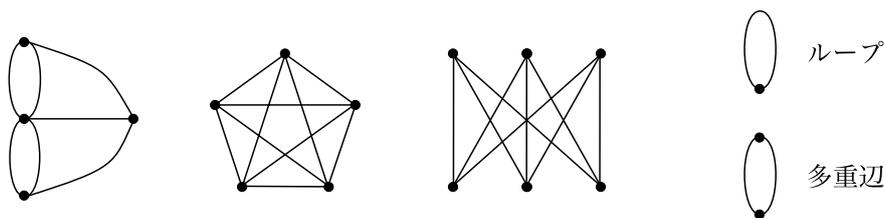


### グラフ

#### 定義 (グラフ (graph))

いくつかの頂点 (vertex) とそれらを結ぶ辺 (edge) からなる図形を**グラフ** (graph) と呼ぶ。

#### 例



以降は、**ループ** (loop) や**多重辺** (multiple edges) を持たないグラフのみを考える。

### 注意

オイラーの散歩道 (すべての辺を丁度1回通る散歩道) は解決済み。

ハミルトンの散歩道 (すべての頂点を丁度1回通る散歩道) については未解決。頂点  $v$  の次数を  $\deg(v)$  とかく。

### 定理 (握手定理)

(1) パーティーが終わったとき、参加者全員に何人と握手したかを尋ねた。全員の握手の回数を足すと、常に偶数になる。

(2) パーティーが終わったとき、参加者全員に何人と握手したかを尋ねた。握手の回数が同じ人が必ずいる。

(証明)

参加者それぞれを頂点とし、握手した人に対応する頂点同士を辺で結ぶとグラフが出来る。

(1) 辺の数を  $q$  とすると

$$\sum_{v:\text{頂点}} \deg(v) = 2q.$$

(2) 次数が0の頂点が2個以上あるとき、既に結論はいえている。

頂点の個数を  $p$  とする。

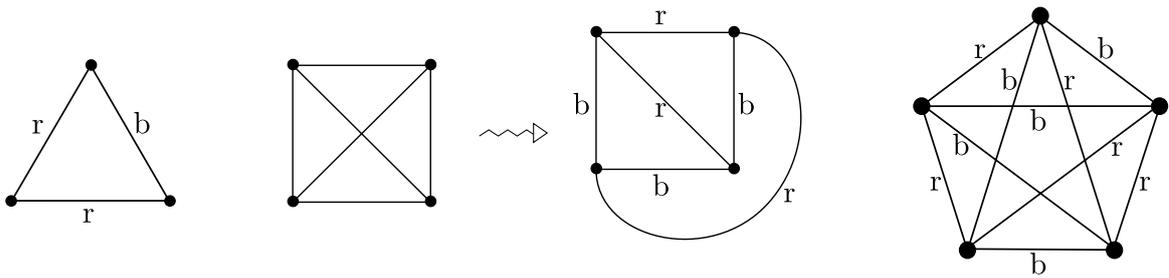
次数が0の頂点が1個のとき、残りの頂点は  $p-1$  個であるから、次数が  $p-1$  の頂点はない。従って、 $p$  個の頂点の次数は、 $0, 1, \dots, p-2$  のいずれかである。鳩の巣原理により次数が同じ頂点がある。

次数が0の頂点がないとき、 $p$  個の頂点の次数は  $1, 2, \dots, p-1$  のいずれかである。鳩の巣原理により、次数が同じ頂点がある。

### 3人の知り合いか、3人の初対面かの問題

パーティーで、必ず3人が知り合いであるか、3人は初対面かのどちらかになるようにするには、最低何人の人が出席しなければならないか。

答は、3人でも4人でもない。人にグラフの頂点を対応させ、それぞれを1本の辺で結ぶ。知り合い同士ならば、対応する辺を赤で、初対面同士ならば、対応する辺を青で塗る。

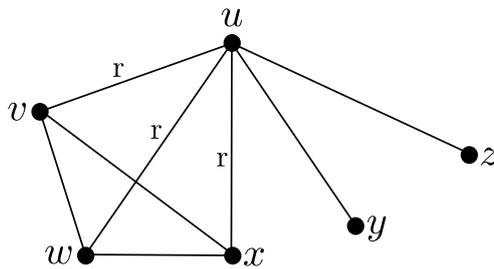


**定理**

3人の知り合いか、3人の初対面かの問題の答えは、6人。

(証明)

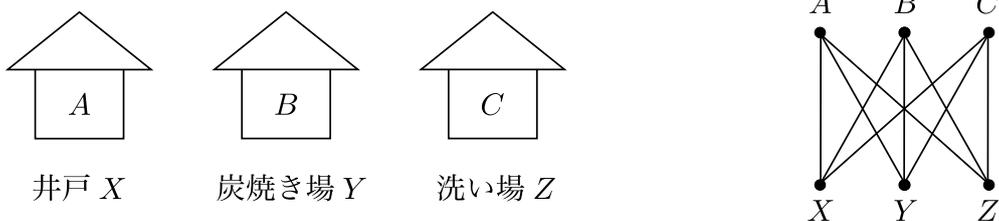
6個の頂点で、すべての頂点が1本の辺で結ばれているグラフを考える。頂点を  $u, v, w, x, y, z$  で表す。頂点  $u$  に注目する。  $u$  から他の頂点と結ぶ5本の辺がある。この5本の辺の内、少なくとも3本は同じ色にならなければならない。例えば赤であり、結ばれている頂点を  $v, w, x$  とする。  $v, w, x$  同士の対を結ぶ3本の辺がある。この内、1本でも赤であれば3人の知り合いがいる。逆に、  $v, w, x$  を結ぶどの辺も青であったとすると、  $v, w, x$  の3人が初対面となる。



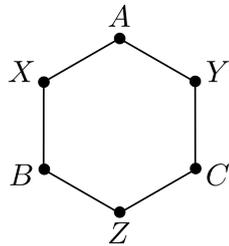
**グラフの平面性**

**山小屋の問題**

山の中に3軒の家  $A, B, C$  がある。3つの施設 (井戸  $X$ , 炭焼き場  $Y$ , 洗い場  $Z$ ) があり、これら3軒の家と3つの施設をつなぐ道路を敷きたい。しかし、この3軒は仲が悪いため、道路は途中で決して交わらないようにしたい。どのように道路を敷いたらよいだろうか。



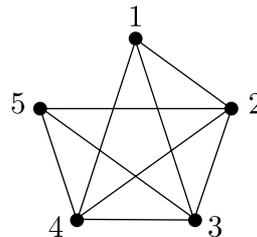
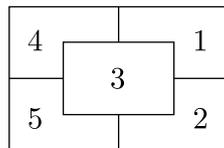
$AXBZCY$  で六角形が出来る。  $AZ$  または  $BY$  は、この六角形の中と外で結ぶことになる。 そうすると、いずれにしても  $CX$  を結ぶことが出来なくなる。



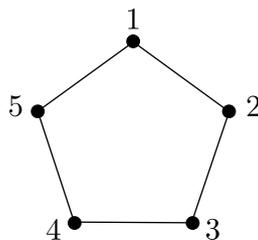
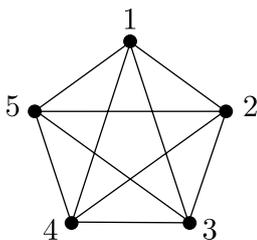
$AZ BY CX ???$

### 5人の王子の問題

昔々、ある所に王様が治める国があって、王様には5人の息子がいた。王様が亡くなる時、その国は5人の息子のために5つの領地に分けて、それぞれの領地が他の4人の息子と境界線で接するようにすることを望んだ。そんなことが可能だろうか。



これもやはり不可能である。



13, 24, 35, 41, 52

### 地図の塗分け

#### 4色予想 (Francis Guthrie, 1852年)

境界線を共有する隣り合った国は、異なった色で塗る。平面 (球面  $S^2$ ) 上のどんな地図も4色あれば塗分けできるであろう。

各国に色を塗る。但し、境界線を共有する国同士は異なる色で塗る。最低何色必要か。

各国から1つずつ点(頂点)を取り,境界線を共有する国同士から取った頂点同士を線(辺)で結ぶとグラフが出来る.

地図の塗分けの問題は次のように言い換えることが出来る.

グラフの頂点に色を塗る.但し,辺で結ばれている頂点同士は異なる色で塗る.最低何色必要か.(グラフの彩色)

#### 4色問題の解決

- ・4色予想が正しい(すべての平面グラフが4色で彩色できる)ことを証明する.または
- ・4色では彩色できない平面グラフの例を挙げる.

#### 命題

平面(球面 $S^2$ )上のどんなグラフにも次数(頂点とつながっている辺の数)が5以下の頂点が存在する.

(証明)

$p, q, r$ をそれぞれ頂点,辺,面の数とする. $V(G)$ を $G$ の頂点全体の集合とする.また,頂点 $v$ の次数(頂点から出ている辺の数)を $\deg(v)$ とかく.

$$a(G) = \frac{1}{p} \sum_{v \in V(G)} \deg(v)$$

とおく(次数の平均).(これらの記号は以下も用いる.)

$$2q = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = pa(G)$$

つまり $a(G) = \frac{2q}{p}$ .また, $r_i$ を $i$ 角形の数とすると

$$2q = 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + \dots \geq 3(r_3 + r_4 + r_5 + \dots) = 3r$$

より $r \leq \frac{2}{3}q$ . $\chi(S^2) = p - q + r = 2$ (各面が円板と同相なグラフについては必ず成り立つ)より

$$2 = p - q + r \leq p - q + \frac{2}{3}q = p - \frac{1}{3}q$$

より $q \leq 3p - 6$ .従って $a(G) < 6$ を得る.

#### 定理(6色定理)

平面(球面 $S^2$ )上のどんなグラフも6色で彩色可能.

(証明)

頂点の数に関する数学的帰納法により証明する.

頂点の数が6個以下のとき、明らかに成り立つ。

頂点の数が $k$ 以下のとき成り立つと仮定する。頂点の数が $k+1$ 個のときを考える。次数が5以下の頂点 $v$ を選び、 $v$ 以外の $k$ 個の頂点を6色で彩色する。 $v$ のまわりでは多くても5色しか使われていないので、残った色で $v$ を彩色すればよい。

1878年、Cayleyがロンドン数学会の会合で4色予想について質問を行い、この問題は数学者の間で知られることとなった。翌年、Kempeが4色予想の「証明」を発表した。1890年、HeawoodはKempeの証明の誤りを示した。

**定理** (5色定理, Heawood, 1890年)

平面 (球面  $S^2$ ) 上のどんなグラフも5色で彩色可能。

(証明) 頂点の数に関する数学的帰納法により証明する。

頂点の数が5個以下のとき、明らかに成り立つ。

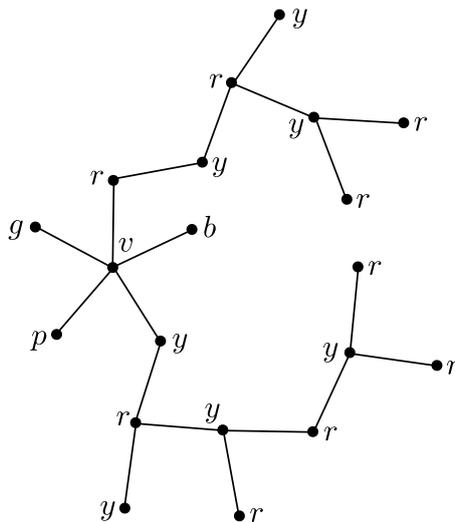
頂点の数が $k$ 以下のとき成り立つと仮定する。頂点の数が $k+1$ 個のときを考える。次数が5以下の頂点 $v$ を選び、 $v$ 以外の $k$ 個の頂点を5色で彩色する。 $v$ のまわりで5色すべて  $(r, b, y, p, g)$  が使われているときだけが問題。 $v$ を始点とする列

$$r \rightarrow y \rightarrow r \rightarrow y \rightarrow r \rightarrow \dots$$

$$y \rightarrow r \rightarrow y \rightarrow r \rightarrow y \rightarrow \dots$$

について調べる。

(a)



上の2つの列が繋がっていないとき

このとき列

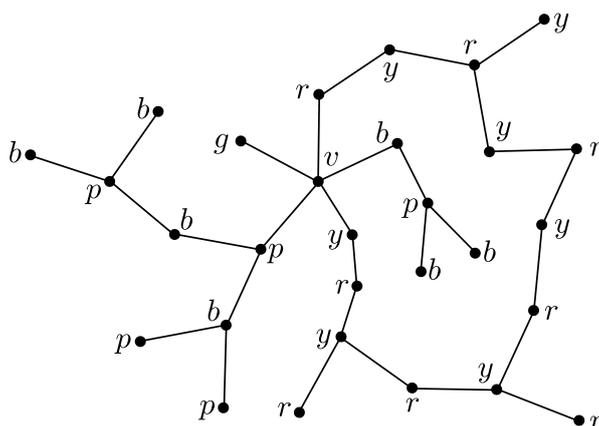
$$r \rightarrow y \rightarrow r \rightarrow y \rightarrow r \rightarrow \dots$$

を

$$y \rightarrow r \rightarrow y \rightarrow r \rightarrow y \rightarrow \dots$$

に変更する. すると  $v$  のまわりでは 4 色しか使われていないので, 余った色で  $v$  を彩色すればよい.

(b)



上の 2 つの列がつながっているとき  
 $v$  を始点とする列

$$b \rightarrow p \rightarrow b \rightarrow p \rightarrow b \rightarrow \dots$$

$$p \rightarrow b \rightarrow p \rightarrow b \rightarrow p \rightarrow \dots$$

を考える. これらの列はつながっていないので列

$$b \rightarrow p \rightarrow b \rightarrow p \rightarrow b \rightarrow \dots$$

を

$$p \rightarrow b \rightarrow p \rightarrow b \rightarrow p \rightarrow \dots$$

に変更する. すると  $v$  のまわりでは 4 色しか使われていないので, 余った色で  $v$  を彩色すればよい.

**定理** (4 色定理, Appel-Haken, 1976 年)

平面 (球面  $S^2$ ) 上のどんなグラフも 4 色で彩色可能.

Appel と Haken は, 当時最速のスーパーコンピュータを 1200 時間使って 4 色定理を証明した.

ちなみに, トーラス (ドーナツの表面) 上のどんなグラフ (地図) も 7 色で塗分けられる.

#### 4 色問題に関するエピソード

・Heawood: 時計を1年に1度(クリスマス)にしか合わせない。毎日会議がないとダメ。ダートラム城保存の功績により大英帝国四等勲士になる。

・ゲッティンゲン大学における講義中、Minkowski「この問題は、まだ証明されていないが、その理由は、挑戦したのが三流数学者ばかりであるからだ。」彼は証明に取りかかった。講義中の証明は、数週間に及んだ。「天は、私の尊大さに腹を立てられたようだ。」

・Birkoff夫人「ねえ、私の主人は、新婚旅行の間に私に地図を描かせて、それに色を塗っていたけど、あなたのご主人もそうだった？」

#### Gardner の「エイプリルフール」

雑誌「Scientific American」1975年4月号 Gardner の記事「なぜか世間の注目をひかなかつたセンセーショナルな発見」。

1. 4色問題の反例の発見
2.  $e^{163\pi}$  が整数であることが証明
3. チェスの必勝法がコンピュータで発見
4. 特殊相対性理論の矛盾の発見
5. レオナルド・ダ・ビンチの手稿の欠落部の発見。彼は水洗便所を発見していた
6. 心霊モーター

この記事は、Gardner がエイプリルフールの冗談として載せたもので、記事にだまされた読者が続出して大騒ぎになった。

#### グラフの彩色数

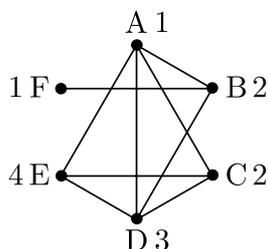
グラフの頂点に色を塗る。但し、辺で結ばれている頂点同士は異なる色で塗る。最低何色必要か。これを**グラフの彩色**と呼び、必要な色の数をグラフの**彩色数** (chromatic number) という。

#### 倉庫の問題

ある工場では、6種類の化合物を生産している。これらの化合物は、組合せ次第では同じ倉庫に保管すると爆発する恐れがある。爆発する恐れがある化合物は同じ倉庫に保管しないようにするには、倉庫はいくつ必要か。

A	B,C,D,E
B	A,D,F
C	A,D,E
D	A,B,C,E
E	A,C,D
F	B

この状況をグラフで表す。6個の化合物を頂点とし、同じ倉庫に保管してはいけないもの同士を辺で結ぶ。



倉庫がいくつ必要かは、グラフの彩色問題に帰着される。このグラフの彩色数は4である。従って、倉庫は4つ必要である。爆発する恐れのある危険な組合せは、異なる色で塗られているので、同じ倉庫には保管されない。

倉庫	化合物
1	A,F
2	B,C
3	D
4	E

### 時間割編成問題

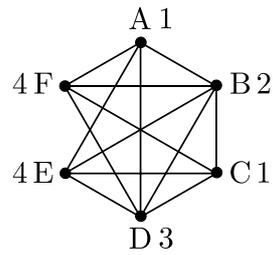
数学科の教務委員は、次の学期に開講される授業科目の時間割を組まなければならない。

授業は、A,B,C,D,E,Fの6科目が予定されている。その学科の学生は10名であり、各学生が受けたい授業科目は下表のようになっている。

	A	B	C	D	E	F
1	O	O		O	O	
2			O	O	O	
3		O		O	O	
4			O	O		O
5	O	O		O		
6		O	O	O		O
7	O	O				O
8		O		O		O
9			O	O		O
10				O	O	

どの学生も希望する科目をすべて受けられるようにするには、どのような時間割を組めばよいか。教務委員はなるべく少ない枠に6科目を納めたいと思っている。

授業科目A,B,C,D,E,Fを頂点とし、同時に開講してはいけない授業を辺で結ぶとグラフが出来る。辺で結ばれていない授業は同時に開講してもよい授業である。

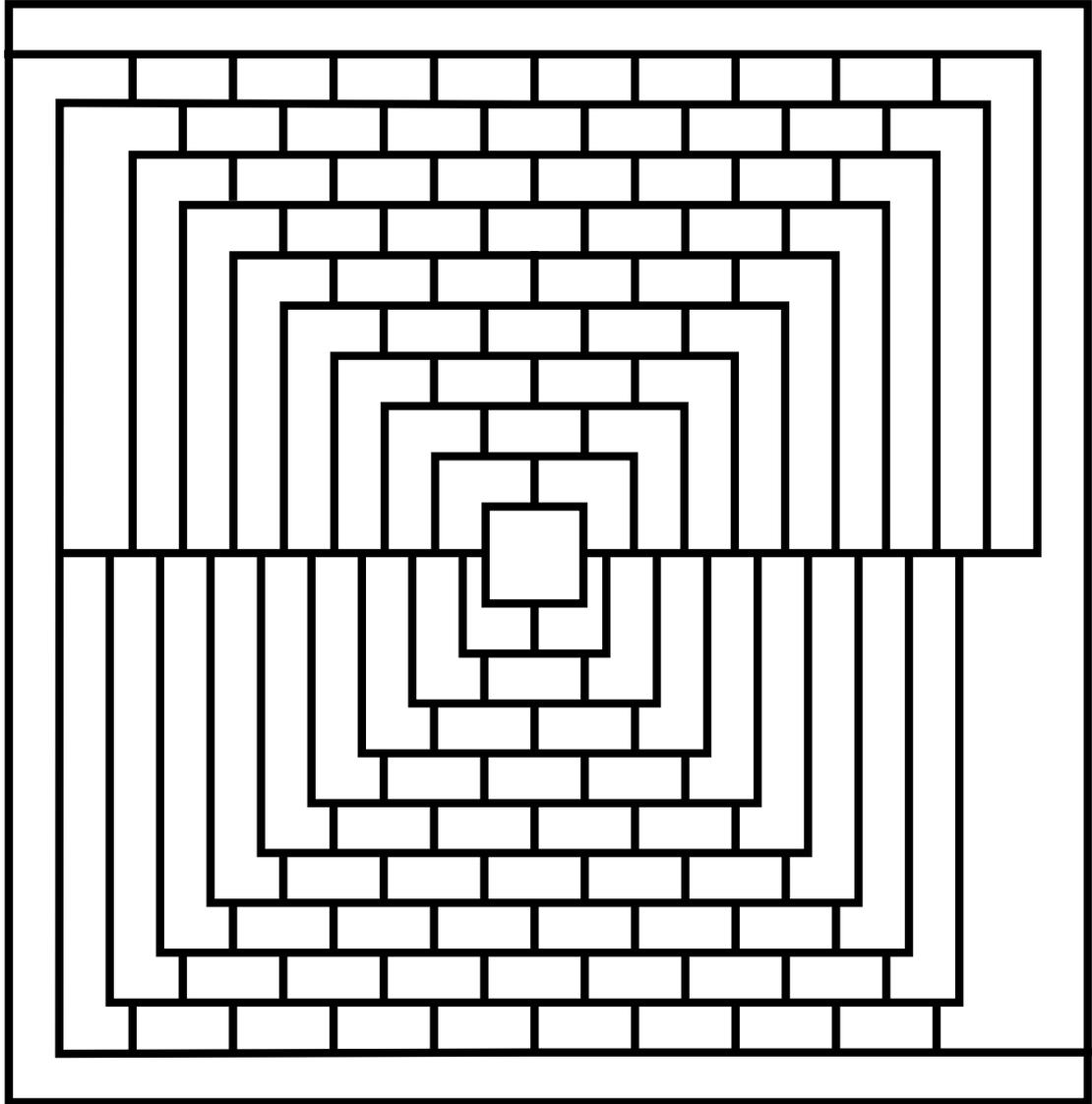


このグラフの彩色数を求める。このグラフは4色で彩色可能である。また、頂点A,B,D,Eの4頂点はすべて辺で結ばれているため、3色では彩色出来ない。

	月	火
1限	A,C	D
2限	B	E,F

#### 参考文献

小林みどり あたらしいグラフ理論入門 牧野書店  
 ロビンソン 四色問題 新潮社



LADy SCIENCE BOOKLET 8  
科学の言語としての数学

---

2016年3月15日発行

奈良女子大学 理系女性教育開発共同機構

CORE of STEM

Collaborative Organization for Research in women's Education of  
Science, Technology, Engineering, and Mathematics

〒630-8506 奈良市北魚屋東町

コラボレーションセンター Z207

TEL.&FAX 0742-20-3266

ladyscience@cc.nara-wu.ac.jp

---